

تاریخ تحویل: ۱۳۹۷/۰۲/۰۳

درس: معادلات دیفرانسیل

تمرینات فصل اول

سوال ۱ مرتبه و درجه معادلات دیفرانسیل زیر را مشخص کنید.

$$(y'')^2 + 3(y')^3 = 0 \quad (\text{الف})$$

$$(y')^{\frac{1}{2}} = (1 + y'')^{\frac{1}{3}} \quad (\text{ب})$$

$$y' + \ln y - 1 = 0 \quad (\text{ج})$$

$$e^y y'' + 2(y')^2 = 1 \quad (\text{د})$$

سوال ۲ معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های زیر را پیدا کنید.

$$y = ce^{-x} \quad (\text{الف})$$

$$y^2 + \frac{1}{x} = 2 + ce^{-\frac{y^2}{2}} \quad (\text{ب})$$

$$\ln \frac{x}{y} = 1 + cy \quad (\text{ج})$$

پاسخ سوال ۱:

(الف) بالاترین مرتبه مشتق ۲ است. و توان آن هم ۲ است. پس مرتبه ۲ و درجه ۲ است.

(ب) بالاترین مرتبه مشتق ۲ است. پس مرتبه ۲ است. با توجه به شکل معادله، درجه برای آن تعریف نشده است.

(ج) بالاترین مرتبه مشتق ۱ است. پس مرتبه ۱ است. برای آن درجه تعریف نمی‌شود.

(د) مرتبه دو است ولی برای آن درجه تعریف نمی‌شود.

پاسخ سوال ۲:

(الف)

$$\begin{cases} y = ce^{-x} \\ y' = -ce^{-x} \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{y'} = -1 \Rightarrow y' = -y$$

(ب)

$$\begin{cases} y^2 + \frac{1}{x} = 2 + ce^{-\frac{y^2}{2}} \\ 2yy' - \frac{1}{x^2} = -cyy'e^{-\frac{y^2}{2}} \end{cases}$$

با تقسیم طرفین رابطه دوم دستگاه بر yy' و جمع آن‌ها با رابطه اول دستگاه داریم:

$$y^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 yy'} = 0$$

طرفین را در $x^2 yy'$ ضرب می‌کنیم، داریم:

$$x^2 y^3 y' + xyy' - 1 = 0 \Rightarrow xyy'(xy^2 + 1) = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{xy(xy^2 + 1)}$$

(ج) در اینجا بهتر است برای مشتق‌گیری از تابع $\ln$ آن را تفکیک کنیم و از رابطه $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

استفاده نماییم و سپس مشتق بگیریم. همچنین، مشتق تابع $\ln f(x)$ به صورت $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$\begin{cases} \ln \frac{x}{y} = 1 + cy \Rightarrow \ln x - \ln y = 1 + cy \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = cy' \end{cases}$$

رابطه اول دستگاه را در y' ضرب و رابطه دوم دستگاه را در y ضرب می‌کنیم، سپس آن‌ها را از هم کم

می‌کنیم، داریم:

$$y' \ln \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + y' = y' \Rightarrow y' = \frac{y}{x \ln \frac{x}{y}}$$