

استدلال

تیم A در مسابقات اخیر خود طی هفتادین هفته نتایج خوبی نداشته است، احتمال اینکه

در بازی این هفته هم نتیجه نگیرد زیاد است.

$$\begin{matrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} \\ X & X & X & X \end{matrix}$$

حسیق از ابتدای تیرم تاکنون هفتادین نوبت، احتمالات خود را به خوبی داده است. احتمالاً او

$$19, 18, 17, 18, \textcircled{2} \\ 17 < ?$$

در احتمالات نوبت اول نتیجه خوبی می‌گیرد.

استدلال، یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی برای موضوعی که مجهول است. مادر کارهای روزمره بسیار زیادی به استدلال روی می‌آوریم، راه‌های متفاوتی برای استدلال کردن هست که اعتبار و قابل اعتماد بودن آنها می‌تواند یکسری نباشد. به استدلالی که صرفاً بر مشاهدات و کسب نتایج "مشابه" اتفاقاً کند "استدلال استقرایی" می‌گوییم. نظیر این

$$2+2=4 \\ 4+2=6$$

استدلالتها:

① اتوبان شیخ فضل اله ترافیک است، اتوبان همتانگله است، پس امروز ترافیک در اتوبان حکیم داریم، پس بهتر است مسیر دیگری انتخاب کنیم.

② شرکت پگاه و پاک ۴٪ به قیمت محصولات خود اضافه کردند

الغنا پس شرکت کاله و شرکت دامخاران هم اضافه کرده‌اند.

ب) (اگر قیمتیم اضافه نکردند) لابد محصولات شان کیفیت کمتری دارند.

مصول گران کیفیت دارد و ارزان شدن یعنی شرکت از روی گردانی مشتریان نگران است.

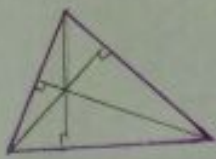
پ) حقوق کارمندان ۱۰٪ افزایش یافته است، پس احتمالاً حقوق بازرسنگان تلمین امتهامی هم همین مقدار افزایش می‌یابد.

ا چون معمولاً هر سال این روند را داریم که با افزایش درصدی به حقوق کارمندان حقوق بازرسنگان تقریباً به همان میزان افزایش می‌یابد.

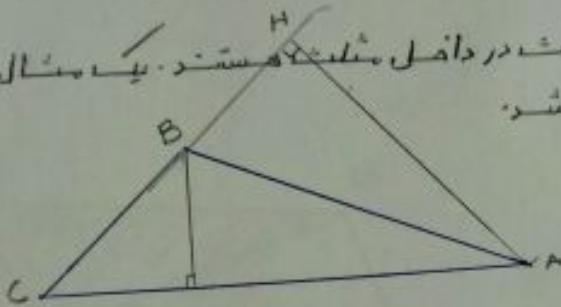
ت) سردنجه زهرا خانم، مادر شوهر را می‌بیند خودش در خانه داستان داریم - امروز مادر شوهر به فات زهرا خانم آمده بود پس ...

ث) علی و پسرخاله اش در یک پایه تحصیلی هستند. همیشه این دو در خانه شان نوبت پدر و مادرهای شان با هم مقایسه می‌شوند. علی، کارخاله اش را گرفته و پسرخاله اش ...

دوار ارتفاع هر یک از مثلث‌های زیر را رسم کنید.



آیا می‌توانیم استدلال کنیم که ارتفاع‌های مثلث در داخل مثلث هستند. یک مثال بیاورید (رسم کنید) که ارتفاع مثلث بیرون از مثلث باشد.



نکته: به مثالی که برای رد کردن یک "مکمل" زده می‌شود، مثال نقض می‌گویند.

برای عبارات زیر مثال نقض بیاورید.

الف) همه اعداد زوج مرکب اند \times

ب) همه اعداد زوج مرکب از دو شمارنده بیشتر دارند \checkmark

پ) حاصل تقسیم دو عدد صحیح، عددی صحیح است. \times

ت) حاصل جمع دو عدد گنگ همواره عددی گنگ است. \times

ث) هر متوازی الاضلاعی قطرهایش برابرند. \times



$$a \cdot b = 2K(2K' + 1) = 2 \times K \left(\frac{P}{2} + 1 \right) = 2P \text{ زوج}$$

$$4K'K + 2K = 2(K'K + K) \text{ زوج}$$

دکتر عالی در بیمارستان فیاض بخش در بخش متخصص بافاسی مشغول است. سه بیماری که از صبح تا ساعت ۸ دیدار است. یکی علائم سرماخوردگی داشتند، او تشخیص داد که بیماری

آنها سرماخوردگی است. (استدلال) $a = 2K$ $b = 2K'$

$$a + b = 2K + 2K' = 2(K + K') = 2P \text{ زوج}$$

یکی از این بیماران با گذشت یک هفته، بیماری اش سخت تر شد، او به یک دکتر دیگر مراجعه کرد، دکتر آزمایش نوشت و تشخیص داد که آن بیماری اشتباه تشخیص داده شده و او

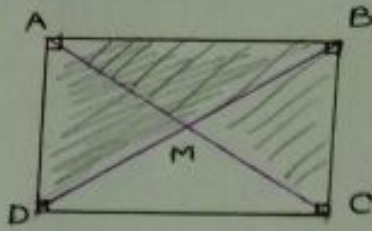
$$a = 2K$$

$$b = 2K' + 1$$

$$a + b = 2K + 2K' + 1 = 2(K + K') + 1 = 2P + 1 \text{ فرد}$$

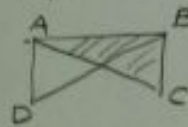
در بحث سه با استدلالی از نوع ریاضی موهبیم. استدلال ریاضی، استدلالی است که

④ ثابت کنید در مستطیل، قطرها با هم برابرند.



مستطیل ABCD: فرض

عکس: $AC = BD$



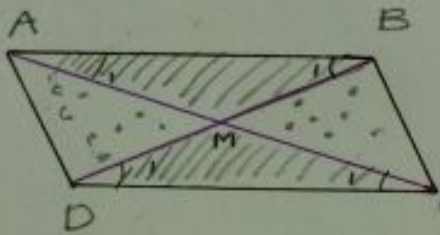
مستطیل ABCD: فرض
 $AB = AB$ (مشترک)
 $BC = AD$ (اضلاع مقابل)
 $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$

$\triangle ABC \cong \triangle ABD$

تساوی
 اعضا متناظر

$\rightarrow AC = BD$ حکم ثابت شد

⑤ ثابت کنید در متوازی الاضلاع، قطرها با هم دیگر را نصف می کنند.



متوازی الاضلاع ABCD: فرض

عکس: $BM = MD$

$AM = MC$

$\hat{A}_1 = \hat{C}_1$
 $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$

$AB \parallel DC$ $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$

مورب BD $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$

$AB \parallel DC$ $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$

مورب AC $AB = DC$

فرض $\triangle AMB \cong \triangle MDC$

$\rightarrow MB = MD$

بصورت مشابه در مثلث های AMD و MBC $AM = MC$

⑥ ثابت کنید هر نقطه روی عمود منصف یک پاره فقط فاصله اش از دو سر پاره فقط به یک اندازه است.

عمود منصف DH: فرض

پاره فقط AB

عکس: $AD = BD$

$DH = DH$ (مشترک)

فرض $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$

فرض: $HB = AH$

DH عمود منصف

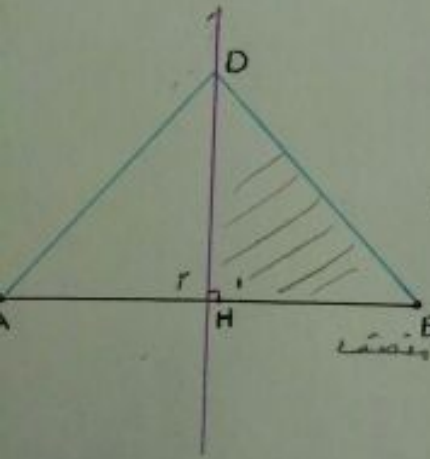
$\triangle DHB \cong \triangle DHA$

تساوی اعضا

متناظر

$BD = AD$

حکم ثابت شد



⑦ ثابت کنید هر نقطه که فاصله اش از دو سر پاره فقط به یک اندازه باشد، روی عمود منصف قرار دارد.

فرض: $AD = BD$

عکس: عمود منصف DH

اثبات

از D عمود بر AB رسم می کنیم

فرض $BD = AD$

$DH = DH$

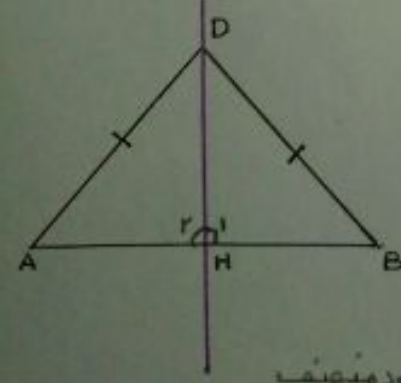
$\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$

$\triangle DHB \cong \triangle DHA$

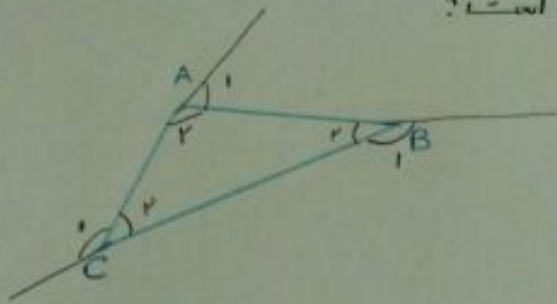
تساوی اعضا متناظر

$AH = HB$

بنابراین عمود DH، AB را نصف کرده و عمود منصف AB است

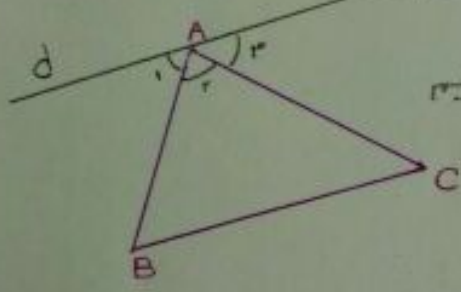


⑧ ثابت کنید که مجموع زاویه های خارجی یک مثلث 360° است؟

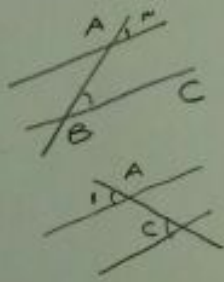


مکمل : $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 360^\circ$
 $\hat{A}_r + \hat{B}_r + \hat{C}_r = 180^\circ$
 $180^\circ - \hat{A}_1 + 180^\circ - \hat{B}_1 + 180^\circ - \hat{C}_1 = 180^\circ$
 $360^\circ = \hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1$
 مکمل ثابت شد

⑨ ثابت کنید که مجموع زاویه های داخلی یک مثلث 180° است.



اثبات: $d \parallel BC$ رسوهای لیم



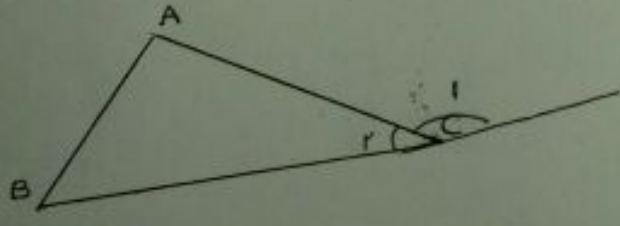
$d \parallel BC \hat{A}_r = \hat{B}$ (موجب AB)
 $d \parallel BC \hat{A}_l = \hat{C}$ (موجب AC)

$\hat{A}_1 + \hat{A}_r + \hat{A}_l = 180^\circ$
 $\hat{C} + \hat{B} + \hat{A}_r = 180^\circ$ (ثابت شد)

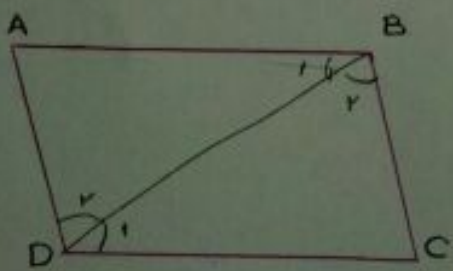
⑩ ثابت کنید مجموع دو زاویه داخلی یک مثلث برابر زاویه خارجی دیگر است.

مکمل $\hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B}$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_r = 180^\circ$
 $\hat{C}_1 + \hat{C}_r = 180^\circ$
 $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C}_1$
 مکمل ثابت شد



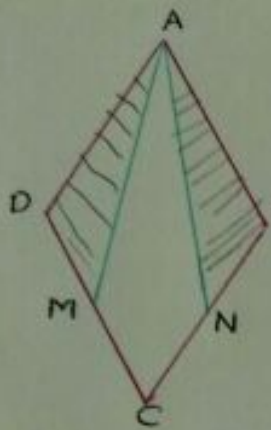
⑪ ثابت کنید در متوازی الاضلاع، ضلع های روبه روبرو مساویند.



مکمل : $AB = DC$
 $AD = BC$
 $AB \parallel DC \hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (موجب BD)
 $AD \parallel BC \hat{D}_r = \hat{B}_r$ (موجب BD)
 $BD = BD$
 $\Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta BDC$ (1)

از همبستگی (1) بسطی اجزا متناظر نتیجه می شود

۱۳) در شکل مقابل ABCD لوزی است و نقطه M و N وسط‌های اضلاع CD و CB هستند. می‌خواهیم نشان دهیم $\triangle ADM \cong \triangle ABN$.



حکم: $\triangle ADM \cong \triangle ABN$

AD = AB اضلاع لوزی

$\hat{D} = \hat{B}$ زوایای مقابل

در لوزی

$BN = MD = \frac{1}{2}$ ضلع لوزی

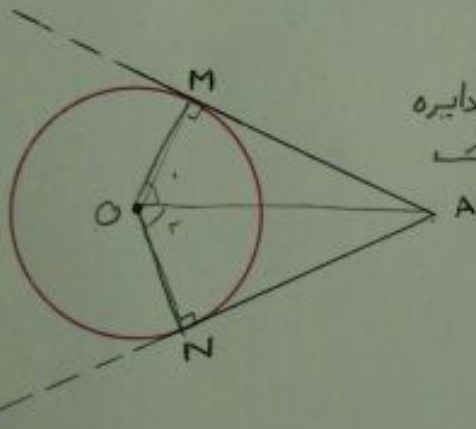
اثبات

فرض \triangle

$\triangle ABN \cong \triangle ADM$

۱۴) ثابت کنید اندازه دو مماس وارد یک دایره از نقطه‌های خارج دایره با هم برابرند.

حکم: $AM = AN$



$OM = ON$ شعاع دایره

$OA = OA$ مشترک

$\hat{M} = \hat{N} = 90^\circ$

اثبات و ترکیب شعاع

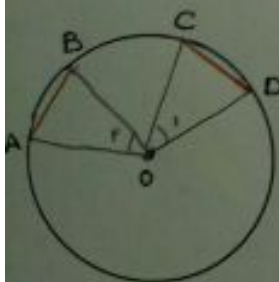
$\triangle OMA \cong \triangle ONA$

نسبت اضلاع متناظر حکم ثابت شد $AM = AN$

۱۵) ثابت کنید وترهای کمان‌های مساوی با هم برابرند.

حکم: $\overline{AB} = \overline{CD}$

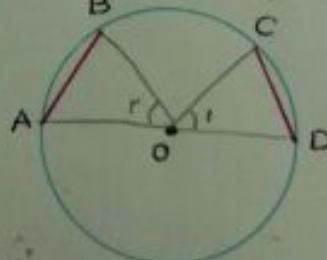
فرض: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$



۱۶) ثابت کنید کمان‌های نظیر وترهای مساوی با هم برابرند.

حکم: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

فرض: $\overline{AB} = \overline{CD}$



$OB = OC$ شعاع

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ کمان‌های

مقابل نشان

مساوی

$\widehat{AB} = \widehat{CD}$ شعاع

$OA = OD$

فرض \triangle

$\triangle OCD \cong \triangle OAB$

نسبت اضلاع متناظر $\overline{AB} = \overline{CD}$

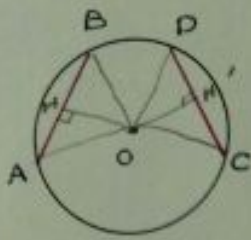
$\overline{AB} = \overline{CD}$ فرض \triangle
 $OA = OD$ شعاع \triangle
 $OB = OC$ شعاع \triangle
 $\Rightarrow \triangle OCD \cong \triangle OAB$

نسبت اضلاع متناظر $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

کمان‌های مقابل نشان برابرند

$\widehat{CD} = \widehat{AB}$

16) ثابت کنید اگر دو وتر دایره با هم برابر باشند، فاصله مرکز دایره از آنها با هم مساوی است.



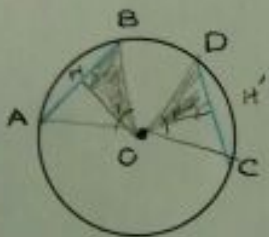
فرض: $AB = DC$ مکمل: $OH = OH'$

$\left. \begin{array}{l} OB = OD \\ OA = OC \\ AB = DC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle ODC$ (مفروضه)
 از آنجا که OH و OH' ارتفاع های نظیر دو ضلع در دو مثلث هم نهشت اند بنابراین با هم برابرند

$S_{OAB} = S_{ODC} \Rightarrow \frac{AB \times OH}{2} = \frac{DC \times OH'}{2} \rightarrow OH = OH'$

17) ثابت کنید اگر فاصله مرکز دایره تا وترهای یک دایره برابر باشد، آنگاه آن وترها با هم برابرند.

فرض: $OH = OH'$ مکمل: $AB = CD$

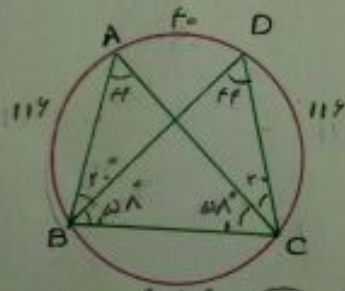


$\left. \begin{array}{l} OD = OB \\ OH' = OH \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OH'D \cong \triangle OHB$ (وتر یک ضلع)
 تساوی اضلاع متناظر $DH' = HB$

به همین ترتیب می توان ثابت کرد $\triangle OH'C \cong \triangle OHA$

$DH' = HB$
 $+ H'C = AH$
 $\hline DC = AB$

18) در شکل مقابل می دانیم $AB = CD$



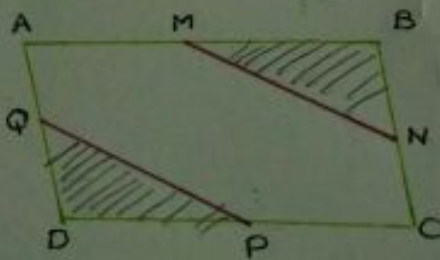
1) چرا $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ؟ و ترها برابرند بنابراین کمانهای نظیرشان هم با هم برابر

2) اگر $\widehat{BC} = 116^\circ$ و $\widehat{AD} = 40^\circ$ باشد، اندازه زاویه های دو مثلث را مشخص کنید.

$\widehat{AB} = \widehat{DC}$
 $\widehat{AB} + \widehat{DC} = 360^\circ - (40^\circ + 116^\circ)$
 $= 360^\circ - 156^\circ = 204^\circ \rightarrow \widehat{AB} = \widehat{DC} = \frac{204}{2} = 102^\circ$

$\widehat{D} = \widehat{A} = 44^\circ$
 $\widehat{C} = \widehat{B} = 78^\circ$
 $\widehat{C}_1 = \widehat{B}_1 = 58^\circ$

19) در شکل مقابل ABCD متوازی الاضلاع است و M, N, P, Q وسط های اضلاع متوازی الاضلاع است، ثابت کنید $MN = PQ$



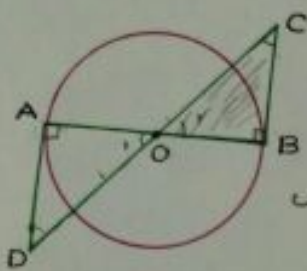
مکمل: $MN = PQ$
 فرض: متوازی الاضلاع ABCD

$\left. \begin{array}{l} BM = PD = \frac{AB}{2} \\ BN = DQ = \frac{AD}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MBN \cong \triangle QDP$ (مفروضه)

$\widehat{B} = \widehat{D}$ زوایای مقابل

تساوی اضلاع متناظر
 $\hline MN = PQ$

در شکل مقابل O مرکز دایره است، BC و AD بر دایره مماس است، نشان دهید که AD و BC برابرند.



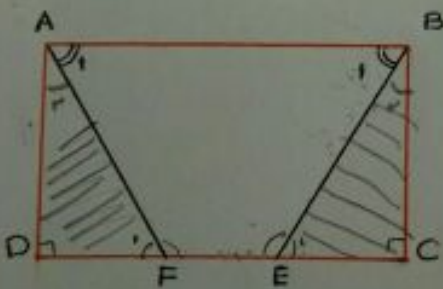
$BC = AD$ حکم
 $\hat{B} = \hat{A} = 90^\circ$
 $\hat{O}_2 = \hat{O}_1$ متقابل
 $OB = OA$ شعاع
 $\Rightarrow \triangle OBC \cong \triangle OAD$ اضلاع
 $\xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزا}}$ $BC = AD$

در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی الساقین است و M، N روی قاعده BC طوری قرار دارد که $BM = NC$. نشان دهید AMN مثلثی متساوی الساقین است.



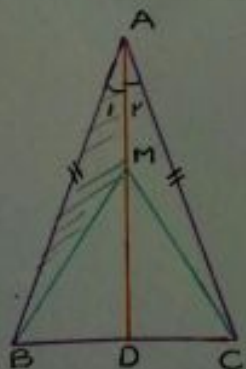
متساوی الساقین ABC : فرض
 حکم : $AM = AN$ (معادل حکم)
 مثلثی متساوی الساقین AMN نشان دهید
 اثبات :
 $AB = AC$ در مثلث ABC
 $\hat{B} = \hat{C}$ زوایای مجاورها
 $\Rightarrow \triangle ABM \cong \triangle ANC$ ضلع
 $\xrightarrow[\text{اجزای متناظر}]{\text{تساوی}}$ $AM = AN$
 بنابراین مثلث AMN متساوی الساقین است
 $\hat{M}_1 = \hat{N}_1$ زوایای مجاورها

در مستطیل ABCD، پاره‌های BE و AF طوری رسم شده که دو زاویه A_1 و B_1 برابرند، ثابت کنید BE و AF مساویند.



کنید BE و AF مساویند
 حکم : $AF = BE$
 فرض : مستطیل ABCD ، $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$
 اثبات :
 $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 \rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}_2$
 $AD = BC$ اضلاع مقابل
 $\hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \triangle ADF \cong \triangle BCE$ ضلع
 $\xrightarrow[\text{تساوی اجزای متناظر}]{\text{تساوی}}$ $AF = BE$

نشان دهید در مثلث متساوی الساقین، فاصله سر نقطه دلخواه روی نیمساز زاویه رأس از دو سر قاعده برابر است، $MB = MC$ حکم : $MB = MC$



متساوی الساقین ABC : فرض
 حکم : $MB = MC$
 نیمساز زاویه A
 اثبات :
 $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ فرض
 $AM = AM$ مشترک
 $AB = AC$ در مثلث ABC
 $\Rightarrow \triangle AMB \cong \triangle AMC$ ضلع
 $\xrightarrow[\text{تساوی اجزای متناظر}]{\text{تساوی}}$ $MB = MC$

در شکل مقابل ABCD متوازی الاضلاع است

و AH و CH' فاصله‌های نقاط A و C از قطر BD

است. دلیل برابری دو زاویه B₁ و D₁ را توضیح دهید.

AD || BC و BD مورب

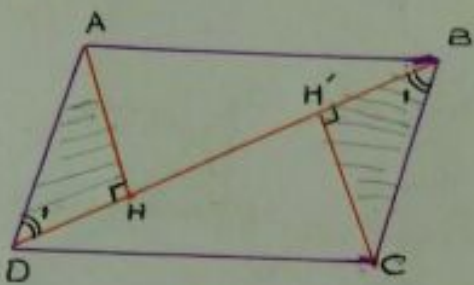
نشان دهید مثلث‌های ADH و BCH' هم‌نهشت‌اند

و از آنجا برابری AH و CH' را نتیجه بگیرید. سپس

میله زیر را کامل کنید. $\triangle ADH \cong \triangle BCH'$

→ تساوی اجزاء متناظر → CH' = AH

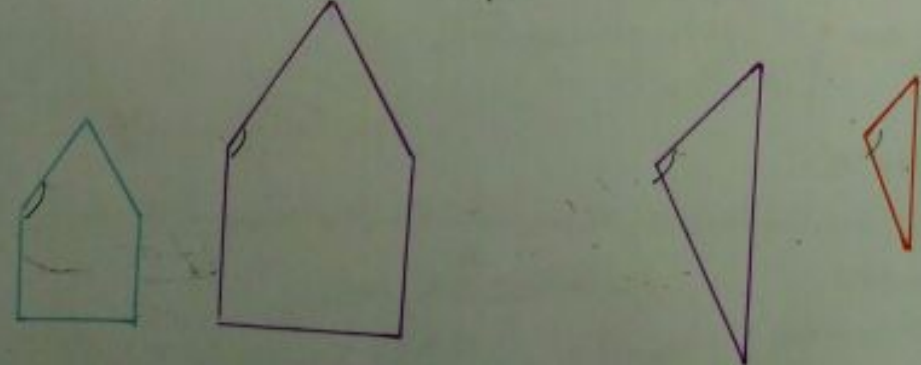
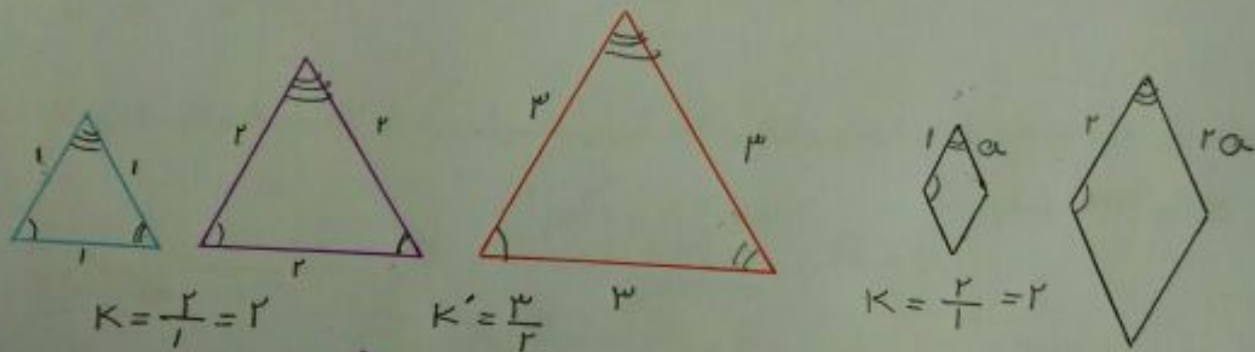
در هر متوازی الاضلاع، هر دو رأس مقابل، از قطر، فاصله‌ای دارند.



$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \end{array} \right\} \rightarrow$$

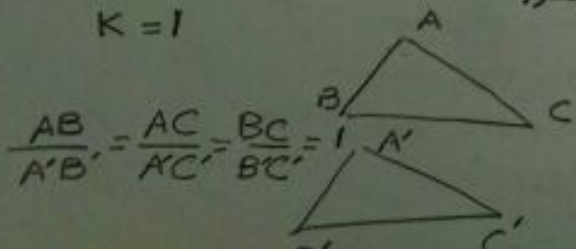
تشابه

اگر اندازه اضلاع همای دو شکل متناسب و زاویه‌های متناظرشان برابر باشد، دو شکل متشابه هستند. نسبت اندازه اضلاع، نسبت تشابه نامیده می‌شود.

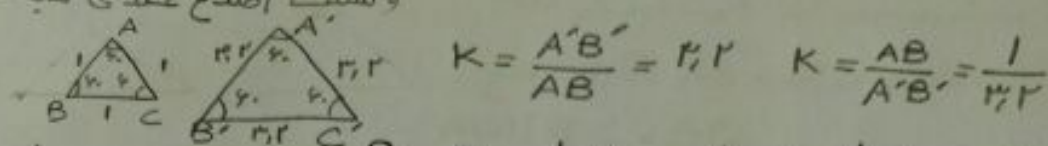


۲۴) آیا دو شکل هم‌نهشت یا هم‌شکل، تشابه هستند؟ در صورت تشابه نسبت تشابه چقدر است؟

$K = 1$

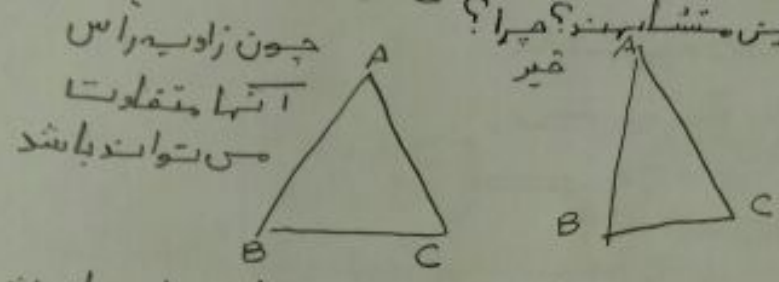


آیا هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابهند؟ چرا؟ بله چون زوایای ۶۰ و با هم برابر است و نسبت اضلاع عددی ثابت



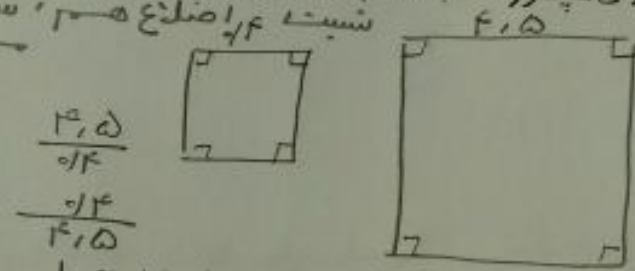
$$K = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{2} \quad K = \frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{1/2}$$

آیا هر دو مثلث متساوی الساقین متشابهند؟ چرا؟ خیر



چون زوایای رأس آنها متفاوت است پس نتواند باشند

آیا هر دو مربع متشابهند؟ هر دو لوزی همطور؟ بله چون زوایای آنها همواره برابرند نسبت اضلاع هم، نسبت تشابه می شود



$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

مثلث ABC به ضلع های ۴، ۵، ۸ و به مثلث DEF به ضلع ۱۰، ۷، ۱۴ با هم متشابه هستند (اندازه ضلع های مثلث ها از کوچک به بزرگ نوشته شده است) مقدار x را بدست آورید. نسبت تشابه را بدست آورید. نسبت ضلع های مثلث ها برابر می شود یا نه؟

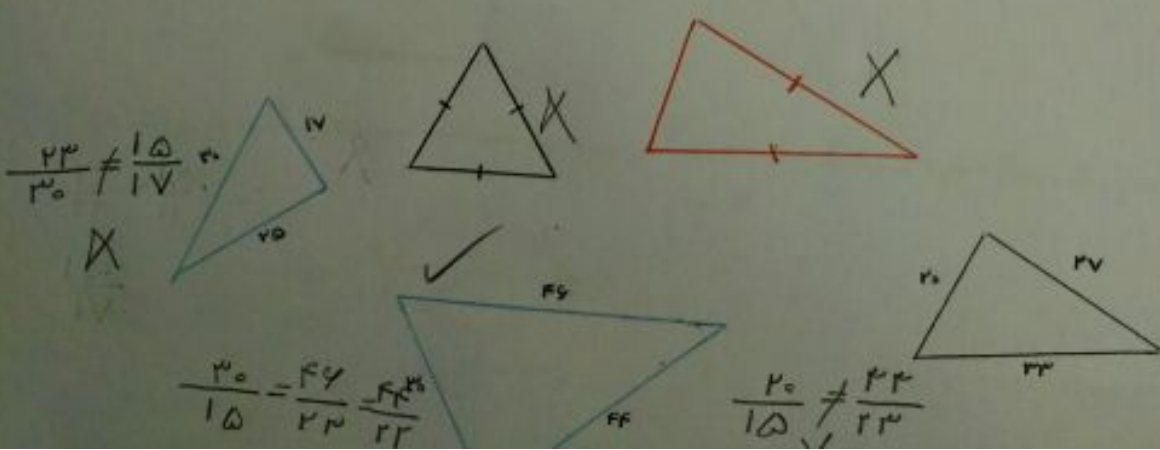
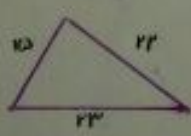
$$\frac{f}{x-1} = \frac{5}{10} = \frac{8}{x+7} \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{4+5+8}{8+10+14} = \frac{17}{34} = \frac{1}{2}$$

$$5x - 5 = 40 \quad 5x + 35 = 80$$

$$x = 9 \quad x = 9$$

نسبت ضلع های مثلث ها برابر است تشابه است

کدام مثلث با ABC متشابه است؟

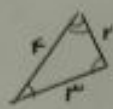
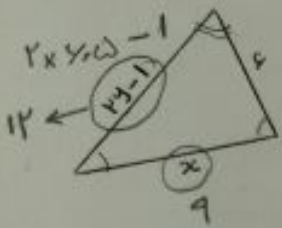


$$\frac{12}{15} \neq \frac{15}{12}$$

$$\frac{15}{15} = \frac{12}{12} = \frac{13}{13}$$

$$\frac{15}{15} \neq \frac{12}{12}$$

تقسیمات مشابه در دو شکل رویه رو $\frac{1}{3}$ است. مقادیر x و y را مساوی کنید.



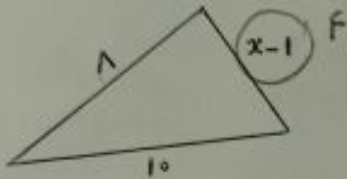
$$x = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2$$

$$\frac{2y-1}{4} = \frac{4}{2} = \frac{x}{3}$$

$$4y - 2 = 2x$$

$$y = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}$$

۳۱ مثلث های ABC ، $AB'C'$ مشابه اند. مقادیر x و y را بدست آورید.



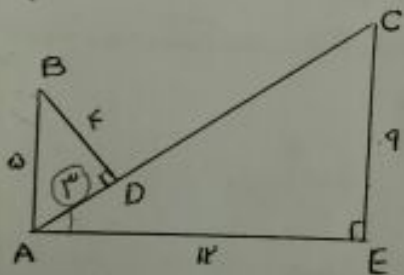
$$\frac{10}{y+3} = 2 \rightarrow y=1$$

$$\frac{10}{5} = 2 \quad \frac{x-1}{y+3} = 2 \quad \times$$

$$\frac{x-1}{2} = 2 \rightarrow x=5$$

$$\frac{10}{5} = 2$$

۳۲ در شکل زیر، دو مثلث مشابه هستند. اندازه AD را بدست آورید.



$$12^2 + 9^2 = AC^2$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{AD} = \frac{AE}{BD}$$

$$144 + 81 = AC^2$$

$$\frac{15}{5} = \frac{9}{AD} = \frac{12}{BD}$$

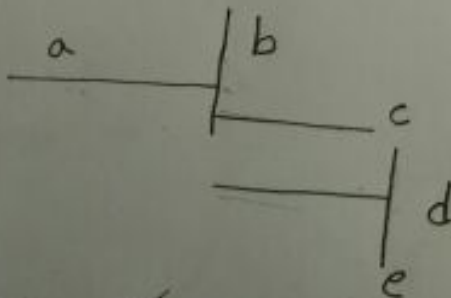
$$\sqrt{225} = AC$$

$$AC = 15$$

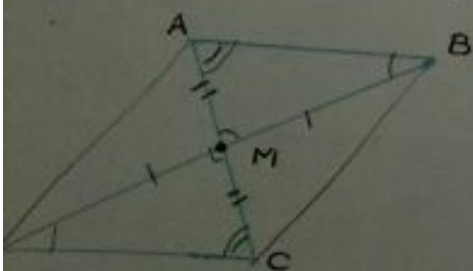
$$3 = \frac{12}{BD} \rightarrow BD = 4$$

$$3 = \frac{9}{AD} \rightarrow AD = 3$$

۳۳ اگر $a \perp b$ و $a \perp c$ ، $b \parallel c$ ، $d \perp e$ باشد، چه ارتباطی بین a و e وجود دارد؟ عمود بر هم اند

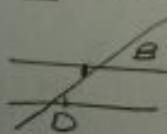


۳۴ در شکل زیر، پارالل های AC و BD هم دیگر را تشخیص کنید. ثابت کنید $AB \parallel DC$.

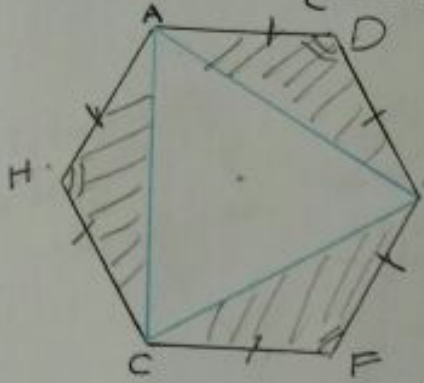


$$\hat{B} = \hat{D} \Rightarrow AB \parallel DC$$

BD مورب



در شکل زیر، اضلاع منتظم است. ثابت کنید ABC مثلث متساوی الاضلاع است.

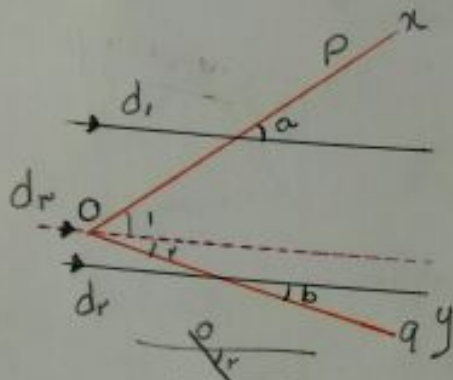


$AD = BF$
 $\hat{D} = \hat{F} = 120^\circ$
 $BD = CF$

$\Delta ADB \cong \Delta BFC$
 $\Delta BFC \cong \Delta AHC$

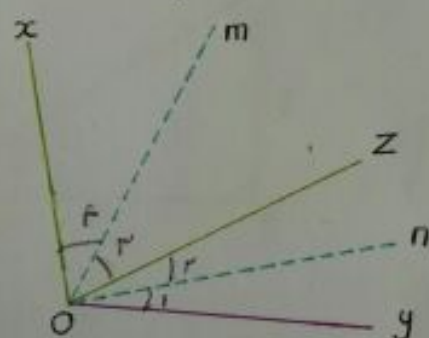
$AB = BC = AC$
 در نتیجه ABC متساوی الاضلاع

در شکل زیر ثابت کنید $\hat{xoy} = \hat{a} + \hat{b}$



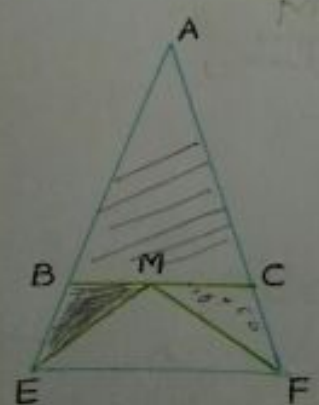
$d_1 \parallel d_2 \rightarrow \hat{o}_1 = \hat{a}$
 $d_2 \parallel d_3 \rightarrow \hat{o}_2 = \hat{b}$
 $\hat{o}_1 + \hat{o}_2 = \hat{a} + \hat{b}$
 $\hat{xoy} = \hat{a} + \hat{b}$

در شکل زیر، om نیساز \hat{xoz} ، on نیساز \hat{zoy} است. ثابت کنید $\hat{mon} = \frac{\hat{xoy}}{r}$



$\hat{mon} = \hat{omz} + \hat{onz}$
 $\hat{mon} = \frac{\hat{xoz}}{r} + \frac{\hat{zoy}}{r} = \frac{\hat{xoy}}{r}$
 $\hat{mon} = \frac{\hat{xoy}}{r}$

در شکل زیر سه مثلث ABC ، MCF ، BEM متساوی الساقین هستند. ثابت کنید:

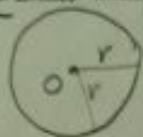


$AE + AF$ برابر است با:
 $BM = BE$ ، $MC = FC$

محیط ΔABC : $AC + BC + AB$
 $= AC + (BM + MC) + AB$
 $= AC + BE + FC + AB$
 $P_{\Delta ABC} = AE + AF$

مجموعه و مساحت

الف: دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که مرکز آن نقطه ها از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصله ثابت و مشخص است. به این اندازه ثابت شعاع دایره می گوئیم.



ب: کره مجموعه نقاطی از فضا است که نقطه ای ثابت به نام مرکز کره به یک فاصله مشخص به این اندازه شعاع کره می گوئیم.

مجموعه کره ای به شعاع R از فرمول زیر بدست می آید:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$S = 4 \pi R^2$$



۴۰) حجم نیم کره ای به شعاع ۵cm را بدست آورید.

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi \times 5^3 \right)$$

$$V = \frac{2}{3} \times \pi \times 125 = \frac{250}{3} \pi$$



۴۱) حجم کپسول گاز زیر که از قرار گرفتن یک نیم کره روی یک استوانه ایجاد شده است، بدست آورید. قطر قاعده کپسول ۶۰ سانتی متر و ارتفاع آن یک متر باشد، حجم کپسول را بر حسب متر مکعب را بدست آورید.

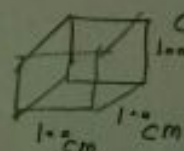


نصفه حجم + حجم استوانه = حجم کپسول
 کره
 (مجموعه نیم کره ای)

$$= (\pi \times 30^2 \times 70) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 30^3 \right)$$

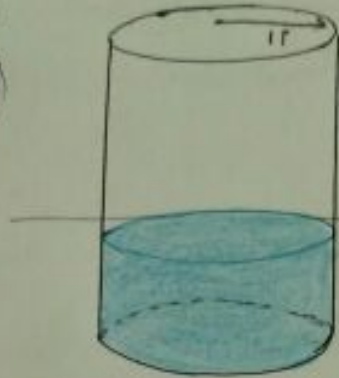
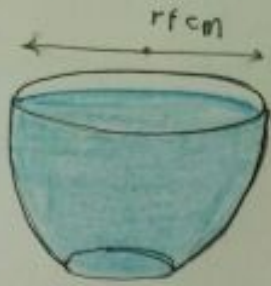
$$= 63000 \pi + 18000 \pi$$

$$\cong 252,000 \text{ cm}^3$$



$$\frac{252,000}{1000} = 252,000 \text{ m}^3$$

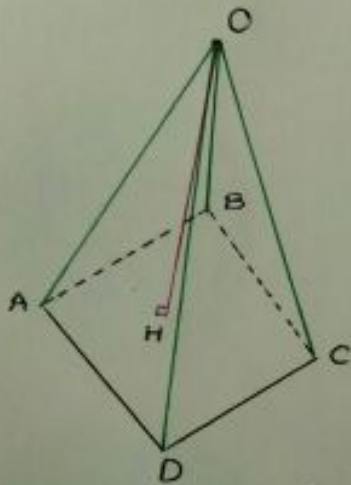
همچنانچه ای به شکل نیم کره و قطر ده سانتی متر را از آب پر و آب آن را در لیوانی استوانه ای شکل با همان قطر خالی می کنیم؛ آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می آید؟



$$\frac{1}{3} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 12^3 = \pi \times 12^2 \times h$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{4}{3} \times 12^3 = h$$

$$\underline{h = 12 \text{ cm}}$$

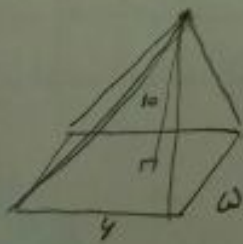


مجموع هرم و مخروط

مجموع هرم : $\frac{1}{3} S \times h$ ارتفاع قاعده

مجموع مخروط : $\frac{1}{3} S \times h$ ارتفاع قاعده

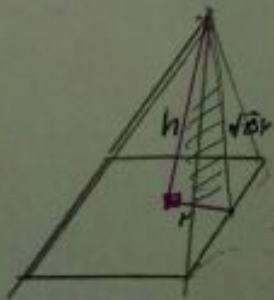
۴۱) حجم هرمی را به دست آورید که قاعده آن مستطیلی به ابعاد ۶ و ۵ سانتی متر و ارتفاع آن ۱۰ سانتی متر باشد.



$$\frac{1}{3} S h$$

$$\frac{1}{3} (5 \times 6) \times 10 = 150 \text{ cm}^3$$

۴۲) حجم هرمی با قاعده مربع را به دست آورید که ضلع قاعده آن ۴ cm باشد و همه مای جانبی آن مثلث های متساوی الساقین به ساق های ۸ cm باشد.



$$8^2 - 2^2 = 64 - 4 = 60$$

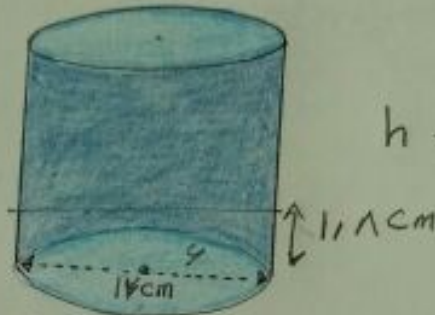
$$h = \sqrt{(\sqrt{60})^2 - 2^2} = \sqrt{60 - 4}$$

$$h = \sqrt{56}$$

$$\frac{1}{3} S \cdot h$$

$$\frac{1}{3} \times 16 \times \sqrt{56} = \frac{16\sqrt{56}}{3}$$

ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه ۴cm و به ارتفاع ۱۲cm را از آب پرسی کنیم و در لیوانی استوانه‌ای شکل، که شعاع قاعده آن ۶cm است، خالی می‌کنیم؛ آب تا چه ارتفاعی از لیوان خواهد بود؟

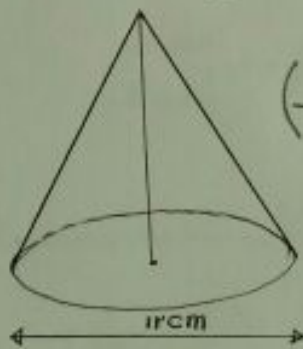
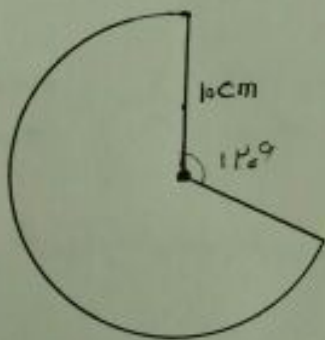


$$h = \frac{f^2}{g^2} = \frac{4^2}{36} = \frac{16}{9} \approx 1.8cm$$

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 12 = \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times h$$

۴۴) علی بچه‌سختی از دایره‌ای به شعاع ۱۰cm مخروطی به قطر قاعده ۱۲cm ساخت است. حجم این مخروط را به دست آورید. مساحت کل مخروط را بدست آورید.

مساحت قاعده + مساحت جانبی = مساحت کل

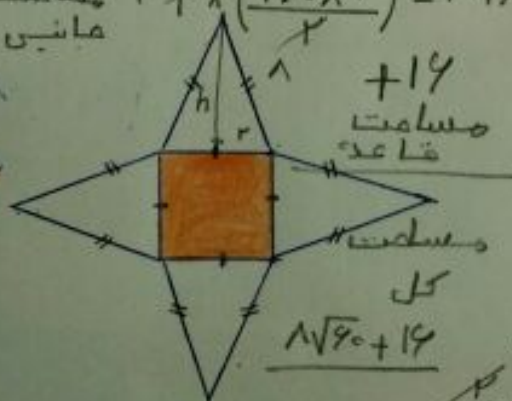


$$\left(\frac{1}{3} \times \pi \times 12^2 \times 10 \right) + \pi \times 6^2$$

۴۷) مساحت گسترده مربع از هرم‌ها را با توجه به اندازه‌های روی هر هرم محاسبه کنید.

$$h = \sqrt{4^2 - 4} = \sqrt{16} = 4$$

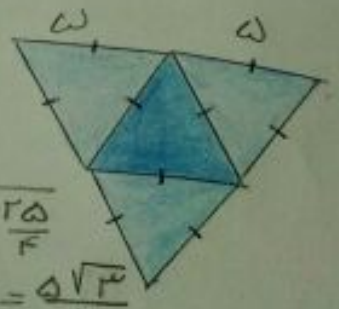
$$2 \times 4 \times \left(\frac{\sqrt{16} \times 4}{2} \right) = 16\sqrt{6}$$



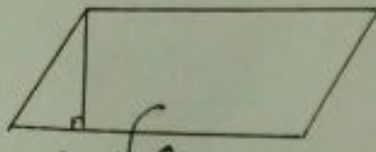
مساحت قاعده + 16

مساحت کل

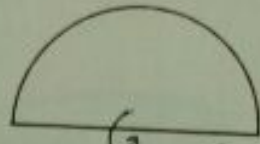
$$16\sqrt{6} + 16$$



$$h = \sqrt{5^2 - \frac{5^2}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

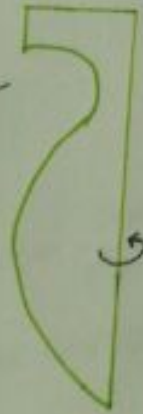


استوانه که یک
لبه



کره

گلدان

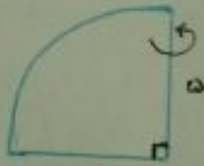


مفروضه از این
کم بکنده و در طرفه دیگرش همان

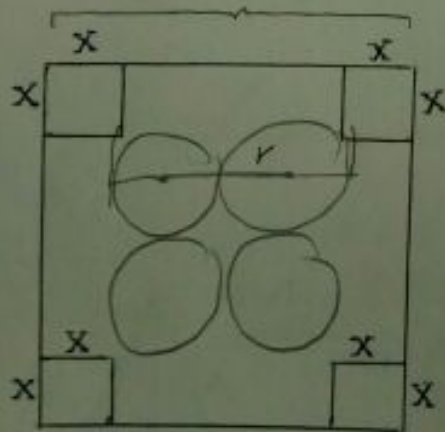
مجموع حاصل از دوران یک ربع دایره به شعاع ۵cm را حول شعاع آن پیدا کنید. مفروضه هست

نتیجه کره

$$\frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \times \pi \times 5^3 \right)$$



از یک مربع با ضلع ۵ گوشه‌های مربع شکل به ضلع x را بریده و با سطح باقی‌مانده یک مربع
مکعب مستطیل شکل درست کرده ایم چه رابطه‌ای بین ۵ و x باشد تا بتوان چهار کره
را به شعاع x داخل این مربع جاسی داد.



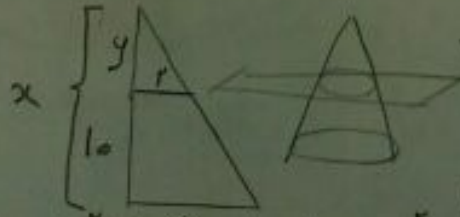
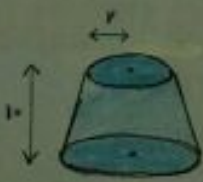
$$4r = a - 2x$$

$$r = x$$

$$4x = a - 2x$$

$$a = 6x$$

تئیس برابر ۶ باید باشد



مربع شکل مقابل را درست آورید.

$$\frac{r}{10} = \frac{y}{10+y}$$

$$r_0 + ry = 10y$$

$$r_0 + ry = 10y \rightarrow y = \frac{r_0}{6} = \frac{10}{3}$$