به نام خدا

تمرین شماره ۱ دینامیک کهکشانی دوره تیم

کسری حاجیان

تابستان ۱۴۰۰

- **کهکشان kysre:**

فرض کنید کهکشانی جدید در فاصله $6.9\ Mpc$ از راه‌شیری به نام $kysre$ رصد شده است. تابع IMF این کهکشان به صورت (m جرم در واحد جرم خورشید است):

$$\xi(m) = \xi_0 m^{-2.5}$$

در این کهکشان $0.1 \leq m \leq 100$ است. همچنین نرخ تولید ستاره با رابطه زیر داده می شود:

$$\frac{dN}{dt} = \beta t \exp\left(-\frac{t}{t^*}\right)$$

که $t^* = 5\ Gyr$ است.

الف) فرض کنید این کهکشان در حال حاضر $8.5\ Gyr$ سن دارد و به طور متوسط در هر $100\ years$، ۲ ابرنواختر در آن رصد می‌شود. اگر هر ستاره‌ای که $m > 8$ داشته باشد به ابرنواختر تبدیل شود؛ مقدار ثابت β را بدست آورید.

ب) تعداد ستارگان و جرم و درخشندگی کهکشان را در حال حاضر محاسبه کنید.

در بخش‌های بعدی از مردن ستاره‌ها صرف‌نظر کنید.

ج) رابطه‌ای برای جرم کهکشان بر حسب زمان بدست آورید. (مبدا زمان را هنگام تولد اولین ستاره کهکشان در نظر بگیرید.)

د) رابطه‌ای برای قدر کهکشان بر حسب زمان بدست آورید.

ه) اگر شعاع کهکشان $10\ kpc$ باشد و توزیع ستاره‌ها در کهکشان ثابت باشد، رابطه‌ای برای قدر سطحی رصد شده برحسب زمان بدست آورید.

و) آیا می‌توانید بخش‌های ج تا ه را بدون صرف‌نظر از مرگ ستاره‌ها حل کنید؟ با چه فرض‌های بیشتری این کار امکان‌پذیر است؟ **(امتیازی)**

ز) آیا می توانید نمودار قدر سطحی بر حسب زمان را با کمک شبیه‌سازی کامپیوتری رسم کنید؟ **(امتیازی)**

- **لنز گرانشی:**

ابتدا با مطالعه جزوه‌های خود، این مبحث را به یاد آورید.

الف) مساحت داخل حلقه انیشتین با رابطه $A = \pi d_L^2 \theta_E^2$، که در آن d_L فاصله تا لنز و θ_E قطر زاویه‌ای حلقه انیشتین است. با فرض اینکه فاصله تا ستاره d_S ثابت و $d_L = x d_S$ است، نمودار A بر حسب x را رسم کنید و x ای که در آن A بیشینه است را بیابید.

ب) اخیرا یک لنز گرانشی جدید که ۲ تصویر تشکیل داده، رصد شده است. فاصله زاویه‌ای دو تصویر از یکدیگر برابر $\Delta\theta = 2.1"$ که فاصله یک تصویر از لنز برابر با $0.7"$ و دیگری $1.4"$ است. همچنین $z_L = 0.6,\ z_S = 2.2$ است. اگر تاخیر زمانی رصد دو تصویر برابر ۱ سال باشد، فاصله لنز را تخمین بزنید. فرض‌های ساده‌کننده خود را بنویسید.

- **تابش هاوکینگ:**

According to the World Bank, the Earth produced about 2 billion tonnes (1 ton = 1000 kg) of solid waste in 2016. To solve the problem of handling all this waste, an undergraduate physics student proposes dumping the waste at a constant rate into a Schwarzschild black hole which loses mass at the same rate due to Hawking radiation. Calculate the following, in SI units:

- Its mass;
- Its Schwarzschild radius;
- Its temperature.

You may use

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B}$$

for the Hawking temperature of a black hole, and the Stefan-Boltzmann constant

$$\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2}$$

- **تشدید لینبلد:**

پتانسیلی به شکل $\Phi(\mathrm{R},\varphi)$ در نظر بگیرید. فرض کنید عامل ایجادکننده این پتانسیل در کهکشان با سرعت زاویه‌ای Ω_b دوران می‌کند. (پتانسیل از دید ناظری که با سرعت زاویه‌ای Ω_b دوران می‌کند، برابر $\Phi(\mathrm{R},\varphi)$ است.)

الف) رابطه‌ای برای شتاب وارد بر یک ذره در این پتانسیل در دستگاه استوانه‌ای بیابید. در طول حل مجازید روابط را برحسب سرعت زاویه‌ای $\Omega(R) = \pm\sqrt{\frac{1}{R}\frac{d\Phi_0}{dR}}$ بدست آورید.

ب) فرض کنید می‌توان پتانسیل را به شکل $\Phi(\mathrm{R},\varphi) = \Phi_0(R) + \Phi_1(R,\varphi)$ نوشت که $\frac{\Phi_1}{\Phi_0} \ll 1$ است با نوشتن R,φ به شکل $R(t) = R_0 + R_1(t)$ و $\varphi(t) = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)$ رابطه‌ای برای R,φ بیابید. (در طول راه‌حل درصورت ساده‌سازی فرض‌های خود را بنویسید.)

ج) فرض کنید $\Phi_1(R,\varphi) = \Phi_b(R)\cos(m\varphi)$، همچنین $\varphi_1 \ll 1$ را بررسی می‌کنیم. رابطه $R_1(\phi_0)$ را بدست آورید.

د) در چه زمانی تشدید لینبلد اتفاق می‌افتد. توضیح دهید.

- **پتانسیل کامپیوتری:**

الف) با n بار مشتق گرفتن نسبت به b^2 از معادله پواسون برای مدل پلامر در حد $n \to \infty$ و جایگذاری $(r^2 + b^2) \to \left(R^2 + \left(a + \sqrt{z^2 + b^2}\right)^2\right)$ به مدل جدیدی به فرم $\Phi_S(R,z) = -\frac{GM}{S}$ برسید که در آن $S^2 = R^2 + z^2 + a\left(a + 2\sqrt{z^2 + b^2}\right)$ است. **(امتیازی)**

ب) رابطه چگالی پتانسیل بالا را بدست آورید.

ج) با شبیه‌سازی کامپیوتری خطوط هم‌شعاع را برای $\frac{b}{a}$ های مختلف رسم کنید (محورهای نمودار $\frac{z}{a}$ و $\frac{R}{a}$ باشد) و نتیجه را تحلیل کنید.