

①

جواب سوال ۱: تخمین گر نارب تخمین گر است که مقدار امید ریاضی آن برابر با مقدار واقعی

میشود. $E(\bar{x}) = s$ $\xrightarrow{\text{مثلاً}} \text{مقدار واقعی} = E(\text{تخمین گر})$

اثبات نارب بودن تخمین گر وارانس

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

مقدار واقعی وارانس $\rightarrow E(s_x^2) = \sigma^2$ اگر تخمین گر نارب است

$$E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right) = \frac{1}{n-1} \cdot E\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right) \quad ①$$

مقدار واقعی یا همان s اضافه و کم می کنیم $E(13) = E\left(\sum_{i=1}^n (x_i - s + s - \bar{x})^2\right)$ ⓧ

$$\text{ⓧ} \quad s - \bar{x} = s - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = \frac{ns}{n} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j =$$

$$\frac{1}{n} (ns - \sum_{j=1}^n x_j) \rightarrow * \text{ می بینیم } \sum_{j=1}^n s = ns * \rightarrow$$

$$\frac{-1}{n} \left(\sum_{j=1}^n x_j - \sum_{j=1}^n s \right) = \frac{-1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - s)$$

$\text{ⓧ} \Rightarrow \text{حالا اگر } \text{ⓧ} \Rightarrow E\left[\sum_{i=1}^n \left(x_i - s - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - s)\right)^2\right]$

(۲)

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow \text{از اتحادها داریم}$$

$$\sum_{i=1}^n E \left[(x_i - \bar{s}) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{s}) \right]^2 \rightarrow \text{استفاده از اتحاد}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(E(x_i - \bar{s})^2 - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n E(x_j - \bar{s}) \cdot (x_i - \bar{s}) + \frac{1}{n^2} E \left(\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{s}) \right)^2 \right)$$

چون متغیرهای x_i و x_j متغیرهای مستقل می باشند پس کواریانس آنها نیز در محاسبات

$$E(x_i - \bar{s})^2 = \sigma^2 \quad \text{نمات می شود. می دانیم کواریانس دو متغیر مستقل از هم می شود}$$

$$E(B) = \sum_{i=1}^n \left[\sigma^2 - \frac{2}{n} \sigma^2 + \frac{1}{n} \sigma^2 - \frac{2}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \text{cor}(x_i, x_j) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \text{cor}(x_j, x_k) \right] = \sum_{i=1}^n \left[\sigma^2 - \frac{1}{n} \sigma^2 \right] = n\sigma^2 - \sigma^2$$

$$E(B) = (n-1)\sigma^2 \quad (۲)$$

$$\textcircled{۲}, \textcircled{۱} \rightarrow E(\delta_x^2) = \frac{1}{n-1} E(B) = \frac{1}{n-1} \cdot (n-1)\sigma^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E(\delta_x^2) = \sigma^2} \quad \text{نماینگر ناپایدار است.}$$

(۴)

جواب سؤال ۴: ب) ۱۰۰ بار اندازه گیری ← سطح اطمینان = ۹۹٫۵ درصد

۵٫۱۰۱ ۵٫۱۴ ۵ ۵٫۰۵ ۵٫۱۲

$$\alpha = 1 - \frac{99.5}{100} = 0.005 \quad \bullet \quad \leftarrow \text{مقدار خطا}$$

روش پراختر $\Rightarrow P(S > 5) = 0.995$ نرخ جریان بیشتر از ۵ باشد

ابتدا باید متغیر تصادفی $y = \frac{\bar{x} - s}{s_x} \sqrt{n}$ را ایجاد کنیم $\Rightarrow$ آماره

$$S > 5 \rightarrow -S < -5 \rightarrow \frac{\bar{x} - S}{s_x} \sqrt{n} < \frac{\bar{x} - 5}{s_x} \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i \Rightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{5.101 + 5.14 + 5 + 5.05 + 5.12}{5} = \frac{25.41}{5} = 5.082$$

$$s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = 0.054$$

$$e = \frac{5.082 - 5}{0.054} \sqrt{5} = 2.154$$

$$n = 5 - 1 = 4, \quad \alpha = 0.005 \rightarrow e' = 4.804$$

۴

$$4120.4 > 21541 \Rightarrow e' > e$$

پایسج منفی است پس نمیتوان با سطح اطمینان ۹۹/۵ درصد نرخ جریان را

بیشتر از ۵۰۰۰۰ نفر در روز.

جواب سوال ۳: از طریق سیموردی به راحتی میتوان گفت که فرآیند غیر دوره ای بوده و کاملاً

تجدید پذیر، ergodic نبوده و خودهای ۱، ۲ و ۳ گذرا و خود ۴ تجدید پذیر مثبت می باشد.

$$f_{44}(1) = 1$$

$$\Rightarrow \Theta_{44} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{44}(n) = 1 \Rightarrow \Theta_{44} < \infty$$

$$f_{44}(n) = 0$$

$$n \neq 1$$

خود تجدید پذیر مثبت می باشد.

$$f_{44}(1) = 1 \Rightarrow \text{ج.م.م} \Leftarrow \text{خود ۴ غیر دوره ای می باشد.}$$

چون خودهای ۱، ۲ و ۳ با هم گراف متصل را تشکیل می دهند و یک فرآیند محسوب می شوند و حالت

تعیین شده برای هر کدام از آن ها به تمام آن ها نسبت داده می شود.

$$f_{11}(1) = \frac{1}{2}$$

$$f_{11}(2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

۵

$$f_{11}(3) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$$

ادامه سوال ۲

$$f_{11}(4) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$f_{11}(5) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$f_{11}(n) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \right)^{\frac{n-2}{2}} \times \frac{1}{3} \quad n \text{ زوج و بزرگتر از ۲}$$

$$f_{11}(n) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \right)^{\frac{n-3}{2}} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \quad n \text{ فرد و بزرگتر از ۳}$$

$$f_{11} = \frac{1}{2} + \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{2}{9} \right)^m \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \sum_{m=3}^{\infty} \left(\frac{2}{9} \right)^m \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$f_{11} = \frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2}{9} \right)^m \times \left[\frac{1}{12} + \frac{2}{36} \right]$$

$$f_{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2}{9} \right)^m = \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \times \frac{9}{7} = \frac{9}{14}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2}{9} \right)^m = \frac{1}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{1}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7}$$

$$f_{11} = \frac{9}{14} \quad (1)$$

گذاشته باشد. می توانیم یک عدد دیگر هم بگذاریم.

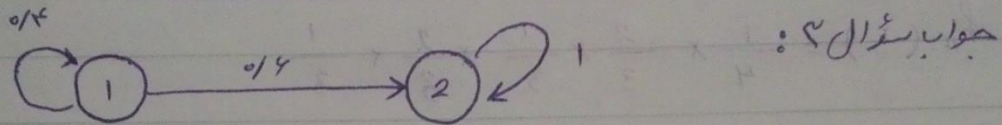
۶

تاریخ

موضوع

* نتیجه کلی $\leftarrow$ فرآیند در نودهای ۱ و ۲، کاهش ناپذیر و ergodic نمی باشد. این

نودها ~~کند~~ گداز می کنند و دوره ای می باشند اما نود ۳ تجدید پذیر نیست، غیر دوره ای می باشد.



از طریق سهدرد می توان ملاحظه کرد که با گذر زمان رفته رفته از احتمال حضور در

نود ۱ با شروع از این نود کاسته شده و بر احتمال حضور در نود ۲ افزوده می شود

پس در زمان بی نهایت (بایداری) در نود ۲ حضور خواهیم داشت

$$\pi_1(1) = 0/4$$

$$\pi_2(1) = 1 - 0/4$$

$$\pi_2(2) = (0/4)^2$$

$$\pi_2(2) = 1 - (0/4)^2$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\pi_1(n) = (0/4)^n$$

$$\pi_2(n) = 1 - (0/4)^n$$

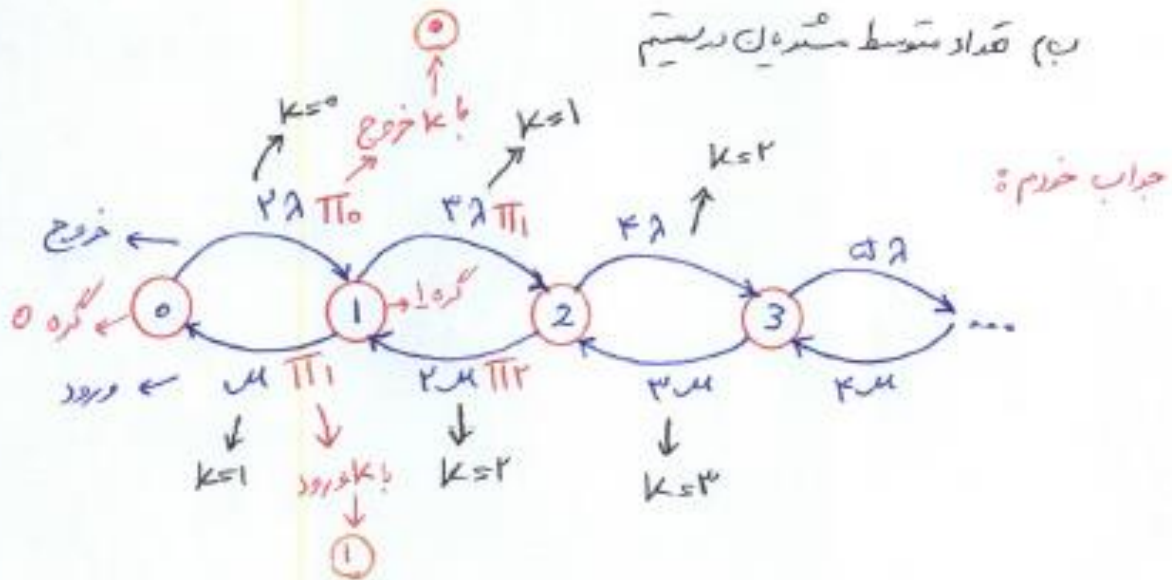
~~نتیجه~~

$$\pi(n) = \left((0/4)^n, 1 - (0/4)^n \right)$$

جواب سوال ۴: البته من به این حل شک دارم. احتمالاً اشتباه هستش.

الف) معیار π_k بر حسب مقادیر λ و μ و k و π_0 (امکان دارد k متغیر در معیار)

ب) تعداد متوسط مشتری در سیستم



۰ برای π_0 گره

$$2\lambda\pi_0 = \mu\pi_1$$

ورود به گره صفر = خروج از گره صفر

$$\Rightarrow \mu\pi_1 = 2\lambda\pi_0$$

$$\Rightarrow \pi_1 = \left(\frac{2\lambda}{\mu}\right)\pi_0 \quad (1)$$

(1.5)

دسته 1

$$-2\mu\pi_r - 2\lambda\pi_0 + 3\lambda\pi_1 + \mu\pi_1 = 0$$

$$\Rightarrow -2\lambda\pi_0 + \pi_1(3\lambda + \mu) = 2\mu\pi_r$$

$$\Rightarrow 2\mu\pi_r = \pi_1(3\lambda + \mu) - 2\lambda\pi_0$$

$$2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\pi_0$$

$$\Rightarrow 2\mu\pi_r = \frac{2\lambda}{\mu}\pi_0(3\lambda + \mu) - 2\lambda\pi_0$$

$$= \frac{4\lambda^2}{\mu}\pi_0 + \frac{2\lambda}{\mu}\mu\pi_0 - 2\lambda\pi_0$$

$$\Rightarrow 2\mu\pi_r = \frac{4\lambda^2}{\mu}\pi_0$$

$$\Rightarrow \pi_r = \frac{2\lambda^2}{\mu^2}\pi_0 \Rightarrow \boxed{\pi_r = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0} \quad (2)$$

$$(1) : \pi_1 = 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\pi_0$$

$$(2) : \pi_2 = 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\pi_0$$

⋮

$$\pi_k = (k+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi_0$$

برای آوردن این رابطه به روش

روش جداسازی متغیرها
از رابطه (1) و (2) داریم
که $\frac{\pi_k}{\pi_{k+1}} = \frac{\mu}{\lambda}$

(ب) روش جداسازی

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi_0$$

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^{k+1}) = (k+1)\rho^k$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{d}{d\rho}(\rho^{k+1}) \pi_0 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho}(k\rho^{k+1}) \pi_0 \end{aligned}$$

✓

(الف)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho} (k \rho^{k+1}) \pi_0$$

$$= \frac{d}{d\rho} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (k \rho^{k+1}) \pi_0 \right]$$

↓

که باید این بخش را می بینیم کرده تا بتوانیم از آن نسبت به ρ مشتق بگیریم

باید این کار از روش زیر استفاده می کنیم :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1 \quad \text{یا} \quad \pi \cdot e = 1$$

$$\Rightarrow \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \dots = 1$$

$$\Rightarrow \pi_0 + 2\rho\pi_0 + 3\rho^2\pi_0 + \dots = 1$$

$$\begin{cases} \pi_1 = 2\left(\frac{\rho}{\mu}\right)\pi_0 \\ \pi_1 = 2\rho\pi_0 \\ \pi_2 = 3\rho^2\pi_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi_0 (1 + 2\rho + 3\rho^2 + \dots) = 1$$

↓

$$\Rightarrow \pi_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \rho^k \right) = 1$$

↓

چون ضرب ρ از توان k علاوه می شود است.

حالا برای بهر سادگی به سمت آسانی میریم با $\sum_{k=0}^{\infty} (k \rho^k) \pi_0$ ، با π_0 و k در آن ضرب شده و با از سادگی ρ^{k+1} به ρ^k استفاده کنیم و تغییرات جزئی دهیم.

(ب)

(107)

$$\pi_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \rho^k \right) = 1$$

$$\Rightarrow \pi_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k \rho^k + \rho^k) \right) = 1$$

$$\Rightarrow \pi_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \rho^k \right) + \pi_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \right) = 1$$

$$\downarrow$$

$$1 - \rho$$

$$\Rightarrow \pi_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \rho^k \right) = 1 - \frac{\pi_0}{1-\rho}$$

که هم اکنون به رابطه ریاضی می بینیم:

توابع آن k است. پس بهر است از $\sum_{k=0}^{\infty} k \rho^{k+1}$ ، می توان از ρ کم کنیم.

نیاز به در مورد $\frac{d}{d\rho} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k \rho^{k+1}) \cdot \pi_0 \right)$ خواهیم داشت:

$$\frac{d}{d\rho} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k \rho^{k+1}) \pi_0 \right) = \frac{d}{d\rho} \left(\rho \sum_{k=0}^{\infty} k \rho^k \right) \pi_0$$

$$\downarrow$$

که در کار مستطین به نسبت برابر $1 - \frac{\pi_0}{1-\rho}$ می باشد.

$$= \frac{d}{d\rho} \left(\rho \cdot \left(1 - \frac{\pi_0}{1-\rho} \right) \right) = \frac{d}{d\rho} \left(\rho \left(\frac{1-\rho-\pi_0}{1-\rho} \right) \right)$$

۱۰۸

$$= \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{(1-\rho-\pi_0)}{1-\rho} \right) = \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho - \rho^2 - \pi_0 \rho}{1-\rho} \right)$$

$$\boxed{\frac{d}{d\rho} \text{مستخرج} = 1 - 2\rho - \pi_0}$$

$$\boxed{\frac{d}{d\rho} \text{مستخرج} = -1}$$

$$\Rightarrow = \frac{(1-2\rho-\pi_0)(1-\rho) - (-1)(\rho - \rho^2 - \pi_0 \rho)}{(1-\rho)^2}$$

$$= \frac{1 - \cancel{\rho} - 2\rho + 2\rho^2 - \pi_0 + \cancel{\pi_0 \rho} + \cancel{\rho} - \rho^2 - \cancel{\pi_0 \rho}}{(1-\rho)^2}$$

$$= \frac{+\rho^2 - 2\rho + 1 - \pi_0}{(1-\rho)^2} = \frac{(\rho-1)^2 - \pi_0}{(\rho-1)^2}$$

$$= \frac{(\rho-1)^2}{(\rho-1)^2} - \frac{\pi_0}{(\rho-1)^2} \Rightarrow L = 1 - \frac{\pi_0}{(\rho-1)^2}$$

$$\Rightarrow L = 1 - \frac{\pi_0}{\left(\frac{\lambda}{\mu} - 1\right)^2} = 1 - \frac{\pi_0}{\left(\frac{\lambda - \mu}{\mu}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{L = 1 - \frac{\pi_0 \mu^2}{(\lambda - \mu)^2}}$$

$$\pi(0) = (1, 0, 0)$$

جواب سوال ۵:

$$\pi(2) = ?$$

$$\pi(\infty) = ?$$

$$\pi_2(n) ; \pi(\pi_1(n), \pi_2(n), \pi_3(n))$$



$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فرانک مارکوف کسیر

$$\pi(2) \Rightarrow \pi(n+1) = \pi(n) \cdot Q$$

$$\pi(1) = \pi(0) \cdot Q \Rightarrow \pi(1) = (1, 0, 0) \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi(1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right)$$

$$\pi(2) = \pi(1) \cdot Q \Rightarrow \pi(2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right) \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi(2) = \left(\frac{11}{18}, \frac{2}{9}, \frac{1}{6} \right) = \left(\frac{11}{18}, \frac{4}{18}, \frac{3}{18} \right)$$

$$\boxed{\pi(2) = \left(\frac{11}{18}, \frac{4}{18}, \frac{3}{18} \right)}$$

①

$$\pi(\infty) = ? \quad \text{حالت پایدار} \quad \pi = \pi \cdot Q, \quad \sum_{i=1}^n \pi_i = 1$$

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{2}{3} \pi_1 + \frac{1}{2} \pi_2 = \pi_1 \Rightarrow \cancel{\frac{1}{3} \pi_1 + \frac{1}{2} \pi_2 = \pi_1}$$

$$\frac{1}{3} \pi_1 = \pi_2 \Rightarrow \boxed{\pi_1 = 3\pi_2} \quad (\Rightarrow \cancel{\pi_1 = 3\pi_2})$$

$$\frac{1}{2} \pi_2 + \cancel{\pi_3} = \cancel{\pi_3} \Rightarrow \frac{1}{2} \pi_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_2 = 0}$$

$$\frac{1}{3} \pi_1 = \frac{1}{2} \pi_2 \Rightarrow \pi_1 = \frac{3}{2} \pi_2 \Rightarrow \boxed{\pi_1 = 0}$$

$$\sum_{i=1}^n \pi_i = 1 \Rightarrow \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \Rightarrow \boxed{\pi_3 = 1}$$

$$\pi(\infty) = (0, 0, 1)$$

$\pi_2 \leftarrow$ از π_2 تبدیل استفاده می کنیم

$$\phi_z(z) = \pi(0) (I - Qz)$$

$$\text{تبدیل } z \Rightarrow \phi(z) = \pi(0)(I - QZ)^{-1}$$

$$\phi(z) = (1, 0, 0) \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3}z & \frac{z}{3} & 0 \\ \frac{z}{2} & 0 & \frac{z}{2} \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \right]^{-1}$$

$$\phi(z) = (1, 0, 0) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 - \frac{2}{3}z & -\frac{z}{3} & 0 & \\ -\frac{z}{2} & 1 & -\frac{z}{2} & \\ 0 & 0 & 1-z & \end{array} \right]^{-1} \quad 3 \times 3$$

$$\phi(z)_{1 \times 3} = (\overset{A_{11}^{-1}}{\phi_1(z)}, \overset{A_{12}^{-1}}{\phi_2(z)}, \overset{A_{13}^{-1}}{\phi_3(z)})$$

با استفاده از روش ساروس مقدار دترمینان ماتریس A را ابتدا محاسبه کنیم.

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{2}{3}z & -\frac{z}{3} & 0 \\ -\frac{z}{2} & 1 & -\frac{z}{2} \\ 0 & 0 & 1-z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{دترمینان } A &= \left[\left(1 - \frac{2}{3}z\right)(1)(1-z) + 0 + 0 \right] - \left[0 + 0 + \left(-\frac{z}{3}\right)\left(-\frac{z}{2}\right)(1-z) \right] \\
 &= 1 - \frac{2}{3}z - z + \frac{2}{3}z^2 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{6}z^3 = \frac{6 - 4z - 6z + 4z^2 - z^2 + z^3}{6} \\
 \text{Det}(A) &= \frac{z^3 + 3z^2 - 10z + 6}{6} \\
 \text{Det}(A)^{-1} &= \frac{6}{z^3 + 3z^2 - 10z + 6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_2(z) &= (A^{-1})_{12} \quad (A^{-1})_{12} = (\det(A))^{-1} (-1)^{1+2} \cdot B_{21} \\
 B_{21} &= \begin{vmatrix} 1 - \frac{2}{3}z & -\frac{z}{3} & 0 \\ \frac{z}{2} & 1 & -\frac{z}{2} \\ 0 & 0 & 1-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{z}{3} & 0 \\ 0 & 1-z \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}z(1-z)
 \end{aligned}$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$(A^{-1})_{12} = \frac{\cancel{2}^2}{(\cancel{1-z})(-z^2-4z+6)} \cdot \frac{z(1-z)}{\cancel{3}_1} = \frac{-2z}{z^2+4z-6}$$

$$\Delta = (4)^2 - 4(1)(-6) = 4. \quad z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4 \times 10}}{2} \begin{cases} z_1 = -2 + \sqrt{10} \\ z_2 = -2 - \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\phi_2(z) = \frac{-2z}{z^2+4z-6} = \frac{A}{(z-z_1)} + \frac{B}{(z-z_2)} = \frac{A(z-z_2) + B(z-z_1)}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

$$\Rightarrow Az - Az_2 + Bz - Bz_1 = -2z \Rightarrow \begin{cases} z(A+B) = -2z & \textcircled{1} \\ -Az_2 - Bz_1 = 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \rightarrow A + B = -2 \Rightarrow \boxed{A = -2 - B}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{1} \rightarrow -(-2-B)z_2 - Bz_1 = 2z_2 + Bz_2 - Bz_1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جایگزینی } z_2 \text{ و } z_1} 2(-2-\sqrt{10}) + B(-2-\sqrt{10}) - B(-2+\sqrt{10}) =$$

$$-4 - 2\sqrt{10} - 2B - B\sqrt{10} + 2B - B\sqrt{10} = -4 - 2\sqrt{10} - 2B\sqrt{10} = 0$$

$$\Rightarrow -2B\sqrt{10} = 4 + 2\sqrt{10} \Rightarrow B = \frac{4 + 2\sqrt{10}}{-2\sqrt{10}} = \frac{\cancel{2}^2}{\cancel{-2}\sqrt{10}} + \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{-2}\sqrt{10}}$$

$$\boxed{B = \frac{-2}{\sqrt{10}} - 1} \quad \textcircled{*}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\textcircled{*}, \textcircled{1}, \textcircled{1} \rightarrow A = -2 + \frac{2}{\sqrt{10}} + 1 = \frac{2}{\sqrt{10}} - 1$$

$$A = \frac{2}{\sqrt{10}} - 1$$

$$\phi_2(z) = \frac{\frac{2}{\sqrt{10}} - 1}{z - z_1} - \frac{\frac{2}{\sqrt{10}} + 1}{z - z_2} = \left(\frac{2}{\sqrt{10}} - 1 \right) \left(\frac{1}{z - z_1} \right) -$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{10}} + 1 \right) \left(\frac{1}{z - z_2} \right) = \left(\frac{2}{\sqrt{10}} - 1 \right) \left(\frac{-1}{z_1 - z} \right) - \left(\frac{2}{\sqrt{10}} + 1 \right) \left(\frac{-1}{z_2 - z} \right)$$

$$\phi_2(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{10}} + 1 \right) \underbrace{\left(\frac{1}{z_2 - z} \right)}_{C_1} - \left(\frac{2}{\sqrt{10}} - 1 \right) \underbrace{\left(\frac{1}{z_1 - z} \right)}_{C_1}$$

$$C_1 = \frac{1}{z_2^{n+1}} = z_2^{-n-1}$$

$$C_2 = \frac{1}{z_1^{n+1}} = z_1^{-n-1}$$

مطابق جدول ضرایب داریم:

$$\pi_2(n) = \left(\frac{2}{\sqrt{10}} + 1 \right) z_2^{-n-1} - \left(\frac{2}{\sqrt{10}} - 1 \right) z_1^{-n-1}$$

$$\phi_3(z) = 1 - (\phi_2(z) + \phi_1(z))$$

$$\phi_3(z) = 1 - \left(\frac{3}{\sqrt{10}} z_1^{-n-1} - \frac{3}{\sqrt{10}} z_2^{-n-1} + \left(\frac{2}{\sqrt{10}} + 1 \right) z_2^{-n-1} - \left(\frac{2}{\sqrt{10}} - 1 \right) z_1^{-n-1} \right)$$

جواب سوال ۴ :

الف) زنجیره محدود، تجدیدپذیر مثبت، کاهش ناپذیر

ج) خود صفر : $\lambda \pi_0 = \mu \pi_1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \pi_0 \Rightarrow \boxed{\pi_1 = f \pi_0}$

خود یک : $(\lambda + \mu) \pi_1 = \lambda \pi_0 + \mu \pi_2 \Rightarrow \pi_2 = f^2 \pi_0$

خود دوم : $\Rightarrow \pi_3 = f^3 \pi_0$

خود سوم : $\Rightarrow \pi_4 = f^4 \pi_0$

$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \Rightarrow \pi_0 + f \pi_0 + f^2 \pi_0 + f^3 \pi_0 + f^4 \pi_0 = 1$

$\pi_0 (1 + f + f^2 + f^3 + f^4) = 1 \Rightarrow \boxed{\pi_0 = \frac{1}{1 + f^2 + f^3 + f^4}}$

$\pi = \left(\frac{1}{1 + f^2 + f^3 + f^4}, f \pi_0, f^2 \pi_0, f^3 \pi_0, f^4 \pi_0 \right)$

ج) ~~این حالت را نمی توانیم داشته باشیم~~
از روابط صف داریم : $\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^K R_n} = \frac{1-f}{1-f^{K+1}}$

$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^4 R_n} = \frac{1-f}{1-f^{4+1}} = \frac{1-f}{1-f^5} \quad (\lambda \neq \mu)$

$\Rightarrow \pi_1 = \left(\frac{1-f}{1-f^5} \right) f, \pi_2 = \left(\frac{1-f}{1-f^5} \right) f^2, \pi_3 = \left(\frac{1-f}{1-f^5} \right) f^3$

$\pi_4 = \left(\frac{1-f}{1-f^5} \right) f^4$

$\boxed{\pi_n = \left(\frac{1-f}{1-f^{K+1}} \right) f^n}$

ج) ۱) بسطی ندارد - چون فرآیندهای صف
فرآیندهای ergodic باشند و شروع
از هر نقطه صف به جواب یکسان خواهیم
رسید

سوال ۷: جزئی مباحث درسی نبود.