تمرین‌های مربوط به معادلات خطی مرتبه دوم

۱. معادلات دیفرانسیل زیررا حل کنید.

(الف) $x^{2}y''+2xy'-1=0\,,\quad x>0$

(ب) $xy''+y'=1\,,\quad x>0$

(ج) $y''+x(y')^{2}=0$

(د) $2x^{2}y''+(y')^{3}=2xy'\,,\quad x>0$

۲. معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دومی به صورت $y''=f(y\,,\,y')$ را درنظر می گیریم. اگرقرار دهیم $v=y'$، خواهیم داشت $v'=f(y\,,\,v)$. این معادله شامل متغیرهای x، v و y است، وبنابراین به‌صورت معادلهٔ مرتبهٔ اولی که درفصل ۲ بحث شد نمی باشد. می توان متغیر x را باانتخاب y به‌عنوان متغیرمستقل حذف کرد، زیرا بنا به قاعدهٔ زنجیری داریم

$$\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}=v\frac{dv}{dy}$$

وبنابراین معادلهٔ دیفرانسیل اصلی به‌صورت زیرنوشته می‌شود

$$v\frac{dv}{dy}=f(y\,,\,v)$$

اگربتوان این معادلهٔ مرتبهٔ اول را حل کرد، v به‌عنوان تابعی از y به‌دست می آید. رابطهٔ بین y و x ازحل $dy/dx=v(y)$ نتیجه می‌شود. دراینجا نیز، در نتیجهٔ نهایی دومقدار ثابت دلخواه وجود خواهد داشت. معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

(الف) $yy''+(y')^{2}=0$ (ب) $y''+y=0$

(ج) $y''+y(y')^{3}=0$ (د) $2y^{2}y''+2y(y')^{2}=1$

۳. با به‌کاربردن روشهای مسائل ۱ و ۲، معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید. اگر شرایط اولیه داده شده باشد، جوابی بیابید که درشرایط مزبورصدق کند.

(الف) $y'y''=2\,,\quad y(0)=1\,,\quad y'(0)=2$

(ب) $y''-3y^{2}=0\,,\quad y(0)=2\,,\quad y'(0)=4$

(ج) $(1+x^{2})y''+2xy'+3x^{-2}=0\,,\quad x>0$

(د) $y'y''-x=0\,,\ y(1)=2\,,\quad y'(1)=1$

۴. برای هریك ازمعادلات دیفرانسیل خطی زیر فاصله‌ای را تعیین کنید که در آن یك جواب یکتا با شرایط اولیهٔ $y'(x_0)=y'_0$ و $y(x_0)=y_0$ وجود داشته باشد، x_0 نقطه‌ای ازفاصلهٔ مزبور است.

(الف) $xy''+3y=x$ (ب) $y''+6y'+7y=2\sin x$

۱. در مسائل زیر تحقیق کنید که توابع y_1 و y_2 جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل داده شده‌اند و بـا محاسبهٔ $W(y_1, y_2)$ تعیین کنید کـه در چـه فواصلی تشکیل یك مجموعهٔ اساسی جواب می‌دهند.

(الف) $y''+\lambda^2 y=0;\ y_1(x)=\sin\lambda x,\ y_2(x)=\cos\lambda x$

λ یك عدد حقیقی است

(ب) $y''-y'-2y=0;\quad y_1(x)=e^{-x},\quad y_2(x)=e^{2x}$

(ج) $y''-2y'+y=0;\quad y_1(x)=e^{x},\quad y_2(x)=xe^{x}$

(د) $x^2y''-x(x+2)y'+(x+2)y=0;\quad y_1(x)=x,\ y_2(x)=xe^{x}$

توجه شود که اگر معادلهٔ (د) را به‌صورت استاندارد $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ بنویسیم، ضرایب $p(x)=-(x+2)/x$ و $q(x)=(x+2)/x^2$ هنگامی که $x\to 0$ نامحدود می‌شوند، اما جوابهای x و xe^{x} هنگامی که $x\to 0$ کاملا معین‌اند. بدین‌سان اگر در نقطه‌ای ضرایب ناپیوسته باشند، جواب لزوماً ناپیوسته نخواهد بود، اما اغلب چنین است.

۲. تحقیق کنید که اگر ϕ، ϕ_1 و ϕ_2 توابع مشتق پذیری باشند، آنگاه

$$W(\phi\phi_1, \phi\phi_2)=\phi^2 w(\phi_1, \phi_2).$$

۳. در مسائل زیر تحقیق کنید که توابع y_1 و y_2 یك مجموعهٔ اساسی جواب برای معادلهٔ دیفرانسیل داده شده تشکیل می‌دهند و جوابی را که در شرایط اولیهٔ داده شده صدق می‌کند بیابید.

(الف) $y''-y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1;$

$y_1(x)=e^{x},\ y_2(x)=e^{-x}$

(ب) $y''-y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1;$

$y_1(x)=\sinh x,\quad y_2(x)=\cosh x$

با نتیجهٔ قسمت (الف) مقایسه شود.

(ج) $y''+5y'+6y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1;$

$y_1(x)=e^{-2x},\quad y_2(x)=e^{-3x}$

(د) $y''+y'=0,\quad y(1)=0,\quad y'(1)=1;$

$y_1(x)=2,\quad y_2(x)=e^{-x}$

✓ ✓ می‌توان مفهوم کامل بودن را، که در بارهٔ معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول بررسی شد، درمورد معادلات خطی مرتبهٔ دوم تعمیم داد. معادلهٔ $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ راکامل گویند اگر بتوان آن را به‌صورت $[P(x)y']'+[f(x)y]'=0$ که در آن $f(x)$ برحسب $P(x)$، $Q(x)$ و $R(x)$ معین می‌شود نوشت. با انتگرال گیری ازمعادلهٔ اخیرفوراً معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اولی به‌دست می‌آید که می‌توان آن را با روش بند ۱.۲ حل کرد. بامساوی قراردادن ضرایب معادلات بالا، و حذف $f(x)$، نشان دهید که شرط لازم برای کامل بودن عبارت است از $P''(x)-Q'(x)+R(x)=0$. می‌توان نشان داد که این شرط برای کامل بودن کافی نیز هست. کامل بودن هریك از معادلات زیر را بررسی کنید، و در صورت کامل بودن، جواب آن را بیابید.

1. $y''+xy'+y=0$
2. $y''+3x^2y'+xy=0$
3. $xy''-(\cos x)y'+(\sin x)y=0 \quad x>0$
4. $x^2y''+xy'-y=0 \quad x>0$

مسائل

در مسائل ۱ تا ۷ جواب دومی برای معادلهٔ دیفرانسیل داده شده به روش کاهش مرتبه بیابید.

۱. $y'' - ۲y' - ۱۲y = ۰ \;,\quad y_۱(x) = e^{۶x}$

۲. $y'' + ۲y' + y = ۰ \;,\quad y_۱(x) = e^{-x}$

$$x^2y'' + 2xy' = 0\,, \quad y_1(x) = 1$$

۰۳. درچه دامنه‌ای از x می‌توان انتظار داشت که جواب معتبر باشد؟

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0\,, \; y_1(x) = x$$

۰۴. درچه دامنه‌ای از x می‌توان انتظار داشت که جواب معتبر باشد؟

۰۵. $$x^2y'' + 3xy' + y = 0\,, \quad x > 0\,; \quad y_1(x) = x^{-1}$$

۰۶. $$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0\,, \quad x > 0\,; \quad y_1(x) = x$$

۰۷. $$(1 - x\cot g\, x)y'' - xy' + y = 0\,, \quad y_1(x) = x$$

راهنمایی: فاصلهٔ $\pi > x > 0$ را درنظر بگیرید.

$$\int \frac{x\,dx}{1 - x\cot g\, x} = \ln|x\cos x - \sin x|$$

مسائل معادلات همگن با ضرایب ثابت

در هریک از مسائل ۱ تا ۱۳ جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل داده شده را بیابید. اگر شرایط اولیه داده شده باشند جوابی را که در آن شرایط صدق می کند تعیین کنید.

۱. $y''+۲y'-۳y=۰$

۲. $۴y''+۴y'+y=۰$

۳. $۶y''-y'-y=۰$

۴. $۲y''-۳y'+y=۰$

۵. $y''-y=۰$

۶. $y''-۲y'+y=۰$

۷. $y''+۵y'=۰$

۸. $y''-۹y'+۹y=۰$

۹. $y''-۲y'-۲y=۰$

۱۰. $y''+۲y'+y=۰$

۱۱. $y''+y'-۲y=۰,\quad y(۰)=۱,\quad y'(۰)=۱$

۱۲. $y''-۶y'+۹y=۰,\quad y(۰)=۰,\quad y'(۰)=۲$

۱۳. $y''+۸y'-۹y=۰,\quad y(۱)=۱,\quad y'(۱)=۰$

۱۴. نشان دهید که جواب عمومی $y''-۴y=۰$ عبارت است از

$$y=c_۱\sinh ۲x+c_۲\cosh ۲x$$

۱۵. $y''-2y'+2y=0$ ۱۶. $y''-2y'+6y=0$

۱۷. $y''+2y'-8y=0$ ۱۸. $y''+2y'+2y=0$

۱۹. $9y''-6y'+y=0$ ۲۰. $y''+6y'+13y=0$

۲۱. $y''+4y=0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1$

۲۲. $y''+4y'+5y=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0$

۲۳. تحقیق کنید که $W(e^{\lambda x}\cos\mu x, e^{\lambda x}\sin\mu x)=\mu e^{2\lambda x}$.

مسائل

با استفاده از روش ضرایب نامعین، مربوط به تعیین جواب خصوصی معادلهٔ ناهمگن، جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید. هنگامی که شرایط اولیه داده شده است، جوابی را که در آنها صدق می کند پیدا کنید.

۱. $y''+y'-2y=2x\ ,\quad y(0)=0\ ,\quad y'(0)=1$

۲. $2y''-4y'-6y=3e^{2x}$

۳. $y''+4y=x^2+3e^x\ ,\quad y(0)=0\ ,\quad y'(0)=2$

۴. $y''+2y'=3+4\sin 2x$

۵. $y''+9y=x^2e^{3x}+6$

۶. $y''-2y'+y=xe^x+4\ ,\quad y(0)=1\ ,\quad y'(0)=1$

۷. $2y''+3y'+y=x^2+3\sin x$

۸. $y''+y=3\sin 2x+x\cos 2x$

۹. $y''+2y'+y=e^x\cos x$

۱۰. $u''+\omega_0^2u=\cos\omega t\ ,\quad \omega^2\neq\omega_0^2$

۱۱. $u''+\omega_0^2u=\cos\omega_0 t$

۱۲. $u''+\mu u'+\omega_0^2u=\cos\omega t \qquad \mu^2-4\omega_0^2<0$

۱۳. $y''+y'+y=\sin^2 x$

۱۴. راهنمایی: $\sinh x=\dfrac{(e^x-e^{-x})}{2}$

$y''+y'+4y=2\sinh x\ ,\ \sinh x=\dfrac{(e^x-e^{-x})}{2}$

مسائل

درهریک ازمسائل ۱ تا ۷، یك جواب خصوصی‌را با استفاده از روش تغییر پارامترها بیابید.

۱. $$y''-۵y'+۶y=۲e^{x}$$

۲. $$y''-y'-۲y=۲e^{-x}$$

۳. $$y''+۲y'+y=۳e^{-x}$$

۴. $$y''+y=\operatorname{tg}x\,,\quad ۰<x<\frac{\pi}{۲}$$

۵. $$y''+۹y=۹\sec^{۲}۳x\,,\quad ۰<x<\frac{\pi}{۶}$$

۶. $$y''+۴y'+۴y=e^{-۲x}/x^{۲}\,,\quad x>۰$$

۷. $$y''+۴y=۳\operatorname{cosec}۲x\,,\quad ۰<x<\frac{\pi}{۲}$$

۸. تحقیق کنید که x و xe^{x} جوابهای معادلهٔ همگن متناظر به

$$x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3\,, \quad x > 0$$

می‌باشند، وجواب عمومی را بیابید.

۹. تحقیق کنید که $(1+x)$ و e^x جوابهای معادلهٔ همگن متناظر به

$$xy'' - (1+x)y' + y = x^2 e^{2x}\,, \quad x > 0$$

می‌باشند، وجواب عمومی را بیابید.

۱۰. دوجواب مستقل خطی معادلهٔ بسل رتبهٔ ۱/۲،

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0\,, \quad x > 0$$

عبارتند از $x^{-1/2}\sin x$ و $x^{-1/2}\cos x$. جواب عمومی

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 3x^{3/2}\sin x\,, \quad x > 0$$

را بیابید.

۱۱. تحقیق کنید که e^x و x جوابهای معادلهٔ همگن متناظر به

$$(1-x)y'' + xy' - y = 2(x-1)^2 e^{-x}\,, \quad 0 < x < 1$$

می‌باشند، وجواب عمومی را بیابید.

۱۲. فرمولی برای جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل زیر بیابید

$$y'' - 5y' + 6y = g(x)$$

۱۳. فرمولی برای جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل زیر بیابید

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = g(x)\,, \quad x > 0$$

(مسئلهٔ ۱۰ را ببینید.)