فصل پنجم

توزیع‌های احتمال خاص

مقدمه

هدف این فصل معرفی چند توزیع احتمال خاص از نوع گسسته و پیوسته با ارائهٔ الگو می‌باشد. با ارائهٔ فرم تابع چگالی احتمال هر توزیع، چند ویژگی توزیع نیز مورد بحث قرار می‌گیرد.

5-1-1 تابع احتمال یکنواخت

متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال یکنواخت با پارامتر k است اگر تابع احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{k} \qquad x = 1,2,\ldots,k$$

الگو: جعبه‌ای شامل صفحه کلید با شماره‌های 1 تا k است. اگر هم شانس بودن را برای همهٔ شماره‌ها یکسان در نظر بگیریم و تعریف کنیم و اگر:

X، شمارهٔ صفحه کلید خارج شده باشد، آنگاه X دارای تابع چگالی احتمال یکنواخت گسسته است. با توجه به تعریف امید ریاضی و واریانس در فصل چهارم، میانگین و واریانس این توزیع محاسبه می‌شود.

$$E(X)=\sum_{x=1}^{k} x\,f(x)=\sum_{x=1}^{k} x\frac{1}{k}=\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{k} x=\frac{k+1}{2}$$

برای محاسبهٔ واریانس $E(X^2)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$E(X^2)=\sum_{x=1}^{k} x^2 f(x)=\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{k} x^2=\frac{1}{k}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{(k+1)(2k+1)}{6}-\frac{(k+1)^2}{4}=\frac{(k+1)(k-1)}{12}$$

مثال 5-1 انتخاب یک ماه بخصوص از 12 ماه سال دارای توزیع یکنواخت با $k=12$ است.

$$f(x)=\frac{1}{12}\qquad x=1,2,\ldots,12$$

5-1-2 تابع احتمال برنولی

آزمایش‌هایی را در نظر بگیرید که دارای دو پیامد ممکن باشند و احتمال «موفقیت» و «شکست» هر پیامدی از آزمایشی به آزمایش دیگر ثابت باشد و ضمناً آزمایش‌ها مستقل از یکدیگر انجام شوند. در این صورت به هر یک از آزمایش‌های مزبور یک آزمایش برنولی گویند. احتمال موفقیت در یک آزمایش را با p و احتمال عدم موفقیت را با $1-p$ یا q نشان می‌دهیم. واضح است که $p+q=1$ می‌باشد.

متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال برنولی با پارامتر (شانس) p است، اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f(x)=p(X=x)=p^x(1-p)^{1-x}\qquad x=0,1$$

الگو: جعبه‌ای شامل صفحه کلیدهایی از نوع دست دوم و نو با نسبت‌های $1-p$ و p است. یک صفحه کلید به تصادف از جعبه خارج کنیم و اگر متغیر X را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{اگر صفحه کلید خارج شده دست دوم باشد} \\ 1 & \text{اگر صفحه کلید خارج شده نو باشد} \end{cases}$$

آنگاه X دارای تابع برنولی است.

مثال 5-2 پرتاب یک سکهٔ سالم را در نظر بگیرید. آیا این آزمایش یک آزمایش برنولی است؟

اگر آمدن شیر را موفقیت (p) بنامیم، آمدن خط شکست (q) خواهد بود و چون سکه سالم است داریم:

$$p = \frac{1}{2} \quad , \quad q = \frac{1}{2}$$

از آنجا که این آزمایش مستقل است و دارای دو نتیجه است؛ (آمدن شیر و یا خط)، لذا این آزمایش برنولی محسوب می‌شود.

5-1-3 تابع احتمال دوجمله‌ای

$$f(x) = p(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

الگو: جعبه‌ای شامل صفحه کلیدهای از نوع دست دوم و نو با نسبت‌های p و $1-p$ است. از این جعبه در شرایط یکسان و به تصادف n صفحه کلید یکی یکی و با جایگذاری خارج می‌کنیم و اگر تعریف کنیم:

X، تعداد صفحه کلیدهای نو خارج شده، آنگاه X دارای توزیع دوجمله‌ای است.

با این توضیح برای مثال فوق داریم:

$X=۳ \quad , \quad n=۵ \quad , \quad p=۰/۲۵ \quad , \quad q=۰/۷۵$

بنابراین در پاسخ به 5 سؤال، احتمال داشتن سه جواب صحیح برابر است با: 0/08789.

تابع احتمال مربوط به این مسئله با استفاده از فرمول دوجمله‌ای به شرح جدول زیر است:

جدول 5-1. تابع احتمال دوجمله‌ای برای $n=۵$ و $p=۰/۲۵$

تعداد جواب‌های درست X	احتمال مربوط $p(x)$
0	0/2373
1	0/3955
2	0/2637
3	0/0879
4	0/0146
5	0/0010
	1

مثال 5-4 تعداد سؤالاتی که لازم است یک کاربر رایانه پاسخ گوید 100 سؤال چهارجوابی است. اگر او به تصادف پاسخ گوید، مطلوبست:

1) احتمال اینکه دقیقاً به 50 سؤال پاسخ صحیح دهد.

2) احتمال اینکه به بیش از 50 سؤال پاسخ صحیح دهد.

$$n=100 \quad , \quad p=\frac{1}{4} \quad , \quad f(x)=\binom{100}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{100-x} \qquad x=\circ,1,\ldots,100$$

$$f(50)=\binom{100}{50}\left(\frac{1}{4}\right)^{50}\left(\frac{3}{4}\right)^{50}$$

$$P(X>50)=1-P(X\le 50)=1-F(50)=1-\sum_{t=\circ}^{50}\binom{100}{t}\left(\frac{1}{4}\right)^{t}\left(\frac{3}{4}\right)^{100-t}$$

ویژگی‌های توزیع دوجمله‌ای

1) $\sum_{x=\circ}^{n}\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}=\left[p+(1-p)\right]^{n}=1$.

2) دارای نمای منحصر به فرد است.

3) برای $n=1$، تابع چگالی احتمال دوجمله‌ای همان تابع احتمال برنولی است.

4) دارای میانگین np و واریانس $np(1-p)$ است.

5) $f(x)=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{x}f(\circ)$.

6) برای مقادیر مختلف n و p می‌توان از جدول ضمیمهٔ (1) مقدار $F(x)$ را محاسبه کرد.

5-1-7 تابع احتمال پواسن

نوعی متغیر تصادفی گسسته است که کاربردهای زیادی دارد. توزیع احتمال این متغیر مدل خوبی برای داده‌هایی است که معرف تعداد وقوع پیشامدهای معین در یک واحد زمان یا مکان هستند. لذا، متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال پواسن با پارامتر λ است اگر تابع احتمال آن به صورت زیر باشد.

$$f(x)=p(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}\qquad x=\circ,1,2,\ldots$$

مثال 5-9 فرض کنید در سازمانی تعداد رایانه‌هایی که در طول یک سال از رده خارج می‌شوند دارای توزیع پواسن با $\lambda=۳$ باشد. مطلوبست:

الف) احتمال اینکه یک رایانه خارج شود.

ب) حداکثر دو رایانه خارج شود.

ج) در طول یک سال از 200 رایانه چند رایانه از رده خارج می‌شود؟

$$f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=\frac{e^{-3}3^x}{x!} \qquad x=\circ,1,2,\ldots$$

$$f(1)=\frac{e^{-3}\cdot 3}{1}=0/149$$

$$P(X\leq 2)=f(\circ)+f(1)+f(2)=0/05+0/149+0/224=0/423$$

ج) حدوداً 30 رایانه، $200\times 0/149=29/8$

ویژگی‌های توزیع پواسن

1) $\sum_{x=\circ}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=\circ}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}=1$

2) دارای نمای منحصر به فرد است.

3) دارای میانگین λ و واریانس λ است.

4) مقادیر مختلف λ را می‌توان از جدول پیوست (2) مقدار $F(x)$ را محاسبه کرد.

نکته 1. توزیع پواسن می‌تواند در بعضی مواقع به عنوان تقریبی برای توزیع دوجمله‌ای مورد استفاده قرار گیرد. شرایط خوب برای تقریب خوب به شرح زیر است:

1) در آزمایش دوجمله‌ای n بزرگ باشد، (مثلاً $n>۲۰$).

2) p به قدری کوچک باشد که $(np\leq ۵)$.

مثال 5–10 فرض کنید که x یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای $n=۵۰۰$ و $p=۰/۰۰۱$ باشد و مایل باشیم که $P(X=۴)$ را به دست آوریم. با استفاده از توزیع دوجمله‌ای خواهیم داشت:

$$P(X=۴)=\left(\frac{۵۰۰!}{۴!۴۹۶!}\right)(۰/۰۰۱)^{۴}(۰/۹۹۹)^{۴۹۶}$$

واضح است که در محاسبهٔ این عبارت به مشکل برمی‌خوریم. در اینجا می‌توانیم از تابع احتمال پواسن به عنوان تقریب خوبی برای تابع احتمال دوجمله‌ای استفاده کنیم. مقدار متوسط x عبارت است از:

$\mu = np = ۵۰۰۰ \times ۰/۰۰۱ = ۵$

چون شرایط (1 و 2) برقرار است، می‌توان فرض کرد که x دارای توزیع پواسن با پارامتر $\mu = ۵$ است؛ لذا:

$$\frac{e^{-۵} ۵^{۴}}{۴!} = \frac{۰/۰۰۶۷ \times ۶۲۵}{۲۴} = ۰/۱۷۴۵$$

.

2-2-5 تابع نرمال

توزیع نرمال یکی از مهم‌ترین توزیع‌های احتمالی پیوسته در نظریهٔ احتمالات است. علت نام‌گذاری و همچنین اهمیت این توزیع، هم‌خوانی بسیاری از مقادیر حاصل شده، هنگام نوسان‌های طبیعی و فیزیکی پیرامون یک مقدار ثابت با مقادیر حاصل از این توزیع است. دلیل اصلی این پدیده، نقش توزیع نرمال در قضیهٔ حد مرکزی است که بعداً به آن خواهیم پرداخت. در قضیهٔ حد مرکزی نشان داده می‌شود که تحت شرایطی، مجموع مقادیر حاصل از متغیرهای مختلف که هر کدام میانگین و پراکندگی متناهی دارند، با افزایش تعداد متغیرها، دارای توزیعی بسیار نزدیک به توزیع نرمال است. این قانون که تحت شرایط و مفروضات طبیعی نیز برقرار است، سبب شده که برایند نوسان‌های مختلف تعداد زیادی از متغیرهای ناشناخته، در طبیعت به صورت توزیع نرمال آشکار شود. به عنوان مثال، با اینکه متغیرهای زیادی بر میزان خطای اندازه‌گیریِ یک کمیت اثر می‌گذارند، (مانند خطای دید، خطای وسیلهٔ اندازه‌گیری، شرایط محیط و نظایر آن) اما با اندازه‌گیری‌های متعدد، برایند این خطاها همواره دارای توزیع نرمال است که حول مقدار ثابتی پراکنده شده است. مثال‌های دیگری از این نوسان‌های طبیعی، توزیع طول قد، توزیع وزن یا توزیع بهرهٔ هوشی افراد است.

این توزیع گاهی به دلیل استفادهٔ کارل فردریک گاوس از آن در کارهای خود با نام توزیع یا تابع گوسی (گاوسی) نامیده می‌شود؛ همچنین به دلیل شکل تابع احتمال این توزیع، با نام انحنای زنگوله‌ای (زنگدیس) نیز معروف است. زمانی معتقد بودند که پدیده‌های واقعی باید دارای این توزیع باشد وگرنه در داده‌ها و روش گردآوری آن باید تردید کرد؛ اما به تدریج با بررسی‌های بیشتر این فکر مشخص شد و توزیع‌های دیگری که در فصل قبل بعضی از آنها را بررسی کردیم، مطرح شد. با این حال توزیع نرمال نقش اساسی در آمار دارد و دارای کاربردهای وسیعی است. زیرا اولاً خیلی از پدیده‌های طبیعی دارای این توزیع هستند؛ ثانیاً، شکل حدی بسیاری از توزیع‌های دیگر نیز نرمال است.

الف- تابع چگالی توزیع نرمال. متغیر تصادفی نرمال یکی از توزیع‌های مهم آماری در حالت پیوسته است. متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 است، اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد.

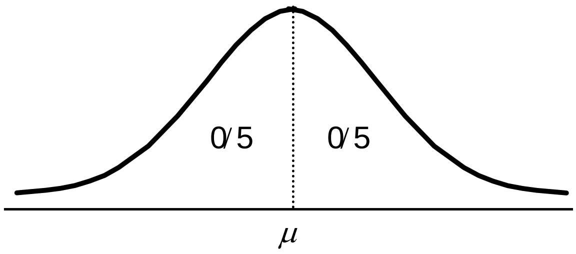
$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad \begin{array}{c} -\infty < x < \infty \\ -\infty < \mu < \infty \\ \sigma > \circ \end{array}$$

μ و σ^2 پارامترهای توزیع نرمال هستند.

ویژگی‌های توزیع نرمال

- این توزیع نسبت به محور $y=\mu$ دارای تقارن است.
- سطح زیر منحنی نرمال بالای محور xها برابر 1 است؛ به بیان دیگر:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$



- $P[X \leq \mu] = P[X \geq \mu] = 0/5$
- به ازای تمام مقادیر x، مقدار $f(x)$ بزرگتر یا مساوی صفر است؛ به بیان دیگر به ازای تمام xها، $f(x) \geq ۰$ خواهد بود.
- حداکثر مقدار تابع در $X = \mu$ حاصل می‌شود.
- برای $\mu = ۰$ و $\sigma^2 = 1$، توزیع نرمال را توزیع نرمال استاندارد گویند.
- در این توزیع میانگین، میانه و مد با هم برابرند.

ب- توزیع نرمال استاندارد. تابع چگالی احتمال نرمال به گونه‌ای است که محاسبهٔ احتمال مورد نظر از آن، به این دلیل که نمی‌توان از این تابع انتگرال گرفت، کار مشکلی است؛ لذا جدولی تهیه شده که فقط برای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک قابل استفاده است. حال اگر بتوانیم به جای متغیر $X \sim N(\mu, \sigma)$ از متغیر نرمالی استفاده کنیم که میانگین آن صفر و واریانس آن یک باشد، می‌توانیم برای پیدا کردن احتمال مورد نظر به جدول پیوست (3) مراجعه کنیم.

بر این اساس متغیر تصادفی Z دارای توزیع نرمال استاندارد است، اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد.

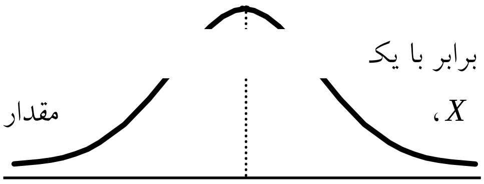
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad -\infty < Z < \infty$$

همان طور که ملاحظه می‌کنید این توزیع فاقد پارامتر است و برای راحتی متغیر نرمال استاندارد را با Z نمایش می‌دهند. در حقیقت Z همان متغیر X است با میانگین صفر و واریانس یک.

$$f\ (z\ ) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad -\infty < Z < \infty$$

ویژگی‌های توزیع نرمال استاندارد

1) نمودار یا شکل تابع چگالی نرمال استاندارد به صورت زیر است:



2) مساحت زیر منحنی برابر با یک

3) به ازای تمام مقادیر X، مقدار $f(x)$ بزرگتر یا مساوی صفر است.

4) حداکثر مقدار تابع در $X = \mu$ حاصل می‌شود.

5) منحنی نسبت به محور yها یا $Z = ۰$ (حول میانگین) متقارن است. بنابراین مساحت کمتر از صفر و بیشتر از صفر برابر با 0/5 است.

6) امید ریاضی و واریانس X به ترتیب μ و $\sigma^۲$ است. به بیان دیگر:

7) در این توزیع میانگین، میانه و مد با هم برابرند.

مثال 5-14 اگر متغیر Z دارای توزیع نرمال استاندارد باشد احتمالات زیر را حساب کنید.

$$P(Z > ۰) \quad , \quad P(۰ < Z < \infty) \quad , \quad P(۱ < Z < ۳)$$
$$P(-۲ < Z > ۰) \quad , \quad P(-۱/۹۶ < Z < ۱/۹۶) \quad , \quad P(Z < ۱/۶۴)$$

باتوجه به جدول ضمیمهٔ (3)

$$P(Z > ۰) = P(Z \leq ۰) = ۱ - ۰/۵ = ۰/۵$$
$$P(۰ < Z < \infty) = \int_{۰}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{۱}{۲}z^۲} dz = F(+\infty) - F(۰) = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$
$$P(۱ < Z < ۳) = P(Z < ۳) - P(Z < ۱) = F(۳) - F(۱) = ۰/۹۹۸۷ - ۰/۸۴۱۳ = ۱۵۷۴$$

$$P(-۲ < Z < ۰) = P(Z < ۰) - P(Z < -۲)$$
$$= P(Z < ۰) - P(Z > ۲)$$
$$= P(Z < ۰) - [۱ - P(Z < ۲)]$$
$$= P(Z < ۰) + P(Z < ۲) - ۱$$
$$= ۰/۵ + ۰/۹۷۷۲ - ۱ = ۰/۴۷۷۲$$

$$P(-۱/۹۶ < Z < ۱/۹۶) = P(Z < ۱/۹۶) - P(Z < -۱/۹۶)$$
$$= P(Z < ۱/۹۶) - P(Z > ۱/۹۶) = P(Z < ۱/۹۶) - [۱ - P(Z < ۱/۹۶)]$$
$$= ۲P(Z < ۱/۹۶) - ۱ = ۲F(۱/۹۶) - ۱ = ۲(۰/۹۷۵۰) - ۱ = ۰/۹۵$$

$$P(Z > ۱/۶۴) = ۱ - P(Z < ۱/۶۴) = ۱ - F(۱/۶۴) = ۱ - ۰/۹۴۹۵ = ۰/۰۵۰۵$$

در آمار توزیع نرمال را با نماد $(N_۲)\mu,\sigma$ و نرمال استاندارد را با $N(۰,۱)$ نشان می‌دهند و برای استفاده از جدول نرمال استاندارد برای متغیر تصادفی X با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ همواره تبدیل زیر را داریم.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

با توجه به تبدیل یا رابطهٔ بین X و Z، می توان احتمال مربوط به X را در هر فاصله با استفاده از جدول نرمال استاندارد محاسبه کرد. برای مثال:

$$P[a < X < b] = P\left[\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right]$$
$$= P\left[\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right]$$
$$= P\left(Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) - P\left(Z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= F\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

مثال 5-15 اگر مقدار اشعه‌ای خاص که کاربر رایانه ممکن است در هر ساعت کاری دریافت کند دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu = 4/35$ و واریانس $\sigma^2 = 0/49$ باشد، مطلوبست:

الف) مابین 4 و 5 واحد باشد.

ب) حداقل 5/7 واحد باشد.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} = \frac{1}{0/7\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\times 0/49}(x-4/35)^2}$$

$$P(4 < X < 5) = \int_4^5 \frac{1}{0/7\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\times 0/49}(x-4/35)^2} dx$$

محاسبهٔ انتگرال وقت‌گیر است. اما با تبدیل X به Z داریم:

$$P(4 < x < 5) = P\left[\frac{4-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{5-\mu}{\sigma}\right]$$

$$= P\left[\frac{4-4/35}{0/7} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{5-4/35}{0/7}\right]$$

$$= P\left[-0/5 < Z < 0/93\right] = P(Z < 0/93) - P(Z < -0/05)$$

$$= P(Z < 0/93) - P(Z > -0/05) = P(Z < 0/93) + P(Z < 0/05) - 1$$

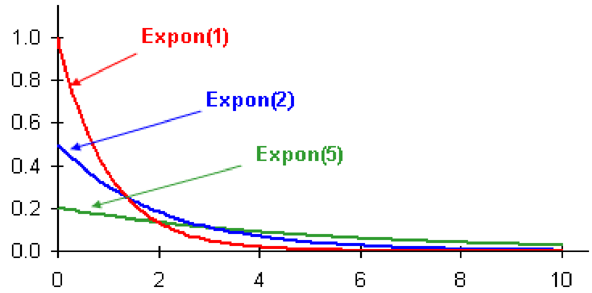
$$= 0/8238 + 0/5199 - 1 = 0/3437$$

$$P(X \ge 5/7) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{5/7-4/35}{0/7}\right) = P(Z > 1/93)$$

$$= 1 - P(Z < 1/93) = 1 - F(1/93) = 1 - 0/9732 = 0/0268$$

5-2-4 تابع چگالی توزیع نمایی

فرض کنید نمودار چندضلعی مجموعه‌ای از داده‌ها، مشابه منحنی‌هایی باشد که در شکل زیر رسم شده‌اند، در این صورت از توزیع نمایی برای مدل‌سازی داده‌ها استفاده می‌کنیم.



متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال نمایی با پارامتر θ است، اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \qquad x > 0, \quad \theta > 0$$

توزیع نمایی کاربردهای مهمی دارد. از جمله در مدل‌های صف‌بندی، می‌توان نشان داد که زمان انتظار مابین ورودی‌های متوالی از توزیع نمایی پیروی می‌کند.

ویژگی‌های توزیع نمایی

1) $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$

2) فاقد حافظه است. $P\left[X > s + t \middle| X > t\right] = P(X > s)$

3) دارای میانگین θ و واریانس θ^2 است.

4) اگر u دارای توزیع یکنواخت روی $(0,1)$ باشد آنگاه $-\ln(u)$ دارای توزیع نمایی با $\theta = 1$ است.

مثال 5-17 مدت زمانی که رایانه‌ای بدون نیاز به تعمیر کار کند، متغیری تصادفی نمایی با $\theta = 4$ سال است. مطلوبست:

الف) احتمال اینکه رایانه‌ای در کمتر از 3/5 سال نیازی به تعمیر نداشته باشد.

ب) حداقل 4/5 سال نیاز به تعمیر نداشته باشد.

ج) بین 2 الی 4 سال نیازی به تعمیر نداشته باشد.

$$f(x) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}} \qquad x > \circ$$

$$P(X < 3/5) = \int_{-\infty}^{3/5} \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx = \int_{-\infty}^{3/5} \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx = F(3/5)$$

$$= 1 - e^{-\frac{3/5}{4}} = 0/583$$

$$P(X < 4/5) = 1 - P(X \le 4/5) = 1 - F(4/5) = e^{-\frac{4/5}{4}} = 0/325$$

$$P(2 < X < 4) = P(X < 4) - P(X < 2) = F(4) - F(2)$$

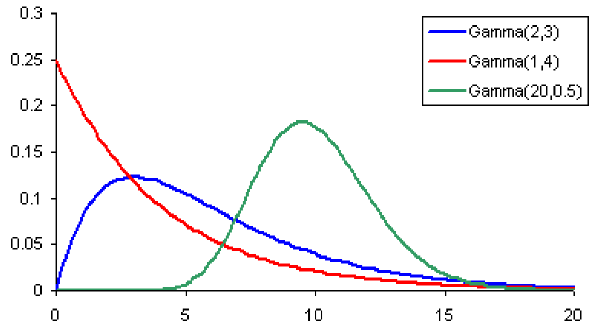
$$= -e^{-1} + e^{-\frac{1}{2}} = 0/2387$$

5-2-5 تابع چگالی توزیع گاما

متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال گاما با پارامترهای α و β است، اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}} \qquad x > \circ, \quad \alpha > \circ, \quad \beta > \circ$$

نمودار چگالی توزیع برای ترکیب‌های مختلف α و β در شکل زیر رسم شده است.



حالت خاص: برای $\alpha=1$، $\beta=\theta$ توزیع گاما به توزیع نمایی تبدیل می‌شود. تابع چگالی احتمال گاما با توجه به ویژگی تابع گاما تعریف می‌شود. چون:

$$\int_{\circ}^{\infty} f(x)dx = \int_{\circ}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}dx = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_{\circ}^{\infty}(\beta u)^{\alpha-1}e^{-u}\beta du$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\circ}^{\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}du = 1$$

یا

$$\Gamma(\alpha) = \int_{\circ}^{\infty} u^{\alpha-1}e^{-u}\ du$$

ویژگی‌های توزیع گاما

1) $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}dx = 1 - \sum_{i=\circ}^{\alpha-1}\frac{1}{i!}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{i}e^{-\frac{x}{\beta}}$

2) دارای میانگین $\alpha\beta$ و واریانس $\alpha\beta^{۲}$ است.

مثال 5-18 در یک شهر مصرف برق روزانه دارای توزیع گاما با $\alpha=3$ و $\beta=2$ است. اگر ظرفیت روزانه 12 میلیون کیلووات ساعت باشد. احتمال اینکه برق موجود برای یک روز کافی باشد چقدر است؟

$$P\left(X \le 12\right) = F\left(12\right) = 1 - \sum_{i=0}^{3} \frac{1}{i\,!}\left(\frac{12}{2}\right) e^{-\frac{12}{2}}$$
$$= 1 - e^{-6}\left[1 + 6 + 18 + 36\right] = 0/849$$

6-2-5 تابع چگالی احتمال کی‌دو

متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال کی‌دو با پارامتر r است، اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f\left(x\right) = \frac{1}{2^{\frac{r}{2}}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}\, x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \qquad x > \circ , \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

توزیع کی‌دو حالت خاص توزیع گاما است $\left(\alpha = \frac{r}{2}\, , \, \beta = 2\right)$.

ویژگی‌های توزیع کی‌دو

1) r را درجهٔ آزادی توزیع گویند.

2) دارای میانگین r و واریانس $۲r$ است.

3) $$F\left(x\right) = P\left(X \le x\right) = 1 - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{i\,!}\left(\frac{x}{2}\right)^{i} e^{-\frac{x}{2}}$$

4) مقادیر مختلف $F(x)$ را می‌توان برای مقادیر مختلف r از جدول ضمیمه (5) بدست آورد.

مثال 5-19 باتوجه به جدول ضمیمهٔ (5) احتمالات زیر را حساب کنید.

الف) احتمال $P(X > ۵/۸۹۲)$ با $r = ۱۳$

ب) احتمال $P(X < ۳۴/۱۷۰)$ با $r = ۲۰$

ج) $P(۶/۲۶۲۲ < X < ۲۲۴/۹۹۶)$ با $r = ۱۵$

د) $P(X > x_\circ) = ۰/۰۲۵$ با $r = ۲۵$

با توجه به درجهٔ آزادی در ستون اول و عدد 5/892، $P(X > ۵/۸۹۲) = ۰/۹۵$.

$$P(X < ۳۴/۱۷۰) = ۱ - P(X > ۳۴/۱۷۰) = ۱ - ۰/۰۵ = ۰/۹۵$$

$$\begin{aligned} P(۲۲۴/۹۹۶ < X < ۶/۲۶۲۲) &= P(X < ۲۴/۹۹۶) - P(X < ۶/۲۶۲) \\ &= ۱ - P(X \geq ۲۴/۹۹۶) - ۱ + P(X \geq ۶/۲۶۲) \\ &= P(X \geq ۶/۲۶۲) - P(X \geq ۲۴/۹۹۶) = ۰/۹۷۵ - ۰/۰۵ = ۰/۹۷ \end{aligned}$$

با توجه به درجهٔ آزادی و مقدار احتمال 0/025،

$$P(X > x_\circ) = ۰/۰۲۵ \Rightarrow x_\circ = ۴۰/۴۶۴$$

8-2-5 تابع چگالی توزیع استودنت (توزیع t)

متغیر تصادفی X دارای توزیع t با پارامتر r است، اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left[\frac{(r+1)}{2}\right]}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{r\pi}} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{r}\right)^{\left(\frac{r+1}{2}\right)}} \qquad -\infty < x < \infty, \quad r > \circ$$

که r را درجه آزادی توزیع t گویند.

ویژگی‌های توزیع t

1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = dx = 1-1$

2) برای $r > ۱$ دارای میانگین صفر و برای $r > ۲$ دارای واریانس $\frac{r}{r-۲}$ است.

3) در توزیع استودنت اگر درجهٔ آزادی r از حد تصور بزرگتر باشد توزیع، بر توزیع نرمال استاندارد منطبق می‌شود.

4) مقادیر مختلف $F(x)$ برای مقادیر مختلف درجهٔ آزادی r از جدول ضمیمهٔ (4) قابل محاسبه است.

مثال 5-21 اگر X دارای توزیع استودنت با $r=۷$ باشد، احتمالات زیر راحساب کنید.

$$P(T>۲/۳۶۵) \quad , \quad P(T<۳/۴۹۹) \quad , \quad P(۱/۴۱۵<T<۱/۸۹۵)$$

چون درجهٔ آزادی برابر با 7 است، ردیف 7 و ستون اول را در نظر می‌گیریم.

$$P(T>۲/۳۶۵)=۰/۰۲۵$$
$$P(T<۳/۴۹۹)=۱-P(T\geq ۳/۴۹۹)=۱-۰/۰۰۵=۰/۹۹۵$$
$$P(۱/۴۱۵<T<۱/۸۹۵)=P(T<۱/۸۹۵)=-P(T<۱/۴۱۵)$$
$$P(>۱/۴۱۵)-P(T>۱/۸۹۵)=۰/۱۰-۰/۰۵=۰/۰۵$$

5-2-9 تابع چگالی توزیع فیشر

متغیر تصادفی X دارای توزیع فیشر با پارامترهای $r_۱$ و $r_۲$ است، اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد:

$$f(x)=\frac{\Gamma\left[\frac{(r_1+r_2)}{2}\right]}{\Gamma\left(\frac{r_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r_2}{2}\right)}\cdot\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{\frac{r_1}{x^{2}}-1}{\left(1+\frac{r_1}{r_2}\cdot x\right)^{\frac{r_1+r_2}{2}}} \qquad x>۰$$

که $r_۱$ و $r_۲$ به ترتیب درجهٔ آزادی صورت و مخرج خوانده می‌شود. برای مقادیر مختلف $r_۱$ و $r_۲$ مقادیر مختلف $F(x)$ از جدول ضمیمهٔ (6) قابل محاسبه است.