کاربردهای دیگر مشتقگیری[۳]

در سه بخش اول این فصل چند تکنیک قویتر حساب دیفرانسیل را عرضه می‌کنیم که به ما توان تحلیل رفتار توابع و رسم نمودار آنها را می‌دهد. در سه بخش بعد حدودی را بررسی می‌کنیم که مستلزم "نزدیک‌شدن به بی‌نهایت" اند و روش مؤثر **قاعدهٔ هوپیتال**[1] را برای محاسبهٔ حدود به کمک مشتقگیری معرفی خواهیم کرد. در بخش ۷.۳ از حساب دیفرانسیل و انتگرال برای حل مسائل عملی بسیاری از **بهینه‌سازی** استفاده کرده، و در بخش ۸.۳، که اختیاری است، توان حساب دیفرانسیل و انتگرال را در مسائل تجارت و اقتصاد نشان خواهیم داد.

۱.۳ قضیهٔ مقدار میانگین

فرض کنیم f تابع پیوسته‌ای بر بازهٔ بستهٔ $I = [a, b]$ بوده، و تفاضل $f(b) - f(a)$ بین مقادیر f در نقاط انتهایی I را درنظرمی‌گیریم. اگر $f'(a)$ موجود باشد، می‌توان بااستفاده از $f'(a)$ تفاضل $f(b) - f(a)$ را بانوشتن

$$f(b) - f(a) \approx f'(a)(b - a) \qquad (۱)$$

تخمین زد، که در آن تقریب در صورتی مناسب است که $b - a$ کوچک باشد. درواقع، این همان تقریب خط مماس (۲)، صفحهٔ ۱۹۸، است که در آن Δx با $b - a$ عوض شده است. در واقع، همانطور که لحظه‌ای دیگر نشان می‌دهیم، تقریب (۱) را می‌توان با فرمول دقیق

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \qquad (۱')$$

عوض کرد، که در آن f' در نقطهٔ مناسب c بین a و b به جای نقطهٔ انتهایی a حساب

---

1. *L'Hospital*

می‌شود .(دراینجا فرض می‌کنیم f در هر نقطه بین a و b مشتقپذیر بوده ، و انتخاب c به تابع f بستگی داشته باشد .) این نتیجه ، که به قضیهٔ *مقدار میانگین* معروف است ، کاربردهای زیادی در حساب دیفرانسیل وانتگرال دارد .

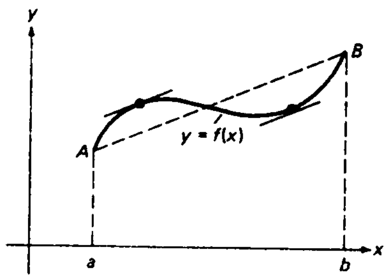
برای تعبیر هندسی قضیهٔ مقدار میانگین ، معادلهٔ (۱) را به شکل

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{۲}$$

نوشته ،ومی بینیم که طرف‌راست (۲) شیب وتر واصل بین نقاط انتهایی $A = (a, f(a))$ و $B = (b, f(b))$ منحنی

$$y = f(x) \qquad (a \le x \le b) \tag{۳}$$

است . لذا ، قضیهٔ مقدار میانگین می‌گوید که مماس بر منحنی (۳) در نقطه‌ای از منحنی غیراز نقاط انتهایی موازی وتر AB است . این امر در شکل ۱ نشان داده شده است ، که در آن منحنی دو مماس موازی AB دارد .



تعبیر هندسی قضیهٔ مقدار میانگین

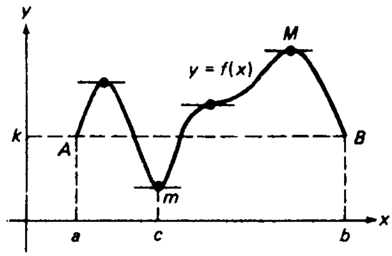
شکل ۱

قضیهٔ رل . اگر $f(a) = f(b)$ ، نقاط انتهایی منحنی (۳) مختص y یکسان داشته و وتر AB واصل بین نقاط انتهایی *افقی* است . در این حالت قضیهٔ مقدار میانگین به **قضیهٔ رل** تحویل می‌شود[۱] ، که می‌گوید مماس بر منحنی در نقطه‌ای غیر از نقاط انتهایی افقی است ، یا معادلاً ، f' در نقطه‌ای مانند c بین a و b مساوی 0 است . این وضع نسبتاً ساده‌تر

---

۱ . به افتخار میشل رل Michel Rolle (1652–1719) عضو فرهنگستان فرانسه که ابتدا از مخالفین حساب دیفرانسیل و انتگرال بود و بالاخره به کوشش یکی از همکارانش اعتبار آن را پذیرفت .

در شکل ۲ نموده شده است ، که در آن منحنی در چهار نقطه مماس افقی دارد . این امر که مختصات y دو نقطه از این چهارنقطه مساوی ماکزیمم M و مینیمم m تابع f بر بازهٔ $[a, b]$ اند تصادفی نیست (ر.ک. برهان قضیهٔ ۱) .



تعبیر هندسی قضیهٔ رل

شکل ۲

ابتدا قضیهٔ رل را ثابت کرده ، و سپس قضیهٔ مقدار میانگین را ثابت خواهیم کرد .

قضیهٔ ۱ (قضیهٔ رل) . فرض کنیم تابع f بر بازهٔ بستهٔ $I = [a, b]$ پیوسته و بر بازهٔ باز (a, b) ، یعنی در هر نقطهٔ درونی I ، مشتق‌پذیر باشد . همچنین ، $f(a) = f(b) = k$. در این صورت ، نقطه‌ای مانند c در (a, b) هست به‌طوری که $f'(c) = 0$.

برهان . بنا بر قضیهٔ مقدار اکستریم (ر.ک. صفحهٔ ۱۵۹) ، f دارای ماکزیمم M و مینیمم m بر I است . واضح است که $m \leq k \leq M$ ، زیرا k مقداری است که f بر I (در نقاط a و b) می‌گیرد . هرگاه $m = k = M$ ، آنگاه f به تابع ثابت $f(x) \equiv k$ تحویل می‌شود که مشتقش در هر نقطهٔ (a, b) مساوی 0 است ، و قضیه به اثبات می‌رسد . در غیر این صورت ، داریم $m < k$ یا $k < M$ (یا هر دو) ، ولی در هر حالت f در هر نقطهٔ درونی I ، یعنی در نقطه‌ای مانند c از (a, b) ، دست‌کم یکی از مقادیر اکستریم خود را می‌گیرد . طبق فرض ،

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

در c وجود دارد . همچنین ، این حد همان مقدار $f'(c)$ وقتی $x \to c^+$ و $x \to c^-$ را داراست (قضیهٔ ۱۲ ، صفحهٔ ۱۴۸) . به‌طور صریح ، فرض کنیم $f(c) = m$ ؛ درنتیجه ، به ازای هر x در I ، $f(c) \leq f(x)$ یا معادلاً $f(x) - f(c) \geq 0$. در این صورت ، خارج‌قسمت تفاضلی

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \qquad (۴)$$

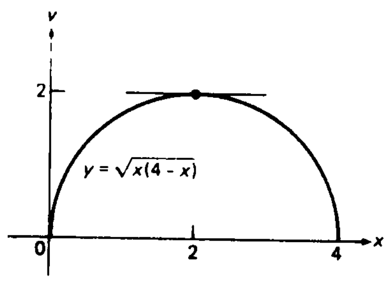
به ازای $x > c$ $(x - c > 0)$ نامنفی و به ازای $x < c$ $(x - c < 0)$ نامثبت است. از اینرو بنابر قاعدهٔ (سه)، صفحهٔ ۱۲۴ (که در مورد حدود یکطرفه نیز به‌کار می‌رود)، حد خارج قسمت (۴) وقتی $x \to c^+$ نمی‌تواند منفی باشد، وهمچنین حد (۴) وقتی $x \to c^-$ نمی‌تواند مثبت باشد. پس نتیجه می‌شود که $f'(c)$ نمی‌تواند مثبت یا منفی باشد. تنها می‌ماند حالتی که $f'(c) = 0$. حالت $f(c) = M$ اصولاً" به همین نحو بررسی می‌شود.

تبصره. واضح است که مثبت یا منفی نبودن $f'(c)$، کـه $f'(c) = 0$ را ایجاب می‌کند، بـه برقراری $f(c) \le f(x)$ به ازای هر x در بازهٔ I بستگی نداشته بلکه فقط به برقراری آن به ازای هر x در یک همسایگی نقطهٔ c وابسته است.

مثال ۱. تابع

$$f(x) = \sqrt{x(4-x)},$$

که در شکل ۳ رسم شده، فقط بر بازهٔ بستهٔ $[0, 4]$ تعریف شده است، زیرا عبارت زیر رادیکال خارج این بازه منفی است. چون f در تمام یک همسایگی نقطهٔ انتهایی $x = 0$



شکل ۳

یا $x = 4$ تعریف نشده است، در هیچیک از این نقاط مشتقپذیر نیست. در واقع، حتی مشتقات یکطرفهٔ $f'_+(0)$ و $f'_-(4)$ وجود ندارند (چرا؟). با اینحال، f ازراست در $x = 0$ و از چپ در $x = 4$ پیوسته بوده، و در هر نقطهٔ درونی $[0, 4]$ دارای مشتق

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(4-x)}} \frac{d}{dx}[x(4-x)] = \frac{2-x}{\sqrt{x(4-x)}} \qquad (۵)$$

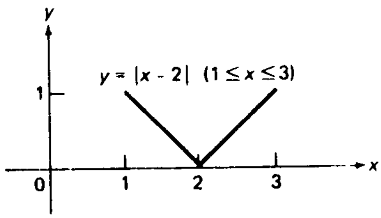
است؛ درنتیجه، f بر بازهٔ بستهٔ $[0, 4]$ پیوسته و بر بازهٔ باز $(0, 4)$ مشتقپذیر است. بـه علاوه، f مقدار 0 را در نقاط انتهایی $x = 0$ و $x = 4$ می‌گیرد. لذا، طبق قضیهٔ رل، f' باید در نقطه‌ای بین $x = 0$ و $x = 4$ مساوی 0 باشد. از رابطهٔ (۵) و نمودار f، کـه در

واقع نیمدایره‌ای به شعاع 2 و مرکز $(2, 0)$ است، معلوم می‌شود که این در $x = 2$ صورت می‌گیرد.

مثال ۲. تابع

$$f(x) = |x - 2| \qquad (1 \le x \le 3)$$

که در شکل ۴ رسم شده، بر $[1, 3]$ پیوسته است، و در $x = 1$ و $x = 3$ مقدار 1 را می‌گیرد. با اینحال نقطه‌ای مانند c در $(1, 3)$ وجوددارد که $f'(c) = 0$. این قضیهٔ رل را نقض نمی‌کند،



شکل ۴

چون یکی از شرایط قضیه برقرار نیست. در واقع، f در $x = 2$ مشتقپذیر نیست، زیرا نمودار f در نقطهٔ $(2, 0)$ گوشه دارد.

مثال ۳. نشان دهید که معادلهٔ مکعبی

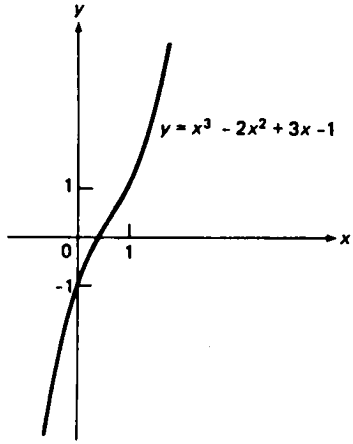
$$x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0 \qquad (۶)$$

ریشه‌ای حقیقی دارد ولی نه بیش از یکی.

حل. با نوشتن $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ داریم $f(1) = 1$ ، $f(0) = -1$. لذا، طبق قضیهٔ مقدار میانی (ر.ک. صفحهٔ ۱۵۴)، f مقدار 0 را در نقطهٔ r_1 بین 0 و 1 می‌گیرد (در واقع، $r_1 \approx 0.43$). این یک ریشهٔ معادلهٔ (۶) است. هرگاه ریشهٔ دیگر r_2 وجود می‌داشت، آنگاه $f(r_1) = f(r_2) = 0$؛ درنتیجه، به‌خاطر قضیهٔ رل، f' مقدار 0 را در نقطه‌ای بین r_1 و r_2 می‌گرفت. اما این غیرممکن است، زیرا به ازای هر x،

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{3} \ge \frac{5}{3}$$

درنتیجه، f' هرگز مساوی 0 نیست. لذا، r_1 تنها ریشهٔ معادلهٔ (۶) می‌باشد. این از روی شکل یعنی منحنی $y = f(x)$ رسم شده در شکل ۵ فقط قطع x است. در واقع، می‌توان



شکل ۵

با استفاده از آزمونی (قضیهٔ ۷ ، صفحهٔ ۲۶۹) که در بخش بعد ثابت شده نشان داد که f بر $(-\infty, \infty)$ صعودی است .

برهان قضیهٔ مقدار میانگین. حال که قضیهٔ رل در دست است ،قضیهٔ مقدار میانگین به آسانی ثابت می‌شود .

قضیهٔ ۲ (قضیهٔ مقدار میانگین) .*فرض کنیم تابع f بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته بوده‌و بر بازهٔ باز (a, b) مشتقپذیر باشد . در این صورت ، نقطه‌ای مانند c در (a, b) هست به طوری که*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{۷}$$

برهان. تابع جدید

$$g(x) = f(x) - kx$$

را معرفی می‌کنیم ،که درآن k ثابت است . k را طوری می‌گیریم‌که g در نقاط انتهایی بازهٔ $[a, b]$ مقدارِ یکسان بگیرد . به عبارت دیگر ، شرط می‌کنیم که k در معادلهٔ

$$g(a) = f(a) - ka = f(b) - kb = g(b)$$

صدق نماید . با حل آن نسبت به k ، به دست می‌آوریم

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

با این k ، تابع g در تمام شرایط قضیهٔ رل صدق می‌کند؛ و درنتیجه، نقطه‌ای مانند c در (a, b) هست به‌طوری که

$$g'(c) = f'(c) - k = 0.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$f'(c) = k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

که با (۷) معادل است.

فرض کنیم به‌جای $a < b$ که در قضیهٔ ۲ و فرمول (۷) تلویحاً" فرض شده داشته‌باشیم $b < a$ ، و نیز f بر $[b, a]$ پیوسته و بر (b, a) مشتقپذیر باشد. در این صورت، به‌جای(۷) داریم

$$f(a) - f(b) = f'(c)(a - b) \qquad (۷')$$

که در آن c نقطه‌ای از (b, a) است. با ضرب طرفین (۷') در -1 به (۷) باز می‌گردیم. لذا، اگر بگوییم c بین a و b قرار دارد، قضیهٔ مقدار میانگین را همیشه می‌توان به شکل (۷) به کار برد، زیرا این نوع بیان شرط بر c در هر دو حالت $a < b$ و $b < a$ قابل‌اعمال است.

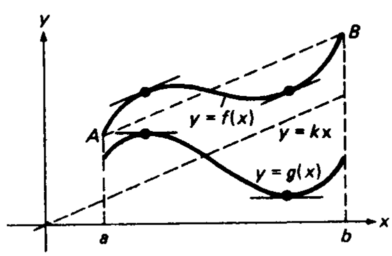
برای تعبیر هندسی تابع $g(x)$ معرفی شده در برهان قضیهٔ مقدار میانگین، فرض کنیم منحنی

$$y = f(x) \qquad (a \le x \le b)$$

بالای نمودار

$$y = kx = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\, x$$

واقع باشد، که خطی است ماربر مبداء و موازی وتر AB واصل بین نقاط انتهایی منحنی. اگر kx مثبت باشد، هر نقطهٔ $(x, g(x))$ از نمودار g به فاصلهٔ kx زیر نقطهٔ نظیر $(x, f(x))$ از منحنی f قرار دارد. مثلاً"، در شکل ۶، منحنی بالایی نمودار تابع f در شکل ۱ بوده،



شکل ۶

و منحنی پایینی نمودار تابع g نظیر این تابع f می‌باشد. توجه کنید که هروقت مماس بر نمودار f موازی AB باشد، مماس بر نمودار g در نقطه‌ای با همان مختص x موازی است.

مثال ۴. نقطهٔ c صادق در قضیهٔ مقدار میانگین برای تابع $f(x) = x^2$ را پیدا کنید.

حل. در اینجا $f'(x) = 2x$ و فرمول (۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$b^2 - a^2 = 2c(b - a).$$

با حل آن نسبت به c، به دست می‌آوریم

$$c = \frac{b^2 - a^2}{2(b - a)} = \frac{b + a}{2}.$$

لذا، در این حالت خاص، c نقطهٔ میانی بازه با نقاط انتهایی a و b، بی‌توجه به انتخاب a و b، است.

مثال ۵. نقطهٔ c صادق در قضیهٔ مقدار میانگین برای تابع $f(x) = 1/x$ در صورت $a = 4$ و $b = 9$ و نیز در صورت $a = -1$ و $b = -4$ را بیابید.

حل. این بار $f'(x) = -1/x^2$ و فرمول (۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = -\frac{b - a}{c^2}.$$

با حل آن نسبت به c به دست می‌آوریم $c^2 = ab$. یا معادلاً $c = \pm\sqrt{ab}$ که برای واقع بودن c بین a و b علامت به‌علاوه را در صورت مثبت بودن a و b و علامت منها را در صورت منفی بودن a و b اختیار می‌کنیم. لذا، $c = \sqrt{4(9)} = 6$ اگر $a = 4$ و $b = 9$ ولی $c = -\sqrt{(-1)(-4)} = -2$ اگر $a = -1$ و $b = -4$. توجه کنید که قضیهٔ مقدار میانگین در صورت مختلف‌العلامه بودن a و b به کار نمی‌رود، زیرا در این صورت نقطهٔ $x = 0$ که $f(x) = 1/x$ در آن تعریف نشده بین a و b قرار دارد.

ما از قبل می‌دانیم که مشتق تابع ثابت متحد صفر است؛ یعنی، هرگاه $f(x) \equiv$ ثابت، آنگاه $f'(x) \equiv 0$. حال، به عنوان کاربردی از قضیهٔ مقدار میانگین، عکس‌مطلب را ثابت می‌کنیم؛ یعنی، ثابت می‌کنیم $f'(x) \equiv 0$ ایجاب می‌کند که $f(x) \equiv$ ثابت اگر و فقط اگر قلمرو f بازه باشد.

قضیهٔ ۳ (ثابت بودن یک تابع با مشتق صفر) . *فرض کنیم تابع f بر بازهٔ I مشتقپذیر بوده و f' در هر نقطه از I صفر باشد . در این صورت ، f بر I ثابت است ؛ یعنی ، f در تمام نقاط I مقدار یکسان میگیرد .*

برهان . نقطهٔ a از I را ثابت گرفته ، و فرض کنیم x نقطهٔ دیگری از I باشد . در این صورت ، بسته بهاینکه $x > a$ یا $x < a$ ، $[a, x]$ یا $[x, a]$ زیر بازهای از I است ،و f براین زیر بازه مشتقپذیر (و درنتیجه ، پیوسته) می باشد . لذا ، طبق قضیهٔ مقدار میانگین ،

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a), \tag{۸}$$

که در آن c بین a و x قرار دارد . اما $f'(c) = 0$ ، زیرا c متعلق به I است ؛ و لذا ، $f(x) - f(a) = 0$ یا معادلاً $f(x) = f(a)$. چون x نقطهٔ دلخواهی از I است ، نتیجه می شود که به ازای هر x در I ، $f(x) = f(a)$ ؛ یعنی ، f بر I ثابت میباشد .

مثال ۶ . تابع

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 \text{ ، } x > 0 \text{ اگر} \\ -1 \text{ ، } x < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

ثابت نیست ، ولی مشتقش در هر نقطه که f تعریف شده باشد صفر است . این امر قضیهٔ۳ را نقض نمیکند ،زیرا قلمرو f بازه نبوده بلکه جفت بازهٔ از هم جدای $(0, \infty)$ و $(-\infty, 0)$ میباشد . در این حالت ، فقط میتوان فرمول (۸) را به کار برد که نقاط a و x متعلق به یکی از بازههای $(0, \infty)$ یا $(-\infty, 0)$ باشند . پس نتیجهمی شود که f بر هر بازهٔجداگانه ثابت است ، ولواینکه f بر $(0, \infty)$ مقدار 1 را میگیردکه بامقدار f بر $(-\infty, 0)$ که -1 است متفاوت میباشد .

قضیهٔ مقدار میانگین کشی (اختیاری) . بالاخره یک گام جلو رفته و قضیهٔ مقدار میانگین مفیدی را که مستلزم دو تابع است ثابت میکنیم که به ریاضیدان بزرگ فرانسوی ، آگوستن کشی[1] (۱۷۸۹ — ۱۸۵۷) ، منسوب میباشد . برای کاربردهای قضیهٔ مقدار میانگین کشی ، ر.ک. بخشهای ۶.۳ و ۸.۹ .

قضیهٔ ۴ (قضیهٔ مقدار میانگین کشی) . *فرض کنیم توابع f و g بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$*

1. Augustin Cauchy

پیوسته بوده و بر بازهٔ باز (a, b) مشتق داشته باشند. همچنین، g' در هر نقطهٔ (a, b) ناصفر باشد. در این صورت، نقطه‌ای مانند c در (a, b) هست به طوری که

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (۹)$$

برهان. هرگاه $g(a)=g(b)$، آنگاه، طبق قضیهٔ رل، به ازای c ای در (a, b)، $g'(c)=0$، که با فرض متناقض است. بنابراین، $g(a) \neq g(b)$؛ درنتیجه، طرف چپ (۹) تعریف شده است. بقیهٔ برهان به موازات برهان قضیهٔ مقدار میانگین، که قضیهٔ ۴ به‌ازای $g(x)=x$ به آن تحویل می‌شود، پیش می‌رود. تابع جدید

$$h(x)=f(x)-kg(x)$$

که در آن k ثابت است را معرفی‌کرده، k را طوری می‌گیریم‌که h در هر دو نقطهٔ‌انتهایی بازهٔ $[a, b]$ مقدار یکسان بگیرد. به عبارت دیگر، شرط می‌کنیم k در معادلهٔ زیر صدق نماید:

$$h(a)=f(a)-kg(a)=f(b)-kg(b)=h(b).$$

با حل نسبت به k به دست می‌آوریم

$$k=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

با این k، تابع h در تمام شرایط قضیهٔ رل صدق می‌کند؛ و درنتیجه، نقطه‌ای مانند c در (a, b) هست به‌طوری که

$$h'(c)=f'(c)-kg'(c)=0.$$

پس نتیجه می‌شود

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=k=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},$$

که با (۹) معادل است.

مثال ۷. نقطهٔ c صادق در قضیهٔ مقدار میانگین کشی برای توابع $f(x)=\cos x$ و $g(x)=\sin x$ را درصورتی بیابید که $a=0$ و $b=\pi/2$.

حل. در اینجا $f'(x)=-\sin x$ و $g'(x)=\cos x$؛ درنتیجه، بخصوص g' در هر نقطه از $(0, \pi/2)$ ناصفر است. طرف چپ (۹) مساوی است با

$$\frac{\cos(\pi/2)-\cos 0}{\sin(\pi/2)-\sin 0}=\frac{0-1}{1-0}=-1,$$

و طرف راست برابر است با

$$\frac{-\sin c}{\cos c}=-\tan c.$$

لذا، فرمول (۹) به صورت $\tan c = 1$ درمی‌آید. با حل آن نسبت به c و تحت شرط $0 < c < \pi/2$ ، فوراً" معلوم می‌شود که $c = \pi/4$.

مسائل

نقطهٔ c صادق در قضیهٔ رل (درنتیجه، $f'(c) = 0$) را درصورتی بیابید که

۱. $f(x) = x^2 - 3x + 5, a = 1, b = 2$

۲. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 5, a = -1, b = 1$

۳. $f(x) = 1/(x^2 + 1), a = -2, b = 2$

۴. $f(x) = x^{1/2} + (1 - x)^{1/2}, a = 0, b = 1$

۵. $f(x) = x^{1/2}(2 - x)^{1/3}, a = 0, b = 2$

۶. $f(x) = (3 - x)^{4/3}, a = 2, b = 4$

۷. $f(x) = \sin 2x, a = \pi, b = 3\pi/2$

۸. $f(x) = \sec x, a = -1.5, b = 1.5$

۹. تابع $f(x) = 1 - x^{2/3}$ بر $[-1, 1]$ پیوسته بوده و در $x = \pm 1$ مساوی 0 است. نشان دهید که نقطه‌ای مانند c در $(-1, 1)$ وجود دارد که $f'(c) = 0$. چرا این قضیهٔ رل را نقض نمی‌کند؟ تابع را رسم کنید.

۱۰. قضیهٔ رل را برای تابع $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ تحقیق کنید. به عبارت دیگر، نشان دهید که f' در نقطه‌ای از بازهٔ $(1, 2)$ و در نقطه‌ای از بازهٔ $(2, 3)$ مساوی 0 است.

با استفاده از قضیهٔ رل نشان دهید که

۱۱. معادلهٔ $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ ریشهٔ حقیقی منحصر به فرد دارد.

۱۲. معادلهٔ $x^8 + x - 1 = 0$ فقط دو ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۳. معادلهٔ $x^5 - 5x + 1 = 0$ فقط سه ریشهٔ حقیقی دارد.

نقطهٔ c صادق در قضیهٔ مقدار میانگین (۷) را درصورتی بیابید که

۱۴. $f(x) = x^2 + x + 1, a = 1, b = 2$

۱۵. $f(x) = x^3 - 1, a = 0, b = 3$

۱۶. $f(x) = \frac{1}{2-x}, a = 1, b = 0$

۱۷. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}, a = 2, b = 3$

۱۸. $f(x) = \sqrt{x}, a = 9, b = 25$

۱۹. $f(x) = x^{1/3}, a = 8, b = 0$

۲۰. $f(x) = x^{4/3}, a = -8, b = -1$

۲۱. $f(x) = \sin x, a = 0, b = \pi/2$

۲۲. تعبیر " سینماتیک " زیرا از قضیهٔ مقدار میانگین را توجیه کنید: هرگاه‌ترنی‌فاصلهٔ بین دو ایستگاه را باسرعت‌متوسط v_{av} طی کند، آنگاه لحظه‌ای وجود دارد که سرعت لحظه‌ای آن درست مساوی v_{av} است.

۲۳. نشان دهیدکه‌نامساوی $|\sin a - \sin b| \le |a - b|$ به‌ازای‌اعداد دلخواه a و b برقراراست.

۲۴. نشان دهید که نامساوی $|\tan a - \tan b| \le 4|a - b|$ به ازای اعداد دلخواه a و b در بازهٔ $[-\pi/3, \pi/3]$ برقرار است.

۲۵. تابع f با بی‌نهایت مقدار مختلف را طوری مثال بزنید که مشتقش بر قلمرو f متحد صفر باشد.

۲۶. اشتباه " برهان " زیر از قضیهٔ مقدار میانگین کشی را بیابید: با دو بار به کار بردن قضیهٔ مقدار میانگین معمولی، داریم

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \qquad g(b) - g(a) = g'(c)(b - a).$$

لذا، از تقسیم معادلهٔ اول بر معادلهٔ دوم به دست می‌آوریم

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

نقطهٔ c صادق در قضیهٔ مقدار میانگین کشی (۹) را درصورتی بیابید که

۲۷. $f(x) = x^3, g(x) = x^2 + 2x, a = -1, b = 2$

۲۸. $f(x) = x^2, g(x) = 1/x, a = -2, b = -1$

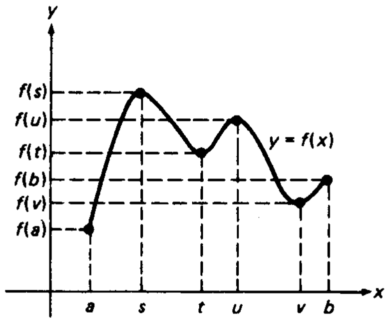
۲۹. $f(x) = 1/x, g(x) = 1/x^2, a = 1, b = 2$

۳۰. $f(x) = \sin x, g(x) = \tan x, a = 0, b = \pi/4$

۲۰۳ اکسترممهای موضعی و توابع یکنوا

شکل ۷ منحنیی را نشان‌می‌دهد که نمودار تابع پیوسته‌ای بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ است. واضح

است که f بر $[a, b]$ ماکزیممی مساوی $f(s)$ در نقطهٔ اوج منحنی ، یعنی $(s, f(s))$ ، ومینیممی بر $[a, b]$ برابر $f(a)$ در نقطهٔ حضیض منحنی ، یعنی $(a, f(a))$ که در اینجا یک نقطهٔ انتهایی منحنی است ، می‌گیرد . اما نکته‌ای در رفتار منحنی در نقاط $(t, f(t))$ ، $(u, f(u))$ و $(v, f(v))$ نیز وجود دارد . در واقع ، گرچه $(u, f(u))$ از $(s, f(s))$ بالاتر نیست ، از تمام نقاط " مجاور " منحنی بالاتر است ، به‌علاوه ، گرچه $(t, f(t))$ از $(a, f(a))$ پایین‌ترنیست ، از تمام نقاط مجاور منحنی پایین‌تر است ، و همین امر در مورد نقطهٔ $(v, f(v))$ صادق است.



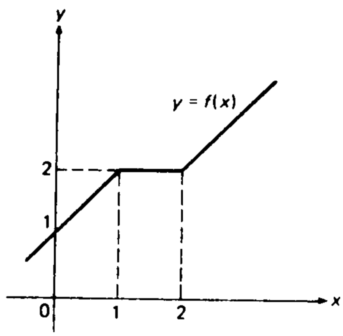
شکل ۷

لذا ، منحنی شکل ۷ شش نقطهٔ خاص دارد ، " نقاط اوج " $(s, f(s))$ و $(u, f(u))$ ، " نقاط حضیض " $(t, f(t))$ و $(v, f(v))$ ، و نقاط انتهایی $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$. (نقاط انتهایی همواره به توجه خاص نیاز دارند .)

تعریف اکسترممهای موضعی . حال این مفاهیم کیفی را دقیقتر می‌سازیم . به ازای تابع f و عدد c که می‌توان آن را نقطه‌ای بر خط حقیقی گرفت ، فرض می‌کنیم به ازای هر x به قدر کافی نزدیک c ، یعنی به ازای هر x در همسایگی از c ، $f(c) \geq f(x)$ (فرض است که f در هر نقطهٔ این همسایگی تعریف شده‌است) . در این صورت گوییم f در c ***ماکزیمم موضعی*** دارد و مساوی عدد $f(c)$ است . ماکزیمم موضعی را ***اکید*** نامیم اگر به ازای تمام x های به‌قدر کافی نزدیک c ولی مخالف آن ، یعنی به ازای جمیع x های واقع در همسایگی **سفته‌ای** از c $f(c) > f(x)$ (با $>$ به جای $\geq$) . به همین نحو ، هرگاه به ازای جمیع x های واقع در یک همسایگی c ، $f(c) \leq f(x)$ ، آنگاه گوییم f در c ***مینیمم موضعی*** دارد و مساوی عدد $f(c)$ است ، و مینیمم موضعی را ***اکید*** نامیم اگر به‌ازای جمیع x های واقع در همسایگی سفته‌ای از c ، $f(c) < f(x)$ (با $<$ به جای $\leq$) . واژهٔ ***اکسترمم موضعی*** یعنی ماکزیمم یا مینیمم موضعی . در بعضی کتب اکسترممهای موضعی را اکسترممهای " نسبی " نامیده‌اند .

مثال ۱. تابع f با نمودار شکل ۷ دارای چهار اکسترمم موضعی است، ماکزیممهای موضعی اکید $f(s)$ و $f(u)$ در نقاط s و u، و مینیممهای موضعی اکید $f(t)$ و $f(v)$ در نقاط t و v. این تابع در نقاط انتهایی a و b بازهٔ تعریف $I = [a, b]$ اکسترمم موضعی **ندارد**، صرفا" به این دلیل که تعریف اکسترمم موضعی مستلزم مقایسهٔ مقدار f در نقطهٔ c با مقادیر f **برطرفین** c است و یک چنین مقایسه فقط در یک نقطهٔ درونی مانند c از I امکان‌پذیر است.

مثال ۲. تابع قطعه‌قطعه‌خطی f با نمودار شکل۸ دارای ماکزیمم موضعی در $x = 1$ و مینیمم موضعی در $x = 2$ بوده، و در هر نقطهٔ بازهٔ $(1, 2)$ که بر آن f ثابت است ماکزیمم و مینیمم موضعی دارد. تمام این اکسترممهای موضعی مساوی 2 اند و هیچیک اکید نمی‌باشند.



شکل ۸

اکسترممهای موضعی در برابر اکسترممهای مطلق. مطمئن شوید که تمایز بین اکسترممهای موضعی که هم‌اکنون تعریف شد و اکسترممهای یک تابع بر یک **بازه** که در صفحهٔ۱۵۶ تعریف شده را فهمیده‌اید. از حالا به بعد هروقت امکان ابهام برود، مفهوم دوم اکسترمم **مطلق** نامیده خواهد شد. مثلا"، مینیمم مطلق تابع f بر بازهٔ I، که در نقطهٔ c در I گرفته شده، عدد $m = f(c)$ است که باید از مقادیر f در **تمام** نقاط I نابیشتر باشد، و برای آنکه m مینیمم موضعی باشد کافی است از مقادیر f در تمام نقاط یک همسایگی از c، مهم نیست چقدر کوچک، نابیشتر باشد.

هرگاه f تابعی با قلمرو بازهٔ I باشد، آنگاه اکسترمم مطلق f که در یک نقطهٔ **درونی** گرفته شده خود بخود یک اکسترمم موضعی f است. (ما قبلا" دیدیم که f نمی‌تواند در یک نقطهٔ انتهایی I اکسترمم موضعی داشته باشد.) مثلا"، فرض کنیم f بر I در نقطهٔ درونی c ماکزیمم مطلق داشته باشد. در این صورت، به ازای هر x در I، $f(c) \geq f(x)$؛ ولذا، مسلما" به ازای هر x در هر همسایگی c آنقدر کوچک که مشمول I است، $f(c) \geq f(x)$

بنابر قضیهٔ مقدار اکستریم (ر.ک. صفحهٔ۱۵۹) ، تابع پیوستهٔ f بر بازهٔ بستهٔ کراندار اکسترممهای مطلق دارد. حال قاعدهٔ مفیدی برای یافتن *این* اکسترممها عرضه می‌کنیم .

قضیهٔ ۵ (آزمون برای اکسترممهای مطلق). *فرض کنیم f بر بازهٔ بسته و کراندار $[a, b]$ پیوسته بوده و f در نقاط $c_1, c_2, \ldots, c_n$ از بازهٔ باز (a, b) و فقط در این نقاط اکسترممهای موضعی داشته باشد. در این صورت ، ماکزیمم اعداد*

$$f(a), f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n), f(b)$$

ماکزیمم مطلق f بر $[a, b]$ ، و مینیمم این اعداد مینیمم مطلق f بر $[a, b]$ می‌باشد .

برهان. اگر اکسترمم مطلق f در یک نقطهٔ درونی $[a, b]$ رخ دهد ، آن را می‌توان بین اکسترممهای موضعی $f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n)$ یافت . اما ممکن است در یک نقطهٔ انتهایی $[a, b]$ رخ دهد؛ و درنتیجه ، این n مقدار f باید با $f(a)$ و $f(b)$ مقایسه شوند .

مثال ۳. همانطور که قبلاً در مثال ۱ گفته شد ، تابع f با نمودار شکل ۷ در نقاط s ، t u و v اکسترمم موضعی دارد . از شکل معلوم می‌شود که ماکزیمم اعداد

$$f(a), f(s), f(t), f(u), f(v), f(b)$$

مساوی $f(s)$ و مینیمم آنها $f(a)$ است . از اینرو ، ماکزیمم (مطلق) f بر $[a, b]$ مساوی $M = f(s)$ است ، که در نقطهٔ درونی s گرفته می‌شود ، و مینیمم (مطلق) f بر $[a, b]$ مساوی $m = f(a)$ است ، که در نقطهٔ انتهایی a گرفته شده است . چون می‌گوییم " بر $[a, b]$ " ، واژهٔ *مطلق* در اینجا زاید است؛ و لذا ، در پرانتز گذارده شده است .

حال به روشی اصولی برای یافتن اکسترممهای موضعی تابع دادهٔ شدهٔ f نیاز داریم. فرض می‌کنیم f بر بازهٔ I پیوسته و مشتقپذیر باشد احتمالاً " به استثنای چند نقطه که f در آنها پیوسته ولی مشتق ناپذیر است . هرگاه f در c اکسترمم موضعی داشته باشد ،آنگاه هم اکنون نشان می‌دهیم که این در رفتار مشتق f در c منعکس شده است .

قضیهٔ ۶ (شرط لازم برای اکسترمم موضعی). *هرگاه f در نقطهٔ c اکسترمم موضعی داشته باشد ، آنگاه $f'(c)$ یا وجود ندارد یا موجود و مساوی صفر است .*

برهان. برای مشخص بودن وضع ، فرض کنیم f در c مینیمم موضعی داشته باشد؛ درنتیجه

به ازای هر x در همسایگی c ، $f(c) \le f(x)$ ؛ یعنی ، به ازای $\delta > 0$ ای ،

$$f(x) - f(c) \ge 0 \qquad (|x-c| < \delta)$$ (۱)

یا $f'(c)$ موجود نیست ، که در این صورت چیزی برای اثبات وجود ندارد ، یا

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$ (۲)

موجود است . اما ، به‌خاطر (۱) ، خارج‌قسمت تفاضلی

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

نامنفی است اگر $c < x < c + \delta$ و نامثبت است اگر $c - \delta < x < c$. لذا ، بنا بر برهان قضیهٔ رل (ر.ک. تبصرهٔ صفحهٔ ۲۵۶ حد (۲) ، یعنی $f'(c)$ ، نمی‌تواند منفی یا مثبت باشد . تنها حالتی که مانده $f'(c) = 0$ است . حالتی که f در c ماکزیمم موضعی دارد به همین نحو سامان خواهد یافت .

قضیهٔ ۶ در تعبیر هندسی می‌گوید **هرگاه** تابع f در نقطهٔ c اکسترمم موضعی داشته باشد ، آنگاه ، در صورت عدم وجود $f'(c)$ ، نمودار f در نقطهٔ $P = (c, f(c))$ مماس‌ندارد یا ، در صورت $f'(c) = 0$ ، نمودار f در P مماس *افقی* دارد . این دو حالت در شکلهای ۹ (آ) و ۹ (ب) نموده شده‌اند ، که دو تابع هر یک با اکسترمم موضعی (اکید) در c را نشان می‌دهند .

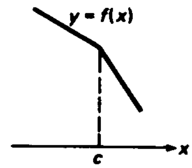
مینیمم موضعی :
$f'(c)$ وجود ندارد .
(آ)

ماکزیمم موضعی :
$f'(c) = 0$
(ب)

شکل ۹

نقاط بحرانی . نقطهٔ c در قلمرو تابع f یک **نقطهٔ بحرانی** f نام دارد اگر $f'(c)$ موجود نباشد یا مساوی صفر باشد . بنابرقضیه ۶ ، هرگاه f در c اکسترمم موضعی داشته باشد ، آنگاه c یک نقطهٔ بحرانی f است . از آن‌سو ، و این برای درک نظریهٔ اکسترممها است ، اگر c یک نقطهٔ بحرانی f باشد ، تابع f ممکن است در c اکسترمم موضعی **نداشته** باشد . این امر در شکلهای ۱۰ (آ) و ۱۰ (ب) نموده شده است ، که دو تابع را نشان می‌دهندکه c

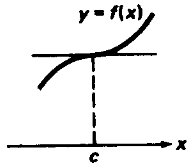
نقطهٔ بحرانی آنها بوده ولی هیچیک در c اکسترمم موضعی ندارد .



بدون اکسترمم :

$f'(c)$ وجود ندارد

(آ)



بدون اکسترمم :

$f'(c) = 0$

(ب)

شکل ۱۰

آزمون یکنوایی . لذا ، آنچه واقعاً " می‌خواهیم شرایطی بر f است که آن را *واجد* داشتن اکسترمم موضعی درنقطهٔ c نماید . به زبان منطق ، اینها شرایط *کافی* برای اکسترمم موضعی، در مقابل شرط *لازم* داده شده در قضیهٔ ۶ ، می‌باشند . این شرایط به شکل دو آزمون برای اکسترمم موضعی عرضه می‌شوند (قضایای ۸ و ۹ زیر) . به عنوان ابزاری برای اثبات این آزمونها ، ابتدا قضیهٔ زیر را ، که در جای خود اهمیت بسیار دارد ، ثابت می‌کنیم که شرایط یکنوایی یک تابع را به ما می‌دهد . گوییم تابع f بر بازهٔ I **یکنواست** اگر f بر I صعودی یا نزولی باشد ، و **یکنوایی** خاصیت یکنوا بودن می‌باشد .

قضیهٔ ۷ (آزمون یکنوایی) . فرض کنیم f بر بازهٔ I پیوسته بوده ، و f' در هر نقطهٔ درونی I موجود و دارای یک‌علامت باشد . در این صورت ، (یک) f بر I صعودی است اگر f' در هر نقطهٔ درونی I مثبت باشد؛ (دو) f بر I نزولی است اگر f' در هر نقطهٔ درونی I منفی باشد .

برهان . فرض کنیم f' در هر نقطهٔ درونی I مثبت بوده ، و a و b دو نقطهٔ دلخواه از I باشند به‌طوری که $a < b$. بنابر قضیهٔ مقدار میانگین ، به ازای نقطه‌ای مانند c بین a و b

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

واضح است که c یک نقطهٔ درونی I است؛ درنتیجه ، $f'(c) > 0$. لـــذا ، $f'(c)(b - a)$ که حاصل‌ضرب دو عدد مثبت‌است مثبت می‌باشد . اما در این صورت $f(b) - f(a)$ نیز مثبت است . به عبارت‌دیگر ، به ازای هر جفت نقطه مانند a و b در I که $a < b$ ، $f(a) < f(b)$. لذا ، f بر I صعودی است ، و قسمت (یک) ثابت می‌شود . برهان (دو) اساساً "همین‌است

و به عنوان تمرین گذارده می‌شود.

نتایج قضیهٔ ۷ نسبت به رفتار f' در نقاط انتهایی I (درصورتی که I شامل یک یا هر دو نقطهٔ انتهایی خود باشد) بی‌اعتنایند، و در واقع ممکن است f' در یک نقطهٔ انتهایی I مقدار 0 را بگیرد، یا حتی موجود نباشد. همچنین، اگر I باز باشد، هر نقطهٔ I یک نقطهٔ درونی‌است، و کلمهٔ " درونی " را می‌توان در سه‌جای صورت قضیه‌حذف‌کرد.

مثال ۴. در مثال ۱، صفحهٔ ۱۵۵، حکم شد که تابع

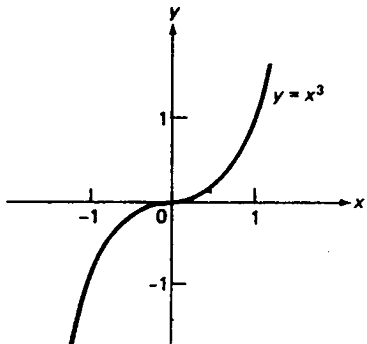
$$f(x) = 2x^5 + 2x^2 + x - 3$$

بر $(0, 1)$ صعودی است. حال با استفاده از آزمون یکنوایی، می‌بینیم که این فوراً " از مثبت بودن

$$f'(x) = 10x^4 + 4x + 1$$

بر $(0, 1)$ نتیجه می‌شود.

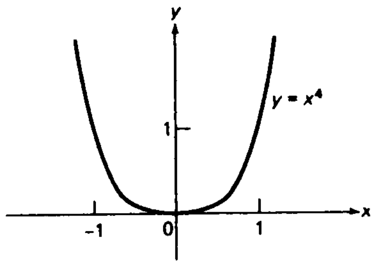
مثال ۵. به ازای تابع $f(x) = x^3$ داریم $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ ، که در آن تساوی فقط وقتی برقرار است که $x = 0$. لذا، f' در هر نقطهٔ درونی بازه‌های $(-\infty, 0]$ و $[0, \infty)$ مثبت است. پس از آزمون یکنوایی نتیجه می‌شود که f بر هر دو بازه صعودی است؛ و درنتیجه، همانطور که از نمودار f در شکل ۱۱ واضح است، f بر تمام خط حقیقی $(-\infty, \infty)$ صعودی است.



شکل ۱۱

مثال ۶. به ازای تابع $f(x) = x^4$ داریم $f'(x) = 4x^3$ ؛ درنتیجه، $f'(x) > 0$ اگر $x > 0$ و

$f'(x) < 0$ اگر $x < 0$ ، حال آنکه $f'(0) = 0$. لذا ، f' در هر نقطهٔ درونی بازهٔ $[0, \infty)$ مثبت و در هر نقطهٔ درونی بازهٔ $(-\infty, 0]$ منفی است . این بار آزمون یکنوایی به ما می‌گوید که f بر $[0, \infty)$ صعودی و بر $(-\infty, 0]$ نزولی است ، و این از نمودار f در شکل ۱۲ واضح می‌باشد .



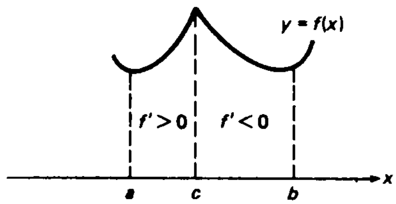
شکل ۱۲

آزمونهای مشتق اول و دوم . حال در وضعی هستیم که می‌توانیم آزمونهای اکسترمم موضعی که قول داده بودیم را ثابت کنیم .

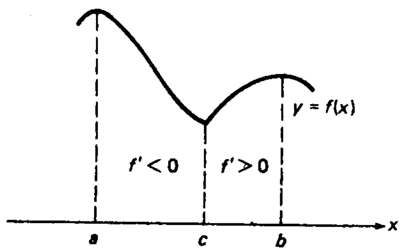
قضیهٔ ۸ (آزمون مشتق اول برای اکسترمم موضعی) . فرض کنیم c یک نقطهٔ بحرانی f بوده ، و f' در c تغییر علامت دهد ؛ یعنی ، f' بر بازهٔ (a, c) چپ c یک علامت و بر بازهٔ (c, b) راست c علامتی دیگر داشته باشد . در این صورت ، f در c اکسترمم موضعی اکید خواهد داشت . اکسترمم مینیمم است اگر f' از منها به به‌علاوه تغییر علامت دهد ، و ماکزیمم است اگر f از به‌علاوه به منها تغییر علامت دهد .

برهان . چیزی در باب مشتقپذیری f در خود نقطهٔ c گفته نشده است ، و $f'(c)$ ممکن‌است (با آنکه همواره f در c پیوسته گرفته می‌شود) موجود نباشد . فرض کنیم f' در c ازمنها به به‌علاوه تغییر علامت یابد . در این صورت ، f' بر بازه‌ای چون (a, c) منفی وبربازه‌ای چون (c, b) مثبت است . از آزمون یکنوایی معلوم می‌شود که f بر $(a, c]$ نزولی و بر $[c, b)$ صعودی است ، که در اینجا می‌توان نقطهٔ انتهایی c را در هر دو بازه گنجانید . پس‌دراین صورت f در c مینیمم موضعی اکید دارد ، زیرا به ازای هر نقطه در همسایگی سفتهٔ c ، $f(c) < f(x)$ [ر.ک. شکل ۱۳ (آ)] . به همین نحو ، هرگاه f' در c از به‌علاوه به منها تغییر علامت دهد ، آنگاه f بر $(a, c]$ صعودی و بر $[c, b)$ نزولی است ؛ درنتیجه ، f در c ماکزیمم موضعی اکید دارد [ر.ک. شکل ۱۳ (ب)]. در هر دو شکل در نقطهٔ $(c, f(c))$ گوشه

کشیده‌ایم تا مجدداً بر امکان عدم وجود $f'(c)$ تأکید کرده باشیم .



(ب)



(آ)

شکل ۱۳

قضیهٔ ۹ (آزمون مشتق دوم برای یک اکسترمم موضعی) . *فرض کنیم c یک نقطهٔ بحرانی f بوده ، و $f''(c)$ موجود و ناصفر باشد . در این صورت ، f در c اکسترمم موضعی اکید دارد . اکسترمم مینیمم است اگر $f''(c) > 0$ و ماکزیمم است اگر $f''(c) < 0$.*

برهان . طبق تعریف ،

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}, \tag{۳}$$

درنتیجه ، $f''(c)$ فقط‌وقتی می‌تواند موجود باشد که مشتق *اول* ، یعنی $f'(x)$ ، در همسایگی c وجود داشته باشد . بخصوص ، $f'(c)$ موجود و مساوی 0 است ، زیرا c یک نقطهٔ بحرانی است . لذا ، (۳) به

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c}$$

تحویل می‌گردد . اگر $f''(c) > 0$ ، همسایگی سفته‌ای‌از c وجوددارد که درآن $f'(x)/(x - c)$ مثبت است ، و در این همسایگی سفته علامت $f'(x)$ همان علامت $x - c$ می‌باشد . لذا ، f' در c از منها به به‌علاوه تغییر علامت می‌دهد ؛ درنتیجه ، بنا برآزمون مشتق اول (قضیهٔ ۸) ، f در c مینیمم موضعی اکید دارد . حالت $f''(c) < 0$ به‌همین نحو بحث شده ، وبه ماکزیمم موضعی اکید منجر می‌شود .

اگر در نقطهٔ بحرانی c ، $f''(c) = 0$ ، آزمون مشتق دوم بی‌حاصل است . در واقع ، فرض کنیم

$$f(x) = x^3, \qquad g(x) = x^4.$$

در این صورت ، با محاسبه مشتقات دوم ، به دست می‌آوریم

$$f''(x) = 6x, \qquad g''(x) = 12x^2,$$

درنتیجه ،

$$f''(0) = 0, \qquad g''(0) = 0.$$

اما f در $x = 0$ اکسترمم ندارد ، زیرا ، همانطورکه در مثال ۵ نشان دادیم ، f بر $(-\infty, \infty)$ صعودی است ، درحالی‌که g در $x = 0$ مینیمم موضعی (و مطلق) اکید دارد ، زیرا $g(0) = 0$ و ، به ازای هر $x \neq 0$ ، $g(x) = x^4 > 0$. لذا ، این امر که مشتق دوم یک تابع در نقطهٔ بحرانی c مساوی صفر است به ما اجازهٔ تصمیم‌گیری در اینکه در c اکسترمم موضعی دارد نمی‌دهد .

مثال ۷ . اکسترممهای موضعی تابع

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5 \tag{۴}$$

را بیابید .

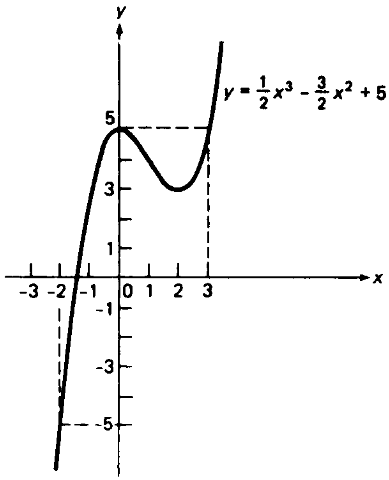
حل . در اینجا f به ازای هر x مشتقپذیر است ، و تنها نقاط بحرانی f نقاطی هستند که در آنها

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x = \frac{3}{2}x(x-2) \tag{۴'}$$

مساوی صفر است ؛ یعنی ، نقاط $x = 0$ و $x = 2$. مشتقگیری دیگر نتیجه می‌دهد $f''(x) = 3x - 3$ درنتیجه ، $f''(0) = -3 < 0$ و $f''(2) = 3 > 0$. لذا ، طبق آزمون مشتق دوم ، f در $x = 0$ ماکزیمم موضعی اکید مساوی $f(0) = 5$ ، و مینیمم موضعی اکیدی در $x = 2$ برابر $f(2) = 3$ دارد . آزمون مشتق اول به‌همین نتیجه ختم می‌شود ، زیرا (۴') نشان می‌دهد که f' در $x = 0$ از به علاوه به منها و در $x = 2$ از منها به به‌علاوه تغییر علامت می‌دهد . همچنین ، بنابر آزمون یکنوایی ، f بر بازه‌های $(-\infty, 0]$ و $[2, \infty)$ صعودی و بر بازهٔ $[0, 2]$ نزولی می‌باشد . حال می‌توان با استفاده از این اطلاعات ، و به کمک ماشین حساب ، نمودار تابع f را رسم کرد (ر.ک. شکل ۱۴) .

مثال ۸ . اکسترممهای مطلق تابع (۴) بر بازهٔ $I = [-2, 3]$ را بیابید .

حل . بنابر آزمون اکسترممهای مطلق (تضیهٔ ۵) ، کافی است اعداد



شکل ۱۴

$$f(-2) = -5, \qquad f(0) = 5, \qquad f(2) = 3, \qquad f(3) = 5,$$

یعنی اکسترممهای‌موضعی f در نقاط درونی I و مقادیر f در نقاط انتهایی I ، را باهم مقایسه کنیم . بزرگترین این اعداد ، یعنی 5 ، ماکزیمم مطلق f بر I است که‌در نقطهٔ درونی $x = 0$ و نقطهٔ انتهایی‌راست $x = 3$ گرفته می‌شود ، حال آنکه کوچکترین آنها ، یعنی -5 ، مینیمم مطلق است که‌در نقطهٔ انتهایی چپ $x = -2$ گرفته می‌شود (شکل ۱۴ را مجدداً" بررسی کنید) .

مثال ۹ . اکسترممهای موضعی تابع $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ را بیابید .

حل . مجدداً" ، f به ازای هر x مشتقپذیر است ، و تنها نقاط‌بحرانی f نقاطی هستند که در آنها

$$f'(x) = 4\sin^3 x \cos x - 4\cos^3 x \sin x$$
$$= 4(\sin^2 x - \cos^2 x)\sin x \cos x = -4\cos 2x \sin x \cos x$$

مساوی صفر است . اینها عبارتند از $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ که درآنها $\sin x = 0$ ، و نقاط $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$ که در آنها $\cos x = 0$ ، و نقاط $x = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4, \ldots$ که در آنها $\cos 2x = 0$. مشتقگیری دیگر نتیجه می‌دهد که

$$f''(x) = 12\sin^2 x\cos^2 x - 4\sin^4 x + 12\cos^2 x \sin^2 x - 4\cos^4 x$$
$$= 24\sin^2 x\cos^2 x - 4\sin^4 x - 4\cos^4 x,$$

لذا،

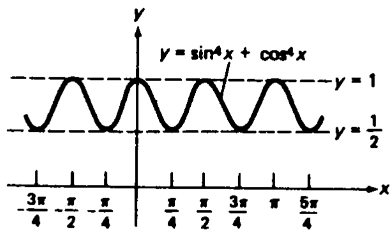
$$f''(x) = 24(0) - 4(0) - 4(1) = -4 \quad ، \quad x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots \text{ اگر}$$

$$f''(x) = 24(0) - 4(1) - 4(0) = -4 \quad ، \quad x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \dots \text{ اگر}$$

و

$$f''(x) = 24\left(\frac{1}{4}\right) - 4\left(\frac{1}{4}\right) - 4\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \quad ، \quad x = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4, \dots \text{ اگر}$$

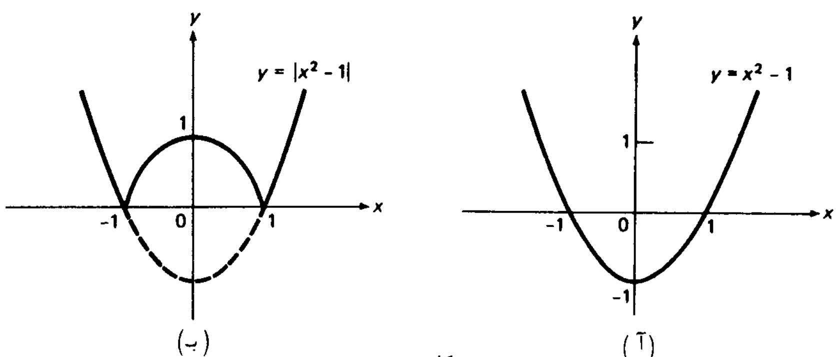
پس، طبق آزمون مشتق دوم، f در نقاط $x = 0, \pm\pi/2, \pm\pi, \pm 3\pi/2, \pm 2\pi, \dots$ ماکزیمم موضعیاکید ودر نقاط $x = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4, \dots$ مینیمم موضعی اکید دارد. تحقیق کنید که ماکزیممها همه مساوی 1 هستند و مینیممها همه مساوی $\frac{1}{2}$. نمودار f، که بخشی از آن در شکل ۱۵ نموده شده، متناوب با دورهٔ تناوب $\pi/2$ است. توجه کنید که بی‌نهایت اکسترمم وجود دارند، و این به‌خاطر تناوب انتظارش می‌رفت.



شکل ۱۵

مثال ۱۰. اکسترممهای موضعی تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را بیابید.

حل. اگر تابع $x^2 - 1$ داخل علامت قدرمطلق را رسم کنیم، سهمی شکل ۱۶ (آ) به دست می‌آید. با قدرمطلق گرفتن از $x^2 - 1$ تابع f به دست می‌آید، و منعکس قسمتی از سهمی‌را



شکل ۱۶

موجب می‌شود که زیر محور x است [منحنی منقطع در شکل ۱۶ (ب)] . لذا ، نمودار f منحنی توپر شکل ۱۶ (ب) است . این منحنی ، به‌خاطر انعکاس، در نقاط $(1, 0)$ و $(-1, 0)$ گوشه دارد. لذا ، f در $x = 1$ و $x = -1$ مشتقپذیر است؛ و درنتیجه ، در $x = 1$ و $x = -1$ نقاط بحرانی دارد . چون f به ازای هر $x \neq \pm 1$ مشتقپذیر است ، نقاط بحرانی دیگر f فقط به ازای مقادیری از x رخ می‌دهند که f' مقدار 0 بگیرد . به آسانی معلوم می‌شود که این فقط در $x = 0$ رخ می‌دهد . در واقع ،

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{،} \quad \text{اگر } x \le -1 \text{ یا } x \ge 1 \\ 1 - x^2 & \text{،} \quad \text{اگر } -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{،} \quad \text{اگر } x < -1 \text{ یا } x > 1 \\ -2x & \text{،} \quad \text{اگر } -1 < x < 1 \end{cases}$$

درنتیجه ، $f'(x) = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$. به‌علاوه ، f' در $x = 0$ از به‌علاوه به منها تغییر علامت می‌دهد ، زیرا $f'(x) > 0$ اگر $-1 < x < 0$ و $f'(x) < 0$ اگر $0 < x < 1$. لذا، طبق آزمون مشتق اول ، f در $x = 0$ ماکزیمم موضعی اکیدی مساوی $f(0) = 1$ دارد . آزمون مشتق دوم به همین نتیجه منجر می‌شود ، زیرا $f''(0) = -2$. در نقاط بحرانی دیگر $x = 1$ و $x = -1$ ، f مینیممهای موضعی اکیدی مساوی $f(\pm 1) = 0$ دارد و این فورا " از اینکه $f(\pm 1) = 0$ و $f(x) > 0$ به ازای $x \neq \pm 1$ نتیجه می‌شود . به عنوان تمرین ، نشان دهید که این مینیممها را می‌توان با آزمون مشتق اول نیزبه‌دست‌آورد. آیاتابع f بر $(-\infty, \infty)$ اکسترمم مطلق دارد؛ و اگر چنین است ، کجا ؟

مسائل

با بررسی تمام نقاط بحرانی ، اکسترممهای موضعی تابع داده شده را بیابید . تابع بر چه بازه‌هایی صعودی است؟ نزولی است؟ تابع را رسم کنید .

۱. $f(x) = |x + 1| - 1$

۲. $f(x) = x^2 - 2x$ ✓

۳. $f(x) = 3x - x^3$ ✓

۴. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ ✓

۵. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ ✓

۶. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ ✓

۷. $f(x) = \dfrac{8}{x^2 + x + 2}$

۸. $f(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$

۹. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$

۱۰. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$

۱۱. $f(x) = \cos x + \sin x$

۱۲. $f(x) = x + \sin x$

اکسترممهای مطلق تابع داده شده بر بازهٔ ذکر شده را بیابید .

۱۳. $f(x) = x^2 - 4x + 6$ بر $[-3, 10]$

۱۴. $f(x) = x^3 - 2x + 1$ بر $[0, 1]$

۱۵. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ بر $[-10, 10]$

۱۶. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ بر $[0, 2]$

۱۷. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ بر $[0.01, 100]$

۱۸. $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$ بر $[-1, 1]$

۱۹. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ بر $[-1, 0]$

۲۰. $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$ بر $[-2, 1]$

۲۱. $f(x) = 4 \sin x + 2 \cos 2x$ بر $[0, \pi]$

۲۲. $f(x) = \cos^2 x + 2 \sin^2 x$ بر $[\pi/4, 3\pi/4]$

۲۳. $f(x) = \sin x^2$ بر $[1, 2]$

۲۴. $f(x) = \sin(\sin x)$ بر $[0, 2\pi]$

۲۵. نشان دهید هرگاه $f(x)$ تابع زوجی با ماکزیمم (مینیمم) موضعی در $x = c$ باشد ، آنگاه $f(x)$ در $x = -c$ نیز ماکزیمم (مینیمم) موضعی دارد . این نتیجه در کدام مسئلهٔ ۱ تا ۱۲ به کار می‌رود ؟

۲۶. نشان دهید هرگاه $f(x)$ تابع فردی با ماکزیمم (مینیمم) موضعی در $x = c$ باشد ، آنگاه $f(x)$ در نقطهٔ $x = -c$ مینیمم (ماکزیمم) موضعی می‌باشد . این نتیجه در کدام مسئلهٔ ۱ تا ۱۲ به کار می‌رود ؟

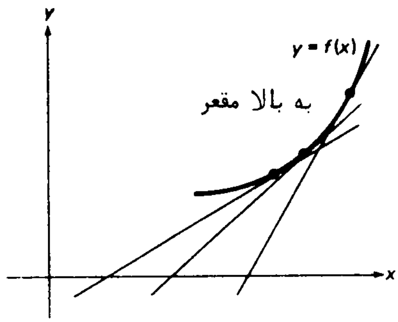
۲۷. چه مقداری از c ماکزیمم تابع $f(x) = |x^2 + c|$ بر بازهٔ $[-1, 1]$ را مینیمم می‌کند ؟

۲۸. فرض کنید f بر بازهٔ I پیوسته بوده ، و f در دو نقطهٔ s و t از I ماکزیمم موضعی اکید داشته باشد . نشان دهید f باید در نقطه‌ای بین s و t مینیمم موضعی (نه لزوماً " اکید) داشته باشد .

۳.۳ تقعر و نقاط عطف

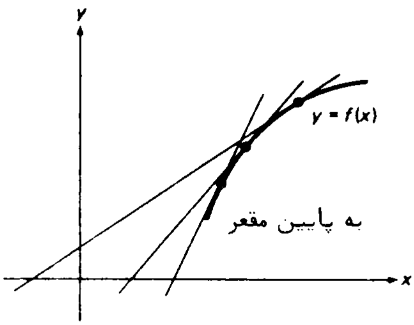
توابع مقعر . فرض کنیم تابع f بر بازهٔ I مشتقپذیر بوده ، و مشتق f' بر I یکنوا باشد . گوییم f بر I به *بالا* **مقعر** است اگر f' بر I صعودی باشد ، و بر I **به پایین مقعر** است اگر f' بر I نزولی باشد . مفهوم تقعر تعبیر هندسی ساده دارد . چون $f'(x)$ شیب منحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ متغیر $P = (x, f(x))$ است ، یعنی شیب خط مماس بر منحنی در P ،

منحنی روی I به بالا خم می‌شود [ر.ک. شکل ۱۷ (آ)] اگر f' بر I صعودی باشد، و به پایین خم می‌شود [ر.ک. شکل ۱۷ (ب)] اگر f' بر I نزولی باشد. لذا، می‌توان گفت که بخشی از منحنی که روی I است " آب را نگه می‌دارد " اگر f به بالا مقعر باشد، ولی " آب را می‌ریزد " اگر f روی I به پایین مقعر باشد. همچنین، از شکلها چنین برمی‌آید که بخشی از منحنی که روی I واقع است بالای هر خط مماس خود قرار دارد اگر f بر I به بالا مقعر باشد، و پایین هر خط مماس خود قرار دارد اگر f بر I به پایین مقعر باشد، و به آسانی معلوم می‌شود که این امر صحت دارد (ر.ک. مسئلهٔ ۲۵).



f' صعودی

(آ)



f' نزولی

(ب)

شکل ۱۷

با استفاده از آزمون یکنوایی (قضیهٔ ۷) ، شرایطی برای به بالا یا به پایین مقعر بودن یک تابع به دست می‌آوریم .

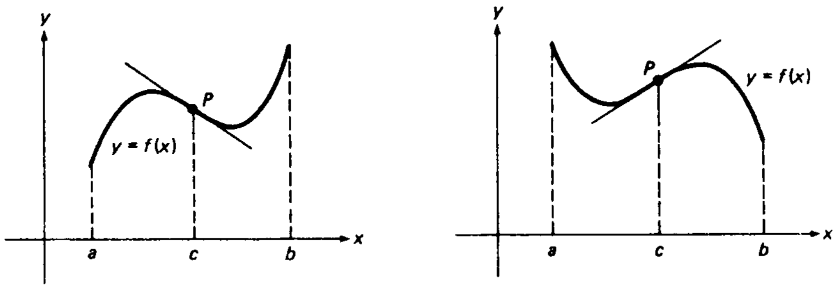
قضیهٔ ۱۰ (آزمون تقعر) . *فرض کنیم f دارای مشتق پیوستهٔ f' بر بازهٔ I بوده، و f'' در هر نقطهٔ درونی I موجود و متحدالعلامه باشد. در این صورت، (یک) f بر I به بالا مقعر است اگر f'' در هر نقطهٔ درونی I مثبت باشد؛ (دو) f بر I به پایین مقعر است اگر f'' در هر نقطهٔ درونی I منفی باشد.*

برهان . ضمن توجه به تعریف تقعر به بالا و پایین، قضیهٔ ۷ را در مورد مشتق f' به جای خود تابع f به کار برید .

قضیهٔ ۱۰ از رفتار f'' در نقاط انتهایی I (اگر بازهٔ I شامل یکی یا هر دو نقطهٔ

انتهایی خود باشد) چیزی نمی‌گوید؛ و در واقع، f'' ممکن است مقدار 0 را گرفته یا حتی در یک نقطهٔ انتهایی I وجود نداشته باشد. همچنین، اگر I باز باشد، هر نقطه از I یک نقطهٔ درونی I است، و لغت " درونی " را می‌توان، درست مثل قضیهٔ ۷، در سه جای صورت قضیه حذف کرد.

تعریف نقطهٔ عطف. گوییم تابع f در c **نقطهٔ عطف** دارد اگر f در c تقعر خود را تغییر دهد. این یعنی بازه‌ای مانند $L = (a, c]$ در چپ c و بازه‌ای چون $R = [c, b)$ در راست c وجود دارند به‌طوری‌که f بر L به بالا مقعر است و بر R به پایین مقعر [ر.ک. شکل ۱۸ (آ)]، یا بر L به پایین مقعر است و بر R به بالا مقعر [ر.ک. شکل ۱۸ (ب)] در اینجا فرض است که $f'(c)$ وجود دارد. همچنین، ممکن است $f'(c)$ موجود نباشد، مثل



هر منحنی در P نقطهٔ عطف دارد.

(ب) (آ)

شکل ۱۸

مثال ۳ زیر. دراین‌حالت L و R را بازه‌های باز (a, c) و (c, b)، با حذف نقطهٔ انتهایی c، گرفته و فرض می‌کنیم مثل همیشه f در c پیوسته باشد. لذا، f در c نقطهٔ عطف دارد اگر و فقط اگر f' بر L صعودی و بر R نزولی باشد، یا بر L نزولی و بر R صعودی باشد. فورا" معلوم می‌شود که *هرگاه f در c نقطهٔ عطف داشته و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه f' در c اکسترمم موضعی اکید دارد*. در واقع، f' در c ماکزیمم موضعی اکید دارد اگر f' بر L صعودی و بر R نزولی باشد، و در c مینیمم موضعی اکید دارد اگر f' بر L نزولی و بر R صعودی باشد.

اگر تابع f در c نقطهٔ عطف داشته باشد، گوییم **منحنی** $y = f(x)$ نیز یک نقطهٔ عطف در $P = (c, f(c))$ دارد. هرگاه منحنی در P مماس داشته باشد، آنگاه، همانطورکه

شکل ۱۸ (آ) و ۱۸ (ب) نشان داده‌اند، منحنی از یک طرف مماس به طرف دیگر در P می‌رود (ر.ک. شکل ۲۵). گاهی مماس در یک نقطهٔ عطف را **مماس عطفی** می‌نامند.

مثال ۱. در تابع $f(x) = x^3$، که در شکل ۱۱، صفحهٔ ۲۷۰، رسم شده، داریم $f'(x) = 3x^2$ و $f''(x) = 6x$. بنابراین، $f''(x) < 0$ اگر $x < 0$ و $f''(x) > 0$ اگر $x > 0$. لذا، طبق آزمون تقعر، f بر $[0, \infty)$ به بالا مقعر و بر $(-\infty, 0]$ به پایین مقعر بوده و در $x = 0$ یک نقطهٔ عطف دارد.

مثال ۲. در تابع $f(x) = x^4$، که درشکل ۱۲، صفحهٔ ۲۷۱ رسم شده، داریم $f'(x) = 4x^3$ و $f''(x) = 12x^2$. لذا، به ازای هر x، $f''(x) \geq 0$، که در آن تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $x = 0$. این بار تقعر به ما می‌گوید که f بر هر دو بازهٔ $(-\infty, 0]$ و $[0, \infty)$، و در نتیجه بر تمام خط حقیقی $(-\infty, \infty)$، به بالا مقعر است. چون تقعر f هرگز تغییر نمی‌کند، f نقطهٔ عطف ندارد.

مثال ۳. هرگاه $f(x) = x^{1/3}$، آنگاه، به ازای هر $x \neq 0$، $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ و $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$ ولی $f'(0)$ و $f''(0)$ وجود ندارند. درواقع، حد معرف $f'(0)$، یعنی

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{1/3} - 0^{1/3}}{x} = \lim_{x \to 0} x^{-2/3}$$

وجود ندارد، زیرا $x^{-2/3}$ در هر همسایگی سفتهٔ نقطهٔ $x = 0$ بی‌کران است، و عدم وجود مشتق اول $f'(0)$ عدم وجود مشتق دوم

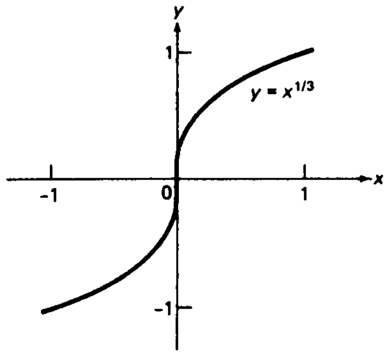
$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$$

را ایجاب می‌کند. با بررسی علامت $f''(x)$ به ازای $x \neq 0$، درمی‌یابیم که $f''(x) > 0$ اگر $x < 0$ و $f''(x) < 0$ اگر $x > 0$. در اینجا از این استفاده می‌کنیم که

$$x^{-5/3} = \frac{1}{(x^{1/3})^5} \qquad (x \neq 0)$$

همان علامت $x^{1/3}$ را دارد که این خود با x هم‌علامت است. پس از آزمون تقعر نتیجه می‌شود که f بر $(-\infty, 0)$ به بالا و بر $(0, \infty)$ به پایین مقعر است و در $x = 0$ نقطهٔ عطف دارد، و این از نمودار f در شکل ۱۹ مشهود می‌باشد. ظاهراً" نمودار در مبداء مماس **قائم** دارد، و در صفحهٔ ۳۰۸ خواهیم دید چرا این مطلب درست است. توجه کنید که نمی‌توان نقطهٔ انتهایی

$x = 0$ را در بازه‌های تقعر $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$ گنجاند، زیرا $f'(0)$ وجود ندارد.

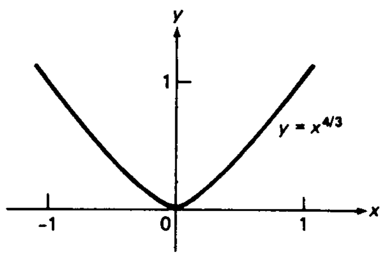


شکل ۱۹

مثال ۴. هرگاه $f(x) = x^{4/3}$، آنگاه به ازای هر x، $f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3}$ و به ازای هر $x \neq 0$، $f''(x) = \frac{4}{9}x^{-2/3}$، ولی $f''(0)$ وجود ندارد، زیرا در اینجا حد

$$f''(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{4}{3}\frac{x^{1/3} - 0^{1/3}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{4}{3}x^{-2/3}$$

معرف $f''(0)$ در هرهمسایگی سفتهٔ $x = 0$ بی‌کران است. با بررسی علامت مشتق دوم در می‌یابیم که به‌ازای هر $x \neq 0$، $f''(x) > 0$. لذا، همانطور که شکل ۲۰ نشان می‌دهد، طبق آزمون تقعر، f بر هر دو بازهٔ $(-\infty, 0]$ و $[0, \infty)$، و درنتیجه بر تمام خط حقیقی $(-\infty, \infty)$، به بالا مقعر است. علی‌رغم عدم وجود $f''(0)$، چرا در اینجا نمی‌توان نقطهٔ انتهایی $x = 0$ را در بازه‌های تقعر $(-\infty, 0]$ و $[0, \infty)$ گنجانید؟



شکل ۲۰

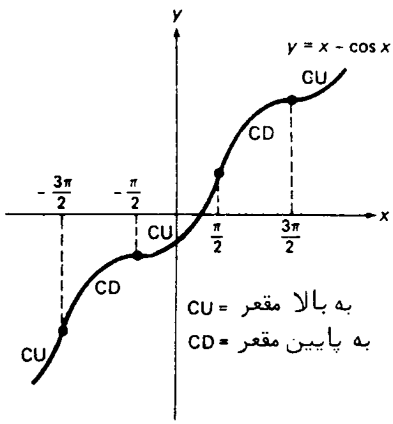
مثال ۵. هرگاه $f(x) = x - \cos x$، آنگاه به ازای هر x، $f'(x) = 1 + \sin x \geq 0$، که در آن $f'(x) = 0$ اگر و فقط اگر

$$x = (2n - \tfrac{1}{2})\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

لذا . طبق آزمون یکنوایی ، f بر هر بازهٔ $[(2n-\frac{1}{2})\pi, (2n+\frac{3}{2})\pi]$ ، و درنتیجه‌برتمام خط حقیقی $(-\infty, \infty)$ ، صعودی است ؛ بخصوص ، f دارای اکسترمم موضعی است . بـا‌بررسی مشتـق دوم $f''(x) = \cos x$ ، درمی‌یابیم که f'' در نقاط

$$x = (n+\tfrac{1}{2})\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{1}$$

مقدار صفر داشته و در هر یک از این نقاط تغییر علامت می‌دهد ، از به‌علاوه به منها اگر n زوج باشد و از منها به به‌علاوه اگر n فرد باشد . از آزمون تقعر نتیجه می‌شود که f برهربازهٔ $[(n-\frac{1}{2})\pi, (n+\frac{1}{2})\pi]$ بـا n زوج به بالا مقعر و بر هر چنین بازه با n فرد به‌پایین مقعر است و هر نقطهٔ (۱) یک نقطهٔ عطف می‌باشد . تمام این نکات از نمودار f که درشکل ۲۱ رسم شده مشهود است .



شکل ۲۱

آزمونهایی برای نقاط عطف . همانطور که قواعد زیر نشان می‌دهند ، نظریهٔ توابع مقعر و نقاط عطف کاملا" شبیه نظریهٔ توابع یکنوا و اکسترممهای موضعی است .

(یک) ***هرگاه f در c نقطهٔ عطف داشته باشد ، $f''(c)$ یا وجود ندارد یا موجود ومساوی‌صفر است ؛ یعنی ، c نقطهٔ بحرانی f' است . این شرط کافی برای نقطهٔ عطف*** نتیجهٔ فـوری شرط لازم برای اکسترمم موضعی است (قضیهٔ ۶ ، صفحهٔ ۲۶۷) ، که دقیقا" مشابه‌آن می‌باشد . در واقع ، هرگاه f در c نقطهٔ عطف داشته و $f'(c)$ موجود باشد ، آنگاه f' در c اکسترمم موضعی دارد (ر.ک. صفحهٔ ۲۷۹) ؛ درنتیجه ، $f''(c)$ وجود ندارد یا $f''(c) = 0$ ، حال آنکه هرگاه $f'(c)$ موجود نباشد ، آنگاه $f''(c)$ نیز وجود ندارد ، زیرا حد

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}$$

معرف $f''(c)$ مستلزم $f'(c)$ می‌باشد.
(دو) **هرگاه c نقطهٔ بحرانی f' بوده و f'' در c تغییر علامت دهد، آنگاه f در c نقطهٔ عطف دارد.** در اینجا وجود f'' دست‌کم در همسایگی سفته‌ای از c فرض است. آزمون **مشتق دوم برای نقطهٔ عطف** مشابه دقیق آزمون مشتق اول برای اکسترمم موضعی است (قضیهٔ ۸، صفحهٔ ۲۷۱)، و فوراً از آزمون تقعر نتیجه می‌شود. در واقع، ما قبلاً از این آزمون مشتق دوم درحل مثالهای ۱، ۳، و ۵ به‌طور تلویحی استفاده کرده‌ایم.
(سه) **هرگاه $f''(c) = 0$ و $f'''(c)$ موجود و ناصفر باشد، آنگاه f در c نقطهٔ عطف دارد.** این **آزمون مشتق سوم برای نقطهٔ عطف** دقیقاً شبیه آزمون مشتق دوم برای اکسترمم موضعی (قضیهٔ ۹، صفحه ۲۷۲) بوده و اساساً به همان نحو ثابت می‌شود، به صورت زیر.

اختیاری. چون مشتق سوم

$$f'''(c) = \lim_{x\to c}\frac{f''(x)-f''(c)}{x-c} = \lim_{x\to c}\frac{f''(x)}{x-c}$$

موجود است، $f''(x)$ در همسایگی c باید وجود داشته باشد. اگر $f'''(c) > 0$، همسایگی سفته‌ای از c وجود دارد که در آن $f''(x)$ با $x-c$ هم‌علامت است، ولی اگر $f'''(c) < 0$، همسایگی سفته‌ای از c وجوددارد که در آن $f''(x)$ با $x-c$ مختلف‌العلامه می‌باشد. درهر حالت f'' در c تغییر علامت‌می‌دهد؛ و لذا، طبق آزمون مشتق‌دوم، f در c نقطهٔ عطف دارد.

باید تأکید کنیم که فقط نقاط بحرانی f' نامزد نقاط بحرانی f اند، همانطور که فقط نقاط بحرانی تابع f نامزد اکسترمم موضعی f می‌باشند، و ممکن است f در یک نقطهٔ بحرانی f' نقطهٔ عطف نداشته باشد.

مثال ۶. در مثال ۱، $f''(x) = 6x$ صفر است اگر و فقط اگر $x = 0$. لذا، طبق قاعدهٔ (یک)، $x = 0$ تنها نامزد برای نقطهٔ عطف بودن f می‌باشد. چون $f'''(x) = 6 \neq 0$، از آزمون مشتق سوم (سه) نتیجه می‌شود که $x = 0$ یک نقطهٔ عطف f است، و این قبلاً با استدلالی معادل آزمون مشتق دوم (دو) نشان داده شده است.

مثال ۷. در مثال ۳ مشتق دوم f جز در $x = 0$، که وجود ندارد، ناصفر است. لذا، طبق قاعدهٔ (یک)، $x = 0$ تنها نامزد نقطهٔ عطف f می‌باشد. نقطهٔ عطف f بودن $x = 0$

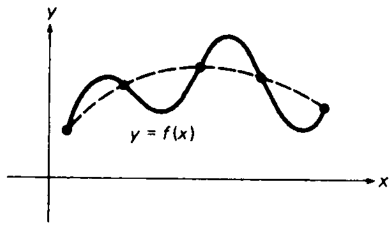
نتیجه‌ای است از آزمون مشتق دوم ، زیرا همانطور که قبلا " گفتیم ، f'' در $x = 0$ تغییر علامت می‌دهد .

مثال ۸ . در مثال ۵ ، $f''(x) = \cos x$ در نقاط $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ (n عدد صحیح دلخواهی است) صفر و در سایر نقاط ناصفر است . از اینرو، باز طبق قاعدهٔ (یک) ، این نقاط تنها نامزدهای نقاط عطف f اند ، و در واقع آزمون مشتق سوم نشان می‌دهد که واقعا " نقاط عطف‌اند زیرا ، به ازای هر عدد صحیح n ،

$$f'''((n + \tfrac{1}{2})\pi) = -\sin ((n + \tfrac{1}{2})\pi) = (-1)^{n+1} \neq 0$$

البته ، ما قبلا " با استدلالی که در آن از آزمون مشتق دوم مکرر استفاده می‌شد به این نتیجه رسیده‌ایم .

رسم منحنی . تا بحال باید روشن شده باشد که اطلاعات در باب چند مشتق اول تابع f ارزش زیادی در رسم نمودار f ، یعنی در رسم منحنی $y = f(x)$ ، دارد . مسلم است که هیچ ایدهٔ روشنی از رفتار یک تابع بدون (دست کم) تعیین تمام نقاط اکسترمم و عطف حاصل نمی‌شود . شکل ۲۲ نشان می‌دهد که اگر بخواهیم نمودار f را بدون این کار رسم کنیم ، چه



خطر " اتصال نقاط به یکدیگر "

شکل ۲۲

مشکلی پیش می‌آید . منحنی توپر نمودار واقعی f است ، و منحنی منقطع نتیجهٔ گمراه‌کنندهٔ رسم یک منحنی هموار مار بر نقاط " بد انتخاب شده "ای از نمودار f می‌باشد .

در جدول زیر تمام تکنیکهای رسم منحنی که اینک در اختیار ماست ذکر شده‌اند . درایهٔ اول در هر سطر خاصیتی است از تابع پیوستهٔ f یا مشتقاتش ، و درایهٔ دوم نتیجه‌ای از این خاصیت می‌باشد .

هرگاه:	آنگاه:	
f در c اکسترمم موضعی داشته باشد	f در c نقطهٔ بحرانی دارد؛ یعنی، $f'(c)$ وجود ندارد یا $f'(c)=0$ (**شرط لازم برای اکسترمم موضعی**)	
f بر بازهٔ I پیوسته و f' در هر نقطهٔ درونی I مثبت (منفی) باشد	f بر I صعودی (نزولی) است (**آزمون یکنوایی**)	
f در c نقطهٔ بحرانی داشته و f' در c از منها به‌به‌علاوه‌تغییرعلامت‌دهدیا $f''(c)>0$	f در c مینیمم موضعی اکید دارد	آزمونهای مشتق اول و دوم برای **اکسترمم موضعی**
f در c نقطهٔ بحرانی داشته و f' در c از به‌علاوه‌به‌منها تغییرعلامت‌دهدیا $f''(c)<0$	f در c ماکزیمم موضعی اکید دارد	
f' بر بازهٔ I صعودی (نزولی) باشد	f بر I به‌بالا (پایین) مقعر است (**تعریف**)	
f' بر بازهٔ I پیوسته بوده و f'' در هر نقطهٔ درونی مثبت (منفی) باشد	f بر I به بالا (پایین) مقعر است (**آزمون تقعر**)	
f تقعر خود را در c تغییر دهد	f در c نقطهٔ عطف دارد (**تعریف**)	
f در c نقطهٔ عطف داشته باشد	f' در c نقطهٔ بحرانی دارد؛ یعنی، $f''(c)$ وجود ندارد یا $f''(c)=0$ (**شرط لازم برای نقطهٔ عطف در c**)	
f' در c نقطهٔ بحرانی داشته، و f'' در c تغییر علامت دهد یا $f'''(c)\neq 0$	f در c نقطهٔ عطف دارد (**آزمونهای مشتق دوم و سوم برای نقطهٔ عطف**)	

در رسم منحنی $y=f(x)$ تقارنهای ممکن را جستجو کنید (ممکن است تقارنی درکار نباشد). اگر f تابع زوجی باشد، منحنی نسبت به محور y متقارن است، حال آنکه اگر f فرد باشد، منحنی نسبت به مبداء متقارن است، ولی همانطور که مثال زیر نشان می‌دهد، حالات دیگری نیز وجود دارند. همچنین، سعی کنید **قطعهای** x منحنی را (در صورت وجود) بیابید؛ یعنی، مختصات x نقاطی که منحنی در آنها محور x را قطع می‌کند. تعیین دقیق قطعهای x ممکن است مشکل باشد، زیرا مستلزم حل معادلهٔ $f(x)=0$ است، و ممکن است یک تکنیک تقریبی مانند روش تنصیف (ر.ک. صفحهٔ ۱۵۴) به کار آید.

مثال ۹. با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال، تابع

$$f(x)=2x^4-8x^3+8x^2 \qquad (۲)$$

را بررسی کرده و نمودار آن را رسم نمایید.

حل. با تجزیهٔ ۲ به دست می‌آوریم

$$f(x)=2x^4-8x^3+8x^2=2x^2(x^2-4x+4)=2x^2(x-2)^2,$$

و این نشان می‌دهد که منحنی $y=f(x)$ دارای دو قطع x، 0 و 2 است. تابع f نه زوج است نه فرد؛ درنتیجه، منحنی تقارنی نسبت به محور y یا مبداء ندارد، ولی نوع دیگری

تقارن دارد که لحظه‌ای دیگر معلوم می‌شود . با سه بار مشتقگیری از f به دست می‌آید

$$f'(x) = 8x^3 - 24x^2 + 16x = 8x(x^2 - 3x + 2) = 8x(x-1)(x-2),$$

$$f''(x) = 24x^2 - 48x + 16 = 24\left(x^2 - 2x + \frac{2}{3}\right),$$

$$f'''(x) = 48x - 48.$$

اگر $f'(x)$ را مساوی صفر قرار دهیم ، درمی‌یابیم که f سه نقطهٔ بحرانی $x = 0, 1, 2$ دارد . با محاسبهٔ f'' دراین‌نقاط ، معلوم می‌شودکه $f''(0) = 16 > 0, f''(1) = -8 < 0, f''(2) = 16 > 0$. لذا ، f در $x = 0$ و $x = 2$ مینیمم موضعی اکیدی مساوی $f(0) = f(2) = 0$ (دومینیمم مساویند) ، و در $x = 1$ ماکزیمم موضعی اکیدی مساوی $f(1) = 2$ دارد . بامساوی صفر قرار دادن $f''(x)$ ، معادلهٔ درجهٔ دوم

$$x^2 - 2x + \frac{2}{3} = (x-1)^2 - \frac{1}{3} = 0$$

با جوابهای

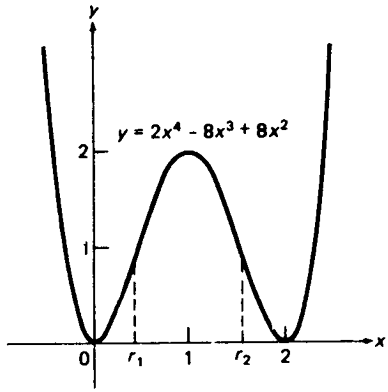
$$r_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.42, \qquad r_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 1.58$$

به دست می‌آید . نقاط r_1 و r_2 نامزد نقاط عطف f اند ؛ و درواقع ، نقاط عطف می‌باشند، زیرا $f'''(r_1) = -16\sqrt{3} \neq 0$ و $f'''(r_2) = 16\sqrt{3} \neq 0$.

با نگاه دقیقتری به‌مشتقات‌اول و دوم f' و f'' باید نکات‌بیشتری‌در باب f آموخت. از فرمول $f'(x) = 8x(x-1)(x-2)$ معلوم می‌شود که $f'(x) < 0$ اگر $x < 0$ ، $f'(x) > 0$ اگر $0 < x < 1$ ، $f'(x) < 0$ اگر $1 < x < 2$ ، $f'(x) > 0$ اگر $x > 2$. لذا ، f بر بازه‌های $[0, 1]$ و $[2, \infty)$ صعودی‌و بر بازه‌های $(-\infty, 0]$ و $[1, 2]$ نزولی‌است . همچنین ، با نوشتن $f''(x) = 24(x - r_1)(x - r_2)$ ، معلـوم می‌شود که $f''(x) > 0$ اگر $x < r_1$ ، $f''(x) < 0$ اگر $r_1 < x < r_2$ ، $f''(x) > 0$ اگر $x > r_2$. لذا ، f بر بازه‌هـای $(-\infty, r_1]$ و $[r_2, \infty)$ به بالا مقعر ، و بر بازهٔ $[r_1, r_2]$ به پایین مقعر می‌باشد .

حال ، با استفاده از این اطلاعات ، می‌توان تابع (۲) را رسم کرد . منحنی‌حاصل‌در شکل ۲۳ نموده شده است . با استفاده از ماشین حساب ، چند نقطه از منحنی رسم شده‌اند، ولی فقط به کمک حساب دیفرانسیل و انتگرال است که می‌توان مطمئن شد که نقاط درست به هم وصل شده‌اند و هیچ ویژگی مهمی از منحنـی $y = f(x)$ نادیده گرفته نشده است . بخصوص ، این بدان خاطر است‌که مطمئن‌شده باشیم که نقاط منحنی نظیر به نقاط اکسترمم و عطف تابع f رسم شده‌اند . از نمودار معلوم می‌شود که منحنی نسبت به خط قائم $x = 1$

متقارن است. اگر توجه می‌کردیم که تابع $f(x) = 2x^2(2-x)^2$ در اتحاد $f(1-x) \equiv f(1+x)$ که به آسانی تحقیق می‌شود صدق می‌کند، این امر را می‌شد پیش‌بینی کرد.



شکل ۲۳

مسائل

تمام نقاط عطف تابع داده شده را بیابید.

۱. $f(x) = \sin x$

۲. $f(x) = \cos x$

۳. $f(x) = \cot x$

۴. $f(x) = \tan x$

۵. $f(x) = \sec x$

۶. $f(x) = \csc x$

۷. $f(x) = \tan x + \cot x$

۸. $f(x) = x + \sin x$

۹. نشان دهید که آزمون مشتق سوم برای نقطهٔ عطف در صورت صفر بودن مشتق سوم بی‌حاصل است.

تمام اکسترممهای موضعی و نقاط عطف تابع داده شده را بیابید. تابع بر چه بازه‌هایی صعودی است؟ نزولی است؟ به بالا مقعر است؟ به پایین مقعر است؟ تابع را رسم کنید.

۱۰. $f(x) = x^{2/3}$

۱۱. $f(x) = x^{5/3}$

۱۲. $f(x) = 2 + x - x^2$

۱۳. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

۱۴. $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 1$

۱۵. $f(x) = 4x^2 - 2x^4$

۱۶. $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

۱۷. $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 3}$

۱۸. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

۱۹. نشان دهید که تابع $f(x) = x^2 + ax + b$، بی‌توجه به مقادیر a و b، نقطهٔ عطف

ندارد . آیا این مطلب در مورد تابع $g(x) = x^4 + ax + b$ نیز درست است ؟

۲۰ . نشان دهید که تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ، بی‌توجه به مقادیر a ، b ، و c ، همواره نقطهٔ عطف دارد . f به ازای چه مقداری از a در $x = 1$ نقطهٔ عطف دارد ؟

۲۱ . نشان دهید که تابع $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، بی‌توجه به مقادیر c و d ، نقطهٔ عطف ندارد اگر $3a^2 \leq 8b$ و دو نقطهٔ عطف دارد اگر $3a^2 > 8b$.

۲۲ . نقطهٔ عطف تابع $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ کجاست ؟

۲۳ . به ازای چه مقادیری از a و b ، نقطهٔ $(1, 3)$ نقطهٔ عطف منحنی $y = ax^3 + bx^2$ است ؟

۲۴ . نشان دهید که سه نقطهٔ عطف نمودار تابع مسئلهٔ ۱۸ بر خط واحدی قرار دارند . این خط چیست ؟

۲۵ . فرض کنید f بر بازهٔ باز $I = (a, b)$ مشتق‌پذیر بوده ، و c نقطه‌ای از I باشد . در این صورت ، مماس بر منحنی $y = f(x)$ در $P = (c, f(c))$ خط $y = t(x) = f'(c)(x-c) + f(c)$ بوده ، و تفاضل بین مختص y منحنی $y = f(x)$ و مختص y خط $y = t(x)$ ، به‌عنوان تابعی از x ، مساوی است با

$$g(x) = f(x) - t(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x-c).$$

نشان دهید هرگاه f بر I به بالا (پایین) مقعر باشد ، آنگاه g بر I مثبت (منفی) است جز در c که در آن g دارای مقدار 0 است ؛ درنتیجه ، منحنی $y = f(x)$ بالای (پایین) مماسش در دو طرف نقطهٔ P قرار دارد . نشان دهید هرگاه منحنی در P مماس عطفی داشته باشد ، آنگاه g در c تغییر علامت می‌دهد ؛ درنتیجه ، منحنی از یک طرف مماس خود به طرف دیگر در P می‌رود .

۴.۳ حدود مستلزم بی‌نهایت ؛ صور مبهم

نمودار تابع

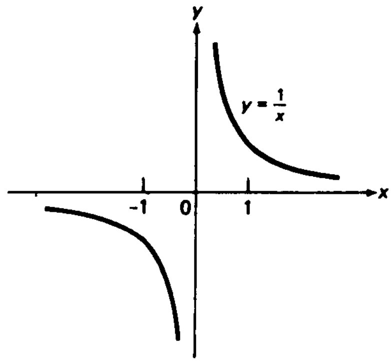
$$y = f(x) = \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0)$$

در شکل ۲۴ نموده شده است . با بررسی نمودار معلوم می‌شود که f از خواص حدی جالبی برخوردار است که هنوز مورد بحث قرار نگرفته‌اند :

(یک) وقتی x مقادیر کوچک (مثبت یا منفی) اختیار کند ، y مقادیر بزرگ با همان علامت خواهد گرفت ؛

(دو) وقتی x مقادیر بزرگ (مثبت یا منفی) اختیار کند ، y مقادیر کوچک (با همان

علامت) خواهد گرفت .
البته، در اینجا منظور از عدد منفی کوچک یا بزرگ عددی است منفی با قدر مطلق کوچک یا بزرگ .



شکل ۲۴

این خواص f رفتار حدی خاصی را بیان می‌کنندکه‌در آن بزرگی و کوچکی نقشی بــر عهده دارد . چطور زبان حدود را تعدیل کنیم که حالاتی از این نوع را دربرگیرد؟ خیلی ساده است . اگر متغیری ، مثلا " x ، مقادیر مثبت بزرگ اختیار کند ، گوییم x به *(به‌علاوه)* **بی‌نهایت نزدیک می‌شود** و می‌نویسیم $x \to \infty$ ، حال آنکه اگر x مقادیر منفی بزرگ‌اختیار کند ، گوییم x **به‌منهای بی‌نهایت نزدیک‌می‌شود** و می‌نویسیم $x \to -\infty$. این با استفاده از علایم ∞ و$-\infty$ در نوشتن بازه‌های نامتناهی سازگار است . بار دیگر تأکید می‌کنیم که ∞ و$-\infty$ عدد **نیستند** .

حدود نامتناهی در مقابل حدود در بی‌نهایت . حال می‌توان خواص (یک) و (دو) تابع $y = 1/x$ را فشرده‌تر بیان کرده ، حدود (یک) را به صورت

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \tag{1}$$

و حدود (دو) را به صورت

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0, \tag{2}$$

یا ، حتی فشرده‌تر ، به صورت

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{2'}$$

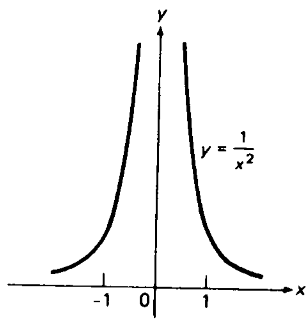
نوشت . در (۱) حدود نامتناهی و در (۲) حدود در بی‌نهایت داریم . این باحدودی که تابحال درنظر گرفته‌ایم ، که همه متناهی‌اند ، یعنی

$$\lim_{x\to a} f(x) = L, \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = L, \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = L,$$

که در آنها a و L عددند و علایم ∞ و $-\infty$ نیستند فرق دارد .

حدود (۱) یکطرفه‌اند ، ولی حدود نامتناهی می‌توانند دوطرفه نیز باشند . مثلاً ، شکل ۲۵ نشان می‌دهد که

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$



شکل ۲۵

واضح است‌که وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to \infty$ اگر وفقط اگروقتی $x \to a^+$ و $x \to a^-$ ، $f(x) \to \infty$ و همین امر در صورت تعویض ∞ با $-\infty$ درست است . همچنین ، می‌توان حدود نامتناهی در بی‌نهایت داشت . مثلاً ، از شکلهای ۱۹ و ۲۰ ، صفحهٔ ۲۸۱ ، معلوم می‌شود که

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/3} = \infty, \qquad \lim_{x\to -\infty} x^{1/3} = -\infty$$

و

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^{4/3} = \infty.$$

این نکات را می‌توان با تعدیل زبان ε, δ که در آن علایمی غیر از ε و δ ، یعنی C و A ، برای اعدادی که نوعاً " بزرگ " هستند به کار رود دقیق ساخت : با این کار ازکوچکی مربوط به ε و δ پرهیز می‌شود . مثلاً " ، وقتی $x \to a^+$ ، $f(x) \to \infty$ یعنی به ازای‌هر $C > 0$ (مهم نیست چقدر بزرگ) ، می‌توان $\delta > 0$ ای (به قدر کافی کوچک) یافت به‌طوری که هروقت $a < x < a + \delta$ ، $f(x) > C$. به همین نحو ، وقتی $x \to \infty$ ، $f(x) \to -\infty$ یعنی به ازای هر $C > 0$ (مهم نیست چقدر بزرگ) ، می‌توان $A > 0$ ای (به قدر کافی

بزرگ) یافت به‌طوری که هر وقت $x > A$ ، $f(x) < -C$ ؛ در اینجا فرض است که f بر بازه‌ای نامتناهی از نوع (c, ∞) تعریف شده‌است . یا ، به‌عنوان مثالی دیگر ، وقتی $x \to -\infty$ ، $f(x) \to L$ یعنی به ازای هر $\varepsilon > 0$ (مهم نیست چقدر کوچک) ، می‌توان $A > 0$ ای (به قدر کافی بزرگ) یافت به‌طوری که هر وقت $x < -A$ ، $|f(x) - L| < \varepsilon$ ، که در اینجا فرض است که f بر بازه‌ای نامتناهی ازنوع $(-\infty, c)$ تعریف شده است . وقتی با این تعاریف خو گرفتید ، می‌توانید عبارت داخل پرانتزها را حذف کنید .

مثال ۱ . فرمولهای حدی (۱) را دقیقاً ثابت کنید .

حل . به ازای $C > 0$ داده شده ، قرار می‌دهیم $\delta = 1/C$. اگر $0 < x < \delta$ ، داریم

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = C,$$

حال آنکه اگر $-\delta < x < 0$ ، بنابر قاعدهٔ تقابل در نامساویها (قضیهٔ ۴ ، صفحهٔ ۱۳) ،

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{-\delta} = -C.$$

اما این با (۱) به " زبان C, δ " معادل است .

مثال ۲ . فرض کنید n عدد صحیح مثبتی باشد . نشان دهید که

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} \infty & \text{اگر } n \text{ زوج باشد ،} \\ -\infty & \text{اگر } n \text{ فرد باشد ،} \end{cases} \tag{۳}$$

حل . به‌ازای $C > 0$ ی دلخواه ، قرارمی‌دهیم $\delta = \sqrt[n]{1/C}$ و ابتدا فرض‌می‌کنیم $0 < x < \delta$ پس $0 < x^n < \delta^n$ ؛ و لذا ،

$$\frac{1}{x^n} > \frac{1}{\delta^n} = C. \tag{۴}$$

حال فرض کنیم $-\delta < x < 0$. پس اگر n زوج باشد ، $0 < x^n < \delta^n$ ، و مجدداً " نامساوی (۴) به دست می‌آید ، حال آنکه اگر n فرد باشد ، $-\delta^n < x^n < 0$ ، و در عوض خواهیم داشت

$$\frac{1}{x^n} < \frac{1}{-\delta^n} = -C \tag{۴'}$$

و بدین وسیله برهان (۳) در زبان δ ،C کامل می‌شود. توجه کنید که اگر $n=1$ ، (۳) به (۱) تحویل خواهد شد.

مثال ۳. نشان دهید

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0, \tag{۵}$$

که در آن n عدد صحیح مثبتی است.

حل. به ازای هر $\varepsilon>0$ ، فرض کنید $A=\sqrt[n]{1/\varepsilon}$. پس اگر $x>A$ یا $x<-A$ ، یعنی $|x|>A$ ، داریم

$$\left|\frac{1}{x^n}-0\right|=\frac{1}{|x|^n}<\frac{1}{A^n}=\varepsilon,$$

و حد (۵) را این بار به "زبان A ،ε" ثابت کرده‌ایم. توجه کنید که اگر $n=1$ ، (۵) به (۲') تحویل می‌شود.

مثال ۴. فرض کنید m و n اعداد صحیح مثبتی باشند. نشان دهید که

$$\lim_{x\to\infty}x^{m/n}=\infty. \tag{۶}$$

حل. برای آنکه $x^{m/n}$ از $C>0$ داده شده تجاوز کند، $x>A=C^{n/m}$ را اختیار می‌کنیم، زیرا در این صورت $x^{m/n}>A^{m/n}=C$. این حد (۶) را به "زبان C, A" ثابت می‌کند.

مثال ۵. فرض کنید m و n اعداد صحیح مثبتی باشند به‌طوری‌که n فرد و m/n تحویل‌ناپذیر باشد. نشان دهید که

$$\lim_{x\to-\infty}x^{m/n}=\begin{cases}\infty\text{ ، اگر } m \text{ زوج باشد}\\-\infty\text{ ، اگر } m \text{ فرد باشد}\end{cases} \tag{۶'}$$

حل. یک برهان غیرصوری کفایت می‌کند. چون n فرد است، $x^{m/n}=(\sqrt[n]{x})^m$ به ازای x منفی تعریف شده است. اگر x مقادیر منفی بدلخواه بزرگ بگیرد، $\sqrt[n]{x}$ نیز چنین می‌کند. لذا $x^{m/n}=(\sqrt[n]{x})^m$ به ازای m زوج مقادیر مثبت بدلخواه بزرگ می‌گیرد و، به ازای m فرد،

مقادیر منفی بدلخواه بزرگ خواهد گرفت .

مثلا " ، به کمک فرمولهای (۶) و ('۶) ،

$$\lim_{x\to\infty} x^{5/6} = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^{3/7} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^{4/7} = \infty,$$

ولی

$$\lim_{x\to-\infty} x^{5/6}$$

بی معنی است .

اعمال برحدود در بی‌نهایت . قضایای حاکم بر اعمال جبری حدود معمولی ، که در صفحهٔ ۱۳۰خلاصه شده اند ، برای حدود در بی‌نهایت برقرار می‌مانند . لذا ، هرگاه

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L, \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = M, \tag{۷}$$

آنگاه

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M, \tag{۸}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = LM, \tag{۹}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \qquad (M \neq 0), \tag{۱۰}$$

و همین فرمولها در صورت تعویض ∞ با$\infty-$ برقرارند . برهانها اساسا " همان برهانهای حدود معمولی‌اند .

اختیاری. مثلا " ، برهان (۸) مشابه دقیق برهان قضیهٔ ۴ ، صفحهٔ ۱۳۱، است و به صورت زیر پیش می‌رود . به‌خاطر (۷) ، به ازای هر $\varepsilon > 0$ می‌توان عددی مانند $A_f > 0$ یافت به طوری که هر وقت $x > A_f$ ، $|f(x) - L| < \varepsilon/2$ و عددی چون $A_g > 0$ یافت به‌طوری که هروقت $x > A_g$ ، $|g(x) - M| < \varepsilon/2$. لذا ، طبق نامساوی مثلثی ، هر وقت $x > A = \max\{A_f, A_g\}$ یعنی هروقت x از A_f و A_g تجاوز کند ،

$$|f(x) \pm g(x) - (L \pm M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ولی این دقیقا " یعنی (۸) به زبان ε, A .

مثال ۶ . $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x+4)(2x^2+1)}$ را حساب کنید .

حل.ابتدا صورت و مخرج را بر x^3 تقسیم می‌کنیم :

$$\frac{x^3}{(x+4)(2x^2+1)}=\frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x+4}{x}\frac{2x^2+1}{x^2}}=\frac{1}{\left(1+\frac{4}{x}\right)\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}.$$

این کمک بزرگی است ، چون عبارت طرف راست شامل توابع $1/x$ و $1/x^2$ است که قبلاً در مثال ۳ دیدیم که هر دو وقتی $x \to \infty$ به 0 نزدیک می‌شوند . حال با استفاده از فرمولهای (۸) تا (۱۰) ، حد وقتی $x \to \infty$ می‌گیریم . نتیجه عبارت است از

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x+4)(2x^2+1)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x}\right)\left(2+\frac{1}{x^2}\right)\right]}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2},$$

زیرا

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}1+4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=1+4\cdot 0=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}2+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=2+0=2.$$

پس نشان داده‌ایم که

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x+4)(2x^2+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x^3+8x^2+x+4}=\frac{1}{2}.$$

همین نتیجه را می‌توان با استدلال صوریتر زیر به دست آورد : از چهار جملهٔ موجود در مخرج $2x^3+8x^2+x+4$ ، جملهٔ $2x^3$ در صورت بزرگ‌بودن x بیشترین سهم را دارد . بنابراین ، می‌توان نوشت

$$\frac{x^3}{2x^3+8x^2+x+4}\approx\frac{x^3}{2x^3}=\frac{1}{2},$$

که در آن تقریب با بزرگ شدن x بهتر می‌شود .

اعمال بر حدود نامتناهی . قواعد محاسبه باحدودنامتناهی ،به‌خلاف حدود در بی‌نهایت ،

از نوع متفاوتی هستند. مثلاً، هرگاه

$$\lim_{x\to a} f(x) = L, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

آنگاه

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \infty. \tag{11}$$

به‌طور غیرصوری، فرض‌کنیم وقتی $x \to a$، $f(x)$ به حدی نزدیک شود. در این صورت، اگر وقتی $x \to a$، $g(x)$ مقادیر مثبت بدلخواه بزرگ اختیار کند، $f(x) + g(x)$ نیز چنین می‌کند. این مسلماً درست است، زیرا مجموع یک عدد مثبت بسیار بزرگ و عددی نزدیک عدد L باید عدد مثبت بسیار بزرگی باشد.

اختیاری. اگر برهان دقیقی لازم باشد به‌صورت زیر است. چون‌وقتی $x \to a$، $f(x) \to L$، عددی مانند k (نه لزوماً مثبت) و عدد مثبتی چون δ_f وجود دارند به‌طوری‌که‌هروقت $0 < |x - a| < \delta_f$، $f(x) > k$. همچنین، از اینکه وقتی $x \to a$، $g(x) \to \infty$ معلوم می‌شود که به ازای هر $C > 0$ عدد مثبتی مانند δ_g وجود دارد به‌طوری که هر وقت $0 < |x - a| < \delta_g$، $g(x) > C - k$. دراین‌صورت، هروقت $0 < |x - a| < \delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$، $f(x) + g(x) > k + (C - k) = C$، و (۱۱) به زبان C, δ ثابت شده است.

با نماد اختصاری، هم‌اکنون نشان دادیم که هرگاه $f(x) \to L$ و $g(x) \to \infty$، آنگاه $f(x) + g(x) \to \infty$ (عبارت "وقتی $x \to a$" در سه جا حذف شده است). به‌همین‌نحو به آسانی معلوم می‌شودکه هرگاه $f(x) \to L$ و $g(x) \to -\infty$، آنگاه $f(x) + g(x) \to -\infty$ درواقع، می‌توان این قاعده و قاعدهٔ قبل را در یک قاعده آورد:

(یک) هرگاه $f(x) \to L$ و $g(x) \to \pm\infty$، آنگاه $f(x) + g(x) \to \pm\infty$، با این فرض که در دو مورد $\pm$ فقط یک‌علامت، به‌علاوه یا منها، باید اختیار شود (به‌طورکلی، اگر علامت $\pm$ یا $\mp$ در دو یا چند جا ظاهر شوند، می‌پذیریم که در همه‌جا علامت بالا یا علامت‌پایین را اختیار کنیم). یک قاعدهٔ مربوطه عبارت است از

(یکَ) هرگاه $f(x) \to \pm\infty$ و $g(x) \to \pm\infty$، آنگاه $f(x) + g(x) \to \pm\infty$، که آن را می‌توان به‌طور غیرصوری به‌این نحو ثابت‌کرد که مجموع دو عدد مثبت بدلخواه بزرگ‌عدد مثبت بدلخواه بزرگی است، ولی مجموع دو عدد منفی بدلخواه بزرگ عدد منفی بدلخواه بزرگی می‌باشد.

حال با ادامهٔ این کار می‌توان قواعد دیگری برای حدود نامتناهی به دست آورد.

در قواعد (چهار) و (چهار') نماد $g(x) \to 0^+$ یعنی وقتی $x \to a$ ، $g(x) \to 0$ و $g(x)$ به ازای هر x در همسایگی سفته‌ای از a مثبت است ، حال آنکه $g(x) \to 0^-$ یعنی وقتی $x \to a$ ، $g(x) \to 0$ و $g(x)$ به ازای جمیع x های همسایگی سفته‌ای از a منفی می‌باشد .

(دو) هرگاه $f(x) \to L \neq 0$ و $g(x) \to \pm\infty$ ، آنگاه $f(x)g(x) \to \pm\infty$ اگر $L > 0$ ، در حالی که $f(x)g(x) \to \mp\infty$ اگر $L < 0$ ؛

(دو') هرگاه $f(x) \to \pm\infty$ و $g(x) \to \pm\infty$ ، آنگاه $f(x)g(x) \to \pm\infty$ اگر $f(x) \to \infty$ در حالی که $f(x)g(x) \to \mp\infty$ اگر $f(x) \to -\infty$ ؛

(سه) هرگاه $f(x) \to L$ و $g(x) \to \pm\infty$ ، آنگاه $f(x)/g(x) \to 0$ ؛

(چهار) هرگاه $f(x) \to L \neq 0$ و $g(x) \to 0^\pm$ ، آنگاه $f(x)/g(x) \to \pm\infty$ اگر $L > 0$ درحالی که $f(x)/g(x) \to \mp\infty$ اگر $L < 0$ ؛

(چهار') هرگاه $f(x) \to \pm\infty$ و $g(x) \to 0^\pm$ ، آنگاه $f(x)/g(x) \to \pm\infty$ اگر $f(x) \to \infty$ در حالی که $f(x)/g(x) \to \mp\infty$ اگر $f(x) \to -\infty$.

مثلاً ، جان مطلب در قاعدهٔ (چهار) این است که حاصل تقسیم یک عدد ناصفر بر یک عدد کوچک همعلامت با آن عدد مثبت بزرگی است ، ولی حاصل تقسیم هر عدد ناصفر بر یک عدد کوچک مختلف‌العلامه با آن عدد منفی بزرگی می‌باشد . مطمئن شوید که درک شهودی مشابهی از این قواعد به دست آورده‌اید .

در قواعد فوق فرض است که وقتی $x \to a$ ، توابع $f(x)$ و $g(x)$ به حدودشان ، متناهی یا نامتناهی ، نزدیک‌می‌شوند ، ولی تمام قواعد درصورتی که $x \to a^+$ یا $x \to a^-$ یاحتی $x \to \infty$ یا $x \to -\infty$ برقرار می‌مانند . در یک‌حد وقتی $x \to a^+$ ، نماد $g(x) \to 0^+$ یعنی $g(x) \to 0$ و $g(x)$ به ازای جمیع x های بازه‌ای چون $(a, a+\delta)$ مثبت است ، و در یک حد وقتی $x \to \infty$ ، نماد $g(x) \to 0^-$ یعنی $g(x) \to 0$ و $g(x)$ در بازه‌ای چون (c, ∞) منفی می‌باشد ، و از این قبیل .

مثال ۷ . چون وقتی $x \to 0^+$ ، $\cos x \to 1$ و $1/x \to \infty$ ، اعمال قاعدهٔ (یک) نتیجه می‌دهد که

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\cos x + \frac{1}{x}\right) = \infty.$$

مثال ۸ . چون طبق مثال ۴ وقتی $x \to \infty$ ، $x^{2/3} \to \infty$ و $x^{5/3} \to \infty$ ، از قاعدهٔ (یکَ) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x\to\infty}(x^{2/3}+x^{5/3})=\infty,$$

و سپس از قاعدهٔ (سه) داریم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{2/3}+x^{5/3}}=0.$$

مثال ۹. چون وقتی $x\to 0^-$ ، $(\sin x)/x\to 1$ و $1/x\to -\infty$ ، قاعدهٔ (دو) نتیجه می‌دهد که

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x^2}=-\infty.$$

چگونه قاعدهٔ (چهار) همین نتیجه را فوراً" می‌دهد؟

صور مبهم $0/0$ ، $0\cdot\infty$ ، ∞/∞ ،و $\infty-\infty$. باآنکه قواعد (یک) تا (چهار) مطالب زیادی از رفتار حدود نامتناهی به ما می‌گویند، هنوز چندحالتی وجود دارند که چیزی‌در باب آنها گفته‌نشده‌است. به‌طور مشخص، قاعدهٔ (یک') شامل $f(x)\to\infty$ و $g(x)\to-\infty$ (یا $f(x)\to-\infty$ و $g(x)\to\infty$) نمی‌شود، قاعدهٔ (دو) شامل $f(x)\to 0$ و $g(x)\to\pm\infty$ نمی‌شود، قاعدهٔ (سه) شامل $f(x)\to\infty$ و $g(x)\to\pm\infty$ (یا $f(x)\to-\infty$ و $g(x)\to\pm\infty$) نمی‌شود، و قاعدهٔ (چهار) شامل $f(x)\to 0$ و $g(x)\to 0^{\pm}$ نخواهد شد. این چهار حالت را به ترتیب با صور مبهم $\infty-\infty$ ، $0\cdot\infty$ ، ∞/∞ ، و $0/0$ نشان می‌دهیم[1]. هر صورت مبهم اختصاری است برای حدی که هر مقدار (به انضمام ∞ یا $-\infty$) دارد یا حتی وجود ندارد. واژهٔ مبهم همان معنی صورت مبهم را داشته، و منظور از رفع ابهام یعنی یافتن حد نظیر به ابهام (در صورت وجود) می‌باشد.

صورت مبهم $0/0$ اختصاری است برای

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)},$$

که در آن وقتی $x\to a$ (به جای $x\to a$ ممکن است $x\to a^+$ ، $x\to a^-$ ، $x\to\infty$ یا $x\to-\infty$ داشته باشیم) ، $f(x)\to 0$ و $g(x)\to 0$. ما قبلاً" حدود بسیاری از این نوع را بررسی کرده‌ایم، و بخصوص محاسبهٔ هر مشتق

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

---

۱. عبارات 0^0 ، ∞^0 ،و 1^∞ نیز صور مبهم‌اند، و در بخش ۶.۵ درنظر گرفته خواهند شد.

یعنی رفع ابهام $0/0$ ، زیرا صورت و مخرج خارج قسمت تفاضلی سمت راست هر دو با $x \to a$ به 0 نزدیک می‌شوند و، در واقع، به ازای $x = a$ برابر 0 اند. با انتخاب $f(x) = Lx$ و $g(x) = x$ ، داریم

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} L = L,$$

درحالی که انتخاب $f(x) = \pm x$ و $g(x) = x^3$ نتیجه می‌دهد

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\pm 1}{x^2} = \pm \infty.$$

به‌علاوه، هرگاه $f(x) = x \sin (1/x)$ و $g(x) = x$ ، آنگاه، بنابر مثال ۱۰، صفحهٔ ۱۲۷،

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$

وجود ندارد. اما در هر سه حالت وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to 0$ و $g(x) \to 0$. لذا، حد نظیر به ابهام $0/0$ را می‌توان هر عدد، ازجمله ∞ یا $-\infty$، گرفت یا حتی ممکن است موجود نباشد. همین امر در مورد ابهامهای $0 \cdot \infty$ و ∞/∞ درست است، زیرا عبارت $f(x)/g(x)$ ، که وقتی $x \to a$ ، به $0/0$ تحویل می‌شود، را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت:

$$f(x) \frac{1}{g(x)}$$

که به $0 \cdot \infty$ تحویل می‌شود، یا به شکل

$$\frac{1/g(x)}{1/f(x)}$$

نوشت که به ∞/∞ تحویل می‌شود (بنابر قاعدهٔ (چهار)، اگر تابعی به صفر نزدیک‌شود، متقابلش به بی‌نهایت نزدیک خواهد شد). مثلاً، از

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\pi x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \pi x \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{1/\pi x} = \pi$$

معلوم می‌شود که π مقدار ممکنی از حد نظیر به هر صورت مبهم $0/0$ ، $0 \cdot \infty$ ، و ∞/∞ است.

صورت مبهم $\infty - \infty$ اختصاری است برای

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)],$$

که در آن وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to \infty$ و $g(x) \to \infty$. بـا اختیـار $f(x) = L + (1/x^2)$ و

$g(x) = 1/x^2$ ، داریم

$$\lim_{x\to 0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to 0} L = L,$$

حال آنکه انتخاب $f(x) = 2/x^2$ و $g(x) = 1/x^2$ نتیجه می‌دهد

$$\lim_{x\to 0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

(به همین نحو، اگر $f(x) = 1/x^2$ و $g(x) = 2/x^2$ ، وقتی $x \to 0$ خواهیم داشت $f(x) - g(x) \to -\infty$) . به‌علاوه، هرگاه $f(x) = \sin(1/x) + 1/x^2$ و $g(x) = 1/x^2$ ، آنگاه

$$\lim_{x\to 0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$$

وجود ندارد . اما در هر سه حالت وقتی $x \to 0$ ، $f(x) \to \infty$ و $g(x) \to \infty$. لذا، حد نظیر به ابهام $\infty - \infty$ می‌تواند هر مقدار از جمله ∞ یا $-\infty$ را بگیرد یا حتی وجود نداشته باشد .

مثال ۱۰ . $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x})$ را حساب کنید .

حل . به آسانی معلوم می‌شود که وقتی $x \to \infty$ ، $\sqrt{x^2 + 2x} \to \infty$ و $\sqrt{x^2 - 2x} \to \infty$. لذا، در محاسبهٔ این حد، از صورت $\infty - \infty$ رفع ابهام می‌کنیم . برای خلاص شدن از اختلاف بین ریشه‌های دوم ، عبارت داده شده را در مجموع ریشه‌های دوم ضرب و بر آن تقسیم می‌کنیم . به‌طور مفصل ،

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x} &= \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x})(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x})}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}} \\
&= \frac{x^2 + 2x - (x^2 - 2x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}} \\
&= \frac{4x}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{2}{x}\right)} + \sqrt{x^2\left(1 - \frac{2}{x}\right)}} \\
&= \frac{4x}{x\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + x\sqrt{1 - \frac{2}{x}}} = \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}},
\end{aligned}$$

که در مرحلهٔ پیش‌از آخرین مرحله می‌توان x را مثبت‌گرفت (زیــرا $x \to \infty$)؛ درنتیجه، $\sqrt{x^2} = x$. بنابراین،

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}}} = \frac{4}{1+1} = 2.$$

به عنوان تمرین، با استفاده از این امر که اگر $x < 0$ ، $\sqrt{x^2} = -x$ نشان دهید که اگر به‌جای $x \to \infty$ داشته باشیم $x \to -\infty$ ، حد به جای 2 مساوی -2 خواهد بود.

مسائل

حد داده شده را حساب کنید (ممکن است مساوی ∞ یا $-\infty$ باشد).

۱. $\lim_{x\to\infty} x^{5/3}$
۲. $\lim_{x\to 0^+} x^{-3/4}$
۳. $\lim_{x\to -\infty} x^{11/7}$
۴. $\lim_{x\to 0^-} x^{-7/11}$
۵. $\lim_{x\to 2^+} \frac{2}{x^2-4}$
۶. $\lim_{x\to 3^-} \frac{x+3}{x^2-9}$
۷. $\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2+9}{x^2-9}$
۸. $\lim_{x\to -1^+} \frac{6}{x^3+1}$
۹. $\lim_{x\to 1^-} \frac{2x+1}{x^3-1}$
۱۰. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-4}{\sqrt{x}}$
۱۱. $\lim_{x\to -\infty} \frac{10}{x^3+2}$
۱۲. $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x^{2/3}}$
۱۳. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^2}$
۱۴. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2}$
۱۵. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{x^{1.1}}$
۱۶. $\lim_{x\to\infty} \frac{3-x}{2+x}$
۱۷. $\lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{1-x^2}$
۱۸. $\lim_{x\to -\infty} \frac{1-x^2}{1+x}$
۱۹. $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-2}$
۲۰. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}$
۲۱. $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}$

۲۲. هرگاه $f(x) = (x-1)/(x+2)$ ، آنگاه وقتی $x \to \pm\infty$ ، $f(x) \to 1$. تمام x هایی را بیابید که $|f(x) - 1| < 0.01$.

۲۳. هرگاه $f(x) = x/(x-3)$، آنگاه‌وقتی $x \to 3^+$ ، $f(x) \to \infty$ ونیزوقتی $x \to 3^-$ ، $f(x) \to -\infty$ تمام x هایی را بیابید که $f(x) > 1000$ ونیزتمام x هایی‌رابیابیدکه $f(x) < -1000$.

حد داده شده را محاسبه کنید، هر یک به صورت مبهم $0 \cdot \infty$ است.

۲۴. $\lim_{x\to\infty} x^{-1/2}(x^{1/4} - 1)$
۲۵. $\lim_{x\to\infty} x^{-2/3}(1 - x^{2/3})$

۲۶. $\lim_{x\to 0^+} x^{1/2}(1+x^{-3/4})$

۲۷. $\lim_{x\to 0^-} x^{1/3}(4+x^{-2/3})$

۲۸. $\lim_{x\to 0} x\cot x$

۲۹. $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\csc x$

۳۰. $\lim_{x\to 0^+} x\sqrt{\csc x}$

۳۱. هر تابع کراندار بر بازه‌ای از نوع (c, ∞) را *نزدیک ∞ کراندار* می‌نامیم، و هر تابع کراندار بر بازه‌ای از نوع $(-\infty, c)$ را *نزدیک $-\infty$ کراندار* می‌نامیم. نشان دهید هرگاه $f(x)$ نزدیک ∞ کراندار بوده و وقتی $x\to\infty$، $g(x)\to 0$، آنگاه وقتی $x\to\infty$، $f(x)g(x)\to 0$، و همین امر در صورت تعویض ∞ با $-\infty$ درست است.

حد داده شده را (در صورت وجود) به کمک مسئلهٔ ۳۱ حساب کنید.

۳۲. $\lim_{x\to\pm\infty} \sin x$

۳۳. $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

۳۴. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$

۳۵. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sin x+\cos x}{x^{1/3}}$

۳۶. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin x^2}{x}$

۳۷. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$

۳۸. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\cos\dfrac{1}{x}$

۳۹. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{\cos x}}{x}$

۴۰. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\tan x}{x}$

حد داده شده را حساب کنید، هرکدام به صورت مبهم $\infty-\infty$ می‌باشد.

۴۱. $\lim_{x\to\infty} (x-\sqrt{x^2-x+1})$

۴۲. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+3x}-x)$

۴۳. $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x})$

۴۴. $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$

۴۵. $\lim_{x\to\infty} (x\sqrt{x^2+1}-x^2)$

۴۶. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$

۴۷. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x})$

۴۸. $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1})$

۳ . ۵ مجانبها و مماسهای قائم

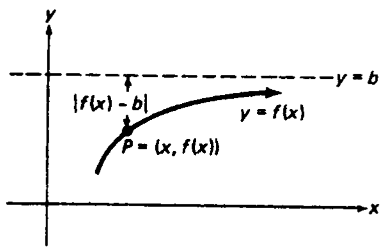
مجانبهای افقی . فرض کنیم f تابع پیوسته‌ای بوده و

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b, \tag{۱}$$

که در آن b متناهی است . با نوشتن (۱) به شکل معادل

$$\lim_{x \to \infty} |f(x) - b| = 0,$$

معلوم می‌شودکه $|f(x) - b|$ فاصلهٔ خط افقی $y = b$ و نقطهٔ متغیر $P = (x, f(x))$ برنمودار تابع f است (ر.ک. شکل ۲۶) . لذا، وقتی $x \to \infty$ ، نقطهٔ P به خط $y = b$ نزدیک



خط $y = b$ یک مجانب افقی است .

شکل ۲۶

می‌شود . به‌طورکلی ، اگر وقتی فاصلهٔ $P = (x, f(x))$ تا مبداء به بی‌نهایت نزدیک می‌شود نقطهٔ P به خط مستقیم L نزدیک گردد ، گوییم L یک **مجانب** f است ، یا نمودار f **به‌طور مجانبی** به L نزدیک می‌شود . (برای به کار بردن این تعریف باید نمودار f دست کم در یک جهت " به بی‌نهایت برود " ، که البته همیشه این‌طور نیست .) لذا ، هم‌اکنون نشان داده‌ایم که اگر (۱) برقرار باشد ، f خط $y = b$ را به عنوان **مجانب افقی** دارد .

اساساً " همین استدلال نشان می‌دهد که هرگاه

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c, \tag{۱'}$$

که در آن c متناهی است ، آنگاه f خط $y = c$ را به عنوان مجانب افقی دارد . توجه کنید که در حالتی که هر دوی (۱) و (۱') برقرار باشند ، f در صورت $b \neq c$ دومجانب افقی متمایز و در صورت $b = c$ فقط یک مجانب افقی خواهد داشت . تابع f نمی‌تواند بیش‌از دو مجانب افقی داشته باشد ، زیرا وقتی نقطهٔ $P = (x, f(x))$ از مبداء دور شود ، نمی‌توانــد بدلخواه به بیش از دو خط افقی نزدیک شود ، یکی وقتی به راست حرکت می‌کند $(x \to \infty)$

و دیگری وقتی به چپ حرکت می‌کند $(x \to -\infty)$. همچنین، اگر f مجانب افقی داشته باشد، دست‌کم یکی‌از فرمولهای (۱) و (۱') باید برقرار باشد. لذا، در جستجوی مجانب افقی تابع f (در صورت وجود)، کافی است رفتار حدی f را وقتی $x \to \pm\infty$ بررسی کنیم.

مثال ۱. هرگاه

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|},$$

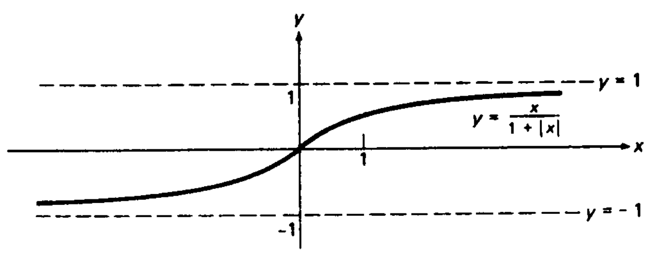
آنگاه

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{1 + |x|} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{1 + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} = 1,$$

زیرا $|x| = x$ اگر $x > 0$، درحالی که

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1 + |x|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1 - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = -1,$$

زیرا $|x| = -x$ اگر $x < 0$. لذا، f هر دو خط $y = 1$ و $y = -1$ را به عنوان مجانب افقی دارد. این، همراه با فرد و صعودی‌بودن f بر $(-\infty, \infty)$ که به‌آسانی تحقیق می‌شود، نمودار "S شکل" f را به دست می‌دهد که در شکل ۲۷ نموده شده است.



شکل ۲۷

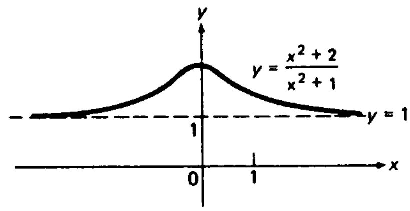
مثال ۲. هرگاه

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1},$$

آنگاه

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1.$$

لذا ، در این حالت ، f فقط یک مجانب افقی دارد ، یعنی خط $y = 1$ ، و این در شکل۲۸ نموده شده است .



شکل ۲۸

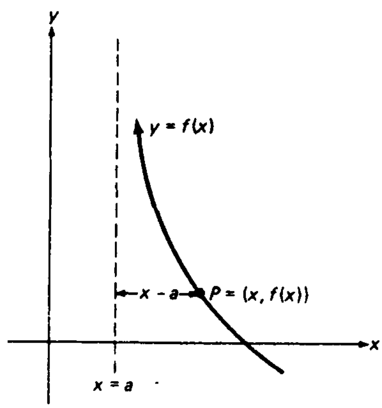
مجانبهای قائم . حال فرض کنیم f تابع پیوسته‌ای باشد به‌طوری که

$$\lim_{x-a\to 0^+} f(x) = \infty \;(\text{یا } -\infty) \qquad (۲)$$

با نوشتن (۲) به شکل معادل

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \;(\text{یا } -\infty),$$

معلوم می‌شود که $x - a$ فاصلهٔ بین خط قائم $x = a$ و نقطهٔ متغیر $P = (x, f(x))$ واقع بر نمودار f است (ر.ک. شکل ۲۹) . از اینرو ، وقتی $x \to a^+$ ، نقطهٔ P به خط $x = a$



خط $x = a$ یک مجانب قائم است .

شکل ۲۹

نزدیک و از مبداء در جهت رو به بالا یا رو به پایین دور می‌شود . لذا ، اگر (۲) برقرار باشد ، تابع f خط $x = a$ را به عنوان **مجانب قائم** دارد ، و نمودار f به این مجانب از

راست نزدیک می‌شود. اساساً همین استدلال نشان می‌دهد که هرگاه

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \ (-\infty \text{ یا }), \qquad (۲')$$

آنگاه f مجدداً خط $x = a$ را به عنوان مجانب قائم دارد، ولی اکنون نمودار f از چپ به مجانب نزدیک می‌شود. با آنکه تابع f می‌تواند حداکثر دو مجانب افقی داشته باشد، می‌تواند هر تعداد مجانب قائم داشته‌باشد (ر.ک. مثال ۴ و مسئلهٔ ۱). همچنین، هرگاه f مجانب قائمی با قطع x، a داشته باشد، آنگاه دست‌کم یکی از فرمولهای (۲) و (۲') باید برقرار باشد، و اگر هر دو برقرار باشند، نمودار f از **دوطرف** به مجانب نزدیک می‌شود. لذا، در جستجوی مجانبهای قائم، می‌توان توجه را به نقاطی (در صورت‌وجود) داد که در آنها f به بی‌نهایت (∞ یا $-\infty$) نزدیک می‌شود.

مثال ۳. هرگاه

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1},$$

آنگاه

$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}.$$

اما

$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2},$$

و، به کمک جانشانی $t = x - 1$،

$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{1}{x-1} = \lim_{t\to 0^\pm} \frac{1}{t} = \pm\infty,$$

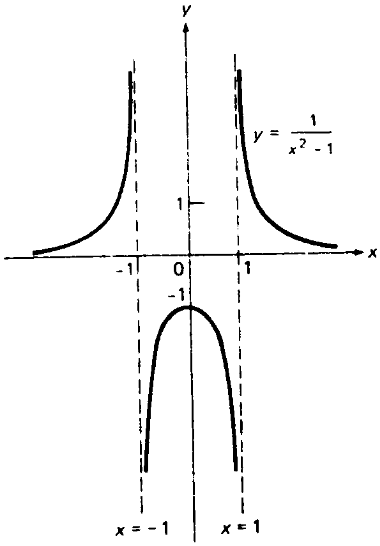
لذا، طبق قاعدهٔ (دو)، صفحهٔ ۲۹۶،

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2-1} = \infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1} = -\infty,$$

و اساساً به همین طریق می‌توان نشان داد که

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2-1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x^2-1} = \infty$$

(جزئیات را شرح دهید). لذا، f خطوط $x = 1$ و $x = -1$ را به عنوان مجانبهای‌قائم دارد و، همانطور که شکل ۳۰ نشان داده، نمودار f از دو طرف به این مجانبها نزدیک



شکل ۳۰

می‌شود . مجانب قائم دیگری وجود ندارد ، زیرا 1 و 1− تنها نقاطی هستند که f در آنها به بی‌نهایت نزدیک می‌شود . بهرحال ، خط $y = 0$ (محور x) یک مجانب افقی f است. این فورا" از

$$\lim_{x \to \pm \infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0$$

نتیجه می‌شود .

همانطور که مثال آخر نشان می‌دهد ، یک تابع گویا (از حیث قدرمطلق) درست در نقاطی به بی‌نهایت نزدیک می‌شود که مخرجش را صفر می‌کنند . در اینجا فرض‌است‌که تابع **تحویل‌ناپذیر** است ، بدین معنی که صورت و مخرج عامل مشترکی ندارند . مثلا" ، تابع $(x + 1)/(x^2 - 1)$ وقتی $x \to 1^+$ به ∞ و وقتی $x \to 1^-$ به $-\infty$ نزدیک می‌شود ، ولی وقتی $x \to -1^+$ و $x \to -1^-$ ، حدی متناهی خواهد داشت ، زیرا

$$\lim_{x \to -1^{\pm}} \frac{x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1^{\pm}} \frac{x + 1}{(x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \to -1^{\pm}} \frac{1}{x - 1} = -\frac{1}{2}.$$

مثال ۴ . با بررسی نمودار توابع $\tan x$ و $\cot x$ (ر . ک . شکل ۲۴ ، صفحه‌۱۰۴)، معلوم می‌شود که

$$\lim_{x\to 0^+} \cot x = \infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \cot x = -\infty,$$
$$\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi^+} \tan x = -\infty, \qquad \lim_{x\to \frac{1}{2}\pi^-} \tan x = \infty.$$

به‌طورکلی ، به ازای هر عدد صحیح $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ،

$$\lim_{x\to n\pi^+} \cot x = \infty, \qquad \lim_{x\to n\pi^-} \cot x = -\infty,$$
$$\lim_{x\to (n+\frac{1}{2})\pi^+} \tan x = -\infty, \qquad \lim_{x\to (n+\frac{1}{2})\pi^-} \tan x = \infty$$

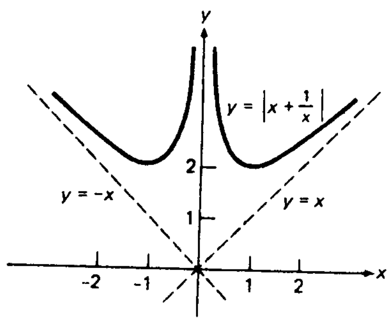
لذا ، هر خط $x = n\pi$ یک مجانب قائم $\cot x$ است ، ولی هر خط $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ یک‌مجانب قائم $\tan x$ می‌باشد . لذا ، هر تابع $\tan x$ و $\cot x$ بی‌نهایت مجانب قائم خواهد داشت .

همچنین ، ممکن است یک تابع مجانب *مایل* داشته باشد؛ یعنی ، مجانبی که نه افقی باشد نه قائم .

مثال ۵. تابع

$$f(x) = \left|x + \frac{1}{x}\right|,$$

که در شکل ۳۱ رسم شده ، هر دو خط $y = \pm x$ را به عنوان مجانب مایل دارد . این مطلب



خطوط $y = \pm x$ مجانبهای مایل‌اند .

شکل ۳۱

از این امر که وقتی $x \to \pm\infty$ ، $f(x) - |x|$ کوچک‌می شود واضح‌است ، زیرا وقتی $x \to \pm\infty$ ، $1/x \to 0$ ، اما آن را می‌توان به‌طور صوری نیز ثابت کرد (ر.ک. مسئلهٔ ۱۳) . توجه کنید که f محور y را نیز به عنوان مجانب قائم دارد ، زیرا وقتی $x \to 0$ ، $f(x) \to \infty$.

مشتقات نامتناهی و مماسهای قائم . بالاخره ، فرض‌کنیم مشتق تابع f در a نامتناهی باشد ، بدین معنی که

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \infty$$

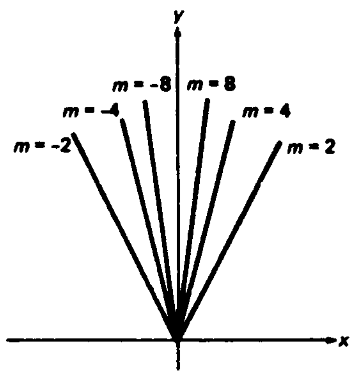
یا

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty.$$

در این صورت ، تابع

$$m(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

وقتی $x \to a$ ، به ∞ یا $-\infty$ نزدیک می‌شود . اما $m(x)$ شیب خط قاطع ماربر نقطهٔ ثابت $P=(a,f(a))$ و نقطهٔ متغیر $Q=(x,f(x))$ منحنی $y=f(x)$ است ، و وقتی شیب یک خط مقادیر بزرگ مثبت یا منفی بگیرد ، خط به وضعیت قائم نزدیک می‌شود (ر.ک. شکل ۳۲).



خطوط با شیب m بزرگ

شکل ۳۲

باتوجه به این نکات ، در حالت $f'(a)=\infty$ یا $f'(a)=-\infty$ ، خط قائم $x=a$ را (خط) مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطهٔ P تعریف می‌کنیم . در نوشتن دو فرمول اخیر نمی‌گوییم ∞ و $-\infty$ عددند ، که نیستند ، بلکه فقط می‌گوییم وقتی $x \to a$ ، $m(x)$ به بی‌نهایت (به‌علاوه یا منها) نزدیک می‌شود .

بر حسب مشتقات یکطرفه ، $f'(a)=\infty$ معادل $f'_+(a)=f'_-(a)=\infty$ و $f'(a)=-\infty$ معادل $f'_+(a)=f'_-(a)=-\infty$ است . همچنین ، ممکن است مشتقات یکطرفه نامتناهی ولی

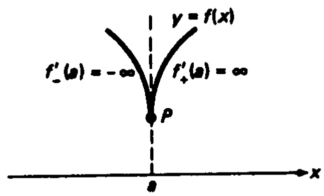
نامساوی باشند ، بدین معنی که

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+} m(x)=\infty, \qquad f'_-(a)=\lim_{x\to a^-} m(x)=-\infty, \tag{۳}$$

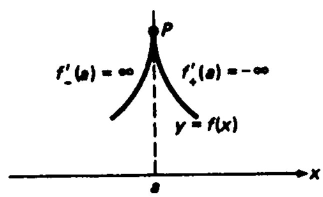
یا

$$f'_+(a)=-\infty, \qquad f'_-(a)=\infty. \tag{۳'}$$

در این صورت ، مماس در P را خط قائم $x=a$ تعریف می‌کنیم ، ولی ، همانطور که شکل ۳۳ (آ) برای حالت (۳) و شکل ۳۳ (ب) برای حالت (۳) نشان می‌دهد ، منحنی $y=f(x)$



(آ)



(ب)

شکل ۳۳

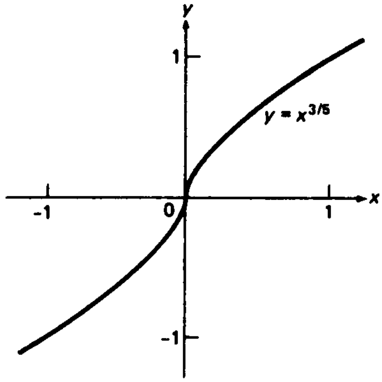
در P نقطهٔ تیز یا *نقطهٔ بازگشت* دارد .

مثال ۶ . رفتار منحنی $y=f(x)=x^{3/5}$ را در مبداء مورد بررسی قرار دهید .

حل . با استفاده از قاعدهٔ (چهار) ، صفحهٔ ۲۹۶ ، و اینکه وقتی $x\to 0$ ، $x^{2/5}\to 0^+$ مشتق f در $x=0$ را حساب می‌کنیم :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^{3/5}-0^{3/5}}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2/5}}=\infty.$$

لذا ، $f'_+(0)=f'_-(0)=\infty$ ، و منحنی $y=x^{3/5}$ در مبداء مماس قائم ولی بدون نقطهٔ بازگشت دارد (ر . ک . شکل ۳۴) .



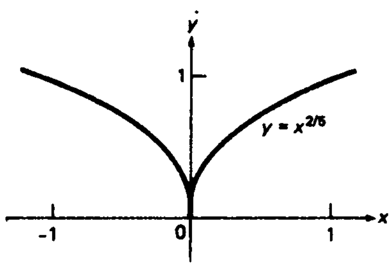
شکل ۳۴

مثال ۷ . رفتار منحنی $y = f(x) = x^{2/5}$ را در مبداء بررسی کنید .

حل . با استفاده از همان قاعده و اینکه وقتی $x \to 0^{\pm}$ ، $x^{3/5} \to 0^{\pm}$ ، مشتقات یکطرفهٔ f در $x = 0$ را حساب می‌کنیم :

$$f'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^{+}} \frac{x^{2/5} - 0^{2/5}}{x - 0} = \lim_{x \to 0^{+}} \frac{1}{x^{3/5}} = \infty, \qquad f'_{-}(0) = \lim_{x \to 0^{-}} \frac{1}{x^{3/5}} = -\infty.$$

چون $f'_{+}(0)$ و $f'_{-}(0)$ نامتناهی و نامساویند ، منحنی $y = x^{2/5}$ در مبداء مماس قائم و نقطهٔ بازگشت خواهد داشت (ر.ک. شکل ۳۵) .



شکل ۳۵

تشابه نزدیکی بین نقاط بازگشت و گوشه وجود دارد ، نقاط گوشه نظیر حالتی هستند که $f'_{+}(a)$ و $f'_{-}(a)$ متناهی ولی نامساویند (ر.ک. صفحهٔ ۱۹۱) ، یا وقتی که یکی از مشتقات $f'_{+}(a)$ و $f'_{-}(a)$ نامتناهی و دیگری متناهی است . اما ، با آنکه یک منحنی در نقطهٔ بازگشت مماس قائم دارد ، در گوشه مماس ندارد . این تفاوت را چطور توضیح می‌دهید ؟

هرگاه منحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ $P = (a, f(a))$ دارای مماس قائم T باشد ، آنگاه قائم N به منحنی در P ، که خط مار بر P عمود بر T تعریف می‌شود ، خط افقی $y = f(a)$ می‌باشد .

مثال ۸ . مماس T و قائم N به منحنی

$$y = f(x) = (x - 1)^{1/3} + 2$$

در نقطهٔ $P = (1, 2)$ را بیابید .

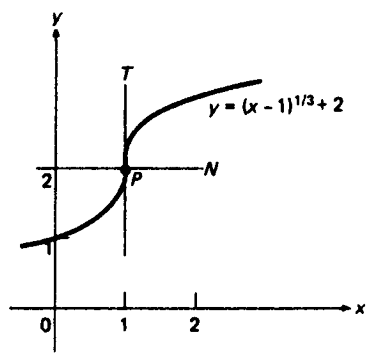
حل . مشتق f را در $x = 1$ حساب می‌کنیم ، داریم

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{[(x-1)^{1/3} + 2] - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^{1/3}}{x - 1},$$

درنتیجه ، پس از جانشانی $t = x - 1$ و توجه به این امر که وقتی $t \to 0$ ، $t^{2/3} \to 0^+$ ،

$$f'(1) = \lim_{t \to 0} \frac{t^{1/3}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^{2/3}} = \infty$$

از اینرو ، همانطور که شکل ۳۶ نشان داده ، مماس T بر منحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ P خط قائم $x = 1$ بوده (نقطهٔ بازگشت وجود ندارد) ، و قائم N در P خط افقی $y = f(1) = 2$ می‌باشد .



شکل ۳۶

به یاد آورید که گفتیم تابع f در نقطهٔ x **مشتقپذیر** است اگر f در x دارای مشتق $f'(x)$ باشد . این تعریف در صفحهٔ ۱۷۵ ، پیش از آنکه مفهوم مشتق نامتناهی واردکارشود، ارائه شد . حال تأکید می‌کنیم که در تعریف مشتقپذیری $f'(x)$ باید **متناهی** باشد . لـذا ، مشتقات نامتناهی در تعریف‌پیشین " وجود " ندارند . بخصوص، هرگاه تابع f در c مشتق

نامتناهی داشته باشد ، آنگاه c یک نقطهٔ بحرانی c است (ر.ک. صفحهٔ ۲۶۸) .

مسائل

۱ . تابع f را طوری مثال بزنید که دقیقاً n مجانب قائم داشته باشد .

تمام مجانبهای (افقی و قائم) تابع داده شده را یافته ، و نمودار آن را رسم نمایید .

۲ . $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

۳ . $f(x) = \dfrac{x-4}{2x+4}$

۴ . $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

۵ . $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

۶ . $f(x) = \dfrac{1+|x|}{x}$

۷ . $f(x) = \dfrac{4-x^2}{4+x^2}$

۸ . $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

۹ . $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

۱۰ . $f(x) = \dfrac{3\cos x}{x+1}$

۱۱ . تابع

$$f(x) = \frac{1}{x^7 + 128}$$

درست دو مجانب دارد . این مجانبها چیستند ؟

۱۲ . تابع

$$f(x) = \frac{1}{x^8 - 256}$$

درست سه مجانب دارد . این مجانبها چیستند ؟

۱۳ . نشان دهید که خط

$$y = mx + b \qquad (m \neq 0)$$

مجانب مایل تابع $y = f(x)$ است اگر و فقط اگر دست‌کم یکی از شرایط

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx - b] = 0 \qquad \text{(یک)}$$

یا

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx - b] = 0 \qquad \text{(دو)}$$

برقرار باشد . نشان دهید که (یک) با

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx], \qquad \text{(یک')}$$

معادل است ، درحالی که (دو) با

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] \qquad \text{(دو')}$$

معادل می‌باشد . ماکزیمم تعداد مجانبهای مایلی که یک تابع می‌تواند داشته باشد چقدر است ؟

به کمک مسئلهٔ ۱۳ ، تمام مجانبهای (مایل ، افقی ، و قائم) تابع داده شده را یافته ، و نمودار آن را رسم نمایید .

۱۴. $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 + x}$

۱۵. $f(x) = \dfrac{4 - x^3}{x^2}$

۱۶. $f(x) = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$

۱۷. $f(x) = \dfrac{2x^2}{1 + |x|}$

۱۸. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

۱۹. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

نشان دهید که

۲۰. چند جمله‌ای $P(x)$ با درجهٔ بزرگتر از 1 مجانب ندارد .

۲۱. تابع $f(x) = x + \sin x$ مجانب ندارد .

۲۲. اگر r عدد گویای مثبتی باشد ، تابع $f(x) = x^r$ مجانب ندارد مگر $r = 1$.

مماس T و قائم N به منحنی داده شده در نقطهٔ P را بیابید . آیا در P نقطهٔ بازگشت وجود دارد ؟

۲۳. $y = (x - 1)^{3/5}, P = (1, 0)$

۲۴. $y = (x + 1)^{2/3} + 1, P = (-1, 1)$

۲۵. $y = \sqrt{|x - 3|} - 1, P = (3, -1)$

۲۶. $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x} + 3, P = (2, 3)$

۲۷. در چه نقاطی منحنی $y = \sqrt[3]{\cos x}$ مماس قائم دارد ؟ آیا این نقاط نقطهٔ بازگشت‌اند ؟

۶.۳ قاعدهٔ هوپیتال

حال ، با استفاده از مشتقگیری ، تکنیک توانایی برای رفع ابهام به دست می‌آوریم که اغلب با آن می‌توان محاسبات عادی را به‌کار برد . با صورت مبهم $0/0$ شروع می‌کنیم ، ولی بعداً حدود نامتناهی را وارد کرده به صور مبهم ∞/∞ ، $0 \cdot \infty$ ، و $\infty - \infty$ نیز می‌پردازیم .

قضیهٔ ۱۱ (قاعدهٔ هوپیتال برای $0/0$)[1]. هرگاه
(یک) f و g بر (a, b) مشتق‌پذیر باشند،
(دو) g' در هر نقطهٔ (a, b) ناصفر باشد،
(سه) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$ ،

و نیز

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

آنگاه

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

برهان (اختیاری). هرگاه f و g از راست در a پیوسته باشند، آنگاه به‌خاطر (سه) $f(a) = g(a) = 0$ ، اما در غیر این صورت، طبق تعریف قرار می‌دهیم $f(a) = g(a) = 0$. پس f و g بر هر بازهٔ $[a, x]$ که $a < x < b$ پیوسته‌اند (چرا؟). بنابر قضیهٔ ۴، صفحهٔ ۲۶۱ (قضیهٔ مقدار میانگین کشی)،

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

که در آن $a < c < x$. اما $x \to a^+$ ایجاب می‌کند که $c \to a^+$ ؛ و درنتیجه،

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L.$$

به‌خاطر سادگی، قاعدهٔ هوپیتال را برای حالت $x \to a^+$ ثابت کردیم، ولی اساساً همین استدلال نشان می‌دهد که برای $x \to a^-$ و بازهٔ (b, a) ، $b < a$ ، به جای (a, b) برقرار است. قاعدهٔ هوپیتال برای $x \to a$ ، در صورت تغییر مختصری در مفروضات، نیز برقرار است. به‌طور مشخص، هرگاه
(یک') f و g در همسایگی سفتهٔ D از نقطهٔ a مشتق‌پذیر باشند،

---

۱. در واقع، توسط جان برنولی (John Bernoulli، 1667–1748) کشف و در عوض حقوق به مارکی هوپیتال (Marquis de l'Hospital 1661–1704)، مؤلف اولین کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال، داده شد.

(دو') g' در هر نقطهٔ D ناصفر باشد ،

(سه') $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$

و نیز

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

آنگاه

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

البته ، این صورت قاعدهٔ هوپیتال نتیجهٔ فوری قضیهٔ ۱۱ و قضیهٔ همتا بـرای $x \to a^-$ است .

مثال ۱. $\lim_{x \to 0^+} \frac{\tan x}{\sqrt{x}}$ را حساب کنید .

حل . بنابر قاعدهٔ هوپیتال ، داریم

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\tan x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{d}{dx} \tan x}{\frac{d}{dx} \sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sec^2 x}{1/(2\sqrt{x})}$$
$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\cos^2 x} = \frac{2\sqrt{0}}{\cos^2 0} = 0.$$

مثال ۲ . نشان دهید که

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}. \qquad (۱)$$

حل . بنابر قاعدهٔ هوپیتال ،

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}(1 - \cos x)}{\frac{d}{dx} x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}.$$

تبصره . ممکن است اغوا شده و بخواهید خود حد

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \qquad (۲)$$

را ، به‌جای معلوم بودن ، به کمک قاعده‌ٔ هوپیتال حساب کنید ، به این ترتیب که ، بنابر پیوستگی $\cos x$ ،

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{d}{dx}\sin x}{\dfrac{d}{dx}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1.$$

اما این استدلال دوری است ، زیرا اگر به عقب نگاه کنید ، می‌بینید که از فرمول (۲) برای اثبات فرمول مشتقگیری $D_x \sin x=\cos x$ استفاده شد!

مثال ۳. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ را حساب کنید .

حل . بنابر قاعده‌ٔ هوپیتال ،

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{d}{dx}(x-\sin x)}{\dfrac{d}{dx}x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6},$$

که در آخرین مرحله از فرمول (۱) استفاده می‌کنیم که خود با قاعده‌ٔ هوپیتال ثابت شد . این نشان می‌دهد که ممکن است برای محاسبه‌ٔ یک حد چند کاربرد متوالی قاعده‌ٔ هوپیتال نیاز باشد .

مثال ۴. تضمینی وجود ندارد که قاعده‌ٔ هوپیتال در رفع ابهام کمکی نماید . درواقع ، ممکن است حد

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

موجود نباشد ، حتی اگر حد

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

موجود بوده و بتوان آن را با روشی دیگر به آسانی به دست آورد . مثلاً ، هرگاه

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x},\qquad g(x)=x,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

(ر.ک. مثال ۸، صفحهٔ ۱۲۶)، حال آنکه حد

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$$

وجود ندارد (چرا؟).

قاعده‌ای شبیه قضیهٔ ۱۱ برای استفاده از مشتقگیری در رفع ابهام از صورت ∞/∞ وجود دارد. به‌خاطر سادگی، آن را برای حالت $x\to a^+$ بیان می‌کنیم، ولی این قاعده با همان تغییرات مختصر در مفروضات که قبلاً در رابطه با قضیهٔ ۱۱ ذکر شد برای $x\to a^-$ و $x\to a$ نیز برقرار است. برهان کاملاً تکنیکی است و از اینرو حذف می‌شود؛ این برهان را می‌توان در هر کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته یافت.

قضیهٔ ۱۱' (قاعدهٔ هوپیتال برای ∞/∞). هرگاه

(یک) f و g بر (a, b) مشتقپذیر باشند،

(دو) g' در هر نقطه از (a, b) ناصفر باشد،

(سه) $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+} g(x)=\infty$،

و نیز

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L,$$

آنگاه

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=L.$$

می‌توان نشان داد که اگر شرط (سه) با

$$\lim_{x\to a^+}|f(x)|=\lim_{x\to a^+}|g(x)|=\infty$$

عوض شود، قضیهٔ ۱۱' برقرار می‌ماند، و اگر L با ∞ یا $-\infty$ عوض شود، هر دو قضیهٔ ۱۱ و ۱۱' برقرار خواهند ماند. همچنین، قضایای ۱۱ و ۱۱' را می‌توان به حالت $x\to\infty$ تعمیم

داد به این صورت که جانشانی $x = 1/t$ را انجام داده و ملاحظه می‌کنیم که

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{(-1/t^2)f'(1/t)}{(-1/t^2)g'(1/t)}$$
$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

و نتیجهٔ مشابهی برای $x \to -\infty$ نیز برقرار است . در اینجا فرض است که قاعدهٔ هوپیتال را می‌توان در دومین مرحلهٔ محاسبه به‌کار برد ، و شرایط (یک) و (دو) قضایای ۱۱ و ۱۱' بر یک بازهٔ نامتناهی از نوع (c, ∞) یا $(-\infty, c)$ برقرارند .

مثال ۵ . $L = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-2}{6x^2-5x+8}$ را حساب کنید .

حل . حد L ابهامی به‌صورت ∞/∞ است . با دوبار استفاده از قضیهٔ ۱۱'، یعنی دو مشتقگیری متوالی از صورت و مخرج ، داریم

$$L = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{d}{dx}(3x^2+4x-2)}{\dfrac{d}{dx}(6x^2-5x+8)} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x+4}{12x-5}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{d}{dx}(6x+4)}{\dfrac{d}{dx}(12x-5)} = \lim_{x\to\infty}\frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

به عنوان تمرین ، L را به روش بخش ۴.۳ حساب کنید .

مثال ۶ . $L = \lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$ را حساب کنید .

حل . این حد نظیر صورت مبهم $0\cdot\infty$ است ، ولی می‌توان آن را به شکل زیر نوشت :

$$L = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cot\dfrac{\pi x}{2}},$$

که نظیر صورت مبهم $0/0$ است . راه قدیم محاسبهٔ L جانشانی $t = 1 - x$ است . در این صورت ، پس از تلاشی قابل توجه ،

$$L=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi t}{2}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan\dfrac{\pi t}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos\dfrac{\pi t}{2}}{\sin\dfrac{\pi t}{2}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\pi t}{2}}{\sin\dfrac{\pi t}{2}}\cdot\lim_{t\to 0}\cos\frac{\pi t}{2}=\frac{2}{\pi}\cdot 1\cdot\cos 0=\frac{2}{\pi}.$$

راه جدید ، مبتنی بر قاعدهٔ هوپیتال ، خیلی آسانتر است :

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{d}{dx}(1-x)}{\dfrac{d}{dx}\cot\dfrac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\dfrac{\pi}{2}\csc^2\dfrac{\pi x}{2}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\sin^2\frac{\pi x}{2}=\frac{2}{\pi}\sin^2\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\pi}.$$

به‌علاوه ، جانشانی مقدماتی دیگر لازم نیست ، و چیزی جز اتلاف وقت نمی‌باشد .

مثال ۷ . $L=\lim\limits_{x\to\pi/2}(\tan x-\sec x)$ را حساب کنید .

حل . این یک صورت مبهم $\infty-\infty$ است ، که می‌توان باتوجه به

$$L=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x-1}{\cos x}$$

آن را به صورت $0/0$ درآورد . از قاعدهٔ هوپیتال فوراً به دست می‌آید

$$L=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\dfrac{d}{dx}(\sin x-1)}{\dfrac{d}{dx}\cos x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{-\sin x}=\frac{0}{-1}=0.$$

یافتن L بدون استفاده از قاعدهٔ هوپیتال نیاز به کار بیشتر و مهارتی قابل توجه دارد

$$L=\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{\sin x-1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x+1}{\sin x+1}\right)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin^2 x-1}{(\sin x+1)\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos^2 x}{(\sin x+1)\cos x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos x}{\sin x+1}=\frac{-0}{1+1}=0.$$

وقتی از *قاعدهٔ هوپیتال استفاده نمی‌شود*. قاعدهٔ هوپیتال مسلماً ابزاری بسیار قوی در محاسبهٔ حدود است. با اینحال، همانطور که مثالهای زیر نشان می‌دهند، حالات زیادی وجود دارند که قاعدهٔ هوپیتال به دلیلی قابل اعمال نیست.

مثال ۸. $L = \lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x+2}$ را محاسبه کنید.

حل. بنابر پیوستگی، فوراً می‌بینیم که

$$L = \frac{\cos 0}{0+2} = \frac{1}{2}.$$

کاربرد کورکورانهٔ قاعدهٔ هوپیتال نتیجه می‌دهد

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{d}{dx}\cos x}{\dfrac{d}{dx}(x+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{1} = -\sin 0 = 0,$$

که *نادرست* است. اما قاعدهٔ هوپیتال در اینجا به کار نمی‌رود. در واقع،

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1, \qquad \lim_{x\to 0} (x+2) = 2,$$

درنتیجه، ما حتی با صورت مبهم سروکار نداریم!

مثال ۹. $L = \lim_{x\to \infty} \dfrac{x-\sin x}{x}$ را حساب کنید.

حل. این بار صورت مبهم ∞/∞ داریم، و حد را می‌توان فوراً محاسبه نمود:

$$L = \lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 1 - \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 1$$

(ر.ک. مسئلهٔ ۳۱، صفحهٔ ۳۰۱). بااستفاده از قاعدهٔ هوپیتال به محاسبهٔ L می‌پردازیم، خواهیم داشت

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{d}{dx}(x-\sin x)}{\dfrac{d}{dx}x} = \lim_{x\to\infty}(1-\cos x).$$

اما حد سمت راست وجود ندارد (چرا؟)؛ و درنتیجه، در اینجا نیز قاعدهٔ هوپیتال به کار نمی‌رود.

مثال ۱۰. حد

$$L = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\tan x}{\sec x} \tag{۳}$$

را محاسبه کنید .

حل . در اینجا صورت مبهم ∞/∞ داریم که می‌توان آن را بدون زحمت حساب کرد ، زیرا

$$L = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x}\cos x = \lim_{x\to\pi/2} \sin x = 1. \tag{۴}$$

L را با قاعدهٔ هوپیتال حساب می‌کنیم ، خواهیم داشت

$$L = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{d}{dx}\tan x}{\frac{d}{dx}\sec x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sec^2 x}{\sec x \tan x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sec x}{\tan x},$$

که باز به شکل ∞/∞ است . کاربرد دیگری از قاعدهٔ هوپیتال نتیجه می‌دهد

$$L = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{d}{dx}\sec x}{\frac{d}{dx}\tan x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sec x \tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\tan x}{\sec x},$$

و ما به همان جایی برگشته‌ایم که شروع کرده‌بودیم ، بن‌بست کاملا هرگاه (۳) را به شکل

$$L = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos x}{\cot x} \tag{۳'}$$

بنویسیم ، که یک صورت مبهم $0/0$ است ، آنگاه قاعدهٔ هوپیتال جواب را می‌دهد ، زیرا

$$L = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{d}{dx}\cos x}{\frac{d}{dx}\cot x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{-\sin x}{-\csc^2 x} = \lim_{x\to\pi/2} \sin^3 x = 1.$$

اما ، به‌خاطر (۴) ، این راه سختی خواهد بود .

به‌عنوان تمرین ، به عقب برگشته و ، با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال ، حدود آمده‌در مثالها و مسائل قبل (از بخش ۵.۱ تاکنون) را هرقدر می‌توانید حساب کنید . خواهید دید که استفاده از این قاعده اغلب محاسبات سخت را به یک تمرین عادی برمی‌گرداند .

مسائل

ابهام مربوط به حد داده شده را توصیف کنید. سپس، با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، حد را حساب کنید.

۱. $\lim_{x\to 7}\frac{x^2-15x+56}{x^2-3x-28}$

۲. $\lim_{x\to -1}\frac{3x^3+3x^2+x+1}{x^2-1}$

۳. $\lim_{x\to 1}\frac{x^{1/3}-x^{1/2}}{x^{1/4}-x^{1/5}}$

۴. $\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$

۵. $\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

۶. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{2x+1}$

۷. $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$

۸. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sin x}$

۹. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

۱۰. $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{1-\cos x}$

۱۱. $\lim_{x\to 0} x\cot 2x$

۱۲. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\tan x}$

۱۳. $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sec x-1}{x^3}$

۱۴. $\lim_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$

۱۵. $\lim_{x\to 0}\left(\csc x-\frac{1}{x}\right)$

۱۶. $\lim_{x\to\pi/3}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$

۱۷. $\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\tan^2 x}$

۱۸. $\lim_{x\to\pi/4}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\csc\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)$

۱۹. فرض کنیم F در همسایگی a مشتقپذیر بوده، و $\lim_{x\to a}F'(x)$ موجود و متناهی باشد. با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، نشان دهید که $F'(a)=\lim_{x\to a}F'(x)$.

۲۰. بدون استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین کشی، صورت ساده شدهٔ قاعدهٔ هوپیتال برای $0/0$ که اغلب مفید است را ثابت کنید. فرض کنید

(یک) f و g در a مشتقپذیر بوده و $g'(a)\neq 0$؛

(دو) $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$.

در این صورت،

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

صورت مبهمی از 0/0 مثال بزنید که به این روش رفع نشود .

حدود زیر را محاسبه کنید .

۲۱ . $\lim_{x\to 0}\left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2}\right)$ ✓

۲۲ . $\lim_{x\to \pi/4}\frac{\tan 2x}{\cot\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$ ✓

۲۳ . از مسئلهٔ ۱۹ (اشتباها "۱") این برداشت می‌شود که $F'(a)$ همواره مساوی $\lim_{x\to a} F'(x)$ است . تابع F را طوری مثال بزنید که F' در همسایگی a تعریف شده باشد ولی $F'(a) \neq \lim_{x\to a} F'(x)$. این را با مسئلهٔ ۱۹ آشتی دهید .

۲۴ . با فرض وجود حد در مثال ۳ ، آن را بدون قاعدهٔ هوپیتال حساب کنید .
راهنمایی . از فرمول $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ استفاده کنید .

۷.۳ مسائل بهینه‌سازی

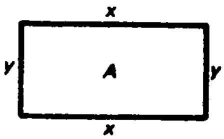
مسائل‌عملی بسیاری وجوددارند که درگیر تعیین **بزرگترین** اندازه ،**کمترین‌بها** ، **کوتاهترین** زمان ، **بیشترین** درآمد ، و غیره می‌باشند . در این نوع مسائل " بهترین " مقدار کمیت متغیری خواسته می‌شود ؛ و درنتیجه ، آنها را ***مسائل بهینه‌سازی*** می‌نامند . بسیاری از آنها را می‌توان به‌کمک ابزارهای ذکرشده در چند بخش اخیر حل کرد ، ولی سایرین‌به‌تکنیکهای پیشرفته‌تری نیاز دارند (که بعضی از آنها در بخشهای ۸.۱۳ و ۹.۱۳ معرفی می‌شوند) .
مسائل این بخش ازخاصیت‌مشترک زیر برخوردارند :
کمیتی که باید بهینه شود را می‌توان به صورت تابعی از یک متغیر بیان کرد که بر بازه‌ای چون I تعریف شده ، و مقدار بهینهٔ کمیت را می‌توان مقدار اکستریمی از تابع بر I گرفت .
مثل همهٔ مسائل به شکل نقلی ، در ترجمه از زبان عرف به ریاضی دقت زیادی لازم است ، و پنالتی ترجمهٔ نامناسب این است که تمام محاسبات چیزی جز اتلاف وقت نخواهد بود . به عبارت دیگر ، به قول متخصصین کامپیوتر " زباله وارد و زباله خارج کرده‌ایم " .

مثالهای زیر ایدهٔ خوبی از طرز حل مسائل بهینه‌سازی به شما می‌دهد . اغلب آنها ماهیت هندسی داشته یا در رابطه با علوم طبیعی‌اند . بهینه‌سازی در تجارت و اقتصاد خود مبحثی است که در بخش بعد به آن خواهیم پرداخت .

مثال ۱ . مزرعه‌داری 800 فوت حصار دارد که می‌خواهد دور یک مزرعهٔ مستطیلی بکشد . بیشترین مساحتی که می‌تواند حصار بکشد چقدر است ؟

حل . فرض کنیم x ، y ، و A طول ، عرض ، و مساحت مزرعه باشند ، مثل شکل۳۷ ، و L را

طول حصار می‌گیریم . در این صورت ، $L = 2x + 2y$ و $A = xy$ ، و اینکه 800 فوت حصار



شکل ۳۷

داریم را با شرط

$$L = 2(x + y) = 800.$$

بیان می‌کنیم . با حل نسبت به y و برحسب x ، به دست می‌آوریم $y = 400 - x$. با این می‌توان مساحت مزرعه را به صورت تابعی فقط از x بیان کرد . در واقع ،

$$A = xy = x(400 - x) = 400x - x^2. \qquad (1)$$

چون مساحت نامنفی است ، مقادیر مجاز x از 0 تا 400 تغییر می‌کنند . لذا ، مسئله تعیین مقداری از x است که تابع مساحت (۱) ماکزیمم (مطلق) خود بر بازهٔ $I = [0, 400]$ را در آن بگیرید . این ماکزیمم ، که وجودش توسط قضیهٔ مقدار اکستریم تضمین می‌شود (ر. ک . صفحهٔ ۱۵۹) ،باید در یک‌نقطهٔ درونی I گرفته شود ، زیرا $A > 0$ اگر $0 < x < 400$ و $A|_{x=0} = A|_{x=400} = 0$. (نماد $A|_{x=a}$ اختصاری است برای مقدار تابع $A = A(x)$ در $x = a$.) از اینرو، ماکزیمم موضعی بوده و فقط می‌تواند در یک نقطهٔ بحرانی A رخ دهد . چون A به ازای هر x مشتقپذیر است با مشتق

$$\frac{dA}{dx} = 400 - 2x,$$

تنها نقطهٔ بحرانی A نقطهٔ $x = 200$ است که در آن dA/dx مساوی صفر می‌باشد ،و ماکزیمم مساحت A بر بازهٔ I باید در این نقطه صورت گیرد . به‌علاوه ،

$$y|_{x=200} = (400 - x)|_{x=200} = 200.$$

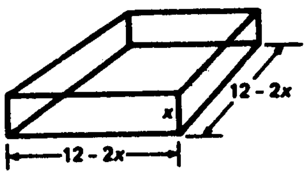
لذا ، مزرعهٔ مستطیلی با بیشترین مساحت محصور به 800 فوت حصار مربعی است به طول ضلع 200 فوت ، و مساحتش مساوی است با

$$A|_{x=200} = (200)^2 = \text{فوت مربع } 40{,}000$$

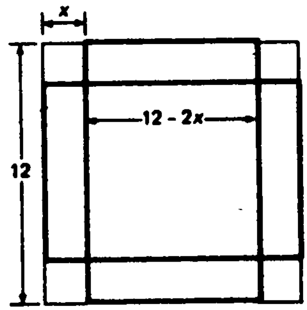
به عنوان تمرین ، از آزمون مشتق اول و دوم استفاده کرده تحقیق کنید A در $x = 200$ ماکزیمم موضعی اکید دارد .

مثال ۲ . یک جعبهٔ مربعی بدون سر از بریدن مربعات کوچکی از چهار گوشهٔ یک‌مربع فلزی

به ضلع 12 اینچ ، مطابق شکل ۳۸(آ) ، و سپس تاکردن لبه‌ها ، مثل شکل ۳۸(ب) ، ساخته شده است .



(ب)



(آ)

شکل ۳۸

ماکزیمم حجم جعبه‌ای که به این طریق ساخته می‌شود چقدر است ؟

حل . فرض کنیم x طول ضلع هر مربع کوچک باشد . از شکل واضح است که حجم جعبه مساوی است با

$$V = x(12-2x)^2 = 4x(6-x)^2. \qquad (۲)$$

مقادیر مجاز x از 0 تا 6 تغییر می‌کنند ، زیرا حجم نامنفی بوده و نمی‌توان مربعهای روی هم افتاده را برید . لذا ، مسئله یافتن x ی است که تابع حجم (۲) ماکزیمم (مطلق) خود بر بازهٔ $I = [0, 6]$ را در آن بگیرد . این ماکزیمم باید در یک نقطهٔ درونی I رخ دهد ، زیرا $V > 0$ اگر $0 < x < 6$ و $V|_{x=0} = V|_{x=6} = 0$. لذا ، ماکزیمم موضعی است ، و فقط می‌تواند در یک نقطهٔ بحرانی V رخ دهد . چون V به ازای هر x مشتقپذیر است ، نقاط بحرانی V نقاط $x = 2$ و $x = 6$ اند که در آنها

$$\frac{dV}{dx} = 4(6-x)^2 - 8x(6-x) = 12(6-x)(2-x)$$

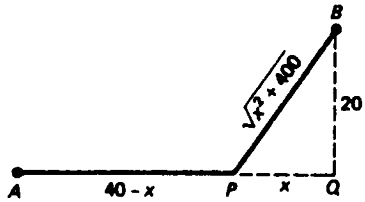
مساوی صفر است . از این دو نقطه فقط $x = 2$ نقطهٔ درونی I است ؛ درنتیجه ، ماکزیمم حجم V بر بازهٔ I باید در $x = 2$ گرفته شود . لذا ، جعبه با بیشترین حجم در صورتی به دست می‌آید که مربعهای بریده شده از ورقهٔ فلزی به طول 2 اینچ باشند ، و حجم آن خواهد بود

$$V|_{x=2} = 4(2)(6-2)^2 = 128 \text{ اینچ مکعب}$$

به عنوان تمرین ، از آزمون مشتق اول یا دوم استفاده کرده تحقیق کنید که V در $x = 2$

ماکزیمم موضعی اکید دارد .

مثال ۳ . اداره‌ٔ خدمات اجتماعی می‌خواهد جاده‌ٔ جدیدی از شهر A به شهر B احداث کند . شهر A در امتداد یک جاده‌ٔ شرقی غربی متروکه قرار دارد ، درحالی کـه شهر B در 20 میلی شمال این‌جاده و 40 میلی شهر A واقع است (ر .ک . شکل ۳۹) . می‌خواهیم جاده‌ٔ جدید از بخشی از جاده‌ٔ قدیم همراه با بخش کاملا" جدیدی تشکیل شود که جاده‌ٔ قدیم



شکل ۳۹

را در نقطه‌ای که باید تعیین شود ترک و مستقیما" به شهر B برود .اگر هزینه‌ٔ ساختن‌بخش اول \$300,000 بر میل و هزینه‌ٔ ساختن بخش دوم \$600,000 بر میل باشد ، چقدر ازجاده‌ٔ قدیم باید تعمیر شود تا هزینه‌ٔ جاده‌ٔ دوبخشی جدید مینیمم باشد ؟

حل . همانند در شکل ، فرض کنیم P نقطه‌ای باشد که جاده‌ٔ قدیم تا آن اختیار می شود، Q نقطه‌ای باشد که جاده‌ٔ قدیم جنوب شهر B است ، و $|PQ| = x$. در این صورت ، هزینه‌ٔ جاده‌ٔ جدید به میلیون دلار عبارت است از

$$C(x) = 0.3|AP| + 0.6|PB| = 0.3(40 - x) + 0.6\sqrt{x^2 + 400}.$$

می‌خواهیم مینیمم (مطلق) تابع هزینه‌ٔ $C(x)$ بر بازه‌ٔ $I = [0, 40]$ را بیـابیم ، تنـها نقطه‌ٔ بحرانی $C(x)$ نقطه‌ٔ x است که در آن

$$\frac{dC(x)}{dx} = -0.3 + 0.6\frac{x}{\sqrt{x^2 + 400}} = 0,$$

یا معادلا"

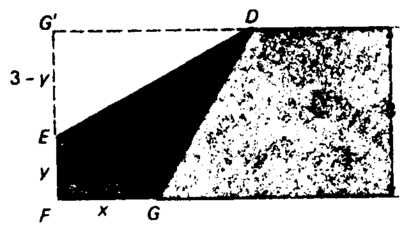
$$\sqrt{x^2 + 400} = 2x,$$

یعنی ، $x = 20/\sqrt{3} \approx 11.55$. از مقایسه‌ٔ $C(20/\sqrt{3})$ با مقادیر تابع هزینـه در نقـاط انتهایی بازه‌ٔ I معلوم می‌شود که

$$C(0) = 24, \qquad C(20/\sqrt{3}) = 12 + 6\sqrt{3} \approx 22.39, \qquad C(40) = 12\sqrt{5} \approx 26.83.$$

مینیمم این اعداد ، یعنی $C(20/\sqrt{3})$ ، مینیمم $C(x)$ بر I است (قضیهٔ ۵ ، صفحهٔ ۲۶۷ ، را به یاد آورید) . لذا ، می‌بینیم که پیش از رفتن به شهر B بایــد $40 - 11.55 \approx 28.45$ از جادهٔ قدیم اختیار شود . بدین ترتیب ، ادارهٔ خدمات اجتماعی با اختیار جادهٔ L مانند AQB حدود 1.61 میلیون دلار و با انتخاب راه مستقیم AB حدود 4.44 میلیون دلار صرفه‌جویی خواهد کرد .

مثال ۴ . فرض کنید گوشه‌ای از یک نوار مستطیلی کاغذ به عرض 3 اینچ آنقدر برگردانده شود که به ضلع مقابل برسد؛ و بدین ترتیب ، مثلث EFG به مساحت A مثل شکل ۴۰ پدید آید . ماکزیمم مقدار A چقدر است ؟



شکل ۴۰

حل . فرض کنیم ، مثل شکل ، x و y طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویهٔ EFG باشند. بنــا بــر هندسهٔ مقدماتی ،

$$A = \frac{1}{2}xy, \qquad (۳)$$

و ما باید به نوعی از ماهیت خاص مسئله استفاده کنیم ، یعنی اینکه EFG مثلث دلخواهی نبوده بلکه از برگرداندن نوار کاغذ به صورت توصیف شده به دست آمده است ، تا یکی از دو متغیر x و y را برحسب دیگری بیان کنیم . این قسمت مشکل مسئله است؛ اگر "راه‌حل" شما را به مقصد نرسانده ناامید نشوید . تسلیم نشوید ، زیرا شهودا" واضح است که معرفتی از x ، y را به‌طور منحصر به فرد معین می‌کند (یک صفحه کاغذ را تا کنید و ببینید) . نکتهٔ اصلی این است که وقتی مثلث DEG تا می‌خورد ، فضای خالی مثلث همنهشت DEG' است . به‌علاوه ، ضلع EG' مثلث اخیر ، که به آسانی معلوم می‌شود که به طول $3 - y$ است (به یاد آورید که عرض نوار 3 است) ، وتر EG مثلث EFG پس از تازدن است . لذا ، طبق قضیهٔ فیثاغورس ،

$$x^2 + y^2 = |EG|^2 = (3 - y)^2 = 9 - 6y + y^2.$$

با حذف y^2 و حل نسبت به y ، فرمول زیر به دست می‌آید :

$$y = \frac{9 - x^2}{6}, \qquad (۴)$$

که yرا به عنوان تابعی از x بیان می‌کند .

بقیهٔ کار سرراست است . با گذاردن (۴) در (۳) به دست می‌آوریم

$$A = \frac{9x - x^3}{12},$$

و مسئله به یافتن ماکزیمم (مطلق) مساحت A بر بازهٔ $I = [0, 3]$ تحویل می‌شود . (چرا این بازه ؟) ماکزیمم باید در یک نقطهٔ درونی I صورت گیرد ، زیرا $A > 0$ اگر $0 < x < 3$ و $A|_{x=0} = A|_{x=3} = 0$. از اینرو ، مقدار x که A را ماکزیمم می‌کند یک نقطهٔ بحرانی A است . چون A به ازای هر x مشتقپذیر است ، نقاط بحرانی A نقاط $x = \sqrt{3}$ و $x = -\sqrt{3}$ می‌باشند که در آنها

$$\frac{dA}{dx} = \frac{9 - 3x^2}{12} = \frac{3 - x^2}{4}$$

مساوی صفر است ، ولی فقط $x = \sqrt{3}$ یک نقطهٔ درونی I می‌باشد . لذا ، مقدار ماکزیمم A عبارت است از

$$A|_{x=\sqrt{3}} = \frac{9x - x^3}{12}\bigg|_{x=\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ اینچ مربع}$$

به عنوان تمرین ، نشان دهید که اگر $x = \sqrt{3}$ ، قسمت تا خوردهٔ DEG و مثلث EFG مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای هستند با زوایای حادهٔ $30°$ و $60°$.

یک ابزار مفید برای بهینه‌سازی . پیش از چند مثال ، قضیه‌ای ثابت می‌کنیم که اغلب در حل مسائل بهینه‌سازی مفید واقع می‌شود .

قضیهٔ ۱۲ (قضیهٔ مقدار اکستریم برای توابعی که به بی‌نهایت نزدیک می‌شوند) . *فرض کنیم f تابع پیوسته‌ای بر بازهٔ باز $I = (a, b)$ باشد که $a = -\infty$ و $b = \infty$ نیز مجاز است. در این صورت ، f بر I مینیمم دارد اگر*

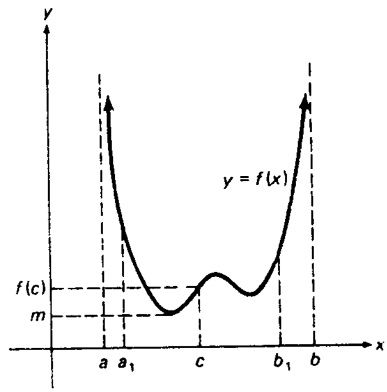
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = \infty, \qquad (۵)$$

و بر I ماکزیمم دارد اگر

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty \tag{۵'}$$

(اگر $a = -\infty$ ، $x \to a^+$ را به $x \to -\infty$ و اگر $b = \infty$ ، $x \to b^-$ را به $x \to \infty$ تغییر دهید).

برهان (اختیاری). فقط (۵) را ثابت می‌کنیم ، زیرا حالات دیگر به همین نحو ثابت می‌شوند . فرض کنیم c نقطه‌ای در (a, b) باشد. در این صورت ، به‌خاطر (۵) ، نقاطی مانند a_1 و b_1 وجود دارند به‌طوری که $a < a_1 < c < b_1 < b$ و هر وقت $a < x < a_1$ و $b_1 < x < b$ ، $f(x) > f(c)$ (ر.ک. شکل ۴۱) . فرض کنیم m مینیمم f بر بازهٔ بستهٔ



شکل ۴۱

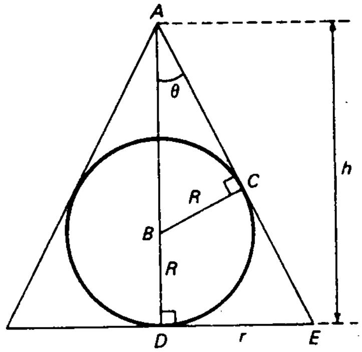
کراندار $[a_1, b_1]$ باشد؛ وجود m توسط قضیهٔ ۱۵ ، صفحهٔ ۱۶۰ ، تضمین می‌شود (قضیهٔ مقدار اکستریم معمولی) . پس m مینیمم f بر (a, b) نیز هست . در واقع ، بنابر معنی m ، به ازای هر x در $[a_1, b_1]$ ، $f(x) \geq m$ ، حال آنکه بنابر انتخاب a_1 و a_2 ، به ازای هر x در (a, a_1) و (b_1, b) ، $f(x) > f(c) \geq m$.

طبیعی است که اگر (۵) برقرار باشد ، f ماکزیمم ندارد و اگر (۵') برقرار باشد ، مینیمم ندارد . قضیهٔ ۱۲ نقشی در حل امثلهٔ زیر دارد .

مثال ۵ . حجم کوچکترین مخروط مستدیر قائم محیط بر یک کره به شعاع R را بیابید .

حل . یک مخروط مستدیر قائم به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h دارای حجم $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ است و

ما ابتدا باید یکی از دو متغیر r و h را برحسب دیگری بیان کنیم . چون مخروط برکره محیط است ، شکل ۴۲ را خواهیم داشت ، که در آن مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ADE و ACB درزاویهٔ



شکل ۴۲

θ که مساوی نصف زاویهٔ رأس مخروط است مشترکند . پس نتیجه می‌شود که

$$\tan\theta = \frac{|DE|}{|AD|} = \frac{r}{h}, \qquad \sin\theta = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{R}{h-R}. \tag{۶}$$

ولی

$$\tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}, \tag{۷}$$

و از تلفیق (۶) و (۷) خواهیم داشت

$$\frac{r^2}{h^2} = \frac{R^2/(h-R)^2}{1-[R^2/(h-R)^2]} = \frac{R^2}{(h-R)^2-R^2} = \frac{R^2}{h^2-2Rh},$$

یا معادلا"

$$r^2 = \frac{R^2h^2}{h^2-2Rh} = \frac{R^2h}{h-2R},$$

که r^2 را به صورت تابعی از h بیان می‌کند . بنابراین ،

$$V = V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{h^2}{h-2R}, \tag{۸}$$

که در آن $2R < h < \infty$ (چرا این بازه؟)

حال مسئله به‌یافتن مینیمم (مطلق) V بر بازهٔ نامتناهی باز $I = (2R, \infty)$ تحویل می‌شود . از (۸) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{h\to 2R^+} V(h) = \infty, \qquad \lim_{h\to\infty} V(h) = \infty.$$

لذا، طبق قضیهٔ ۱۲، مینیمم وجود دارد، ودریک‌نقطهٔ‌بحرانی V صورت می‌گیرد، زیرا یک مینیمم موضعی است (هر نقطه از بازهٔ باز I یک نقطهٔ درونی است). چون V بر I مشتقپذیر است، با مشتق

$$\frac{dV}{dh} = \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{2h(h-2R)-h^2}{(h-2R)^2} = \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{h(h-4R)}{(h-2R)^2},$$

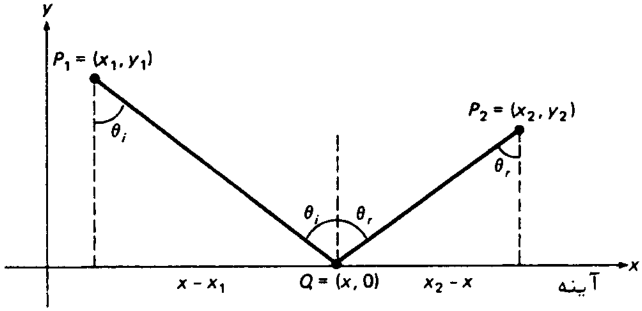
تنها نقطهٔ بحرانی V نقطهٔ $h = 4R$ است که در آن $dV/dh = 0$؛ درنتیجه، مینیمم حجم V بر بازهٔ I باید در $h = 4R$ صورت‌گیرد. لذا، کوچکترین حجم یک مخروط که قابل‌محیط شدن بر یک کره به شعاع R است مساوی است با

$$V|_{h=4R} = \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{16R^2}{4R-2R} = \frac{8}{3}\pi R^3.$$

با تعجب می‌بینیم که این درست دوبرابر حجم کرهٔ محاطی است.

مثال ۶. فرض کنیم P_1 و P_2 دو نقطه در یک طرف آینهٔ مسطحی بوده، و تمام مسیرهای P_1QP_2 ای را درنظرمی‌گیریم که‌از دو پاره‌خط P_1Q و QP_2 تشکیل شده‌اند که Q یک نقطهٔ دلخواه از آینه می‌باشد. بنابر قانون نور معروف به *اصل فرما*[1]، مسیر یک شعاع نورانی صادر شده از P_1 و منعکس شده به‌وسیلهٔ آینه تا نقطهٔ P_2 مسیری است که در **کمترین زمان** پیموده می‌شود. این مسیر را پیدا کنید.

حل. یک دستگاه مختصات دکارتی اختیار می‌کنیم که محور x در امتداد آینه است. نقاط P_1، Q، و P_2 را طبق شکل ۴۳ مختص‌دار می‌کنیم. فرض کنیم v سرعت نور درهوا باشد.



شکل ۴۳

---

1. *Fermat*

در این صورت ، زمان لازم برای آنکه شعاع نور مسیر P_1QP_2 را بپیماید مساوی است با $T = L/v$ ، که در آن L طول کل P_1QP_2 است . لذا ، اصل فرما خواستار مینیمم سازی تابع

$$T = T(x) = \frac{1}{v}(|P_1Q| + |QP_2|) = \frac{1}{v}[\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2}] \qquad (۹)$$

می‌شود ، که در آن x طول نقطهٔ Q است . با مشتقگیری از T نسبت به x و مساوی صفر قرار دادن نتیجه ، به دست می‌آید

$$\frac{dT}{dx} = \frac{x - x_1}{v\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}} + \frac{x - x_2}{v\sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2}} = 0,$$

که ایجاب می‌کند که

$$\frac{x - x_1}{|P_1Q|} = \frac{x_2 - x}{|QP_2|}. \qquad (۱۰)$$

این امر که T عملاً " مینیمم خود را بر $(-\infty, \infty)$ در نقطهٔ x معین شده به‌وسیلهٔ (۱۰) می‌گیرد نتیجه‌ای است از قضیهٔ ۱۲ ، زیرا T فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد ووقتی $x \to \pm\infty$ ، $T \to \infty$. توجه کنید که ، به‌خاطر ثابت بودن سرعت v ، مینیمم‌سازی زمان T معادل مینیمم‌سازی طول L است .

حال فرض کنیم θ_i *زاویهٔ تابش*، یعنی زاویهٔ بین شعاع تابش P_1Q و عمود برآینه ، بوده ، و θ_r *زاویهٔ انعکاس*، یعنی زاویهٔ بین‌شعاع منعکس‌شدهٔ QP_2 و عمود بر آینه ، باشد . از شکل واضح است که (۱۰) معادل

$$\sin\theta_i = \sin\theta_r$$

بوده که به نوبهٔ خود ایجاب می‌کند که

$$\theta_i = \theta_r,$$

نتیجه‌ای که به **قانون *انعکاس*** معروف است . با الفاظ ، زاویهٔ تابش مساوی‌زاویهٔ‌انعکاس است .

مثال ۷ . فرض کنیم P_1 و P_2 دو نقطه در دو طرف یک سطح مسطح بین دو محیط ، مثلاً "هوا و آب ، باشند . با استفاده از اصل فرما ، مسیری را بیابید که شعاع نور خارج شده‌از P_1 پس از انعکاس از سطح مشترک تا P_2 می‌رود .

حل . به موازات حل مثال ۶ ، مختصات شکل ۴۴ را اختیار می‌کنیم .
فرض کنیم سرعت نور در محیط اول v_1 و در محیط دوم v_2 باشد . در این صورت ، به جای (۹) داریم

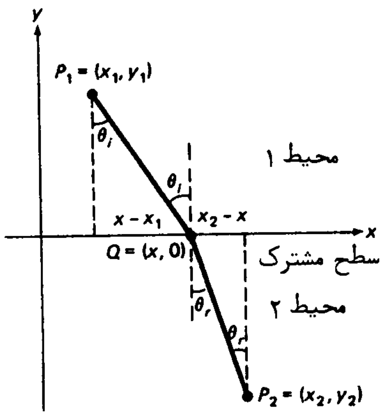
$$T = T(x) = \frac{|P_1Q|}{v_1} + \frac{|QP_2|}{v_2} = \frac{\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x-x_2)^2+y_2^2}}{v_2}. \qquad (۹')$$

با مساوی صفر قرار دادن dT/dx فوراً به شرط

$$\frac{x-x_1}{v_1|P_1Q|} = \frac{x_2-x}{v_2|QP_2|} \qquad (۱۰')$$

می‌رسیم که به‌خاطر عوامل v_1 و v_2 در مخرج با (۱۰) فرق دارد. باتوجه به‌شکل، می‌بینیم که (۱۰') معادل است با

$$\frac{\sin\theta_i}{v_1} = \frac{\sin\theta_r}{v_2}, \qquad (۱۱)$$



شکل ۴۴

که در آن باز θ_i زاویهٔ تابش است ولی θ_r زاویهٔ تفرق، یعنی زاویهٔ بین شعاع تفرق‌وعمود بر سطح مشترک، می‌باشد. فرمول (۱۱) قانون مشهور تفرق، که‌به‌*قانون اسنل*[1] نیز معروف است، در نور از اهمیت زیادی برخوردار است. این قانون اغلب به‌شکل زیرنوشته‌می‌شود:

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{v_1}{v_2} = \text{ثابت}$$

تبصره. در دو مثال پیش تلویحاً فرض شده است که نقاط P_1، Q، و P_2 در یک

1. *Snell*

صفحه‌اند ، و صریحا " فرض شده‌است‌که مسیرهای‌جزئی P_1Q و QP_2 مستقیم‌الخط می‌باشند . این فرضها توجیه‌شده‌اند ، زیرا در غیراین‌صورت‌نور برای‌رفتن از P_1 تا P_2 زمان‌*طولانی‌تری* می‌خواهد (چرا؟) .

مثال ۸ . کوتاهترین فاصلهٔ بین نقطهٔ $P = (2, 0)$ و منحنی $y = \sqrt{x}$ را بیابید .

حل . فرض کنیم $L = |PQ|$ فاصلهٔ P تا نقطهٔ متغیر $Q = (x, \sqrt{x})$ از منحنی $y = \sqrt{x}$ باشد . در این صورت ، $L = L(x)$ تابعی از x است ، و

$$L^2 = |PQ|^2 = (x - 2)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2 = x^2 - 3x + 4.$$

چون L مثبت است ، L در نقطهٔ c مینیمم دارد اگر و فقط اگر L^2 در c مینیمم داشته‌باشد (بیشتر توضیح دهید) . تنها نقطهٔ بحرانی L^2 در نقطهٔ $x = \frac{3}{2}$ است که در آن

$$\frac{d}{dx} L^2 = \frac{d}{dx} (x^2 - 3x + 4) = 2x - 3 = 0.$$

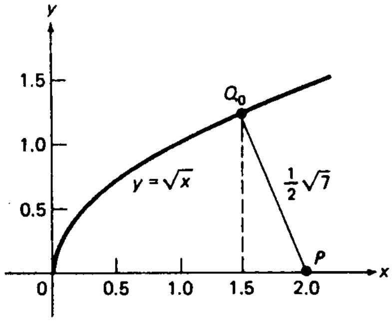
همچنین ، از اینکه $d^2(L^2)/dx^2 \equiv 2 > 0$ ، از آزمون مشتق دوم نتیجه می‌شود که در $x = \frac{3}{2}$ L^2 مینیمم موضعی اکید دارد . بنابراین ، L در $x = \frac{3}{2}$ نیز مینیمم موضعی اکیدی‌مساوی

$$L\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) + 4} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{7} \approx 1.32$$

خواهد داشت . ما در جستجوی‌مینیمم (مطلق) L بر $I = [0, \infty)$ هستیم ، بازه‌ای که‌منحنی $y = \sqrt{x}$ بر آن تعریف شده است . چون $L(0) = 2 > L(\frac{3}{2})$ و وقتی $x \to \infty$ ، $L \to \infty$ ، (بنابر استدلالی که در اثبات قضیهٔ ۱۲ به کار رفت) این مینیمم وجود دارد و در یک نقطهٔ درونی I گرفته‌می‌شود . از اینرو ، مینیمم L بر I با مینیمم موضعی L در $x = \frac{3}{2}$ یکی است ، و کوتاهترین فاصلهٔ بین P و منحنی $y = \sqrt{x}$ مساوی $L(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{7}$ می‌باشد . این فاصلهٔ بین P و Q_0 (یعنی ، نقطه‌ای‌از منحنی با مختص x ، $\frac{3}{2}$) می‌باشد (ر.ک. شکل۴۵). به عنوان تمرین ، نشان دهید که پاره‌خط PQ_0 بر مماس بر منحنی در Q_0 عمود است .

طرز حل مسائل بهینه‌سازی . روند گام به گام زیر شما را در حل مسائل بهینه‌سازی یاری می‌دهد .

۱ . کمیتی‌راکه بایدماکزیمم یا مینیمم شود شناسایی کرده و آن را با حرف مناسبی ، که بهتر است یادآور معنی آن باشد ، نشان دهید . این *متغیر وابسته* است ، و هدف شما



شکل ۴۵

این است که مآلا " آن را به صورت تابعی از یک متغیر مستقل بیان کنید .

۲. کمیات دیگری که درمسئله نقش دارند شناسایی کرده و آنها را نیز با حروف مناسبی نمایش دهید. یافتن این کمیات مستلزم آزمایشهایی است ، و باید انتظار اشتباهاتی را داشته باشید ، زیرا هر کس اشتباه می‌کند .

۳. فرمولهایی را جستجو کنید که کمیات کمکی انتخاب شده در مرحلهٔ ۲ را به هم و به متغیر وابستهٔ اختیار شده در مرحلهٔ ۱ ربط دهد . کشف این‌گونه فرمولها معمولا "با رسم شکل ساده می‌شود .

۴. یکی از کمیات کمکی را به عنوان متغیر **مستقل** انتخاب و دیگران را حذف کنید. حال باید فرمولی داشته باشید که کمیتی که باید بهینه شود را به صورت تابعی چون f از متغیر مستقل بیان کند که بر بازه‌ای چون I تعریف شده است . بازهٔ I ممکن است شامل نقاط انتهایی باشد یا نباشد ، و I ممکن است به خاطر محدودیتهای ناشی از مفهوم واقعی مسئله از قلمرو طبیعی f کوچکتر باشد .

۵. قسمت مشکل مسئله پشت سر گذارده شده است ، و بقیهٔ آن نسبتا " آسان است . شما در جستجوی ماکزیمم یا مینیمم تابع f بر بازه‌ای چون I هستید ، و این اکسترمم مطلق را می‌توان به کمک نظریهٔ مذکور در بخش ۳.۲ به دست آورد . بخصوص ، از مشتقگیری استفاده کرده نقاط بحرانی f ، یعنی نقاطی که در آن f' صفر است یا وجود ندارد ، را بیابید ، زیرا f ممکن است در این نقاط اکسترمم موضعی داشته باشد . ممکن است بخواهید با استفاده از آزمون اول یا دوم ثابت کنید f در یک نقطهٔ بحرانی عملا " اکسترمم *دارد* ، و مشخص کنید که اکسترمم ماکزیمم یا مینیمم است . ممکن است مقایسهٔ مقادیر تابع f در نقاط بحرانی با مقادیر f در نقاط انتهایی f به صورت توصیف شده در قضیهٔ ۵ ، صفحهٔ ۲۶۷ ، لازم باشد . اگر f در

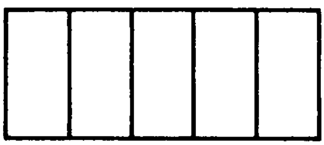
نقاط انتهایی I به بی‌نهایت نزدیک شود ، استفاده از قضیهٔ ۱۲ ، صفحهٔ ۳۲۸ ، ممکن است مفید باشد .

۶. یادتان باشد که در پاسخ به سئوالات مطرح شده در صورت مسئله ، جواب نهایی خود را از ریاضی به فارسی برگردانید .

مسائل

۱. مثل مثال ۱ ، مزرعه‌داری 800 ft حصار دارد که دور یک مزرعهٔ مستطیلی بکشد ، ولی این بار یک طرف مزرعه امتداد مستقیم ساحل رودخانه‌ای است . با این فرض که ساحل رودخانه حصار نمی‌خواهد ، بیشترین مساحتی که مزرعه‌دار می‌تواند حصار بکشد چقدر است ؟

۲. مزرعه‌داری 600 ft حصار دارد که می‌خواهد دور پنج قطعهٔ مستطیلی مساوی مانند شکل ۴۶ را حصار بکشد . به ازای چه ابعادی مساحت کل محصور شده ماکزیمم است ؟



شکل ۴۶

اگر یکی از خطوط مرزی مشترک در تمام قطعات در امتداد ساحل مستقیم رودخانه‌ای قرار داشته و به حصاری برای آن نیاز نباشد ، جواب چه تغییری خواهد کرد ؟

۳. مستطیلی به مساحت A بیابید که کوچکترین محیط را داشته باشد .

۴. ماکزیمم مجموع دو عدد (نه لزوماً " مثبت) که حاصل ضربشان عدد معلوم c است چقدر است ؟ مینیمم آنها چقدر است ؟

۵. ماکزیمم حاصل ضرب دو عدد که مجموعشان عدد داده شدهٔ c است چقدر است ؟ مینیمم آنها چقدر است ؟

۶. ماکزیمم حاصل‌ضرب دو عدد که *تفاضل* آنها عدد داده شدهٔ c است چقدر است ؟ مینیمم آنها چقدر است ؟

۷. یک صورت غذا به مساحت کل 100 sq in با حاشیهٔ 2-in در بالا و پایین و 1-in در طرفین چاپ شده است . این صورت با چه ابعادی بیشترین مساحت را دارد ؟

۸. بیشترین حجم یک جعبهٔ مستطیلی بدون در را بیابید که از بریدن مربعات کوچک از چهارگوشهٔ یک ورقهٔ فلزی مستطیلی 8 in. × 15 in و تا کردن لبه‌ها ساخته می‌شود .

بزرگترین مساحت مستطیل محاط شده در هر یک از اشکال زیر را بیابید.

۹. یک دایره به شعاع R

۱۰. یک نیمدایره به شعاع R که یک ضلع مستطیل روی قطر آن است.

۱۱. یک مثلث متساوی‌الساقین به قاعدهٔ b و ساق به طول s که یک ضلع مستطیل بر قاعدهٔ مثلث قرار دارد.

۱۲. مقاومت یک تیر با مقطع عرضی مستطیلی با حاصل‌ضرب عرض در مربع ارتفاعش متناسب است. فرض کنید یک تیر چوبی از یک الوار مستدیر بریده شده باشد. به ازای چه نسبتی از ارتفاع به عرض مقاومت آن ماکزیمم است؟

۱۳. بیشترین مساحت یک ذوزنقه که سه ضلع ناموازی آن به طول s اند چقدر است؟ طول ضلع چهارم وقتی مساحت ماکزیمم است چیست؟

۱۴. در بین تمام مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای که مجموع طول وتر و یک ضلعشان عدد ثابت معلوم c است کدام بیشترین مساحت را دارد؟

۱۵. فرض کنید BPC یک مثلث محاطی در یک دایره بوده، و ضلع BC با مماس بر دایره در P، یعنی رأس مقابل به BC، موازی باشد. به ازای چه BC ای مساحت BPC ماکزیمم است؟

۱۶. به ازای چه نسبتی از ارتفاع به شعاع یک چلیک روغن استوانه‌ای با حجم معلوم، مساحت کل چلیک مینیمم است؟

۱۷. حجم ماکزیمم یک فنجان با مساحت معلوم S به شکل یک استوانهٔ مستدیر قائم بدون سر چقدر است؟

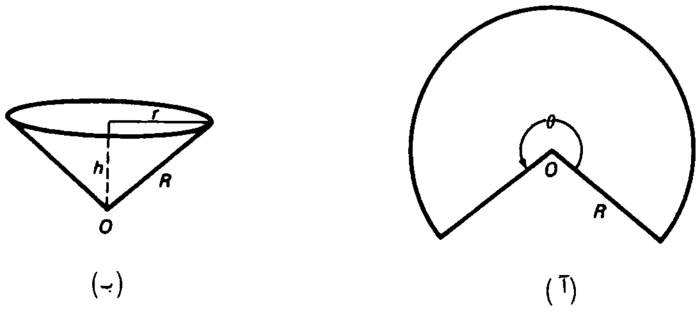
مینیمم مساحت آن به ازای حجم معلوم V چقدر است؟ رابطهٔ بین این دو مسئله را بیابید.

۱۸. بیشترین حجم یک مخروط مستدیر قائم با ارتفاع مایل s را بیابید.

۱۹. در بین تمام استوانه‌های مستدیر قائم حاصل از دوران یک مستطیل با محیط P حول یکی از اضلاعش استوانه با حجم ماکزیمم را بیابید.

۲۰. چه مثلث متساوی‌الساقینی با محیط P در دوران حول قاعده‌اش بیشترین حجم را تولید می‌کند؟

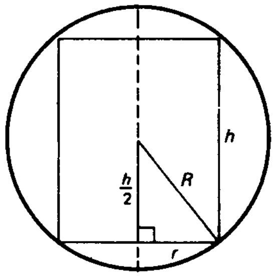
۲۱. یک فنجان مخروطی با بریدن یک قطاع مستدیر مرکزی به زاویهٔ θ از یک قرص کاغذی (ر.ک. شکل ۴۷ (آ)، که در آن قرص به‌شعاع R است) و چسباندن لبه‌های مستقیم قطاع به هم (ر.ک. شکل ۴۷ (ب)، که در آن فنجان به ارتفاع h بوده و سرش به شعاع r می‌باشد) ساخته شده است. فنجان به ازای چه مقداری از θ بیشترین‌حجم



شکل ۴۷

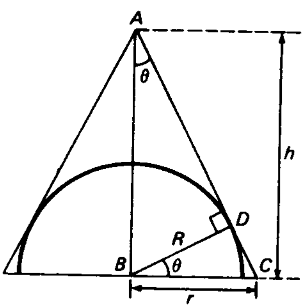
را دارد؟

۲۲. بیشترین حجم یک استوانهٔ مستدیر قائم محاط در یک کره به شعاع R را بیابید (ر. ک. شکل ۴۸).



شکل ۴۸

۲۳. کوچکترین حجم یک‌مخروط مستدیر قائم محیط بر یک‌نیمکره به شعاع R را بیابید (ر. ک. شکل ۴۹).



شکل ۴۹

۲۴. کوتاهترین فاصلهٔ بین نقطهٔ $(4, 1)$ و سهمی $y = \frac{1}{2}x^2$ را بیابید.

۲۵. بزرگترین فاصلهٔ قائم بین منحنیهای $y = \sqrt{x}$ و $y = \sqrt[3]{x}$ بر بازهٔ $0 \le x \le 1$ را بیابید.

۲۶. فرض کنید تابع f بر $(-\infty, \infty)$ مشتقپذیر باشد. نشان دهید که کوتاهترین فاصله تا منحنی $y = f(x)$ از نقطهٔ ثابت $P = (a, b)$ غیرواقع بر منحنی در امتداد خط قائم به منحنی میباشد. این نتیجه را در مسئلهٔ ۲۴ تحقیق کنید.

۲۷. در مثال ۳ فرض کنید هزینهٔ ساختن بخش دوم جاده $500,000 بر میل باشد. حال چه مقدار از جادهٔ قدیم باید اختیار شود؟

۲۸. در مثال ۳ هزینهٔ ساختن تمام جادهٔ جدید چقدر باید پایین باشد تا ادارهٔ خدمات اجتماعی طرح ساختن یک جادهٔ دو بخشی را لغو کرده و جادهٔ مستقیم AB را ترجیح دهد؟ آیا ساختن جادهٔ L شکل AQB معنی دارد؟

۲۹. دو کشتی A و B در مسیرهای متعامدی به سمت نقطهٔ P روانند. کشتی A به سرعت 12 گره بوده و در آغاز در فاصلهٔ 25 میل دریایی از P قرار دارد، حال آنکه کشتی B به سرعت 16 گره بوده و در آغاز در فاصلهٔ 20 میل دریایی از P واقع است. چه وقت کشتیها بیش از همه به هم نزدیکند؟ نزدیکترین فاصله چقدر است؟

۳۰. دو نقطهٔ $P_1 = (0, 3)$ و $P_2 = (4, 5)$ داده شدهاند. نقطهٔ Q بر محور x را طوری بیابید که مجموع فواصل $|P_1Q|$ و $|QP_2|$ مینیمم باشد. این را به مثال ۶ ربط دهید.

جزیرهای در 4 میلی یک ساحل مستقیم قرار دارد. در پایین جاده و در 5 میلی نقطهایاز ساحل که به جزیره نزدیکترین است مغازهای وجود دارد. یک ساکن جزیره به طور منظم به مغازه سر میزند و در این راه از یک قایق پارودار استفاده کرده و بقیهٔ راه را پیادهمیرود. سرعت راه رفتن این شخص 5 mph بوده و با سرعت متوسط 3 mph پارو میزند.

۳۱. در چه نقطه از ساحل پیاده شود تا در کمترین زمان به مغازه برسد؟

۳۲. فرض کنید دریا آرام باشد بهطوریکه بتواند باسرعت 4 mph پارو بزند. اینمسیروی را چگونه تغییر میدهد؟

۳۳. فرض کنید هدفش به جای مینیمم ساختن زمان رسیدن به مغازه، مینیمم سازی انرژی مصرف شده باشد، وفرض کنید انرژی صرف شده در دریا برایطیمسافتی دوبرابر انرژی مصرف شده در خشکی برای طی همان فاصله باشد. در چهفاصله از مغازه باید از قایق پیاده شود؟

۳۴. مماس بر منحنی $y = x^2 - 1$ را طوریبیابید که از ربع چهارم مثلثی باکمترینمساحت جدا کند. مساحت مینیمم چقدر است؟

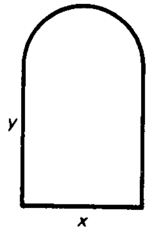
۳۵. نقطهٔ $P = (a, b)$ در ربع اول داده شده است. خطی ماربر P بیابید که از ربع اول

مثلثی به مساحت مینیمم جدا کند . این مساحت مینیمم چقدر است؟

۳۶. روشنایی یک منبع نور با قدرت منبع نسبت‌مستقیم و با مربع فاصلهٔ بین منبع‌وجسم روشن شده نسبت عکس دارد . روشنایی را در نقطهٔ متغیری‌ازخط‌واصل بین‌دو منبع نور به فاصلهٔ d از هم ، که یکی k برابر از دیگری قویتر است ، درنظر بگیرید. نشان دهید که در نقطه با ضعیفترین روشنایی ، منبع قویتر $\sqrt[3]{k}$ برابر بیشتر ازمنبع‌ضعیفتر روشنایی تولید می‌کند .

۳۷. سیمی به طول L به دو قطعه بریده شده است . سپس یک قطعه به دایره‌ای به شعاع r و دیگری به مربعی به طول ضلع s تبدیل شده است . کوچکترین مساحت کل محصور به دو قطعه چقدر است؟ این مساحت چطور به دست می‌آید؟

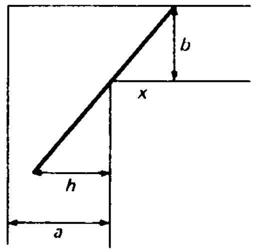
۳۸. پنجره‌ای به شکل مستطیلی است به قاعدهٔ x و ارتفاع y که در بالای آن نیمدایره‌ای به قطر x قرار گرفته است (ر.ک. شکل ۵۰) .



شکل ۵۰

اگر محیط پنجره p باشد ، ابعاد پنجره‌ای را بیابید که بیشترین نور از آن بگذرد .

۳۹. یک تیر سخت به طول L روی غلطکی در یک راهرو به عرض a به‌راهرودیگربه‌عرض b و عمود براولی‌حرکت می‌کند (ر.ک. شکل ۵۱) . طول‌بلندترین‌تیری‌که می‌تواندبدون‌اشکال



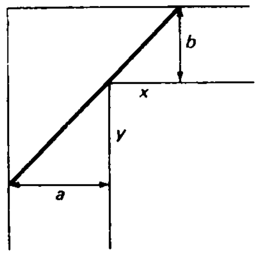
شکل ۵۱

از زاویهٔ قاعده عبور کند را بیابید . از عرض تیر صرف نظر کرده و فرض کنید تیر

همواره افقی باشد.

راهنمایی. فرض کنید x و h فواصل نموده شده در شکل باشند. h را به صورت تابعی از x بیان کرده، و نشان دهید که ماکزیمم h مساوی $(L^{2/3} - b^{2/3})^{3/2}$ است.

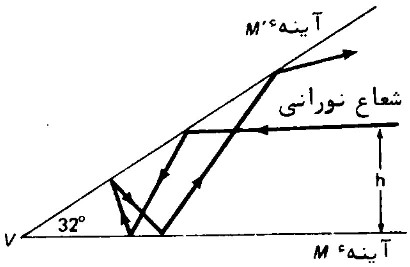
۴۰. در مسئلهٔ ۳۹ نشان دهید که طویلترین تیری که می‌تواند بپیچد کوتاهترین تیری است که با هر دو دیوار خارجی و نقطهٔ مشترک دیوارهای داخلی راهروها (به شکل ۵۲) تماس می‌یابد. با معلوم گرفتن این امر، مسئله را به صورت دیگر حل کنید.



شکل ۵۲

۴۱. ساختن زیر برای یافتن شعاع انعکاس QP_2 و نقطهٔ انعکاس Q در مثال ۶ را توجیه کنید. فرض کنید P'_2 نقش نقطهٔ P_2 در آینه، یعنی منعکس P_2 نسبت به محور x، بوده و پاره‌خط $P_1P'_2$ را رسم کنید. در این صورت، Q نقطه‌ای است که در آن $P_1P'_2$ محور x را قطع می‌کند، و QP_2 منعکس پاره‌خط QP'_2 نسبت به محور x است.

۴۲. فرض کنید یک شعاع نورانی موازی آینهٔ مسطح M و در فاصلهٔ h از M وارد یک گوه به زاویهٔ رأس 32 می‌شود که از M و آینهٔ مسطح دیگر M' که در لبه‌ای با M مشترک است تشکیل شده است (ر.ک. شکل ۵۳).



شکل ۵۳

نشان دهید که h نزدیکترین فاصلهٔ شعاع چندبار انعکاس تا رأس V گوه، یعنی لبهٔ

مشترک آینه‌ها ، است . آیا این نتیجه به اندازهٔ زاویهٔ رأس بستگی دارد ؟شعاع‌وقتی به V از همیشه نزدیکتر است چند بار منعکس شده است ؟ تعداد کل انعکاسهای شعاع چندبارانعکاس قبل از ترک گوه چند است ؟

راهنمایی . از قانون انعکاس چندبار استفاده کنید .

۸.۳ کاربردها در تجارت و اقتصاد (اختیاری)

مفهوم حاشیه . لغت " حاشیه " مکرر در تجارت و اقتصاد ، و در عباراتی چون هزینهٔ حاشیه‌ای ، درآمد حاشیه‌ای ، سود حاشیه‌ای ، و غیره ظاهر می‌شود . لغت اول درهرعبارت همیشه یک تابع است ،و کلمهٔ *حاشیه* گرفتن میزان تغییر تابع داده‌شده نسبت به شناسه‌اش را می‌طلبد . لذا ، برای یافتن یک کمیت حاشیه‌ای باید عمل ریاضی مشتقگیری‌راانجام داد . واژهٔ " متوسط " ، که در نظریهٔ اقتصاد به‌کار می‌رود ، نیز یک عمل ریاضی را می‌طلبدوآن تقسیم تابع پیش از واژه به متغیر مستقل می‌باشد ، اما این را می‌توان بدون اطلاع ازحساب دیفرانسیل و انتگرال انجام داد .

مثلا" ، هزینهٔ‌کل تولیدکمیت q از یک کالا تابعی است از q به نام *تابع هزینه (کل)* که با $C(q)$ نموده می‌شود . مشتق این تابع ، یعنی

$$C'(q) = \frac{dC(q)}{dq}, \tag{1}$$

هزینهٔ *حاشیه‌ای* نام دارد و با $\mathrm{MC}(q)$ نموده می‌شود . در اینجا از قرارداد متعـارفی در نظریهٔ اقتصاد پیروی کرده و بعضی از توابع را باحروفی مانند MC برای هزینهٔ حاشیه‌ای، AR برای درآمد متوسط ، و غیره نشان می‌دهیم . این جفت حروف را حاصلضرب نگیریدا با این نماد ، (۱) به شکل زیر درمی‌آید :

$$\mathrm{AC}(q) = \frac{C(q)}{q}. \tag{1'}$$

به همین نحو ، هزینهٔ متوسط تولید کمیت q از کالای مورد نظر عبارت است از

$$\mathrm{MC}(q) = \frac{dC(q)}{dq}.$$

در نوشتن $C(q)$ تلویحا" فرض می‌کنیم $C(q)$ به ازای جمیع اعداد حقیقی $q \geq 0$ تعریف‌شده‌است(خروجی ذاتا "نامنفی‌است)،واین فقط به ازای‌اعدادصحیح $q = 0, 1, 2, \ldots$ نیست . مسلما " این فرض برای روغن یا نمک مناسب است ، ولی برای کالاهایی که " در هر لحظه یکی می‌آید " اگر خروجی زیاد بوده و ما زیاد وسواس نداشته باشیم نیز معنی دارد .

لذا ، اگر جواب یک مسئلهٔ تولید " ساختن 31.5 TV در روز " باشد ، می‌توان 63 دستگاه را در 2 روز ساخت ، یا اینکه 31 یا 32 دستگاه در روز بسازیم .

تحت این شرایط ، تصور هزینهٔ حاشیه‌ای ، در سطح تولید معلوم q ، به عنوان هزینهٔ اضافی تولید یک واحد بیشتر ، درآمد حاشیه‌ای به عنوان درآمد اضافی حاصل از فروش یک واحد بیشتر ، و غیره تعاریف مناسبی خواهند بود . لذا ، مثلا " ، از تقریب مشتق آمده در (۱′) با خارج قسمت تفاضلی خواهیم داشت

$$\mathrm{MC}(q) = C'(q) \approx \frac{C(q + \Delta q) - C(q)}{\Delta q}, \tag{۲}$$

که در آن تقریب درصورتی مناسب است که Δq " به قدر کافی کوچک " باشد . طبق رسم این مبحث ، فرض می‌کنیم $\Delta q = 1$ به قدر کافی کوچک منظور شود . در این صورت ، اگر در (۲) قرار دهیم $\Delta q = 1$ ، با تقریب مناسبی خواهیم داشت

$$\mathrm{MC}(q) = C(q + 1) - C(q). \tag{۲′}$$

به عبارت دیگر ، هزینهٔ حاشیه‌ای در هر سطح تولید هزینهٔ اضافی تولید واحد بعدی خروجی می‌باشد .

مثال ۱ . کمپانی روز بارانی در می‌یابد که برای تولید q کیت از مجموعه بازی "سگ‌وگربه" که هر کیت شامل 100 بازی است

$$C(q) = 9720 + 500q - 1.5q^2 + 0.005q^3 \tag{۳}$$

دلارهزینه‌برمی‌دارد . هزینه‌های‌حاشیه‌ای‌ومتوسط نظیر را بیابید . جملهٔ ثابت در عبارت $C(q)$ را تعبیر کنید . رفتار هزینهٔ حاشیه‌ای را به‌عنوان تابعی از خروجی q تحلیل‌نمایید .

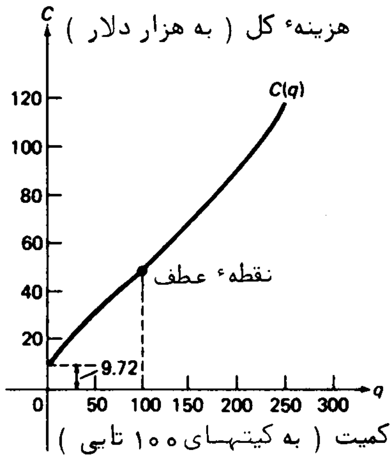
حل . شکل ۵۴ نمودار تابع هزینهٔ $C(q)$ را نشان می‌دهد . برای هزینهٔ حاشیه‌ای داریم

$$\mathrm{MC}(q) = \frac{dC(q)}{dq} = 500 - 3q + 0.015q^2, \tag{۴}$$

و برای هزینهٔ متوسط

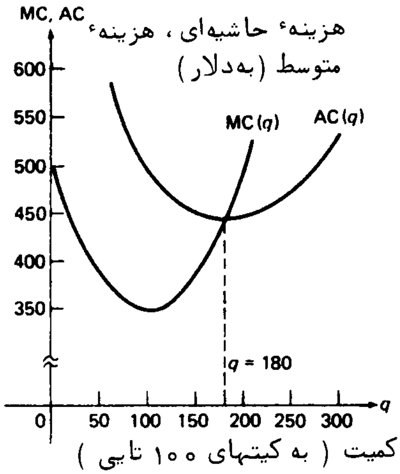
$$\mathrm{AC}(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{9720}{q} + 500 - 1.5q + 0.005q^2. \tag{۵}$$

این دو تابع باهم در شکل ۵۵ رسم شده‌اند . جملهٔ ثابت 9720 در فرمول (۳) برای هزینهٔ کل میزان *سرانه* یعنی هزینه‌های ثابت تولید (کارخانه ، وسایل ، بیمه ، و غیره) ، را نمایش می‌دهد . این هزینه‌ها حتی در غیاب تولید نیز وجود دارند؛ و لذا ، سرانه



شکل ۵۴

مساوی است با $C(0)$. چون مشتق یک ثابت صفر است ، هزینهٔ *حاشیه‌ای از سرانه* مستقل *می‌باشد* . همانطور که از فرمول (۵) دیده می‌شود ، این در مورد هزینهٔ متوسط درست نیست .



شکل ۵۵

با نوشتن عبارت (۴) برای هزینهٔ حاشیه‌ای به شکل

$$MC(q) = 0.015(q - 100)^2 + 350, \qquad (۴')$$

معلوم می‌شود که $MC(q)$ به ازای هر $q \geq 0$ مثبت است؛ و در واقع ، مقدار مینیمم خود 350

را در $q = 100$ می‌گیرد. اگر $\mathrm{MC}(q) > 0$ را نمی‌داشتیم، مدل ما دارای نقص‌می‌شد، زیرا معنی اقتصادی هزینهٔ حاشیه‌ای آن را ذاتا" مثبت می‌کند. همچنین، ملاحظه می‌شود که

$$\frac{d}{dq}\,\mathrm{MC}(q) = 0.03(q - 100),$$

درنتیجه، اگر $q < 100$ ، $D_q\,\mathrm{MC}(q) < 0$ ، حال آنکه اگر $q > 100$ ، $D_q\,\mathrm{MC}(q) > 0$
پس نتیجه‌می‌شودکه $\mathrm{MC}(q)$ تابعی‌نزولی از خروجی برای‌سطوح‌تولید متوسط است$(q < 100)$، اما مآلا" برای سطوح تولید بالاتر$(q > 100)$ تابعی صعودی خواهد شد. این یک پدیدهٔ نوعی است، زیرا تولید بالا ابتدا ذخیره می‌دهد (" اقتصاد مقیاس") ، ولی مآلا" ، همین طور که برای سطوح بالاتر فشاری می‌آید، به‌وسیلهٔ عوامل دیگر (مثلا" ، ظرفیت ناکافی کارخانه) کاهش‌می‌یابد. چون $\mathrm{MC}(q) > 0$ ، هزینه کل $C(q)$ تابعی صعودی‌می‌شود، حال آنکه تغییرعلامت $D_q\,\mathrm{MC}(q)$ در $q = 100$ به نقطهٔ عطف $C(q)$ در $q = 100$ منجر می‌شود (ر.ک. شکل ۵۴) .

مثال ۲. مینیمم هزینهٔ متوسط تولید کیت بازی در مثال پیش را بیابید. نشان دهید که منحنیهای هزینهٔ حاشیه‌ای و متوسط درنقطهٔ نظیر به مینیمم هزینهٔ متوسط متقاطع اند. آیا این یک تصادف است؟

حل. با مساوی صفر گرفتن مشتق تابع (۵) به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dq}\,\mathrm{AC}(q) = -\frac{9720}{q^2} - 1.5 + 0.01q = 0,$$

یا معادلا"

$$q^3 - 150q^2 = (q - 150)q^2 = 972{,}000 = 30(180)^2. \qquad (۶)$$

پس نتیجه می‌شود که $q = 180$ ریشهٔ معادلهٔ مکعبی (۶) است. در واقع، $q = 180$ تنها ریشهٔ حقیقی است، زیرا (۶) با

$$q^3 - 150q^2 - 972{,}000 = (q - 180)(q^2 + 30q + 5400) = 0$$

معادل است، و عامل درجهٔ دوم همواره مثبت می‌باشد (چرا؟) . با محاسبهٔ مشتق دوم $\mathrm{AC}(q)$ معلوم می‌شود که

$$\frac{d^2}{dq^2}\,\mathrm{AC}(q) = \frac{19{,}440}{q^3} + 0.01 > 0 \qquad (q > 0).$$

بنابراین، $\mathrm{AC}(q)$ در $q = 180$ مینیمم موضعی اکید دارد، و به‌علاوه منحنی هزینهٔ متوسط

به بالا مقعر است . چون وقتی $q \to 0^+$ ،و $q \to \infty$ ، $AC(q) \to \infty$ ، این مینیمم موضعی مینیمم مطلق $AC(q)$ بر $(0, \infty)$ نیز هست . باگذاردن $q = 180$ در (۴)و (۵) بنتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} MC(180) &= 500 - 3(180) + 0.015(180)^2 \\ &= 500 - 540 + 486 = 446, \\ AC(180) &= \frac{9720}{180} + 500 - 1.5(180) + 0.005(180)^2 \\ &= 54 + 500 - 270 + 162 = 446. \end{aligned}$$

لذا ، مینیمم هزینهٔ متوسط تولید کیت‌بازی $446 بر کیت 100 بازی یا $4.46 بر بازی‌است. برقراری $MC(180) = AC(180)$ ، که منحنیهای‌هزینهٔ حاشیه‌ای ومتوسط‌را در نقطهٔ نظیر به مینیمم هزینهٔ متوسط متقاطع می‌سازد (ر.ک. شکل ۵۵) ، تصادفی نیست . در واقع ،

$$\frac{d}{dq}AC(q) = \frac{d}{dq}\frac{C(q)}{q} = \frac{C'(q)q - C(q)}{q^2},$$

و چون مینیمم هزینهٔ متوسط یک نقطهٔ بحرانی $AC(q)$ است ، باید ریشه‌ای از معادلهٔ $C'(q)q - C(q) = 0$ باشد ، که با

$$MC(q) = C'(q) = \frac{C(q)}{q} = AC(q)$$

معادل است .

در دو مثال پیش ، فعالیت اقتصادی کمپانی روزبارانی را از دیدگاه هزینهٔ تولید کیت بازی جدیدش " سگ و گربه " تحلیل کردیم . در مثالهای زیر مصرف‌کننده (خریدار) تولید را وارد صحنه می‌کنیم .

مثال ۳ . از تحلیل بازاری شرکت روزبارانی معلوم می‌شود که تعداد کیتهای " سگ و گربه " ای که عمده فروشان وقتی بهای بازی p دلار بر کیت بوده سفارش داده‌اند از فرمول

$$q = 600 - 0.4p \qquad (۷)$$

به دست می‌آید . درآمدهای کل ، حاشیه‌ای ، و متوسط شرکت را بیابید . درآمدکل ماکزیمم چقدر است ، و در چه سطح تولید و بها صورت می‌گیرد ؟

حل . معنی‌اقتصادی ***تابع‌تقاضای‌خطی*** (۷) این‌است‌که‌دربهای $p = \$1500$ بر کیت ($15 بر بازی) هیچ بازیی سفارش داده نمی‌شود ، ولی به ازای هر $100 کاهش در بهای یک کیت ،

40 کیت بیشتر سفارش داده می‌شود . درآمد کل کمپانی ، یعنی $R(q)$ ، مساوی است با

$$R(q) = pq,$$

که در آن p بها و q میزان فروخته شده در این بها است . برای بیان $R(q)$ به عنوان فقط تابعی از q ، ابتدا (۷) را نسبت به p و برحسب q حل کرده به دست می‌آوریم

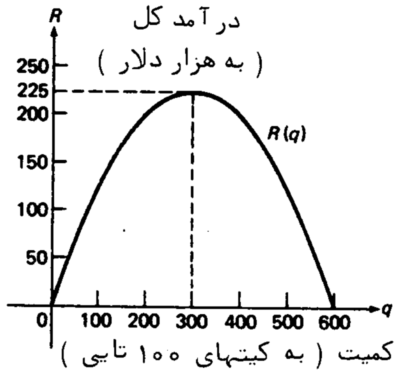
$$p = 1500 - 2.5q. \tag{۷'}$$

در این صورت ، داریم

$$R(q) = pq = (1500 - 2.5q)q = 1500q - 2.5q^2. \tag{۸}$$

نمودار این تابع در شکل ۵۶ نموده شده است . توجه کنید که $R(q)$ نامنفی است؛ ودرنتیجه از نظر اقتصادی فقط بر بازهٔ $[0, 600]$ معنی دارد . برای درآمد حاشیه‌ای داریم

$$\mathrm{MR}(q) = \frac{dR(q)}{dq} = 1500 - 5q,$$



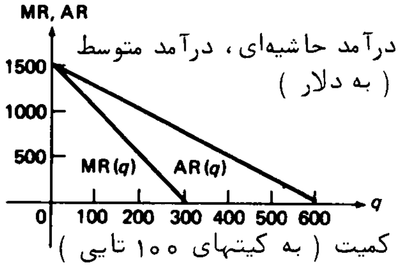
شکل ۵۶

و برای درآمد متوسط داریم

$$\mathrm{AR}(q) = \frac{R(q)}{q} = 1500 - 2.5q.$$

این دو تابع در شکل ۵۷ رسم شده‌اند . توجه کنید که منحنی درآمد متوسط(خطی مستقیم) با منحنی (۷') یکی است . این بدان خاطر است که $R(q) = pq$ با $R(q)/q = p$ معادل است. منحنی درآمد حاشیه‌ای خط مستقیمی است که شیبش دوبرابر قرینهٔ شیب منحنی درآمد متوسط بوده و همان نقطهٔ اشتراک $(0, 1500)$ را با محور قائم دارد . با کامل کردن مربع در (۸) معلوم می‌شود که

$$R(q) = -2.5(q - 300)^2 + 225{,}000,$$



شکل ۵۷

که از آن فورا " می‌بینیم که ماکزیمم $R(q)$ بربازهٔ $[0, 600]$ درنقطهٔ $q = 300$ صورت می‌گیرد (ر.ک. شکل ۵۶) . درآمد کل ماکزیمم نظیر عبارت است از $R(300) = \$225,000$ و بـــا فروش 300 کیت " سگ و گربه " به بهای $1500 - 2.5(300) = \$750$ بر کیت ($\$7.50$ بربازی) به دست می‌آید .

حال برای ادامهٔ تحلیل آغاز شده در مثالهای ۱ تا ۳ گام اصلی را برداشته و فرض می‌کنیم کمپانی روزبارانی ، مانند هر کسب و کار خوب ، طوری عمل می‌کند که سود (کل) خود را ماکزیمم سازد . البته ، سود کمپانی ، یعنی $P(q)$ ، تفاضل بین درآمد کل و هزینهٔ کل آن است ؛ یعنی ،

$$P(q) = R(q) - C(q). \tag{۹}$$

مثال ۴ . سود ماکزیممی که کمپانی روزبارانی می‌تواند از فروش بازی " سگ و گربه "به‌دست آورد چقدر است و درچه سطح تولیدی صورت می‌گیرد ؟

حل. با گذاردن (۳) و (۸) در (۹) ، تابع زیر به دست می‌آید :

$$\begin{aligned} P(q) &= (1500q - 2.5q^2) - (9720 + 500q - 1.5q^2 + 0.005q^3) \\ &= -9720 + 1000q - q^2 - 0.005q^3, \end{aligned} \tag{۱۰}$$

که مشتقش مساوی است با

$$\frac{dP(q)}{dq} = 1000 - 2q - 0.015q^2.$$

اگر $dP(q)/dq$ را مساوی صفر قرار دهیم ، می‌بینیم که نقاط‌بحرانی $P(q)$ در معادلهٔ درجهٔ دوم

$$0.015q^2 + 2q - 1000 = 0$$

صدق می‌کند . ریشه‌های این معادله عبارتنداز

$$q = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4(0.015)(1000)}}{2(0.015)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 15}}{0.015}$$

(ر.ک. مسئلهٔ ۴۹، صفحهٔ ۴۳) . چون ریشهٔ منفی معنی اقتصادی ندارد ، آن را حذف کرده به دست می‌آوریم

$$q = \frac{-1 + 4}{0.015} = \frac{3}{0.015} = 200.$$

سود نظیر به این مقدار q عبارت است از

$$P(200) = -9720 + 1000(200) - (200)^2 - 0.005(200)^3$$
$$= -9720 + 200{,}000 - 40{,}000 - 40{,}000 = \$110{,}280.$$

این باید ماکزیمم مطلق $P(q)$ بر بازهٔ $[0, \infty)$ باشد ، زیرا $P(0) = -9720 < 0$ و وقتی $q \to \infty$ ، $P(q) \to -\infty$ (بیشتر توضیح دهید) . لذا ، سیاست سودسازی‌ماکزیمم کمپانی تولید200کیت(20,000)بازی"سگ‌وگربه "است‌که‌هرکیت‌به‌بهای $p = 1500 - 2.5(200) = \$1000$ ($10 بر بازی) فروخته شود . توجه کنید که خروجیی که سود را ماکزیمم می‌کند($q = 200$) باآنکه هزینهٔ متوسط‌را مینیمم می‌کند ($q = 180$) یا آنکه درآمد کـل را ماکـزیمم می‌کند ($q = 300$) فـرق دارد . در واقع ، کمپانی در سطح تولیدی کـه هزینهٔ متوسط را مینیمم می‌کنـدسود کمتری می‌برد ($108,720) ، و در سطحی‌که درآمد کل را ماکزیمم می‌سازد سود بسیار کمتری را خواهد برد ($65,280) .

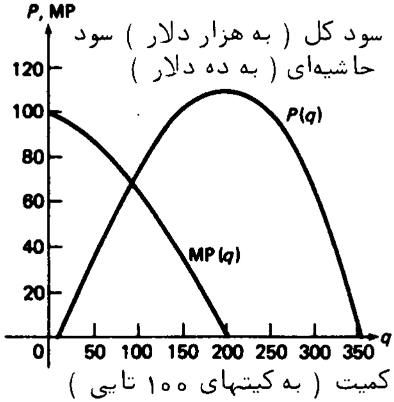
خلاصه کنیم ، در سطحی که سود ماکزیمم است ($q = 200$) کمپانی روزبارانی مبلغ $C(200) = \$89{,}720$ برای تولید 20,000 بـازی " سگ و گربه " صرف می‌کند ، که هر یک را به بهای $10 می‌فروشد تا درآمد کل $200,000 به‌دست‌آوردوسودجالب $110,280 را ببرد . " شمای سوددهی " در هر سطح تولید در نمودار تابع $P(q)$ متجلی است که در شکـل ۵۸ نموده شده است .

سطح تولید q_0 که سود کل را ماکزیمم می‌کند یک نقطهٔ بحرانی $P(q)$ است؛ درنتیجه، *سود حاشیه‌ای*

$$\mathrm{MP}(q) = \frac{dP(q)}{dq} = \frac{dR(q)}{dq} - \frac{dC(q)}{dq} = \mathrm{MR}(q) - \mathrm{MC}(q) \qquad (۱۱)$$

در $q = q_0$ مساوی 0 است . این معقول است ، زیرا اگر سود حاصل از فروش یک واحدبیشتر صفر باشد ، تولید بیشتر کالا مفهومی نخواهد داشت . چون $\mathrm{MP}(q_0) = 0$ ، از (۱۱) معلوم‌می‌شودکه $\mathrm{MR}(q_0) = \mathrm{MC}(q_0)$. این نیز معقول است ، زیرا اگر فروش یک‌واحددیگرکالا

پولی بیشتر از هزینهٔ صرف شده برای آن به ما ندهد ، امکان سود بیشتر وجود نخواهد داشت. با اینحال ، تنها شرط $\mathbf{MR}(q_0) = \mathbf{MC}(q_0)$ نمی‌تواند تضمین کند که تولید q_0 سود را ماکزیمم سازد (ر.ک. مسئلهٔ ۱۹) .



شکل ۵۸

مثال ۵ . برای سود کل (۱۰) سود حاشیه‌ای زیر را داریم :

$$\mathbf{MP}(q) = 1000 - 2q - 0.015q^2,$$

که قبلا" در طول حل مثال ۴ محاسبه شد . شکل ۵۸ نمودار این تابع را همراه با تابع سود کلی $P(q)$ که مشتق آن‌است نشان‌می‌دهد . از شکل واضح‌است که ماکزیمم $P(q)$ در $q = 200$ است؛ و درنتیجه ، $\mathbf{MP}(200) = 0$.

مفهوم الاستیسیته . در خاتمه ، مفهوم *الاستیسیته* را معرفی می‌کنیم که در تجارت‌و اقتصاد دارای اهمیت است . البته ، منظور از مشتق تابع $y = f(x)$ نسبت به x یعنی کمیت

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y \text{ تغییر در }}{x \text{ تغییر در }} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

فرض‌کنید تغییرات Δx و Δy را با تغییرات نسبی $\Delta x/x$ و $\Delta y/y$ عوض‌کرده باشیم . دراین صورت ، کمیت مشابه زیر به دست می‌آید :

$$e_{yx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y \text{ تغییر نسبی در }}{x \text{ تغییر نسبی در }} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta y}{y}}{\dfrac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx},$$

به نام *الاستیسیتهٔ* تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ x . الاستیسیته ، به عنوان سنجشی‌از " تغییر

y ناشی از تغییر x " ، دارای این ویژگی است که از واحدهای سنجش x و y مستقل است . در واقع ، در تشکیل نسبتهای $\Delta x/x$ و $\Delta y/y$ واحدها حذف شده و بدین وسیله الاستیسیته را (برخلاف خود مشتق) کمیتی " بدون بعد " می‌سازد . این در بعضی از مسائل‌تجارت که در آنها مثلا " y مقدار یک کالای مورد تقاضا به بهای x است بسیار مناسب می‌باشد . در این صورت ، تغییر واحدهای سنجش x مثلا " از دلار به پزوس ، یا واحدهای سنجش y از یکی به دیگری ، مقدار الاستیسیتهٔ e_{yx} را بلاتغییر می‌گذارد .

فرض‌کنیم تقاضا برای کالای تولید شده توسط یک شرکت انحصارگر[1] با تابع $q = q(p)$ توصیف شود ، که در آن q کمیت مورد تقاضا به بهای p است . مثلا " ، طبق فرمول (۷) ، تقاضا برای بازی " سگ و گربه " تولید شده به‌وسیلهٔ کمپانی روزبارانی (مثالهای ۱ تا ۵) تابع خطی $q = 600 - 0.4p$ می‌باشد . در این صورت ، کمیت

$$e_D = -\frac{p}{q}\frac{dq}{dp} \qquad (۱۳)$$

الاستیسیتهٔ تقاضا به بهای p نام دارد . علامت منها در (۱۳) نباید شما را نگران کند . تنها هدف آن مثبت ساختن الاستیسیتهٔ تقاضاست تا با رسم اقتصادی سازگار بوده و این امر را پیش‌بینی کند که یک‌منحنی تقاضا دارای شیب منفی می‌باشد (بهای بالاتر،تقاضای کمتر) . گوییم تقاضا *الاستیک* است اگر $e_D > 1$ و *غیر الاستیک* است اگر $e_D < 1$.

مثال ۶ . فرض‌کنیم تابع تقاضا مثل مثال ۳ عبارت باشد از $q = 600 - 0.4p$ ، e_D را پیدا نمایید . تقاضا درچه بهایی الاستیک است؟ غیرالاستیک است؟

حل. با استفاده از (۱۳) ، الاستیسیتهٔ تقاضا را حساب می‌کنیم ، خواهیم داشت

$$e_D = -\frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{0.4p}{600 - 0.4p} = \frac{p}{1500 - p}.$$

لذا ، $e_D > 1$ و تقاضا الاستیک است اگر $p > 750$ ، حال آنکه $e_D < 1$ و تقاضا غیرالاستیک است اگر $p < 750$. (شرایط $p < 1500$ و $p \geq 0$ نیز باید برقرار باشند .) ما قبلا "درمثال ۳ دیدیم که درآمد کل به ازای $p = 750$ ماکزیمم می‌شود . لذا ، می‌بینیم که برای‌ماکزیمم کردن درآمد ، اگر تقاضا الاستیک باشد بها باید کم و اگر غیرالاستیک باشد بها باید زیاد

۱ . *یک شرکت در میدان رقابت نمی‌تواند تقاضا را با تعدیل بها اداره کند ، بلکه باید محصول خود را به بهای تقریبا " متداول وارد بازار نماید .*

شود . به‌علاوه ، درآمد اگر بها $p = 750$ باشد ماکزیمم است که به ازای آن الاستیسیته درست مساوی 1 می‌باشد . این نتایج برای هر تابع تقاضای نزولی ، خطی یا غیرخطی ، برقرارند (ر.ک . مسئلهٔ ۲۳) .

معنی اقتصادی همهٔ اینها روشن است : هرگاه تقاضا در بهای داده شده‌ای الاستیک باشد ، آنگاه کاهش بها به افزایش نسبتا" زیادی در فروش منجر می‌شود ؛ درنتیجه ، درآمد کل که حاصل ضرب بها و کمیت است ، افزایش می‌یابد . از آن سو ، هرگاه تقاضا غیرالاستیک باشد ، افزایش بها به کاهش نسبتا" کمی در فروش منجر می‌شود ؛ درنتیجه ، درآمد باز افزایش خواهد یافت .

مسائل

۱. فرض کنید تابع هزینه‌خطی‌باشد ؛درنتیجه $C(q) = a + bq$ ، که در آن a و b ثابتهای مثبتی هستند .هزینه‌های حاشیه‌ای و متوسط نظیر را بیابید .آیا هزینهٔ‌متوسط مینیمم وجود دارد ؟

۲. آیا تابع هزینهٔ $C(q) = 1000 + 100q - 0.5q^2$ به ازای $q = 50$ ، بــه ازای $q = 150$ معتبر است ؟ جواب خود را توضیح دهید .

۳. فرض کنید هزینهٔ کل‌شرکتی‌که q واحد از کالایی‌را تولید‌می‌کند $C(q) = 490 + 20q + 0.1q^2$ دلار باشد .هزینه‌های‌حاشیه‌ای و متوسط‌نظیر را بیابید . هزینهٔ متوسط مینیمم و سطح تولیدی که در آن صورت می‌گیرد را بیابید . تحقیق کنید که در این سطح‌تولید $\mathrm{MC}(q) = \mathrm{AC}(q)$. نشان دهید که در نوشتن $C(q + 1) - C(q) = \mathrm{MC}(q)$ به ازای هر سطح تولید 10¢ خطا صورت می‌گیرد . چرا این خطا بی‌اهمیت است ؟

۴. فرض کنید هزینهٔ کل یک شرکت در تولید q واحد از کــالایی $C(q) = 3380 + 18q - 0.06q^2 + 0.001q^3$ دلار باشد . هزینه‌های حاشیه‌ای و متوسط‌نظیر را بیابید . هزینـــهٔ متوسط‌مینیمم و سطح تولیدی که در آن صورت می‌گیرد را بیابید . هزینهٔ‌حاشیه‌ای‌را با هزینهٔ تولید واحد بعدی در این سطح مقایسه نمایید .

راهنمایی . توجه کنید که

$$q^3 - 30q^2 - 1{,}690{,}000 = (q - 130)(q^2 + 100q + 13{,}000).$$

۵. **هزینهٔ متغیر** $\mathrm{VC}(q)$ مساوی هزینهٔ کل $C(q)$ منهای هزینهٔ ثابت (سرانه) تعریــف می‌شود . برای تابع هزینهٔ مسئلهٔ قبل هزینهٔ متغیر متوسط‌را بیابید .هزینهٔ متغیر متوسط‌مینیمم و سطح‌تولیدی را که در آن صورت می‌گیرد بیابید . تحقیق کنیدکه‌در

این سطح تولید $MC(q) = AVC(q)$. چرا این باید در حالت کلی درست باشد؟

۶. برای تابع هزینهٔ (۳) کمپانی روزبارانی هزینهٔ متغیر متوسط مینیمم و سطح تولیدی را که در آن صورت می‌گیرد بیابید.

۷. فرض کنید شرکتی دارای تابع هزینهٔ کل مکعبی $C(q) = a + bq + cq^2 + dq^3$ باشد، که در آن a, b, c, d ثابت‌اند، و نیز وقتی مثل مثال ۱ تولید افزایش یابد، هزینهٔ حاشیه‌ای ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. نشان دهید که $a > 0, b > 0, c < 0,$ $d > 0, c^2 < 3bd$. نشان دهید که $C(q)$ در $q_0 = -c/3d$ نقطهٔ عطف دارد.

۸. اگر خطی از مبداء به منحنی هزینهٔ کل مماس کنیم، طول نقطهٔ تماس سطح تولیدی است که هزینهٔ متوسط را مینیمم می‌کند. چرا؟

۹. در مثال ۳، با بیان درآمد به صورت تابعی از بها (به جای کمیت)، بها و کمیتی که درآمد کل را مینیمم می‌کنند بیابید.

۱۰. یک شرکت با سرانهٔ C_0 ، q واحد از کالایی را تولید می‌کند که به بهای ثابت واحدی p دلار می‌فروشد. فرض کنید k دلار صرف تولید هر واحد اضافی شود که $k < p$. شرکت در چه سطح تولیدی مساوی می‌کند، و تعبیر نموداری این **نقطهٔ تساوی** چیست؟

۱۱. فرض کنید تولید یک نوار کاست که (بدون واسطه) $6.00 فروش می‌رود $3.50 هزینه بردارد. اگر سرانه $10,000 باشد، چند نوار باید فروش رود تا مساوی کرده باشیم؟

۱۲. بلیت قایق تفریحی شبانه روی رودخانه که توسط شرکتی اداره می‌شود $12.50 است، ولی شرکت برای جلب مسافر بیشتر به ازای هر مسافر بیش از 100 تا به هریک 5¢ پس می‌دهد. قایق گنجایش 200 مسافر را دارد. ماکزیمم درآمدی که شرکت انتظار دارد چقدر است؟ اگر تعداد متوسط افرادی که با بلیت کامل سوار قایق می‌شوند از عدد معینی تجاوز کند، شرکت باید تخفیف خود را حذف کند. این عدد چقدر است؟

۱۳. یک دوره‌گرد درمی‌یابد که می‌تواند 200 نوشابه را روزانه به بهای هر یک 50¢ بفروشد، ولی به ازای هر 5¢ ی که از بهای هر نوشابه بکاهد می‌تواند 50 تا بیشتر بفروشد. چه بهایی درآمد کل وی را ماکزیمم می‌کند؟ فرض کنید تولیدکننده هر نوشابه را به 20¢ به وی بفروشد. چه بهایی سود کل وی را ماکزیمم می‌سازد؟ اگر به جای ماکزیمم سازی سود به اشتباه درآمدش را ماکزیمم کند، چقدر پول از دست می‌دهد؟

بهای ماکزیمم‌ساز درآمد کل را درصورتی بیابید که تابع تقاضا به صورت زیر باشد.

۱۴. $q = 1200 - 1.5p$

۱۵. $q = 1600 - 5p$

۱۶. $q = 675 - p^2$

۱۷. $q = \sqrt{1800 - p^2}$

۱۸. $q = 2500 - p^{3/2}$

در هر حالت بازهٔ تقاضای الاستیک ($e_D > 1$) و بازهٔ تقاضای غیرالاستیک ($e_D < 1$) را بیابید.

۱۹. چرا شرط $MR(q_0) = MC(q_0)$ نمی‌تواند تضمین کند که سطح تولید q_0 سود را ماکزیمم می‌کند؟ نشان‌دهید که اگر در این سطح درآمد حاشیه‌ای آهسته‌تر از هزینهٔ حاشیه‌ای افزایش یابد، q_0 سود را ماکزیمم خواهد کرد.

۲۰. نشان دهید که تعریف

$$e_{yx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{درصد تغییر در } y}{\text{درصد تغییر در } x}$$

الاستیسیتهٔ تابع $y = f(x)$ با (۱۲) معادل است.

۲۱. نشان دهید هرگاه $y = f(x)$ دارای الاستیسیتهٔ e_{yx} باشد، آنگاه $xf(x)$ دارای الاستیسیتهٔ $1 + e_{yx}$ است.

۲۲. تحقیق کنید که $e_{zx} = e_{zy}e_{yx}$ (قانون زنجیره‌ای برای الاستیسیته).

۲۳. منحنی تقاضای $q = q(p)$ داده شده است، که در آن $q(p)$ یک تابع نزولی است. نشان دهید که درآمد کل $R(p) = pq$ در بهایی که الاستیسیتهٔ تقاضای e_D مساوی 1 است ماکزیمم می‌شود. نشان دهید که اگر تقاضا در بهای معلومی الاستیک باشد ($e_D > 1$)، کاهش بها درآمد را افزایش می‌دهد، حال آنکه اگر تقاضا غیرالاستیک باشد ($e_D < 1$)، افزایش بها درآمد را افزایش خواهد داد.

اگر شرایط به صورت زیر تعدیل‌شوند، سود ماکزیمم کمپانی روزبارانی‌مطرح شده درمثالهای ۱تا۶حاصل‌ازفروش‌بازی "سگ‌وگربه" وسطح تولیدی که در آن صورت می‌گیرد را بیابید.

۲۴. تابع هزینه به جای (۳) عبارت است از $C(q) = 9720 + 500q$

۲۵. تابع هزینه به جای (۳) عبارت است از $C(q) = 9720 + 500q + 1.5q^2$

۲۶. تابع تقاضا به جای (۷) عبارت است از $q = 775 - 0.4p$

۲۷. تابع تقاضا به جای (۷) عبارت است از $q = 900 - p$

۲۸. رقابت کمپانی را وادار به فروش بازیها به بهای هر یک \$6.50 می‌کند.

۲۹. یک شرکت در هر هفته q گالن مایع خاص به بهای $C(q) = 2000 + 5q + 0.001q^2$ دلار تولید و به‌بهای‌گالنی \$15 می‌فروشد. دولت‌می‌خواهد بر هر گالن‌مایع r دلار مالیات ببندد، ضمن اینکه می‌داند شرکت این مالیات را به هزینه‌هایش افزوده و تولید را طوری تعدیل می‌کند که پس از مالیات‌بندی سود ماکزیمم بدهد. بیشترین مالیات‌بر درآمد $T = rq$ دولت چقدر است، و در چه میزان مالیاتی r صورت می‌گیرد؟ماکزیمم سود شرکت پس از مالیات بندی چقدر است و در چه سطح تولیدی صورت می‌گیرد؟

۳۰. در مسئلهٔ ۲۹ فرض‌کنید شرکت بتواند دولت را متقاعدکند که میزان مالیات‌بردرآمد

زیاد است ، و دولت بپذیرد که میزان مالیات را گالنی $1.50 کاهش دهد . نشان دهید که این مالیات بردرآمد را به اندازهٔ 10% کاهش می‌دهد ولی در عین حال سود شرکت را دوبرابر می‌کند .

۳۱. در مسئلهٔ ۲۹ فرض‌کنید شرکت به دولت بقبولاند که مایع مربوطه را بدون مالیات تولید کند و در عوض سالانه $750,000 جهت پروانهٔ کار بپردازد . نشان دهید که این درآمد سالانهٔ دولت را $100,000 افزایش می‌دهد ، ولی در عین حالت سود شرکت را بیش از دوبرابر می‌کند .

اصطلاحات و مباحث کلیدی

قضیهٔ مقدار میانگین و قضیهٔ رل
قضیهٔ مقدار میانگین کشی
ماکزیممها و منیممهای یک تابع
اکسترممهای موضعی در مقابل اکسترممهای مطلق
آزمون برای اکسترممهای مطلق
شرط لازم برای اکسترمم موضعی
نقاط بحرانی
توابع یکنوا و آزمون یکنوایی
آزمونهای مشتق اول و دوم برای اکسترمم موضعی
توابع مقعر و آزمون تقعر
نقاط عطف
آزمونهای دوم و سوم برای یک نقطهٔ عطف
تکنیکهای رسم منحنی
حدود نامتناهی و حدود در بی‌نهایت
صور مبهم $0/0$ ، $0 \cdot \infty$ ، ∞/∞ ، و $\infty - \infty$
مجانبهای افقی ، قائم ، و مایل
مشتقات نامتناهی و مماسهای قائم
قاعدهٔ هوپیتال و صور مختلف آن
مسائل بهینه‌سازی
حاشیه و الاستیسیته در تجارت و اقتصاد

مسائل تکمیلی

۱. نشان دهید هرگاه تابع f بر بازهٔ I شامل نقاط a و $a + \Delta x$ مشتقپذیر باشد، آنگاه نمو f در a را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) = f'(a + t\,\Delta x)\,\Delta x, \qquad \text{(یک)}$$

که در آن $0 < t < 1$.

نقطهٔ t صادق در فرمول (یک) را درصورتی بیابید که

۲. $f(x) = x^2 + x + 1, a = 2, \Delta x = 0.1$

۳. $f(x) = 1/x, a = 1, \Delta x = -0.1$

۴. $f(x) = \sqrt{x}, a = 9, \Delta x = -5$

۵. $f(x) = \sin x, a = 0, \Delta x = 1$

۶. به فرض آنکه

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{اگر } x \le 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{اگر } x > 1 \end{cases}$$

دو نقطهٔ t صادق در فرمول (یک) را درصورتی بیابید که $a = 0$ ، $\Delta x = 2$.

۷. نشان دهید که قضیهٔ ۴، صفحهٔ ۲۶۱ (قضیهٔ مقدار میانگین کشی)، که می‌گوید

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (a < c < b), \qquad \text{(دو)}$$

در صورت تعویض شرط ناصفربودن g' در هر نقطهٔ (a, b) با شرط صفر نبودن همزمان f' و g' در هر نقطهٔ (a, b) و $g(a) \neq g(b)$ برقرار می‌ماند.

نقطهٔ c صادق در فرمول (دو) را درصورتی بیابید که

۸. $f(x) = 2x^3, g(x) = x^2 + 2x, a = -2, b = 2$

۹. $f(x) = \frac{1}{2}x^2, g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x, a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$

۱۰. $f(x) = \cos x, g(x) = \sin x, a = 0, b = 3\pi/2$

توجه کنید که مسئلهٔ ۷ در اینجا نقش دارد، زیرا در هر حالت g' در نقطه‌ای از (a, b) صفر می‌باشد.

۱۱. **قضیهٔ تعمیم یافتهٔ رل** را ثابت کنید: فرض کنید f بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته‌بوده، و f در هر نقطه از بازهٔ باز (a, b) مشتق n م $f^{(n)}(x)$ داشته باشد. همچنین، $n - 1$ نقطه مانند $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ وجود داشته باشند که $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$ و $f(a) = f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_{n-1}) = f(b)$. در این صورت، نقطه‌ای مانند c در

(a, b) هست به طوری که $f^{(n)}(c) = 0$.

نقطهٔ c صادق در قضیهٔ تعمیم یافتهٔ رل رادرصورتی بیابید که

۱۲ . $f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 14,\ n = 2,\ a = 2,\ x_1 = 3,\ b = 4$

۱۳ . $f(x) = \sin x + \cos x,\ n = 3,\ a = -5\pi/4,\ x_1 = -\pi/4,\ x_2 = 3\pi/4,\ b = 7\pi/4$

۱۴ . $f(x) = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x - 5,\ n = 4,\ a = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,$
$b = 4$

۱۵ . $f(x) = x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 29,\ n = 5,\ a = -3,\ x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2,$
$b = 3$

۱۶ . اکسترممهای مطلق تابع مکعبی $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$ بربازهٔ $[-1, 1]$ را بیابید. همین‌کار را بر $[0, 2]$ و $[1, 3]$ نیز انجام دهید .

۱۷ . تابع

$$f(x) = \frac{ax + b}{(x - 1)(x - 4)}$$

به ازای چه ثابتهای a و b ماکزیمم موضعی اکیدی مساوی -1 در $x = 2$ دارد ؟

۱۸ . با استفاده از اکسترممها نشان دهید که اگر $|x| \leq 2$ ، $|3x - x^3| \leq 2$.

۱۹ . فرض کنید $f(x) = x^r + (1 - x)^r$. با استفاده از اکسترممها نشان دهید که به ازای $0 < r < 1$ ، $1 \leq f(x) \leq 2^{1-r}$ ، حال آنکه به ازای $r \geq 1$ ، $2^{1-r} \leq f(x) \leq 1$.

۲۰ . اکسترممهای موضعی‌تابع $f(x) = x^m(1 - x)^n$ را درصورتی‌بیابید که m و n اعداد صحیح مثبت دلخواهی باشند .

۲۱ . مینیمم تابع $f(x) = \max\{2|x|, |1 + x|\}$ چقدر است ؟

۲۲ . تابع $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$ دربازهٔ $[0, 2\pi]$ شش نقطهٔ عطف دارد . آنهاراپیداکنید.

تمام اکسترممهای موضعی و نقاط عطف تابع داده شده را بیابید . تابع بر چه بازه‌هایی صعودی است ؟ نزولی است ؟ به بالا مقعر است ؟ به پایین مقعر است ؟ اکسترممهای فراگیر ، مجانبها ، مماسهای قائم و نقاط بازگشت را بیابید ، و تابع را رسم نمایید .

۲۳ . $f(x) = 2(x - 3)x^{1/2}$

۲۴ . $f(x) = 3x(x - 2)^{2/3}$

۲۵ . $f(x) = (1 - x)x^{2/3}$

۲۶ . $f(x) = 4(x - 1)x^{4/3}$

۲۷ . $f(x) = x^{1/2}(2 - x)^{3/2}$

۲۸ . $f(x) = x^{1/3}(1 - x)^{2/3}$

حدود زیر را محاسبه کنید .

۲۹ . $$\lim_{x \to \infty} \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)}{(5x - 1)^5}$$

۳۰. $\lim_{x \to -\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

۳۱. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{4\sin^2(x/2)}\right)$

۳۲. $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x})$

۳۳. $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x})$

۳۴. $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x+\sqrt{x}})$

۳۵. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+100}}$

۳۶. $\lim_{x \to \infty} (\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x})$

حد داده شده را درصورتی حساب کنید که m و n اعداد صحیح مثبت دلخواهی باشند

۳۷. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$

۳۸. $\lim_{x \to 1} \frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$

۳۹. $\lim_{x \to 1} \frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$

۴۰. $\lim_{x \to 0} \frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$

۴۱. $\lim_{x \to 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n}\right)$

۴۲. $\lim_{x \to -1} \frac{x^m+1}{x^n+1}$

راهنمایی. از قاعدهٔ هوپیتال هر جا شد استفاده کنید.

۴۳. مساحت ماکزیمم یک مستطیل به محیط p را بیابید.

۴۴. مساحت ماکزیمم یک مثلث متساوی‌الساقین به طول ساق s را بیابید.

۴۵. مخروط مستدیر قائم با بیشترین حجم و محاط شده در کره چه کسری از حجم کره را دربر دارد؟

۴۶. نتیجهٔ n سنجش از کمیت مجهول x عبارت است از $x_1, x_2, \ldots, x_n$. چه مقداری از x تخمین **کمترین مربعات** x است، به این‌معنی که عبارت $(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\cdots+(x-x_n)^2$ را مینیمم می‌سازد؟

چه کسری از ارتفاع به شعاع هزینهٔ ساخت یک قوطی استوانه‌ای با حجم معلوم را مینیمم می‌کند مشروط براینکه قوطی از مادهٔ زیر ساخته شده باشد:

۴۷. سه برابر از مادهٔ به کار رفته در سر و ته قوطی گرانتر باشد؟

۴۸. نصف مادهٔ به کار رفته در سر و ته قوطی قیمت داشته باشد؟

مساحت ماکزیمم مستطیل محاط شده در اشکال زیر را بیابید:

۴۹. یک مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع a و b که دو ضلع مستطیل بر اضلاع مثلث واقعند.

۵۰. ناحیهٔ محدود به محور x و سهمی $y=3-x^2$ که یک ضلع مستطیل بر محور x قرار دارد.

فرض کنید یک بسته را فقط وقتی می‌توان با پست فرستاد که مجموع طول و دور (محیط یک مقطع عرضی) آن از 96 اینچ تجاوز نکند. حجم بزرگترین بستهٔ قابل پستی را بیابید که مقطع عرضی‌اش به یکی از صور زیر باشد:

۵۱. یک مربع

۵۲. یک مستطیل که نسبت اضلاعش 3:2 است

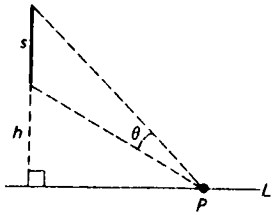
۵۳. یک شش ضلعی منتظم

۵۴. یک دایره

۵۵. در مسائل ۵۱ تا ۵۴ طول بزرگترین بستهٔ قابل پست درهر حالت (و درنتیجه، دور آن) یکی است. این امر را توضیح دهید.

۵۶. نقطهٔ P داخل یک زاویهٔ حاده داده شده است. فرض کنید L خط مستقیمی ماربر P باشد که زاویه را در مثلثی باکمترین مساحت قطع می‌کند. نشان دهید P نقطهٔ میانی قسمتی از L است که داخل زاویه قرار دارد. نشان دهید که این خاصیت نقطهٔ P در مسئلهٔ ۳۵، صفحهٔ ۳۳۹، را نیز مشخص می‌نماید.

۵۷. پای یک پاره خط به طول s در فاصلهٔ h تا خط مستقیم L قرار دارد که بر راستای پاره‌خط عمود است (ر.ک. شکل ۵۹). به ازای چه نقطهٔ P از خط، زاویهٔ θ روبرو

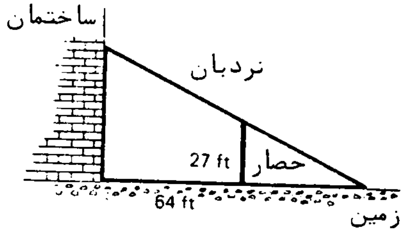


شکل ۵۹

به پاره‌خط در P ماکزیمم است؟

۵۸. با استفاده از مسئلهٔ قبل، جواب دیگری به مسئلهٔ ۷۴، صفحهٔ ۲۵۲، بدهید.

۵۹. یک حصار ایمنی به موازات ساختمان بلند اداره‌ای کشیده شده است. فرض کنید حصار 27 ft ارتفاع و 64 ft از ساختمان فاصله داشته باشد (ر.ک. شکل ۶۰). مردان آتش‌نشانی می‌خواهند با نردبانی که پایش روی حصار قرار دارد خود را به ساختمان



شکل ۶۰

برسانند. کوتاهترین نردبان چقدر باید باشد که آنها را به ساختمان برساند؟

۶۰. اگر $C = C(q)$ تابع هزینهٔ کل شرکتی باشد، کمیت

$$e_C = \frac{q}{C}\frac{dC}{dq}$$

*الا*ستیسیتهٔ هزینه به ازای تولید q نام دارد. نشان دهید هرگاه در سطح تولید معلومی $e_C > 1$، آنگاه هزینهٔ حاشیه‌ای (MC) از هزینهٔ متوسط (AC) بیشتر بوده و وقتی تولید افزایش یابد، AC افزایش می‌یابد، حال آنکه اگر $e_C < 1$، MC از AC کمتر است و AC با افزایش تولید کاهش خواهد یافت.