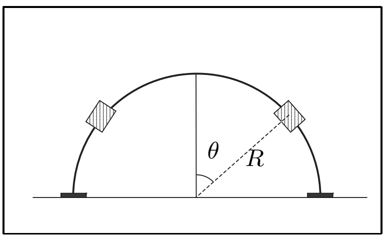
حل مسئله‌یِ شماره‌ی ۳

امیر آقامحمدی

در شماره‌یِ ۲ گاما مسئله‌ای زیر مطرح شده‌بود.

> نیم‌حلقه‌ای به جرمِ M رویِ سطحی اُفقی قراردارد. فرض کنید که صفحه‌یِ نیم‌حلقه هم‌واره قائم می‌ماند. مطابقِ شکل دو دانه‌یِ تسبیح هر یک به جرمِ m به طورِ متقارن از بالایِ نیم‌حلقه با اختلالی کوچک به پایین لغزیده‌اند. نیرویی که میز به نیم‌حلقه وارد می‌کند ثابت نیست.
>
> الف— چه شرطی برقرار باشد که در زاویه‌ایِ مثلِ θ_0 این نیرو صفر شود؟
>
> ب— فرض کنید این شرط برقرار باشد؛ آیا نیم‌حلقه از میز جدا می‌شود؟

ابتدا حالتی را در نظر بگیریم که نیم‌حلقه روی میز است.



نیرویِ عمودی‌یِ بینِ نیم‌حلقه و دانه‌هایِ تسبیح را N' می‌گیریم. قانونِ نیوتن برایِ هر تسبیح عبارت است از

$$N' + mg\cos\theta = mR\dot{\theta}^2$$
$$mg\sin\theta = mR\ddot{\theta}. \qquad (1)$$

زمانی که دانه‌یِ تسبیح بالایِ نیم‌حلقه است نیرویِ عمودی‌یِ وارد بر آن شعاعی و به سمتِ بیرونِ است. اندازه‌یِ این نیرو با پایین آمدنِ دانه‌یِ تسبیح کوچک می‌شود. اگر به‌جایِ دانه‌یِ تسبیح ذره‌ای رویِ نیم‌حلقه حرکت کند جایی‌که این نیرو صفر شود ذره از نیم‌حلقه جدا می‌شود. اما دانه‌یِ تسبیح نمی‌تواند از نیم‌حلقه جدا شود، بنا بر این پس از گذشتن از این نقطه جهتِ نیرویِ عمودی‌یِ بینِ نیم‌حلقه و دانه‌هایِ تسبیح معکوس می‌شود یعنی شعاعی و به سمتِ داخل می‌شود. پس طبقِ قانونِ سومِ

نیوتن نیرویی که هر دانه‌یِ تسبیح به نیم‌حلقه وارد می‌کند شعاعی و به سمتِ خارج خواهد بود. چنان که خواهیم داد اگر مجموعِ جرمِ دانه‌ها از سه برابرِ جرمِ نیم‌حلقه بیش‌تر باشد زاویه‌ای وجود دارد که نیرویِ قائمِ وارد بر نیم‌حلقه از طرفِ دانه‌هایِ تسبیح از وزنِ نیم‌حلقه بیش‌تر شود.

برایِ آن‌که N' را بر حسبِ θ به دست آوریم، باید ابتدا $\dot{\theta}$ را بر حسبِ θ به دست آوریم. دو کار می‌شود کرد یا از مؤلفه‌یِ θ یِ قانونِ نیوتن نسبت به زمان انتگرال بگیریم یا آن‌که مستقیماً از پایستگی‌یِ انرژی استفاده کنیم. در هر صورت نتیجه می‌شود

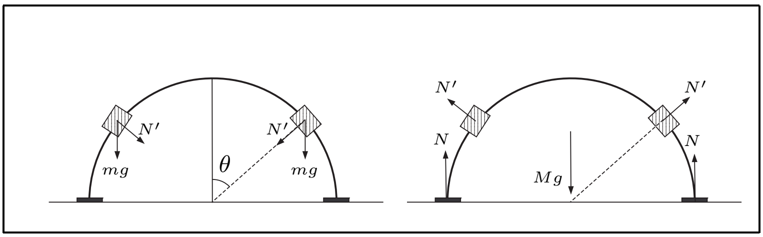
$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta = mgR, \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta). \tag{2}$$

که با جاگذاری در رابطه‌یِ اولِ (1)، N' به دست می‌آید.

$$N' = mg(3\cos\theta - 2) \tag{3}$$

با استفاده از قانونِ نیوتن برایِ نیم‌حلقه نیرویی که از زمین بر آن وارد می‌شود به دست می‌آید.

$$2N = 2N'\cos\theta + Mg \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\theta(3\cos\theta - 2) + \frac{Mg}{2} \tag{4}$$



در زاویه‌ای مثلِ θ_0، نیرویی از کفِ زمین به نیم‌حلقه وارد نمی‌شود، یعنی اگر نیم‌حلقه رویِ کفِ ترازویی باشد وقتی دانه‌هایِ تسبیح به زاویه‌یِ θ_0 می‌رسند، ترازو وزنِ صفر را نشان می‌دهد. برایِ آن که زاویه‌ای مثلِ θ_0 وجود داشته باشد باید معادله‌یِ

$$3\cos^2\theta_0 - 2\cos\theta_0 + \frac{M}{2m} = 0, \tag{5}$$

برایِ θ_0 جواب داشته باشد. این معادله علی‌الاصول دو جواب دارد

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{M}{6m}}. \tag{6}$$

یکی از این زاویه‌ها کوچک‌تر از $\cos^{-1}(1/3)$ و دیگری بزرگ‌تر از $\cos^{-1}(1/3)$ است. هنگامی که دانه‌ها از حلقه پایین می‌آیند ابتدا به زاویه‌یِ کوچک‌تر می‌رسند. پس جوابِ موردِ نظرِ ما

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{M}{6m}}, \tag{7}$$

است. در صورتی که $3M > 2m$ باشد معادله‌یِ بالا برایِ θ_0 جواب ندارد.

حالا فرض کنید $3M \leq 2m$. ببینیم آیا نیم‌حلقه از زمین بلند می‌شود. اگر نیم‌حلقه از زمین بلند شود، ارتفاعِ مرکزش را با h نشان دهیم. برایِ آن‌که نیم‌حلقه از زمین بلند شود باید یکی از مشتقاتِ زمانیِ h غیرِصفر باشد. زمانی که دانه‌هایِ تسبیح به زاویه‌یِ θ_0 می‌رسند را T می‌گیریم. $\dot{\theta}_\pm$ و $\ddot{\theta}_\pm$ را به صورتِ زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_\pm &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \dot{\theta}|_{t=T\pm\epsilon},\\ \ddot{\theta}_\pm &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \ddot{\theta}|_{t=T\pm\epsilon}.\end{aligned} \tag{8}$$

شاخصِ $\pm$ برایِ کمیت‌هایِ دیگر را نیز به همین صورت تعریف می‌کنیم. با این نماد

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_-^2 &= \frac{2g}{R}(1-\cos\theta_0),\\ \ddot{\theta}_- &= \frac{g}{R}\sin\theta_0.\end{aligned} \tag{9}$$

انرژیِ مجموعه‌یِ نیم‌حلقه و دانه‌های تسبیح عبارت است از

$$\frac{1}{2}M\dot{h}^2 + m\big[(\dot{h} - R\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (R\dot{\theta}\cos\theta)^2\big] + Mgh + 2mg(h + R\cos\theta) = 2mgR. \tag{10}$$

که با ساده کردنِ آن نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{M}{2} + m\right)\dot{h}^2 + mR^2\dot{\theta}^2 - 2mR\dot{\theta}\dot{h}\sin\theta + Mgh + 2mg(h + R\cos\theta) = 2mgR. \tag{11}$$

با دانستنِ این‌که در لحظه‌یِ بلند شدن h_+ و $\dot{h}_+$ صفر هستند، $\dot{\theta}_+^2$ را می‌توانیم به دست آوریم

$$\dot{\theta}_+^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta_0), \tag{12}$$

که همان مقدارِ $\dot{\theta}_-^2$ است. اگر از رابطه‌یِ (10) نسبت به زمان مشتق بگیریم نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}&\frac{M+2m}{2}\dot{h}\ddot{h} + 2mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} - 2mR(\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta)\dot{h}\\ &\quad -2mR\dot{\theta}\ddot{h}\sin\theta + (Mg + 2mg)\dot{h} - 2mgR\dot{\theta}\sin\theta \;=\; 0.\end{aligned} \tag{13}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$2mR^2\dot{\theta}_+\ddot{\theta}_+ - 2mgR\dot{\theta}_+\sin\theta_0 - 2mR\dot{\theta}_+\ddot{h}_+\sin\theta_0 = 0, \quad\Rightarrow\quad \ddot{\theta}_+ = \frac{g + \ddot{h}_+}{R}\sin\theta_0. \tag{14}$$

برایِ به دست آوردنِ $\ddot{h}_+$ می‌توانیم معادله‌یِ نیوتن را برایِ مجموعه‌یِ نیم‌حلقه و دانه‌هایِ تسبیح بنویسیم.

$$M\ddot{h} + 2m\ddot{y} = -(M+2m)g \tag{15}$$

براي استفاده از این رابطه باید ابتدا y را برحسبِ h و θ به دست آوریم،

$$y = h + R\cos\theta, \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = \ddot{h} - R(\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta), \tag{16}$$

و سپس در (15) جاگذاری کنیم. به این طریق $\ddot{h}$ به دست می‌آید.

$$\ddot{h} = \frac{2mR}{M+2m}(\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta) - g. \tag{17}$$

اگر $\dot{\theta}_+$ و $\ddot{\theta}_+$ را از (12) و (14) در رابطه‌يِ بالا جاگذاری کنیم $\ddot{h}_+ = 0$ و $\ddot{\theta}_+ = (g\sin\theta_0)/R$ می‌شود. پس $\ddot{h}_+ = \ddot{h}_-$ و $\ddot{\theta}_+ = \ddot{\theta}_-$ است، یعنی $\ddot{h}$ و $\ddot{\theta}$ نیز مثلِ $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ پیوسته هستند.

حالا بیاییم مشتقِ بعدی‌يِ h را به دست آوریم. با مشتق‌گیری‌يِ مستقیم از (17)، $\dddot{h}$ به دست می‌آید.

$$\dddot{h} = \frac{2mR}{M+2m}(3\dot{\theta}\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^3\sin\theta + \dddot{\theta}\sin\theta). \tag{18}$$

علی‌الاصول با داشتنِ $\dddot{\theta}$ و جاگذاری در رابطه‌يِ بالا می‌توانیم $\dddot{h}$ را به دست آوریم. براي این کار از رابطه‌ای که براي پایستگی‌يِ انرژی نوشتیم مجدداً مشتق می‌گیریم. نتیجه براي $\dddot{\theta}_+$ عبارت است از

$$R\dddot{\theta}_+ = g\dot{\theta}_+\cos\theta + \dddot{h}\sin\theta_0. \tag{19}$$

کافی است این مقدار براي $\dddot{\theta}_+$ را در رابطه‌يِ (17) قرار دهیم.

$$\left(1 - \frac{2m}{M+2m}\sin^2\theta_0\right)\dddot{h}_+ = \frac{4mg\dot{\theta}_+}{M+2m}\sin\theta_0(3\cos\theta_0 - 1). \tag{20}$$

از رابطه‌يِ (6) پیداست که $\cos\theta_0 > 1/3$. پس $\dddot{h}_+ > 0$ یعنی در صورتی که شرطِ $m > 3M/2$ برقرار باشد زاویه‌ای مثلِ θ_0 وجود دارد که وقتی دانه‌هايِ تسبیح به آن زاویه می‌رسند، نیم‌حلقه نیرویی به زمین وارد نمی‌کند. در چنین لحظه‌ای نیم‌حلقه از زمین بلند می‌شود.