فصل ۲: فضای مماس[۱]

مقدمه

در فصل دوم به بیان چند مفهوم اساسی در هندسه به نام‌های: بردار مماس، فضای مماس، میدان برداری و نگاشت مماس می‌پردازیم. سپس در ادامه تعاریف دوگان تعاریف قبل را به ترتیب: ۱ـ فرمی، فضای دوگان مماس، میدان ۱ـ فرمی و نگاشت دوگان مماس را بیان نموده مثال‌ها و تمرینات متنوعی ارائه می‌کنیم. در بخش § ۱ با توجه به دو خصوصیت مهم بردارهای مماس در $I\!R^n$ به شرح زیر دو تعریف متفاوت برای بردار مماس در M ارائه می‌کنیم. تعریف اول ناشی از این خاصیت است که یک بردار می‌تواند در یک نقطه بر تعداد بیشماری منحنی مماس باشد. خانواده این منحنی‌ها تشکیل یک کلاس هم‌ارزی می‌دهد. لذا **کلاس هم‌ارزی تعریف شده در یک نقطه p را یک بردار مماس در p می‌نامیم.** تعریف دوم نتیجه خاصیتی است که بردارها به عنوان نگاشت مشتقگیری دارند. در این باب در ریاضیات عمومی با مفهومی به نام مشتق جهت‌دار یا مشتق سویی از یک تابع در جهت یک بردار آشنا گردیده‌ایم. لذا در **تعریف دوم یک بردار به عنوان یک مشتق‌گیری تعریف می‌شود.**

قضیه‌ای نیز در این بخش به اثبات می‌رسانیم که یکسانی تعاریف بالا از آن نتیجه می‌شود

---

[۱] $Tangent\ space$

در بخش ۲§ پس از تعریف TM، خانواده فضاهای برداری مماس نشان می‌دهیم که این خانواده یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر است.

در بخش ۳§ مشابه دو تعریف ارائه شده برای بردارهای مماس دو تعریف برای میدان‌های برداری ارائه نموده یکسان بودن آن را در یک قضیه به اثبات می‌رسانیم. سپس به تعریف کروشه دو میدان برداری پرداخته آن را در مختصات موضعی محاسبه می‌کنیم.

در بخش ۴§ به تعریف نگاشت مماس پرداخته پس از محاسبه آن در مختصات موضعی تعبیر هندسی آنرا ذکر می‌کنیم.

در بخش‌های ۵§ و ۶§ به ارائه تعاریف دوگان مفاهیم فوق مانند ۱ـ فرمی‌ها، فضای دوگان مماس و نگاشت دوگان پرداخته آنها را به صورت موضعی محاسبه می‌کنیم. به خواننده علاقه‌مند توصیه می‌شود برای درک بهتر این مفاهیم مثالها و تمرینات این بخش را به دقت مورد مطالعه قرار دهد.

در پایان فصل دوّم مطالبی از آنالیز و توپولوژی جهت یادآوری تحت عنوان پیوست I و II آورده شده است که خواننده می‌تواند در صورت لزوم به آنها مراجعه نماید.

پیوست I در مورد اثبات وجود تابعی است که وجود آن روی منیفلدها به ما اجازه می‌دهد که خواص موضعی (یعنی در همسایگی هر نقطه) را به خواص سرتاسری (یعنی در کل منیفلد) تعمیم دهیم.

در پیوست II، در مورد تعریف افراز واحد و اثبات وجود آن بحث می‌شود. در این راستا چند قضیه و تعریف از توپولوژی را یادآوری نموده مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱.۲ § بردار مماس و فضای مماس[1] بر یک منیفلد

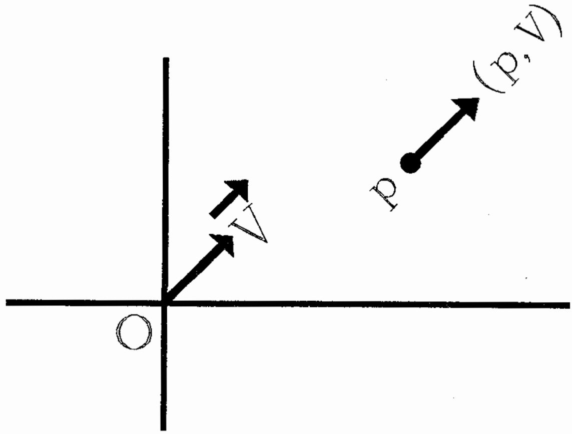
هدف ما در این بخش ارائه یک تعریف برای مفهوم بردار مماس بر منیفلد M در نقطه p است. ابتدا فرض کنیم که $M = \mathbb{R}^n$. یادآوری می‌کنیم که یک بردار مماس در نقطه p از

[1] *Tangent vector (Vecteur tangent)*

$I\!R^n$ عبارت است از زوج (p, V) که p نقطه ابتدای بردار و V جهت و اندازه آن را تعیین می‌نماید.

به این صورت بردارهای "مماس بر $I\!R^n$ " را می‌توان با اعضای $I\!R^n \times I\!R^n$ مشخص نمود.

برای تعمیم این مفهوم روی منیفلد M توجه شما را بدین موضوع جلب می‌کنیم که هر عضو $I\!R^n \times I\!R^n$ را می‌توان به عنوان بردار مماس بر یک منحنی در نظر گرفت.



شکل ۲.۱ : بردار و بردار مماس در $I\!R^n$

جهت روشن شدن این موضوع یادآوری می‌کنیم که معادله یک منحنی در $I\!R^n$ توسط نگاشت $C(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$C:\ I \longrightarrow C(I) \subset I\!R^n$$
$$t \ \mapsto \ (C_1(t), \cdots, C_n(t))$$

بردار مماس در هر نقطه $C(t_0) = p$ از این منحنی توسط $2n-$ تایی (p, V) مشخص می‌گردد که در آن $n-$تایی V به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V = \frac{dC}{dt} = (\frac{dC_1}{dt}, \cdots, \frac{dC_n}{dt})$$

حال مفهوم بردار مماس بر یک منحنی را با استفاده از کارت‌ها برای منیفلد M به‌صورت زیر بیان می‌کنیم. اگر معادله یک منحنی روی M توسط نگاشت زیر تعریف گردد

$$\begin{aligned} C : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow C(I) \subset M \\ t &\mapsto C(t) \end{aligned}$$

بردار مماس بر منحنی C در نقطه $p = C(t_\circ)$ از M را می‌توان توسط یک $2n-$ تایی $(x(p), V)$ مشخص نمود که در آن $n-$تایی V به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V = \frac{d(x \circ C)}{dt} = \left(\frac{d(x^1 \circ C)}{dt}, \ldots, \frac{d(x^n \circ C)}{dt}\right) = \left(\frac{dC_i}{dt}\right)$$

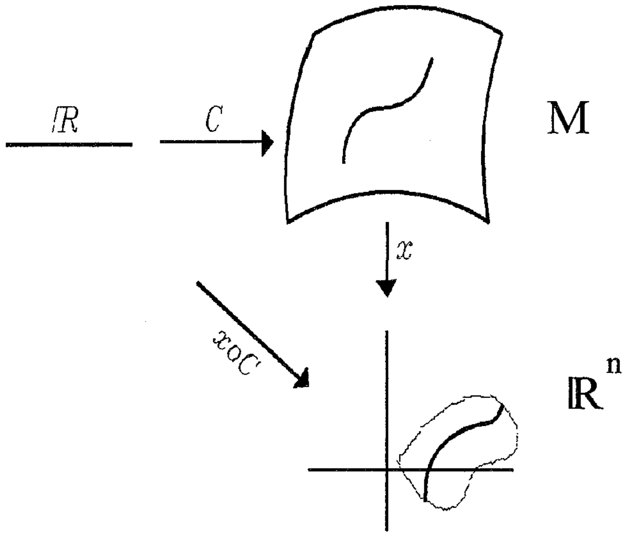
به‌منظور سادگی هرجا احتمال اشتباه نرود (بنابر قرارداد فصل قبل) رابطه اخیر را به‌صورت $V = \dfrac{dC}{dt}$ نیز می‌نویسیم، اگر نگاشت C از کلاس C^k باشد منحنی آنرا از کلاس C^k می‌گوئیم. به شکل ۲.۲ مراجعه شود.

خصوصیت اول بردار مماس

اگر $(p, V) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ آنگاه خانواده‌ای از منحنی‌ها وجود دارد که از نقطه p گذشته و بردار V بردار مماس بر آنها در نقطه p باشد، یعنی خانواده‌ای از توابع از کلاس C^1 که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

بطوریکه

$$\begin{aligned} C : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto C(t) \end{aligned} \quad \text{و} \quad \begin{cases} C(t_\circ) &= p \\ \dfrac{dC}{dt}(t_\circ) &= V \end{cases}$$



شکل ۲.۲ : منحنی روی یک منیفلد و تصویر آن روی $I\!R^n$

بنابراین از این خاصیت به صورت زیر استفاده می‌کنیم .روی مجموعه منحنی‌های از کلاس C^1 در $I\!R^n$ یک رابطه هم‌ارزی تعریف می‌نمائیم. به شکل ۲.۳ مراجعه شود.

$$C_1 \sim C_2 \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(t_0) &= C_2(t_0) \\ \frac{dC_1}{dt}(t_0) &= \frac{dC_2}{dt}(t_0) \end{cases}$$

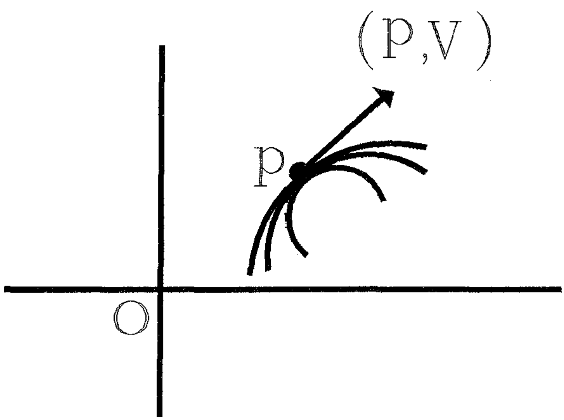
یعنی دو منحنی C_1 و C_2 هم‌ارزند اگر بردار مماس مشترکی در t_0 داشته باشند. حال این تعریف در $I\!R^n$ را توسط کارت‌ها برای منیفلد M تعمیم می‌دهیم.

تعریف اول بردار مماس

تعریف: فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر و $C:]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ یک منحنی از کلاس C^1 روی M باشد. فرض کنیم (x, U) یک کارت موضعی در همسایگی نقطه

$p = C(\circ)$ باشد رابطه هم ارزی زیر را در نظر می‌گیریم

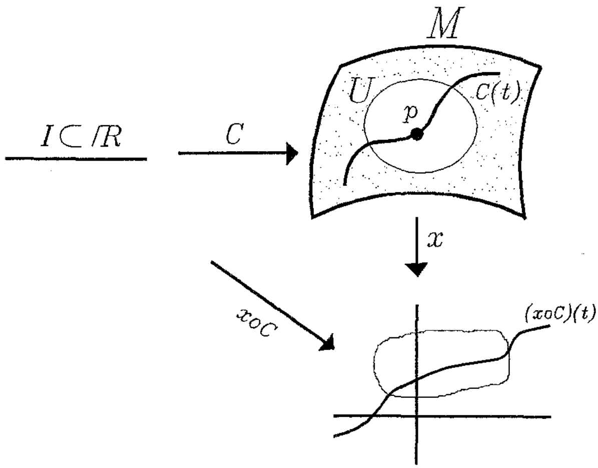
$$C_1 \sim C_2 \iff \begin{cases} C_1(\circ) = C_2(\circ) = p \\ \text{بطوریکه } x \circ C_1, x \circ C_2 \text{ دارای مشتقات برابر در صفر باشند} \\ \text{یعنی } \frac{d\, x \circ C_1}{dt}(\circ) = \frac{d\, x \circ C_2}{dt}(\circ) \end{cases}$$



شکل ۲.۳ : کلاس هم‌ارزی منحنی‌های مماس بر بردار مماس در نقطه p

$[C]_p$ کلاس هم ارزی تعریف شده توسط منحنی C را **بردار مماس بر** M در p نامیده و با V_p یا X_p نشان می‌دهیم به عنوان تمرین ثابت کنید که رابطه هم‌ارزی فوق مستقل از انتخاب کارت x است، خانواده تمام بردارهای مماس در p را با T_pM نمایش داده آن را **فضای مماس بر** M **در** p می‌نامیم. ((T_pM) همان فضای خارج قسمت می‌باشد) خواهیم دید که T_pM یک فضای برداری به بعد n روی مجموعه اعداد حقیقی تعریف می‌نماید. ($n = dimM$) این تعریف از بردار مماس دارای محاسن زیراست. اولا" به طور طبیعی و بر اساس بردار سرعت یک منحنی تعریف شده است ثانیا" اجازه می‌دهد که مفهوم آن رابرای تعریف "جت‌های مرتبه kام"[1] براحتی تعمیم داد. (اگر فرض نمائیم که در رابطه هم ارزی بالا $x \circ C_1, x \circ C_2$ در صفر دارای مشتقات مرتبه kام برابر باشند).

[1] $k - order\ jet\ (germe\ d'ordre\ k)$



شکل ۲.۴ : منحنی روی یک منیفلد در مختصات موضعی

با این حال استفاده از تعریف فوق در عمل چندان کار ساده‌ای نیست و از طرفی به راحتی نمی‌توان ثابت نمود که T_pM یک فضای برداری است. لذا به این دلیل تعریف دیگری از بردار مماس که بیشتر جبری است، ارائه می‌دهیم.

خصوصیت دوم بردار مماس

برمی‌گردیم به $\mathbb{R}^n$ و فرض می‌کنیم f تابعی حقیقی از کلاس C^1 روی $\mathbb{R}^n$ باشد.

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto f(x_1, \cdots, x_n)$$

اگر $(p, V) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ یک بردار مماس بر منحنی $C(t)$ در نقطه p باشد که $C(0) = p$ آن را با V_p نمایش داده و مشتق جهت دار تابع f در جهت بردار V_p را توسط رابطه زیر تعریف می‌نمائیم :

$$V_p \cdot f = \frac{d(f \circ C)}{dt}\Big|_{t=0}$$

به راحتی بنابر قاعده زنجیره‌ای دیده می‌شود که

$$\frac{d(f\circ C(t))}{dt}\Big|_{t=0}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\frac{dC^i}{dt}\Big|_{t=0}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p v^i$$

در اینجا v^i ها مولفه‌های بردار V هستند. بنابراین داریم

$$V_p\cdot f=v^1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_p+\cdots+v^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_p$$

در اینجا بردار V و نقطه p عبارتند از

$$\begin{cases} C(0)=p \\ \dfrac{dC}{dt}(0)=V \end{cases}$$

منحنی C را یک **"منحنی انتگرال "** بردار V_p نیز می‌گویند.

بنابراین $V_p\cdot f$ درحقیقت عبارت است از تغییرات تابع f در طول منحنی انتگرال بردار V_p. این خود به ما نشان می‌دهد که مشتق f در طول یک منحنی تنها به کلاس هم‌ارزی $[C]_p$ بستگی دارد و در نتیجه می‌توان یک رابطه دو سویی بین بردارهای مماس و مشتق جهت‌دار برقرار کرد. به راحتی می‌توان درستی روابط زیر را تحقیق نمود.

الف) $V_p\cdot(f+g)=V_p\cdot f+V_p\cdot g$

ب) $V_p\cdot kf=kV_p\cdot f \qquad k\in\mathbb{R}$

ج) $V_p\cdot(fg)=(V_p\cdot f)g(p)+f(p)V_p\cdot g$

در ادامه خواهیم دید که این سه خاصیت معرف آن است که مشتق جهت دار در خانواده عملگرهایی که آنها را مشتق گیری می‌نامیم، قرار دارد. به عبارت دیگر نشان می‌دهیم اگر نگاشت D در سه شرط فوق صدق کند آنگاه یک و تنها یک بردار مماس V_p وجود دارد بطوری که $Df=V_p\cdot f$.

فرض کنیم $C^\infty(p)$ جبر توابع C^∞ تعریف شده در یک همسایگی نقطه p از M در مجموعه اعداد حقیقی باشد. ابتدا به تعریف نگاشت مشتق‌گیری می‌پردازیم.

تعریف: یک نگاشت مشتق گیری یا اشتقاق[۱] در نقطه p عبارت است از نگاشتی که در شرایط زیر صدق کند:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_p : C^\infty(p) &\longrightarrow I\!R\\ f &\mapsto \mathcal{D}_p f\end{aligned}$$

بطوریکه

الف) $\mathcal{D}_p(f+g) = \mathcal{D}_p f + \mathcal{D}_p g$

ب) $\mathcal{D}_p(\lambda g) = \lambda \mathcal{D}_p g \qquad \lambda \in I\!R$

ج) $\mathcal{D}_p(fg) = (\mathcal{D}_p f)g(p) + f(p)(\mathcal{D}_p g)$

مجموعه مشتق گیری‌ها در نقطه p از M را با $\mathcal{D}_p(M)$ نمایش می‌دهیم.

نشان خواهیم داد که یک رابطه دوسویی بین T_pM و $\mathcal{D}_p(M)$ وجود دارد به طوری که به هر کلاس هم ارزی $[C]_p$ (به هر بردار مماس در p) یک مشتق‌گیری X_p وابسته می‌نماید.

قضیه: $\mathcal{D}_p(M)$ مجموعه مشتق‌گیری‌ها در نقطه p از منیفلد M را درنظر گرفته و نشان می‌دهیم که یک فضای برداری به بعد $n(n = \dim M)$ است و اگر (x, U) یک کارت موضعی در همسایگی p باشد آنگاه n تایی $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \cdots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_p\}$ که توسط

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})_p f = D_i(f \circ x^{-1})_{x(p)}$$

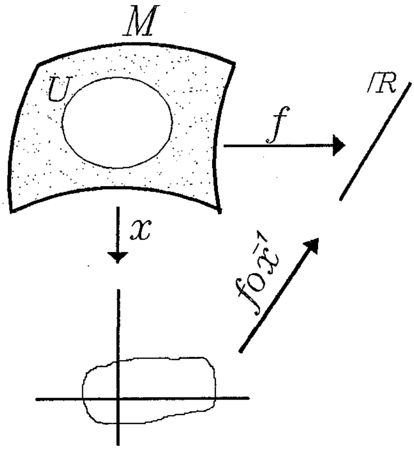
تعریف می‌شود تشکیل یک پایه برای $\mathcal{D}_p(M)$ می‌دهد که آن را پایه طبیعی وابسته به کارت x می‌گوئیم.

اثبات: به راحتی بررسی می‌شود که $\mathcal{D}_p(M)$ یک فضای برداری است. (نگاشت مشتق، خطی است) برای ارائه یک پایه ابتدا لم‌های زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۱: فرض کنیم f تابعی C^∞ باشد که در همسایگی باز و محدب U از صفر روی $I\!R^n$ تعریف شده است و $f(0) = 0$. آنگاه توابعی C^∞ مانند $g_i : U \to I\!R$ $i = 1, \cdots, n$ وجود دارد به طوری که بتوان f را به صورت زیر نوشت.

---

[۱] *Derivation map (Application de dérivation)*



شکل ۲.۵ : تابع حقیقی f روی M

الف) $f(x^1,\cdots,x^n)=\sum_{i=1}^n x^i g_i(x^1,\cdots,x^n) \qquad \forall x\in U$

ب) $g_i(0)=D_i f(0)$

اثبات لم ۱: به ازاء $x\in U$ تابع h_x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. $h_x(t)=f(tx)$

چون U محدب[1] است این تابع در بازه $0\leq t\leq 1$ تعریف می‌شود. داریم

$$f(x)=f(x)-f(0)=h_x(1)-h_x(0)=\int_0^1\frac{\partial h_x}{\partial t}dt$$

از طرف دیگر بنابر قاعده زنجیره‌ای داریم

$$\frac{\partial h_x(t)}{\partial t}=\frac{\partial f(tx)}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x^1}(tx)\underbrace{\frac{\partial(tx^1)}{\partial t}}_{x^1}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x^n}(tx)\underbrace{\frac{\partial tx^n}{\partial t}}_{x^n}$$

$$=\sum_{i=1}^n D_i f(tx)\cdot x^i$$

---

[1] مجموعهٔ $U\subset \mathbb{R}^n$ را محدب $(Convex)$ گوئیم اگر $\forall x\ ,\ y\in U\subset\mathbb{R}^n$ و به ازاء $1\leq t\leq 0$ داشته باشیم $(1-t)y+tx\in U$ در اینجا از محدب بودن U نتیجه می‌گیریم که اگر تابع $f(x)$ برای هر $x\in U$ تعریف شود آنگاه تابع $f(tx)$ نیز برای هر $1\leq t\leq 0$ و هر $x\in U$ تعریف می‌شود (چون از محدب بودن نتیجه می‌شود $tx\in U$)

از آنجا با جایگذاری در رابطه بالا داریم:

$$f(x) = \int_{\circ}^{\backslash} \sum_i D_i f(tx) \cdot x^i dt = \sum_i x^i \int_{\circ}^{\backslash} D_i f(tx) dt$$

بنابراین کافی است تابع مورد نظر را به صورت $g_i(x) = \int_{\circ}^{\backslash} D_i f(tx) dt$ تعریف نمائیم.

شرط ب) از شرط الف) حاصل می‌شود.

لم ۲: اگر (x, U) یک کارت در همسایگی نقطه p باشد آنگاه خانواده n تایی $\{(\frac{\partial}{\partial x^{\backslash}})_p, \cdots, (\frac{\partial}{\partial x^n})_p\}$ یک پایه برای $\mathcal{D}_p(M)$ تعریف می‌کند.

اثبات لم ۲: ابتدا یادآوری می‌کنیم که اگر $X_p \in \mathcal{D}_p(M)$ برای هر تابع ثابت k داریم $X_p \cdot k = \circ$ زیرا

$$X_p \cdot \backslash = X_p \cdot (\backslash \times \backslash) = (X_p \cdot \backslash) \times \backslash + \backslash \times (X_p \cdot \backslash) \Rightarrow X_p \cdot \backslash = \circ$$

$$X_p \cdot (k) = k \times (X_p \cdot \backslash) = \circ$$

حال فرض کنیم $M = \mathbb{R}^n$ و $p = \circ$ باشد داریم

$$\begin{aligned} X_p \cdot f &= X_p \cdot (f - f(\circ) = X_p \cdot (\sum_i x^i g_i) \\ &= \sum_i ((X_P \cdot x^i) g_i(p) + x^i(p) X_p \cdot g_i) \end{aligned}$$

چون x^i مولفه iام $p = \circ$ است $x^i(p) = \circ$. بنابر ب در لم ۱ داریم:

$$X_p \cdot f = \sum_i (X_p \cdot x^i) (\frac{\partial f}{\partial x^i})_p$$

با فرض $X^i = X_p \cdot x^i$ و چون f دلخواه است داریم

$$X_p = \sum_i X^i (\frac{\partial}{\partial x^i})_p$$

این عبارت نشان می‌دهد که خانواده $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_p\}$ اعضای $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ را تولید می‌کند. حال کافی است نشان دهیم که این خانواده مستقل خطی نیز هست. اگر

$$a^{\backslash} (\frac{\partial}{\partial x^{\backslash}})_p + \cdots + a^n (\frac{\partial}{\partial x^n})_p = \circ$$

با تاثیر روی $x^1, x^2, \cdots, x^n$ داریم

$$a^1 = 0, \cdots, a^n = 0$$

بنابراین مستقل خطی‌اند.

حال می‌توان به راحتی نتیجه بدست آمده روی $\mathbb{R}^n$ رابه کمک یک کارت بر روی منیفلد M انتقال داد. به اینصورت اثبات لم ۲ و اثبات قضیه فوق کامل می‌شود. $\square$

قضیه: نگاشت $\Psi : T_pM \longrightarrow \mathcal{D}_p(M)$ که به هر کلاس هم‌ارزی $[C]_p$ مشتق‌گیری X_p را وابسته می‌کند دو سویی است.

در اینجا

$$X_p : C^\infty(p) \longrightarrow \mathbb{R}$$

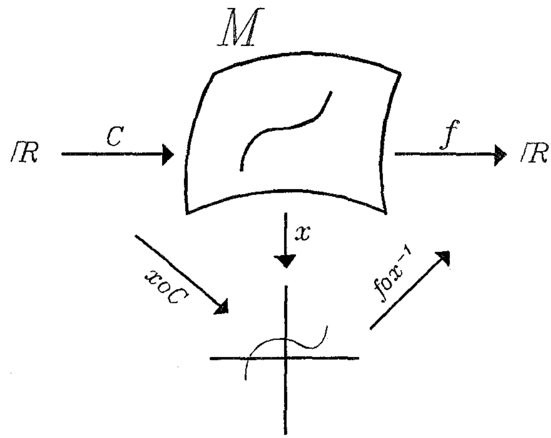
$$f \mapsto \left.\frac{d(f \circ C)}{dt}\right|_{t=0}$$

اثبات : می‌گوئیم Ψ پوششی است زیرا اگر $X_p = \sum_{i=1}^{n} X^i(\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ عضو دلخواهی از $D_p(M)$ باشد آنگاه منحنی C را طوری در نظر می‌گیریم که مولفه‌های بردار مماس برآن در نقطه p برابر مولفه‌های بردار X_p باشد.

$$\left.\frac{d(x \circ C)}{dt}\right|_{t=0} = (X^1, \cdots, X^n) = \sum_i X^i e_i$$

(e_i پایه کانونی) و داریم $\Psi[C] = X_p$

$$\Psi[C] \cdot f = \left.\frac{d}{dt}(f \circ C)\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial f}{\partial x^i})_p(\frac{dC^i}{dt})_0 = \sum_{i=1}^{n} X^i(\frac{\partial f}{\partial x^i})_p = X_p \cdot f$$



شکل ۲.۶ : اثر تابع f روی منحنی c

حال می‌گوئیم Ψ یک به یک است زیرا اگر فرض کنیم $\Psi[C] = \Psi[C']$ داریم

$$\left.\frac{d(f\circ C)}{dt}\right|_{\circ} = \left.\frac{d(f\circ C')}{dt}\right|_{\circ} \qquad \forall f\in C^{\infty}(p)\ ,\ \ p=C(\circ)=C'(\circ)$$

تابع مولفه iام یعنی x^i را به جای f در رابطه فوق قرار می‌دهیم

$$x^i : U \to \mathbb{R}$$

$x^i(p) =$ مولفه iام p $\Rightarrow x^i\circ C = C^i$

U همسایگی q می‌باشد لذا داریم $(\frac{dC^i}{dt})_\circ = (\frac{dC'^i}{dt})_\circ$ یعنی $[C]=[C']$. □

حال می‌توانیم یک بردار مماس را به‌صورت زیر نیز تعریف نمائیم.

تعریف دوم بردار مماس

تعریف: *فرض کنیم p نقطه‌ای از منیفلد M باشد.* **یک بردار مماس بر M در p عبارت** *است از یک مشتق گیری از توابع $C^{\infty}(p)$ در نقطه p.*

اگر (x,U) یک کارت در همسایگی p باشد بردار مماس را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X^i (\frac{\partial}{\partial x_i})_p \qquad (X^i \in \mathbb{R})$$

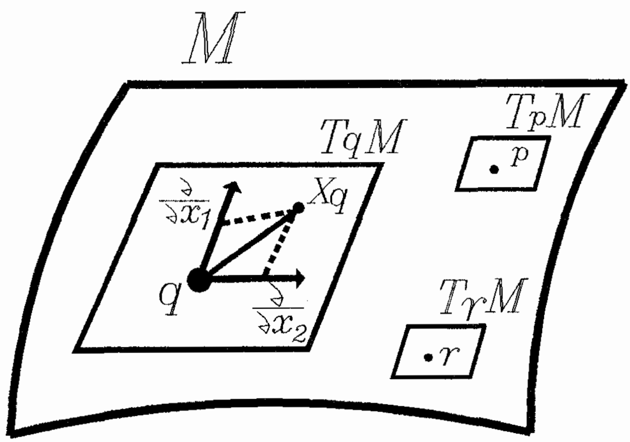
که $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p f = D_i(f \circ x^{-1})_{x(p)}$

تعریف دوم فضای مماس

تعریف: فضای مماس در نقطه p از منیفلد M عبارت است‌از فضای برداری مشتق‌گیری‌ها در نقطه p از $C^\infty(p)$ که‌آن را با $\mathcal{D}_p(M)$ یا T_pM نمایش می‌دهیم.

۲.۲ § منیفلد مماس یا کلاف مماس[1]

فرض می‌کنیم $TM = \cup_{p\in M} T_pM$ نشان می‌دهیم TM دارای ساختار یک منیفلد است که آن را منیفلد مماس یا **کلاف** مماس می‌نامیم.



شکل ۲.۷ : صفحات مماس و پایه‌های آن در نقاط مختلف

تابع $\pi : TM \longrightarrow M$ را به صورت $\pi : X_p \longrightarrow p$ تعریف می‌کنیم. اگر (x, U) یک کارت موضعی روی M باشد کارت $(\varphi, \overline{U})$ را روی TM به‌صورت زیر در نظر

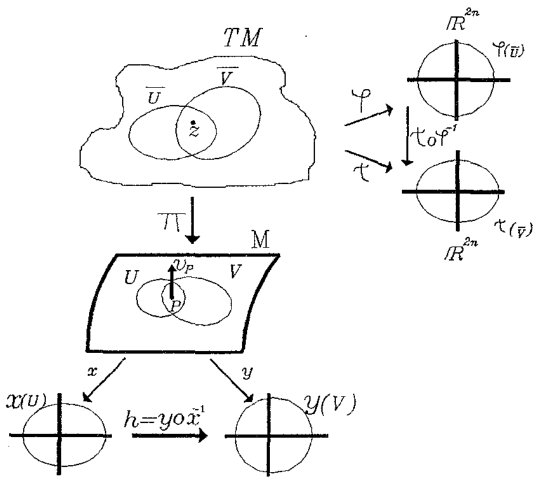
[1] *Tangent bundle (Fibre′ Tangent) or Tangent manifold*

می‌گیریم:

$$\varphi : \overline{U} \longrightarrow I\!R^{2n} \quad , \quad \overline{U} = \pi^{-1}(U)$$
$$: X_q = \sum a^i (\frac{\partial}{\partial x_i})_q \mapsto (x^1(q), \cdots, x^n(q), a^1, \cdots, a^n)$$

(یعنی مختصات یک بردار X_q عبارت است از مختصات نقطه شروع آن و مولفه‌های X_q نسبت به پایه $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_q\}$)

حال نشان می‌دهیم که TM دارای یک ساختار دیفرانسیل پذیری است که توسط کارت‌های به‌صورت فوق تعریف می‌شود. اگر M از کلاس C^k باشد خواهیم دید TM از کلاس C^{k-1} است. به شکل زیر توجه کنید.



شکل ۲.۸ : کارت‌های منیفلد مماس یا کلاف مماس

فرض کنیم (x, U) و (y, V) دو کارت روی M و $(\varphi, \overline{U})$ و $(\psi, \overline{V})$ کارت‌هایی روی TM باشد که به روش بالا تعریف شده‌اند.

باید نشان دهیم که اگر $\overline{U} \cap \overline{V} \neq \phi$ دو کارت فوق C^{k-1} مرتبط هستند.نگاشت تغییر

کارت را نوشته رابطه بین مولفه‌های آنرا به دست می‌آوریم.

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(\overline{U} \cap \overline{V}) \longrightarrow \psi(\overline{U} \cap \overline{V})$$
$$(\underbrace{x^1(p) \cdots x^n(p)}_{p}, \underbrace{a^1, \cdots, a^n}_{v}) \longrightarrow (y^1(p) \cdots y^n(p), b^1, \cdots, b^n)$$

بنابراین با توجه به شکل زیر و با فرض $h = y \circ x^{-1}$ رابطه بین مختصات p در دو کارت x و y به‌صورت زیر می‌باشد .

$$y^i(p) = (y \circ x^{-1})^i(x(p)) = h^i(x(p))$$

که بنابر فرض چون M از کلاس C^k است h^i دیفئومورفیسم C^k می‌باشد.

حال ببینیم که رابطه بین مولفه‌های یک بردار در نگاشت تغییر کارت فوق به چه صورت است.

فرض کنیم $\vartheta \in T_pM$ در دو دستگاه مختصات (x, U) و (y, V) بردار فوق به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$(*) \quad \vartheta = a^1(\frac{\partial}{\partial x^1})_p + \cdots + a^n(\frac{\partial}{\partial x^n})_p = b^1(\frac{\partial}{\partial y^1})_p + \cdots + b^n(\frac{\partial}{\partial y^n})_p$$

برای به دست آوردن رابطه بین a^i و b^i باید رابطه بین $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ و $(\frac{\partial}{\partial y^i})$ را بدست آوریم. این کار را قبلاً نیز در تمرینات فصل اول انجام داده‌ایم.

اگر $f \in C^\infty(p)$ داریم

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial f}{\partial x^i})_p &= D_i(f \circ x^{-1})_{x(p)} \\
&= D_i[(f \circ y^{-1}) \circ (y \circ x^{-1})]_{x(p)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} D_j(f \circ y^{-1})_{(y \circ x^{-1})(x(p))} D_i(y \circ x^{-1})^j_{x(p)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial y^j})_p (\frac{\partial y^j}{\partial x^i})_p
\end{aligned}$$

در نتیجه $(\dfrac{\partial y^j}{\partial x^i})$ ماتریس تغییر مختصات یا ژاکوبین نگاشت تغییر کارت است و داریم:

$$\boxed{(\frac{\partial}{\partial x^i})_p = \sum_{j=1}^{n}(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})_p(\frac{\partial}{\partial y^j})_p}$$

اگر این مقدار را در رابطه $(*)$ قرار دهیم :

$$\sum_i a^i(\frac{\partial}{\partial x^i})_p = \sum_j b^j(\frac{\partial}{\partial y^j})_p \iff \sum_{i,j} a^i(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})_p(\frac{\partial}{\partial y^j})_p = \sum_j b^j(\frac{\partial}{\partial y^j})_p$$

$$\iff b^j = \sum_i a^i(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})_p$$

$$\overset{D_i \text{ بنابر تعریف}}{\iff} b^j = \sum_i a^i D_i(y \circ x^{-1})^j_{x(p)}$$

در نتیجه نگاشت تغییر کارت $\psi \circ \varphi^{-1}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(\overline{U} \cap \overline{V}) &\longrightarrow \psi(\overline{U} \cap \overline{V}) \\ (x^i(p), a^i) &\longrightarrow \left((y \circ x^{-1})^i_{x(p)}, \sum_j a^j D_j(y \circ x^{-1})^i_{x(p)}\right) \end{aligned}$$

حال باید نشان دهیم که نگاشت تغییر کارت $\psi \circ \varphi^{-1}$ از کلاس C^{k-1} است. به این صورت یک اطلس $\overline{\mathcal{A}}$ روی TM تعریف می‌شود که آنرا اطلس طبیعی وابسته به $\mathcal{A}$ اطلس تعریف شده روی M می‌نامیم.

حال اگر ماتریس ژاکوبین $\psi \circ \varphi^{-1}$ را بنویسیم

$$\mathcal{D}(\psi \circ \varphi^{-1}) = \left(\begin{array}{c|c} D_j(y \circ x^{-1})^i & 0 \\ \hline \times & D_j(y \circ x^{-1})^i \end{array}\right)$$

چون $y \circ x^{-1}$ دیفئومورفیسم- C^k است، دترمینان ژاکوبین آن بنابر قضیه تابع معکوس مخالف صفر است لذا $\det D(\psi \circ \varphi^{-1}) = (\det ||D_j(y \circ x^{-1})^i||)^2 > 0$

و مجدداً بنابر قضیه تابع معکوس نگاشتهای تغییر کارت $\psi \circ \varphi^{-1}$ دیفئومورفیسم می‌باشند و کلاس آنها C^{k-1} است.

تمرین: نشان دهید TM با توپولوژی ذاتی اطلس بالا هاسدورف و دارای پایه شماراست.

راهنمایی: برای هر حوزه دامنه کارت V, U، $\overline{U} \cap \overline{V} = \overline{U \cap V}$ و $\overline{U}$ پایه شمارا دارد.

در نتیجه قضیه زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیه: فرض کنیم M یک منیفلد از کلاس C^k همراه با اطلس A بوده و $\overline{A}$ اطلس طبیعی وابسته به A روی TM باشد. آنگاه TM یک منیفلد $2n$ بعدی $(n = \dim M)$ از کلاس C^{k-1} است که توسط اطلس $\overline{A}$ تعریف می‌شود.

بعلاوه اگر (x, U) و (y, V) دو کارت روی M باشند بطوریکه $U \cap V \neq \emptyset$ آنگاه نگاشت تغییر کارت‌ها روی TM از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$(x^i(p), a^i) \longrightarrow ((y \circ x^{-1})^i_{x(p)}, \sum_j a^j D_j (y \circ x^{-1})^i_{x(p)})$$

۳.۲ § میدان برداری[1]

فرض کنیم M یک منیفلد $C^k(k \geq 1)$ باشد.

تعریف اول: *یک میدان برداری از کلاس $C^r(r < k)$ عبارت است از نگاشت X از کلاس C^r که به هر نقطه p از M بردار مماس X_p را وابسته می‌کند.*

یادآوری: اگر $\pi : A \to B$ یک نگاشت پوششی باشد یک **بخش** π عبارت است از نگاشت $f : B \to A$ بطوریکه $\pi \circ f = Id_B$ بنابراین X نگاشتی C^r است به صورت

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow TM \\ p &\mapsto X_p \end{aligned}$$

است بطوریکه $\pi \circ X = Id_M$

(π عبارت است از نگاشت پوششی طبیعی $TM \to M$ که به هر بردار ابتدای آنرا وابسته می‌کند) X را در این حالت یک **بخش**[2] π نیز می‌گویند.

---

[1] *vector field (champ de vecteur)*

[2] *section*

نماد گذاری: میدان‌های برداری را با X ، Y ، Z ، ... و مقدار آنها در p را با X_p، Y_p، Z_p، ... نشان می‌دهیم که مشابه نمادگذاری استفاده شده برای بردارهای مماس است. M کلاس C^∞ باشد، مجموعه میدان‌های برداری C^∞ روی M را با $\mathcal{X}(M)$ نمایش می‌دهند.
یادآوری: اگر A یک حلقه باشد یک Aـمدول عبارت است از یک مجموعه همراه با یک عمل داخلی که با + نشان داده می‌شود و یک عمل خارجی از اعضای A که در شرایط فضای برداری صدق کند.

$\mathcal{X}(M)$ بطور طبیعی دارای خواص یک $C^\infty(M)$ـ مدول با اعمال زیر است:

$$\begin{aligned} X+Y &: M \longrightarrow TM \\ & \quad p \mapsto X_p + Y_p \qquad\qquad X, Y \in \mathcal{X}(M) \\ fX &: M \longrightarrow TM \qquad\qquad f \in C^\infty(M) \\ & \quad p \mapsto f(p) X_p \end{aligned}$$

در بخش § ۱ از همین فصل **نگاشت مشتق‌گیری در یک نقطه** p از M را تعریف نمودیم. حال **نگاشت مشتق‌گیری را برای یک همسایگی** U مطرح خواهیم نمود. تفاوت بین مشتق‌گیری در نقطه p یعنی نگاشت:

$$\begin{aligned} X_p : C^\infty(p) &\longrightarrow I\!R \\ f &\mapsto X_p \cdot f \end{aligned}$$

و یک مشتق گیری از M یعنی نگاشت

$$\begin{aligned} X : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\mapsto X \cdot f \end{aligned}$$

در آن است که در حالت اول مقدار مشتق $X_p \cdot f$ در نقطه p محاسبه می‌گردد که در نتیجه عددی است حقیقی اما در مورد دوم مشتق یک تابع در حالت کلی (بدون در نظر گرفتن نقطه) مطرح است که یک تابع روی M است. برای روشن شدن این موضوع مثال مقدماتی زیر را می‌آوریم:

مثال: تابع $\begin{aligned} f : I\!R^2 &\longrightarrow I\!R \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

فرض کنیم میدان برداری $X = (۴x, ۳xy)$ روی $I\!R^۲$ تعریف شود و p نقطه‌ای به مختصات $(۱, ۲)$ باشد. حال مقادیر $X_p \cdot f$ و $X \cdot f$ را محاسبه می‌نمائیم.

$$\begin{aligned} X_p \;:\; & C^\infty(p) \longrightarrow I\!R \\ & f \mapsto X_p \cdot f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_p \cdot f &= \sum_{i=۱}^{۲} (X^i)_p (\frac{\partial f}{\partial x^i})_p = (X^۱)_p (\frac{\partial f}{\partial x})_p + (X^۲)_p (\frac{\partial f}{\partial y})_p \\ &= (۴x)_p (۲x)_p + (۳xy)_p (۲y)_p \end{aligned}$$

$$X_p \cdot f = ۴ \times ۲ + ۶ \times ۴ = ۳۲ \in I\!R$$

اما برای محاسبه Xf خواهیم دید که هر میدان برداری را می‌توان به صورت $X \underset{U}{=} \sum_{i=۱}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ نوشت.

$$\begin{aligned} X \;:\; & C^\infty(I\!R^۲) \longrightarrow C^\infty(I\!R^۲) \\ & f \mapsto X \cdot f \end{aligned}$$

$$X \cdot f \underset{U}{=} \sum_{i=۱}^{۲} X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = (۴x)(۲x) + (۳xy)(۲y) = ۸x^۲ + ۶xy^۲ \in C^\infty(I\!R^۲)$$

یادآوری: فرض کنیم K یک میدان باشد. یک Kـ جبر یا یک جبر[۱] روی K عبارت است از یک فضای برداری A روی K همراه با یک نگاشت دو خطی از $A \times A$ در A. به عنوان مثال $C^\infty(M)$ مجموعهٔ توابع حقیقی کلاس C^∞ روی M، یک $I\!R$ـ جبر می‌باشد. حال در اینجا تعریف نگاشت مشتق‌گیری را می‌آوریم.

تعریف: فرض کنیم A یک Kـ جبر باشد. *یک مشتق‌گیری از A عبارت است از نگاشت* $D : A \longrightarrow A$ که در شرایط زیر صدق کند

$$D(a+b) = Da + Db \qquad \forall a, b \in A$$

---

[۱] $K - Algebra$

$$D(ka) = kDa \qquad \forall k \in K$$

$$D(a \cdot b) = Da \cdot b + a \cdot Db$$

نظربه اینکه $C^\infty(M)$ یک $I\!R$ـ جبر می‌باشد می‌توان مشتق‌گیری‌های $C^\infty(M)$ رانیز مطالعه نمود. خاصیت اساسی آنها این است که " اپراتورهای موضعی " هستند، این موضوع را بطور دقیق‌تر بشکل زیر بررسی می‌نمائیم.

گزاره: فرض کنیم D یک مشتق‌گیری از $C^\infty(M)$ ، $f \in C^\infty(M)$ و U بازی از M باشد. اگر $f|_U = 0$ آنگاه $Df|_U = 0$

اثبات: فرض کنیم $p \in U$ و $K = \{p\}$ و Ψ یک تابع از $C^\infty(M)$ بطوریکه $\Psi(p) = 1$ و $supp\Psi \subset U$[1]. قرار می‌دهیم $\varphi = 1 - \Psi$ داریم $\varphi(p) = 0$ و $\varphi|_{U^c} = 1$ و $f = \varphi f$.

بنابراین

$$Df = D(\varphi \cdot f) = D\varphi \cdot f + \varphi \cdot Df$$

که با در نظر گرفتن مقدار آن در نقطه p

$$Df(p) = D\varphi(p) \cdot f(p) + \varphi(p) \cdot Df(p) = 0$$

زیرا $f(p) = \varphi(p) = 0$ $\square$

نتیجه ۱ : فرض کنیم $g \in C^\infty(M)$ و f بطوریکه $f|_U = g|_U$ آنگاه

$$Df|_U = Dg|_U$$

اثبات : برای اثبات کافی است گزاره بالا را برای تابع $f - g$ بکار ببریم. $\square$

نتیجه ۲ : فرض کنیم D یک مشتق‌گیری از $C^\infty(M)$ و U بازی از M باشد. آنگاه بازی

---

[1] $supp\ \Psi = \overline{\{x \in M \mid \Psi(x) \neq 0\}}$ ثابت می‌شود که چنین تابعی همواره روی M موجود است. مراجعه شود به پیوست I در پایان این فصل

مانند U'، $U' \subset U$ و یک مشتق‌گیری یکتای $D_{U'}$ از $C^\infty(U')$ وجود دارد بطوریکه

$$\forall f \in C^\infty(M) \qquad (Df)|_{U'} = D_{U'}(f|_{U'})$$

توجه: این خاصیت بیانگر آن است که D یک اپراتور موضعی است یعنی عملگری است که عمل آن توسط عملگر $(D_{U'})$ بیان می‌گردد که منحصرا" در روی توابع تعریف شده روی همسایگی U' عمل می‌کند.

اثبات: فرض کنیم $U' \subset U$ بطوریکه $f_{U'} \in C^\infty(U')$. این نگاشت را توسعه داده به‌صورت $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ می‌نویسیم. حال کافی است قرار دهیم

$$(D\tilde{f})|_{U'} = D_{U'}(f|_{U'}) \qquad \square$$

با استفاده از نتیجه ۲ می‌توان گفت این موضوع بستگی به انتخاب $\tilde{f}$ توسیع تابع f ندارد. به این صورت یک مشتق‌گیری D از $C^\infty(M)$ را می‌توان اصطلاحا" " موضعی " نمود یعنی می‌توان یک اپراتوری ساخت که روی توابعی عمل نماید که بطور موضعی (در همسایگی یک نقطه) تعریف شده باشند و بطور کامل D را تعریف نمایند.

قضیه: میدان‌های برداری را می‌توان با مشتق‌گیری‌ها از $C^\infty(M)$ همانند نمود. به عبارت دیگر اگر $X \in \mathcal{X}(M)$ باشد، یک مشتق‌گیری از $C^\infty(M)$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$
$$f \mapsto X \cdot f$$

بطوریکه

$$(X \cdot f)(p) = X_p \cdot f$$

اثبات: اگر X به‌صورت فوق تعریف شود به راحتی مشاهده می‌شود که X در شرایط مشتق گیری از $C^\infty(M)$ صدق می‌کند. برعکس اگر D یک مشتق‌گیری از $C^\infty(M)$ باشد، میدان‌های برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X : M \longrightarrow TM$$
$$p \mapsto X_p$$

بطوریکه

$$\begin{array}{rcl} X_p : C^\infty(p) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & (D\tilde{f})(p) \end{array}$$

در اینجا $\tilde{f}$ توسیع تابع f است که روی یک همسایگی p تعریف شده است. $\square$

بنابر آنچه گفته شد میدان برداری روی M را می‌توان یک مشتق‌گیری از $C^\infty(M)$ در نظر گرفته ، به‌صورت زیر تعریف نمود.

تعریف دوم: *فرض کنیم M از کلاس C^k باشد.* **یک میدان برداری** *از کلاس C^r $(r \leq k)$ عبارت است از نگاشت X از کلاس C^r*

$$X : C^r(M) \longrightarrow C^{r-1}(M)$$

بطوریکه در سه شرط زیر صدق کند

$$X \cdot (f+g) = X \cdot f + X \cdot g \qquad f, g \in C^\infty(M)$$

$$X \cdot (cf) = cX \cdot f \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$X \cdot (fg) = (X \cdot f)g + f(X \cdot g)$$

میدان‌های برداری C^∞ بطور مشابه روی منیفلدهای C^∞ تعریف می‌شوند. نتیجه ۲ را می‌توان به‌صورت زیر برای میدان‌های برداری بیان نمود.

نتیجه ۳: *فرض کنیم $X \in \mathcal{X}(M)$ و U بازی از M باشد. آنگاه بازی مانند U' از M ، $U' \subset U$ و میدان یکتای $X_{U'} \in \mathcal{X}(U')$ موجود است بطوریکه*

$$X_{U'} \cdot f|_{U'} = (Xf)|_{U'} \qquad \forall f \in C^\infty(M)$$

این نتیجه به ما اجازه می‌دهد که محاسبات میدان‌های برداری را در دستگاه مختصات موضعی انجام دهیم. به عبارت دیگر می‌توانیم به‌صورت زیر میدان‌های برداری را بررسی نمائیم.

اگر (x, U) یک کارت در همسایگی p باشد ، یک میدان برداری X_U روی U را

به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(X_U \cdot f_U)(p) = (Xf)(p) = X_p f = \sum_{i=1}^{n} a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p f$$

در اینجا a^iها مولفه‌های X_p روی پایه $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ هستند. یعنی

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

با تغییر دادن p ، در یک نقطه دلخواه از U داریم

$$X_U \cdot f_U = \sum_{i=1}^{n} a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} f$$

که $\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{X}(U)$ عبارت است از میدان

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \ : \ U \to TU$$
$$p \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

به عبارت دیگر می‌توان یک میدان برداری را به‌صورت زیر نوشت.

$$\boxed{X \underset{U}{=} \sum_i a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}}$$

اغلب اوقات چنانچه احتمال اشتباه نرود از نوشتن U در زیر تساوی خودداری می‌کنیم.

قضیه: **اگر $V \in T_pM$ یک بردار مماس در p باشد آنگاه یک میدان برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ وجود دارد بطوریکه**

$$X_p = V$$

اثبات: فرض کنیم (x, U) یک کارت موضعی در همسایگی p باشد و

$$V = \sum_i a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

به ازاء هر نقطه $q \in U$ تعریف می‌کنیم

$$V_q = \sum_i a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q$$

فرض کنیم $f \in C^\infty(M)$ بطوریکه $f(p) = ۱$ و $supp\ f \subset U$ (چنین تابعی همواره وجود دارد به پیوست I در پایان این فصل مراجعه شود). برای هر نقطه $m \in M$ تعریف می‌کنیم

$$X_m = \begin{cases} f(m)V_m & \text{اگر } m \in U \\ ۰ & \text{اگر } m \notin U \end{cases}$$

$\square$

کروشه لی دو میدان برداری

تعریف: فرض کنیم $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. نگاشت مشتق‌گیری

$$[X,Y] : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

که توسط
$$[X,Y]f = X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f)$$

*تعریف می‌شود یک میدان برداری است که **کروشه لی** X, Y نامیده می‌شود براحتی می‌توان شرایط میدان برداری (مشتق‌گیری) را برای کروشه تحقیق نموده نشان داد که کروشه دارای خواص زیر نیز هست.*

$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$

الف) $[X,Y] = -[Y,X]$

ب) اتحاد ژاکوبی $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = ۰$

ج)
$$\left.\begin{aligned} [X, fY] &= (X \cdot f)Y + f[X,Y] \\ [fX, Y] &= f[X,Y] - (Y \cdot f)X \end{aligned}\right\}$$

(رابطه اخیر از رابطه قبل وخاصیت الف نتیجه می‌شود)

تذکر: $\mathcal{X}(M)$ **یک جبرلی**[1] است. یادآوری می‌کنیم که یک $I\!R$ـجبر را جبر لی گوئیم اگر دارای یک قانون داخلی مانند $[a,b]$ باشد بطوریکه

$$[a,b] = -[b,a]$$

$$[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0$$

کروشه لی در مختصات موضعی

اگر (x,U) یک کارت موضعی، $Y \underset{U}{=} \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ و $X \underset{U}{=} \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ بطوریکه $(X^i, Y^i \in C^\infty(U))$ آنگاه براحتی می‌توان نشان داد در مختصات موضعی داریم

$$I \qquad [X,Y] \underset{U}{=} \sum_{i,j} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

رابطه فوق را می‌توان با استفاده مستقیم از تعریف یا با استفاده از خاصیت $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$ و خاصیت ج بدست آورد.

تمرین:

۱ـ نشان دهید کروشه لی دو میدان برداری یک میدان برداری است به عبارت دیگر شرایط میدان برداری یا مشتق‌گیری از M را برای کروشه لی تحقیق نموده ودرستی روابط (الف) و (ب) و (ج) را که پس از تعریف کروشه آورده شده است تحقیق کنید. سپس نشان دهید $X \circ Y$ و $Y \circ X$ میدان برداری نیستند اگرچه تفاضل آنها میدان برداری است.

۲ـ نشان دهید $[X,Y]$ در مختصات موضعی روی منیفلد M از کلاس C^∞ و به بعد n، روی کارت (x,U) توسط رابطه (I) در بالا بیان می‌گردد.

۳ـ یک تابع $f : I\!R^3 \to I\!R$ مثال بزنید و مقدار کروشه لی دو میدان برداری X و Y یعنی

---

[1] *Lie algebra (Algebre de Lie)*

f $[X,Y]$ را در مختصات موضعی بدست آورید.

۴.۲ § نگاشت مماس[1]

فرض کنیم $f: M \to N$ یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^1 باشد. به ازاء هر نقطه p از M نگاشت خطی f_* را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f_*)_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$$

که $(f_*)_pX_p$ توسط اثر آن روی تابع g به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\boxed{(f_*)_pX_p \cdot g = X_p \cdot (g \circ f)} \qquad\qquad g \in C^\infty(f(p))$$

براحتی می‌توان نشان داد که $(f_*)_pX_p$ یک مشتق‌گیری از توابع $C^\infty(f(p))$ می‌باشد. به این‌صورت نگاشت زیر را به صورت نقطه به نقطه تعریف می‌نمائیم.

$$f_* : TM \to TN$$
$$(p, X_p) \to (f(p), (f_*)_pX_p)$$

f_* را **نگاشت مماس** می‌نامند و گاهی اوقات آنرا با Tf، Df یا df نیز نمایش می‌دهند.

چون $(f_*)X_p$ یک بردار در $T_{f(p)}N$ می‌باشد نمودار زیر "جابجایی" است. (یعنی دو ترکیب زیر باهم برابرند) $\pi_N \circ f_* = f \circ \pi_M$

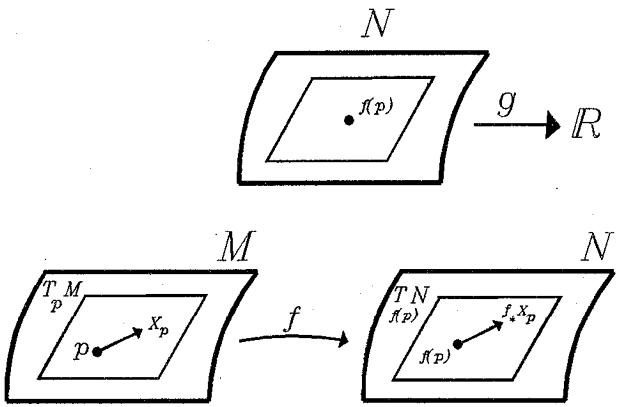
$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{f_*} & TN \\ \pi_M \downarrow & & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

f_* در مختصات موضعی

قضیه: اگر $f: M \to N$ یک نگاشت C^1 باشد فرض کنیم (x,U) و (y,V) دو

---

[1] Tangent application



شکل ۲.۹ : اثر f و f_* روی M و T_pM و در بالا یک تابع حقیقی روی N

کارت موضعی در همسایگی نقاط p و $f(p)$ باشند. آنگاه ماتریس f_* در پایه‌های $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ، $\frac{\partial}{\partial y_j}$ همان ماتریس ژاکوبین $y \circ f \circ x^{-1}$ نسبت به پایه‌های متعارف است و داریم:

$$(Matrice(f_*)_p)_{(\frac{\partial}{\partial x^i})_p,(\frac{\partial}{\partial y^j})_{f(p)}} = |(\frac{\partial f^i}{\partial x^j})|_{(p)}$$

با توجه به نمادگذاری بخش قبل $\frac{\partial f^i}{\partial x^j} = D_j(y^i \circ f \circ x^{-1})_{x(p)}$

اثبات : فرض کنیم $g \in C^\infty(f(p))$ ماتریس نگاشت خطی f_* را بدست می‌آوریم.

$$[(f_*)_p(\frac{\partial}{\partial x^j})_p] \cdot g = (\frac{\partial}{\partial x^j})_p(g \circ f) = \sum_i (\frac{\partial g}{\partial y^i})(\frac{\partial f^i}{\partial x^j})_p$$
$$= \sum_i (\frac{\partial f^i}{\partial x^j})_p(\frac{\partial}{\partial y^i})_{f(p)} g$$

از آنجا

$$(f_*)_p(\frac{\partial}{\partial x^j})_p = \sum_i (\frac{\partial f^i}{\partial x^j})_p(\frac{\partial}{\partial y^i})_{f(p)}$$

که حکم از آن نتیجه می‌شود. □

لم: اگر N, M و P سه منیفلد بوده و $g : M \to N$ و $f : N \to P$ دو تابع

دیفرانسیل‌پذیر باشند آنگاه

$$(f \circ g)_{*x} : T_x M \longrightarrow T_{(f \circ g)(x)} P$$

و داریم

$$(f_*)_{g(x)} \circ (g_*)_x = (f \circ g)_{*x}$$

یعنی

$$\boxed{f_* \circ g_* = (f \circ g)_*}$$

این خاصیت نتیجه می دهد که ماتریس ژاکوبین ترکیب دو تابع برابر است با حاصلضرب ماتریس ژاکوبین‌های آنها. اثبات به عنوان تمرین در خاتمه این بخش به‌عهده خواننده واگذار شده است. [1]

تعبیر هندسی f_*

فرض کنیم C یک منحنی روی منیفلد M باشد. در اینجا ابتدا به تعبیر هندسی C_* پرداخته خواهیم دید که تصویر این تابع در حقیقت همان بردار مماس بر منحنی C می‌باشد که آن را توسط تصویر C' نیز نمایش می‌دادیم. سپس به تعبیر f_* پرداخته مشاهده خواهیم کرد که این تابع چگونه بر بردارهای مماس M اثر می‌کند.

همانطوریکه قبلا" دیدیم یک بردار مماس در نقطه p از M ممکن است به عنوان یک مشتق‌گیری از توابع $C^\infty(p)$ یا به عنوان یک کلاس هم‌ارزی از منحنی‌ها روی M، که از نقطه p می‌گذرند تعریف شود.

X_p مشتق‌گیری از توابع $C^\infty(p)$است. $\Longleftrightarrow$ $[C]_p$ کلاس هم‌ارزی منحنی‌ها است.

که در آن

$$X_p \cdot f = \frac{d}{dt}(f \circ C)|_{t=0}$$

---

[1] با استفاده از تعریف اگر $\varphi \in C^\infty((f \circ g)(x))$ داریم $((f \circ g)_* X_x)\varphi = X_x(\varphi \circ f \circ g)$

هر منحنی C از کلاس $[C]_p$ را یک منحنی انتگرال X_p نامیدیم. بنابراین اگر C یک منحنی باشد

$$C : I =]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow M$$

می‌توان نمودار زیر را که روشنگر تفاوت بین C' و C_* است در نظر گرفت.

$$\begin{array}{ccc} TI & \xrightarrow{C_*} & TM \\ \frac{d}{dt}\uparrow & \overset{C'}{\nearrow} & \downarrow \\ I & \xrightarrow{C} & M \end{array}$$

در اینجا فرض کرده‌ایم $\frac{d}{dt} \in \mathcal{X}(I)$ ، $C(\circ) = p, f \in C^\infty(M)$

بنابر تعریف C_* داریم

$$(C_*)_\circ \circ (\frac{d}{dt})_\circ \cdot f = (\frac{d}{dt})_{t=\circ} f \circ C = \frac{d(f \circ C)}{dt}|_{t=\circ} = X_p \cdot f$$

همچنین C منحنی انتگرال بردار $C_* \dfrac{d}{dt}$ می‌باشد

$$(C_*)_\circ \circ (\frac{d}{dt})_\circ = X_p$$

که در ادامه این بخش بردار مماس بر منحنی C در نقطه p را توسط رابطه زیر نشان می‌دهیم.

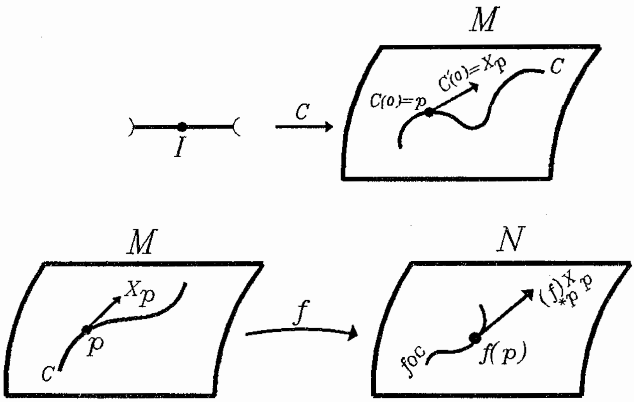
$$C'(\circ) \in T_{C(\circ)}M$$

$$\boxed{C'(\circ) = (C_*)_\circ \circ (\tfrac{d}{dt})_\circ}$$

بنابراین اگر $X_p \in T_pM$، آنگاه منحنی انتگرال آن، منحنی $C : I \to M$ است که در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$\begin{cases} C(\circ) & = p \\ C'(\circ) & = X_p \end{cases}$$

حال فرض کنیم $f : M \to N$، $X_p \in T_pM$ و C یک منحنی انتگرال X_p باشد در اینجا براحتی خواهیم دید که $(f_*)_p$ عبارتست ازنگاشتی که X_p را به بردار مماس بر منحنی $f \circ C$ در نقطه $f(p)$ تبدیل می‌کند.



شکل ۲.۱۰ : اثر f_* روی یک بردار مماس بر M

در حقیقت داریم :

$$(f_*)_p X_p = (f_*)_{C(0)} \circ (C_*)_0 \circ \frac{d}{dt} = (f \circ C)_{*0}(\frac{d}{dt})_0 = (f \circ C)'(0)$$

تذکر: می‌دانیم $f_* : TM \to TN$ به‌صورت بالا تعریف می‌شود، اما f_* وجود نگاشتی از $\mathcal{X}(M)$ در $\mathcal{X}(N)$ را ثابت نمی‌کند. برای آنکه بتوان نگاشتی از $\mathcal{X}(M)$ در $\mathcal{X}(N)$ تعریف نمود باید نگاشت f دوسویی باشد (به عبارت دیگر f یک دیفئومورفیسم باشد.)

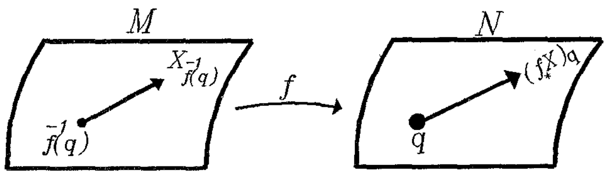
حال فرض کنیم f یک دیفئومورفیسم باشد. $f : M \to N$ و $X \in \mathcal{X}(M)$ آنگاه بطور نقطه به نقطه $(f_*X) \in \mathcal{X}(N)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. اگر q نقطه‌ای از N باشد قرار می‌دهیم.

$$\boxed{(f_*X)_q = (f_*)_{f^{-1}(q)} X_{f^{-1}(q)}}$$

تعریف: می‌گوئیم دو میدان برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ و $Y \in \mathcal{X}(N)$ **هم ارز یا مرتبط-** C^k می‌باشند اگر یک دیفئومورفیسم C^k، $f : M \to N$ موجود باشد بطوریکه :

$$Y = f_* X$$

(تعبیر هندسی رابطه اخیر متعاقباً در بخش ۴ از فصل ۶ آورده خواهد شد.)



شکل ۲.۱۱ : اثر f_* روی یک میدان برداری روی M

تمرین

۱ـ نشان دهید که اگر $f : M \to N$ از کلاس C^1 باشد آنگاه $(f_*)_p X_p$ یک مشتقگیری از توابع $C^\infty(f(p))$ است، به عبارت دیگر $(f_*)_p X_p$ یک بردار مماس روی N می‌باشد.

۲ـ اگر $f : N \to P$ و $g : M \to N$ تعریف شده باشد نشان دهید[1]

$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$$

۳ـ نشان دهید مشتق پذیری یک تابع $f : M \to N$ (وجود یا عدم وجود f_*) به انتخاب کارت‌ها بستگی ندارد (اگر چه مقدار مشتق در کارت‌های مختلف متفاوت باشد مانند مشتق یک تابع در مختصات دکارتی و مشتق همان تابع در مختصات قطبی در صفحه) این موضوع در فصل اول نیز بررسی گردیده بود.

۴ـ نشان دهید اگر $f : M \longrightarrow N$ از کلاس C^k باشد آنگاه f_* از کلاس C^{k-1} است.

۵.۲ § فضای دوگان مماس (فضای کتانژانت)[2]

مقدمه: در این فصل مفاهیم زیر را تعریف کردیم:

[1] با استفاده از تعریف اگر $\varphi \in C^\infty((f \circ g)(x))$ داریم $((f \circ g)_{*x} X_x)\varphi = X_x(\varphi \circ f \circ g)$

[2] $Cotangent\ space\ (Espace\ contangent)$

I ـ بردار مماس X_p، II ـ فضای مماس T_pM، III ـ میدان برداری X، IV ـ خانواده میدان‌های برداری $\mathcal{X}(M)$، Vـ نگاشت مماس f_*

حال میخواهیم در ادامه، تعاریف دوگان تعاریف فوق را به ترتیب زیر بیان کنیم:

Iـ ۱ـ فرمی ω_p، IIـ فضای دوگان مماس T_p^*M، IIIـ میدان ۱ـ فرمی ω، IVـ خانواده میدان‌های ۱ـ فرمی $\Omega^1(M)$، Vـ نگاشت دوگان مماس f^*

به ازاء هر نقطه p از M، T_pM یک فضای برداری است که فضای دوگان آنرا با T_p^*M نشان داده آنرا فضای دوگان مماس می‌نامیم. قرار می‌دهیم

$$T^*M = \cup_{p\in M} T_p^*M$$

$T^*(M)$ بطور طبیعی دارای ساختار منیفلد است. فرض کنیم

$$\tilde{\pi} : T^*M \longrightarrow M$$

$$\omega_p \in T_p^*M \ \mapsto \ p$$

فرض کنیم (x, U) یک کارت در همسایگی نقطه p بوده و $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_p\}_{i=1,\dots,n}$ یک پایه برای T_pM باشد آنگاه پایه‌ای برای T_p^*M تعریف می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$(\theta^i)_p \text{ پایه دوگان } (\frac{\partial}{\partial x^i})_p$$

به عبارت دیگر داریم $(\frac{\partial}{\partial x^i})_p(\theta^j)_p = \delta_i^j$ که در آن δ_i^j دلتای کرونکر است. اگر U^* تصویر معکوس U توسط $\tilde{\pi}$ باشد با توجه به شکل داریم

$$U^* = \tilde{\pi}^{-1}(U) \qquad , \qquad U^* \subset T^*M$$

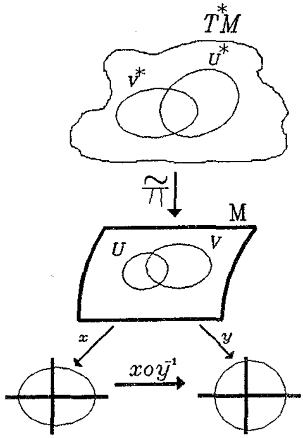
نگاشت $\tilde{\varphi}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tilde{\varphi} : U^* \longrightarrow R^{2n}$$

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{n} a^i(\theta^i)_p \ \mapsto \ (x^1(p), \cdots, x^n(p), a_1, \cdots, a_n)$$

همانطور که قبلا" نیز مشابه نگاشت فوق رادیده بودیم اگر M از کلاس C^k باشد می‌توان نشان داد که $(U^*, \tilde{\varphi})$ یک اطلس C^{k-1} روی T^*M تعریف می‌کند، که این موضوع به عنوان تمرین واگذار می‌شود. T^*M را **منیفلد کتانژانت** نیز می‌گویند.

نمادگذاری: معمولا" اعضای T^*_pM را با حروف یونانی $\omega, \pi, \alpha, \beta, \cdots$ نشان می‌دهند وآنها را ۱ــ فرمی می‌نامند.



شکل ۲.۱۲ : کارت‌های منیفلد دوگان مماس

مثال: خانواده ۱ــ فرمی‌های روی $I\!R^2$ در مختصات (x, y) در نقطه p را با $T^*_pI\!R^2$ نشان داده به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$\omega_p = a_1dx + a_2dy \qquad \omega_p \in T^*_pI\!R^2$$

توضیح بیشتر در این زمینه، و دلیل اینکه چرا ۱ــفرمی‌ها به‌صورت فوق نوشته می‌شوند را در ادامه این بخش و در بخش Pــ فرمی‌ها خواهیم آورد.

میدان ۱ ــ فرمی‌ها[1]

مشابه تعریف میدان‌های برداری روی یک منیفلد ، میدان ۱ ــفرمی ها را تعریف می‌نمائیم.

---

[1] *one forms fields (Champs de* $1-$ *forme)*

تعریف اول: میدان ۱ـفرمی‌ها از کلاس C^k عبارت است از نگاشت C^k زیر

$$\omega : M \longrightarrow T^*M$$

که به هر نقطه p از M یک عضو ω_p از T_p^*M را وابسته می‌کند.

(به عبارت دیگر منظور یک بخش از نگاشت $\tilde{\pi} : T^*M \to M$ می‌باشد.)

نمادگذاری: مجموعه میدان ۱ـفرمی ها از کلاس C^∞ روی منیفلد M را با $\Omega^1(M)$ نمایش می دهیم. $\Omega^1(M)$ با قوانین زیر تشکیل یک $C^\infty(M)-$ مدول می‌دهد.

$$(\omega_1 + \omega_2)_p = (\omega_1)_p + (\omega_2)_p$$

$$(f\omega)_p = f(p)\omega_p$$

تذکر: *مشابه میدان‌های برداری ثابت می‌شود که اگر $f \in C^\infty(M)$، آنگاه هر میدان ۱ـفرمی را می‌توان با یک $C^\infty(M)$ خطی مانند $\underline{\omega}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود همانند نمود $\underline{\omega} : \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$*

$$\begin{cases} \underline{\omega}(X+Y) = \underline{\omega}(X) + \underline{\omega}(Y) & \\ \underline{\omega}(fX) = f\underline{\omega}(X) & \forall X, Y \in \mathcal{X}(M), \forall f \in C^\infty(M) \end{cases}$$

لذا تعریف زیر را که معادل تعریف اول می‌باشد آورده و از این به بعد از این تعریف استفاده می‌نمائیم.

تعریف دوم: *نگاشت ω را یک **میدان ۱ـفرمی دیفرانسیل‌پذیر** روی M گوئیم اگر $C^\infty(M)$ـخطی باشد، به عبارت دیگر اگر ω در شرایط زیر صدق کند.*

$$\begin{aligned} \omega : \mathcal{X}(M) &\longrightarrow C^\infty(M) & \\ \omega(X+Y) &= \omega(X) + \omega(Y) & \forall f \in C^\infty(M) \\ \omega(fX) &= f\omega(X) & \forall X, Y \in \mathcal{X}(M) \end{aligned}$$

تذکر: *فرض کنیم $\omega \in \Omega^1(M)$ و U یک همسایگی از M باشد آنگاه مشابه میدان‌های برداری می‌توان نشان داد که یک وتنها یک $\omega_U \in \Omega^1(U)$ وجود دارد، بطوریکه*

$$\omega(X)|_U = \omega_U(X_U)$$

بنابراین کافی است به ازاء هر نقطه p از U تعریف کنیم

$$\begin{aligned}(\omega_U)_p : T_pU &\to \mathbb{R}\\ X_p &\to \omega(X)_{(p)}\end{aligned}$$

مثال : مشتق خارجی یک تابع[۱] فرض کنیم $f \in C^\infty(M)$ باشد. نگاشت df را به اینصورت تعریف می‌کنیم

$$\boxed{(df)(X) = X \cdot f}$$

براحتی می‌توان بررسی نمود که df یک میدان ۱ـفرمی است.

$$(df)(X+Y) = (X+Y)\cdot f = X\cdot f + Y\cdot f = (df)(X) + (df)(Y)$$
$$(df)(gX) = gX\cdot f = g(X\cdot f) = g(df)(X) \qquad g \in C^\infty(M)$$

مثال: فرض کنیم (x,U) یک کارت موضعی و $\begin{aligned}x^i :\ & U \to \mathbb{R}\\ & p \to x^i(p)\end{aligned}$ نگاشت مولفه iام باشد که به هر نقطه p از U مولفه iام $x(p)$ را وابسته می‌کند می‌خواهیم dx^i را محاسبه کنیم.

$dx^i(X) \underset{U}{=} X\cdot x^i = \sum_j X^j \dfrac{\partial x^i}{\partial x^j} = X^i$ و در حالت خاص داریم:

$$\boxed{dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) \underset{U}{=} \delta^i_j}$$

بنابراین نقطه به نقطه روی U داریم

$$\forall p \in U \qquad (dx^i)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \delta^i_j$$

تذکر: از این عبارت نتیجه می‌شود که $(dx^i)_p$ پایه دوگان $(\dfrac{\partial}{\partial x^i})_p$ است.

---

[۱] *exterior derivation*

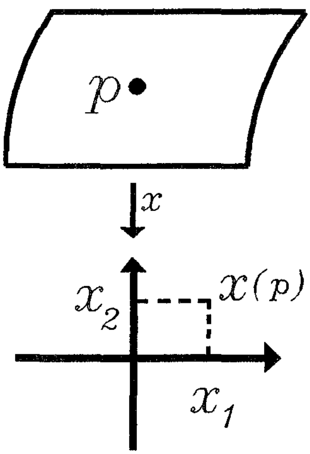
میدان ۱ـفرمی‌ها در مختصات موضعی:

فرض کنیم (x,U) یک کارت موضعی و $\omega \in \Omega^1(M)$ باشد. اگر $X \underset{U}{=} \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ آنگاه

$$\omega(X) \underset{U}{=} \omega\left(\sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_i X^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

زیرا ω خطی است. $\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \in C^\infty(U)$ حال قرار می‌دهیم $a_i(x) \underset{U}{=} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ داریم

$$\omega(X) \underset{U}{=} \sum_i a_i(x) X^i(x)$$



شکل ۲.۱۳ : مختصات موضعی نقطه p روی M

چون دیدیم $dx^i(X) = X^i$ بنابراین به ازاء هر X داریم $\omega(X) = \sum_i a^i(x) dx^i(X)$

یا

$$\boxed{\omega \underset{U}{=} \sum_i a_i(x) dx^i}$$

$a_i(x)$ را مولفه‌های میدان ۱ـفرمی ω می‌نامیم. در حالت خاص برای df داریم

$$(df)(X) \underset{U}{=} X \cdot f \underset{U}{=} \sum X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i(X)$$

(با توجه به نمادگذاری $\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial (f \circ x^{-1})}{\partial x^i}$)

$$\boxed{df \underset{U}{=} \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i}$$

بنابراین df تعمیم دیفرانسیل کل یک تابع روی منیفلدها است که قبلاً در $\mathbb{R}^n$ با مفهوم آن آشنا شده بودیم.

تمرین:

۱ـ نشان دهید T^*M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^{k-1}، به بعد $2n$ است. نگاشت تغییر مختصات را بنویسید و ماتریس ژاکوبین آنرا بدست آورید.

راهنمایی: باید ابتدا رابطه بین ۱ـفرمی ω در دو دستگاه مختصات (x, U) و (y, V) را بدست آورده نشان داد در رابطه زیر صدق می‌کنند.

$$\sum_i a_i dx^i = \sum_j b_j dy^j \Rightarrow b_k = \sum_j a_i \frac{\partial x^j}{\partial y^i}$$

سپس مشابه قضیه TM کارتها و ماتریس ژاکوبین نگاشت تغییر کارت را بدست آورد.

۲ـ فرض کنید M و N منیفلدهای دیفرانسیل‌پذیر به ابعاد n و m بوده، f نگاشت دیفرانسیل‌پذیر از M در N باشد. دو کارت (x, U) و (y, V) را در همسایگی p و $f(p)$ در نظر گرفته تعریف می‌کنیم:

اگر $f_i = (y \circ f \circ x^{-1})_i$ آنگاه $df = (df_1, \cdots, df_m)$

در اینجا f_iها توابع حقیقی $f_i : x(U) \to \mathbb{R}$ می‌باشند که دیفرانسیل خارجی آنها df_i را در بالا تعریف نمودیم.

الف) نشان دهید ماتریس نگاشت خطی df در پایه کانونی همان ماتریس f_* در پایه ایجاد شده توسط کارت‌های $(y, V), (x, U)$ است.

ب) اگر g, f نگاشت‌های دیفرانسیل‌پذیر f ،$g : M \to \mathbb{R}$ باشند نشان دهید

$$d(fg) = fdg + gdf$$

ج) نشان دهید با مفروضات (ب) داریم

$$(fg)_* = fg_* + gf_*$$

۶.۲ § نگاشت دوگان یا کتانژانت[۱]

تعریف: فرض کنیم $f : M \to N$ یک نگاشت از کلاس C^1 باشد به ازاء هر p از M یک نگاشت خطی به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$(f^*)_p : T^*_{f(p)}N \longrightarrow T^*_pM$$

بطوریکه اگر $\omega \in T^*_{f(p)}N$ داشته باشیم

$$\boxed{((f^*)_p\omega)(X_p) = \omega((f_*)_pX_p)}$$

آنگاه f^* را **نگاشت دوگان** یا **نگاشت کتانژانت** نگاشت f نامیده آنرا **نگاشت عقب‌کش**[۲] نیز می‌گویند. بطور نقطه به نقطه نگاشت f^* را تعریف نمودیم.

---

[۱] *Cotangent application*

[۲] *Pull back*

تذکر: نگاشت f^* که بطور نقطه‌ای تعریف شده است در حالت کلی نگاشتی از T^*N به T^*M نیست مگر آنکه f معکوس‌پذیر باشد.

در حالت کلی f^* عبارت است از نگاشت

$$f^* : \Omega^1(N) \to \Omega^1(M)$$

براحتی می‌توان نشان داد ماتریس f^*p در هر نقطه‌ای در پایه‌ای که از کارت‌ها ایجاد می‌شود عبارت است از ترانهاده ماتریس ژاکوبین f_*p در همان نقطه (نگاشت مماس). گاهی اوقات $f^*\omega$ را تصویر معکوس ω توسط f نیز می‌گویند.

لم ۱: الف) اگر f تابعی از M در N و g تابعی از N در P از کلاس C^1 باشند آنگاه

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

ب) به ازاء هر $g \in C^\infty(N)$

$$f^* dg = d(f^* g)$$

در اینجا فرض شده است

$$f^* g = g \circ f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$$

اثبات بسادگی از تعریف و لم مشابه در ۴§ نتیجه شده و بعنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. (به تمرین ۱ در همین بخش مراجعه کنید.)

لم ۲: ماتریس نگاشت خطی f^*p برابر ترانهاده ماتریس f_*p است.

اثبات این لم مشابه اثبات قضیه مربوط به ماتریس f_* است که در بخش قبل دیدیم. (به تمرین ۳ این بخش مراجعه کنید.)

تمرین:

۱ـ لم ۱ در بالا را ثابت کنید.

راهنمایی: (ب) فرض کنید $\omega = dg$ و به ترتیب از تعریف f^*، df، f_* و نمادگذاری $f^*g = g \circ f$ استفاده کنید.

۲ـ فرض کنیم $f : I\!R^{۳} \longrightarrow I\!R^{۲}$ به‌صورت زیر تعریف شود

$$f(x_۱, x_۲, x_۳) = (x_۱ + ۲x_۲, x_۲ + x_۳)$$

میدان برداری $X = \sum_{i=۱}^{۳} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ را در $I\!R^{۳}$ و میدان ۱ـ فرمی $\omega = a^۱ dx_۱ + a^۲ dx_۲$ را در $I\!R^{۲}$ در نظر می‌گیریم. می‌دانیم $f^*\omega$ یک میدان ۱ـفرمی روی $I\!R^{۳}$ می‌باشد. مطلوب است محاسبه $(f^*\omega)(X)$.

۳ـ نشان دهید ماتریس $(f^*)_p$ و ماتریس $(f_*)_p$ در پایه‌هایی که توسط کارت‌ها ایجاد می‌شوند ترانهاده یکدیگرند.

۴ـ با استفاده از ماتریس f^* مستقیماً $f^*\omega$ را در تمرین ۲ محاسبه نموده جواب‌ها را مقایسه کنید.