

۱- تابع $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است. اگر $\alpha = \int_0^1 f(t) dt$ و A برد f باشد، آنگاه:

۱) $0 \leq \alpha \leq 1$

۲) $\alpha \in A$

۳) $\alpha = \sup A$

۴) $\alpha = \inf A$

۲- اگر $a_n = \int_a^b e^{-nx^2} dx$ و $0 \leq a < b$ ، در این صورت دنباله‌ی $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ به همگراست.

۱) 0 ۲) e^{-a^2} ۳) e^{-b^2} ۴) 1

۳- فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n}, (m, n) = 1 \\ 1 & x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

کدام یک از احکام زیر درست است؟

۱) تابع f^2 بر $[0, 1]$ انتگرال پذیر است.

۲) تابع $h = f \circ g$ بر $[0, 1]$ انتگرال پذیر است.

۳) تابع $u = g \circ f$ بر $[0, 1]$ انتگرال پذیر است.

۴) تابع $l = f \circ f$ بر $[0, 1]$ انتگرال پذیر است.

۴- فرض کنید $G(x, y) = \int_x^y e^{-\frac{t}{y}} dt$. در این صورت $\lim_{n \rightarrow \infty} nG(\sqrt{2}, \sqrt{2} + \frac{1}{n})$ کدام است؟

۱) 0

۲) 1

۳) ∞

۴) $\frac{1}{e}$

۵- کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

- (۱) اگر f روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد، f دارای تابع اولیه است.
- (۲) اگر f روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد، c وجود دارد که $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c)$
- (۳) اگر f روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد، $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ تابعی پیوسته است.
- (۴) اگر f روی $[a, b]$ مشتق‌پذیر با مشتق f' باشد، آنگاه f' روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است.

۶- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n (1-x)^n dx$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۷- فرض کنید $\int_a^b f(x) dx$ وجود دارد، $A \subseteq [a, b]$ در $[a, b]$ چگال است و $c > 0$. اگر به ازای هر $x \in A$ رابطه‌ی $f(x) \geq c$ برقرار باشد، کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $\int_a^b f(x) dx = c$
- (۲) $\int_a^b f(x) dx > c$
- (۳) $\int_a^b f(x) dx = c(b-a)$
- (۴) $\int_a^b f(x) dx \geq c(b-a)$

۸- فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی مقدار پیوسته بر $[a, b]$ باشد و $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی در $[a, b]$ باشند که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. اگر $\{f_n\}$ روی $[a, b]$ به طور یکنواخت به تابع f همگرا باشد، آنگاه:

- (۱) f پیوسته است و $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.
- (۲) f به طور یکنواخت پیوسته است ولی دنباله‌ی $\{\int_{a_n}^{b_n} f_n(x) dx\}$ به $\int_a^b f(x) dx$ میل نمی‌کند.
- (۳) دنباله‌ی $\{\int_{a_n}^{b_n} f_n(x) dx\}$ به $\int_a^b f(x) dx$ میل می‌کند ولی f به طور یکنواخت پیوسته نیست.
- (۴) f بر $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است اما $\{\int_{a_n}^{b_n} f_n(x) dx\}$ به $\int_a^b f(x) dx$ میل نمی‌کند.

۹- فرض کنید به ازای $f_n(x) = x^{n-1}(1-x)$ ، $n = 1, 2, \dots$ در این صورت:

- (۱) $\{f_n\}$ بر هر بازه‌ی شامل صفر همگرا نیست.
- (۲) $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ همگرای یکنواخت است.
- (۳) $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ همگرای نقطه به نقطه است ولی این همگرایی، یکنواخت نمی‌باشد.
- (۴) $\{f_n\}$ بر $(0, 1)$ همگرای نقطه به نقطه است ولی بر $[0, 1]$ همگرا نیست.

۱۰- کدام عبارت درست است؟

- (۱) $\sum (-1)^n x^n$ بر $[0, 1]$ همگرای یکنواخت است.
- (۲) $\sum x^n (1-x)^n$ بر $[0, 1]$ همگرای یکنواخت است.
- (۳) $\sum (-1)^n x^n (1-x)^2$ بر $[0, 1]$ همگرای یکنواخت است.
- (۴) $\sum (-1)^n (1-x)^n$ بر $[0, 1]$ همگرای یکنواخت است.

۱۱- سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x \sin nx$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است؟

- (۱) این سری فقط در هر بازه به صورت $(a, 1)$ که $0 < a < 1$ ، به طور یکنواخت همگراست.
- (۲) این سری در $[0, 1]$ به طور یکنواخت همگراست.
- (۳) این سری تنها به صورت نقطه وار روی $[0, 1]$ همگراست.
- (۴) این سری حتی به صورت نقطه وار نیز همگرا نیست.

۱۲- فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری عددی همگرا باشد. در این صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

- (۱) تنها در صورتی همگرای یکنواخت است که برای هر $n \geq 1$ ، $a_n \geq 0$.
- (۲) ممکن است حتی نقطه به نقطه همگرا نباشد.
- (۳) بر $[0, 1]$ نقطه به نقطه همگراست ولی این همگرایی یکنواخت نیست.
- (۴) بر $[0, 1]$ به طور یکنواخت همگراست.

۱۳- اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ تعریف شده باشد، آنگاه f :

- (۱) ناپیوسته است.
- (۲) پیوسته یکنواخت است.
- (۳) فقط در اعداد گویا پیوسته است.
- (۴) پیوسته است ولی پیوسته یکنواخت نیست.

۱۴- اگر $f_n(x) = \frac{n\sqrt{nx}}{1+n^2x^2}$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) $\{f_n\}$ بر $[0, \infty)$ همگرای یکنواخت نیست ولی برای هر $\delta > 0$ در بازه $[\delta, \infty)$ همگرای یکنواخت است.
- (۲) $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ همگرای یکنواخت است ولی در بازه $[0, \infty)$ همگرای یکنواخت نیست.
- (۳) $\{f_n\}$ بر $[0, \infty)$ همگرای یکنواخت نیست ولی زیر دنباله ای دارد که بر $[0, 1]$ همگرای یکنواخت است.
- (۴) $\{f_n\}$ بر $[0, \infty)$ همگرای یکنواخت نیست ولی بر هر زیرمجموعه فشرده از $[0, \infty)$ نقطه به نقطه کراندار و هم پیوسته است.

۱۵- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (n+1)(\sin^n x - \sin^{n+2} x) dx$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{4}$

(۲) ۱

(۳) وجود ندارد.

(۴) ۰

----- جبر خطی -----

۱۶- هر ماتریس 2×2 حقیقی که در معادله‌ی $x^2 + 1 = 0$ صدق کند، با کدام ماتریس متشابه است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(۲) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(۳) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(۴) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

۱۷- اگر A یک ماتریس 3×3 روی میدان اعداد حقیقی با چندجمله‌ای مشخصه $(x-1)^2(x+2)$ باشد، در این صورت $\text{tr } A^{-1}$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۰

(۴) $\frac{3}{2}$

۱۸- به‌ازای کدام مقدار θ ماتریس زیر قطری شدنی است؟

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

(۱) $\theta = \pi$

(۲) $\theta = \frac{\pi}{4}$

(۳) $\theta = \frac{\pi}{2}$

(۴) $\theta = \frac{\pi}{6}$

۱۹- کدام یک از چندجمله‌ای‌های زیر می‌تواند چندجمله‌ای مینیمال یک عملگر قطری شدنی حقیقی باشد؟

(۱) $x^3 - x$

(۲) $x^3 + x$

(۳) $x^2 + 2x + 1$

(۴) $x^3 + 2x^2 + x$

۲۰- اگر A یک ماتریس 2×2 روی میدان F با چندجمله‌ای مشخصه‌ی $(x - \lambda)^2$ باشد، آنگاه:

$$A^3 = 3\lambda^2 A - 2\lambda^3 I \quad (1)$$

$$A^3 = 3\lambda^2 A + 2\lambda^3 I \quad (2)$$

$$A^3 = -2\lambda^3 A + 3\lambda^3 I \quad (3)$$

$$A^3 = -3\lambda^2 A + 2\lambda^3 I \quad (4)$$

۲۱- فرض کنید A یک ماتریس خودتوان با چندجمله‌ای مشخصه‌ی $x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2$ باشد. در این صورت رتبه‌ی A برابر است با:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ (1) & (2) & (3) & (4) \end{array}$$

۲۲- فرض کنید V فضای همه‌ی چندجمله‌ایهای حداکثر از درجه n با ضرایب حقیقی باشد. مجموعه مقادیر ویژه‌ی عملگر خطی T روی V با ضابطه‌ی $T(f(x)) = x^n f(\frac{1}{x})$ کدام است؟

$$\{1, -1\} \quad (1)$$

$$\{0, 1\} \quad (2)$$

$$\{-1, 0\} \quad (3)$$

$$\{-1, 0, 1\} \quad (4)$$

۲۳- فرض کنید $A^2 = A + 2I$, $A \in M_1(\mathbb{R})$, $A + I$ برابر ۳ باشد. در اینصورت $\text{tr}(A)$ برابر است با:

$$\begin{array}{cc} -2 & (1) \\ -1 & (2) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 1 & (3) \\ 2 & (4) \end{array}$$

۲۴- فرض کنید $\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط باشد و $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$. کدام یک زیرفضاهای $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ روی میدان $\mathbb{C}$ تحت A پایا هستند؟

$$\langle (1 + i, 2) \rangle \quad (1)$$

$$\langle (1 + i, 1 - i) \rangle \quad (2)$$

$$\langle (2, 2 + i) \rangle \quad (3)$$

$$\langle (2, 1 - 2i) \rangle \quad (4)$$

۲۵- اگر $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ تبدیل خطی انعکاس نسبت به صفحه‌ی xy باشد، آنگاه چندجمله‌ای مینیمال T کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} x^2 + 1 & (4) & x^2 - 1 & (3) \\ (x - 1)^2(x + 1) & (2) & (x - 1)(x + 1)^2 & (1) \end{array}$$

۲۶- اگر A ماتریسی $n \times n$ و $\lambda \neq 0$ مقدار ویژه A باشد، در این صورت کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

- (۱) λ یک مقدار ویژه از $\text{adj } A$ است.
 (۲) $\lambda^{-1} \det A$ یک مقدار ویژه از $\text{adj } A$ است.
 (۳) اگر x بردار ویژه‌ی A باشد، آنگاه $(\text{adj } A)x$ نیز یک بردار ویژه‌ی A است.
 (۴) $\frac{\lambda}{\det A}$ یک مقدار ویژه از $\text{adj } A$ است.

۲۷- تحت کدام یک از شرایط زیر ماتریس A با یک ماتریس قطری متشابه است؟

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & -1 \end{bmatrix}$$

- (۱) $a = 0$
 (۲) $b = 0$
 (۳) $c = 0$
 (۴) $a + b + c = 0$

۲۸- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. مقدار $A^5 - 2A^3 + 2A^2 + I$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
 (۲) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$
 (۳) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
 (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

۲۹- تعداد ماتریسهای 2×2 روی میدان $\mathbb{Z}_7$ با چندجمله‌ای مشخصه‌ی $f(x) = x^2 + 1$ کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۳۶ (۳) ۴۲ (۴) ۴۹

۳۰- اگر $V = M_n(\mathbb{R})$ آنگاه چندجمله‌ای مینیمال تبدیل خطی $T: V \rightarrow V$ با ضابطه‌ی

$$T(A) = A + A^t$$

کدام است؟

- (۱) $x^2 - x$ (۲) $x^2 - 2x$
 (۳) $x^2 + x$ (۴) $x^2 + 2x$

۳۱- روش سیمپسون را برای محاسبه‌ی انتگرال تابع جدولی زیر به کار می‌بریم. مقدار تقریبی انتگرال کدام است؟

x_i	۰	۰/۵	۱	۲	۳
$f(x_i)$	۱	۱	۱	۲/۵	۱

۴ (۱)

۵ (۲)

۷ (۳)

۶ (۴)

۳۲- مقدار تقریبی $\int_0^2 x^2 dx$ با روش گاوس دونقطه‌ای برابر است با:

$\frac{7}{3}$ (۱)

$\frac{3}{8}$ (۲)

$\frac{2}{7}$ (۳)

$\frac{8}{3}$ (۴)

۳۳- برای به دست آوردن مقدار تقریبی $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ کدام روش را می‌توان به کار بست؟

(۱) ذوزنقه‌ای

(۲) نقطه‌ی میانی

(۳) سیمپسون

(۴) رامبرگ

۳۴- فرمول انتگرالگیری زیر را در نظر بگیرید. به ازای کدام مقادیر B_1 ، H_1 و x_1 انتگرال برای چندجمله‌ای‌های تا درجه‌ی ۲ دقیق است؟

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx B_1 f(-1) + H_1 f(x_1)$$

$x_1 = \frac{1}{3}$, $H_1 = \frac{2}{3}$, $B_1 = \frac{1}{3}$ (۱)

$x_1 = \frac{1}{5}$, $H_1 = \frac{5}{4}$, $B_1 = -\frac{1}{4}$ (۲)

$x_1 = 1$, $H_1 = 1$, $B_1 = 1$ (۳)

$x_1 = 1$, $H_1 = \frac{1}{6}$, $B_1 = \frac{1}{6}$ (۴)

۳۵- اگر فرمول انتگرالگیری زیر برای چندجمله‌ای‌های با حداکثر درجه ممکن دقیق باشد، مقادیر a ، b و c به ترتیب کدامند؟

$$\int_{-h}^h f(x) dx \approx af(0) + bf\left(\frac{h}{3}\right) + cf(h)$$

(۱) h و $2h$ ، $-3h$

(۲) h ، $-h$ و $2h$

(۳) $2h$ ، $-h$ و $4h$

(۴) $4h$ ، $-3h$ و h

۳۶- اگر برای تخمین انتگرال $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ روش دوزنقه‌ای مرکب را روی فاصله‌های مساوی با طول گام h به کار ببریم، آنگاه بزرگترین مقدار ممکن برای h به گونه‌ای که خطای برشی تخمین به دست آمده بیش از $10^{-6} \times 6$ نباشد، برابر است با:

(۱) 0.001

(۲) 0.004

(۳) 0.006

(۴) 0.008

۳۷- تقریبی از $\int_a^b f(x) dx$ به کمک قاعده‌ی دوزنقه‌ای مرکب مساوی 2.75 و به کمک قاعده‌ی نقطه میانی مرکب مساوی $3/2$ به دست آمده است. کدام عدد تقریب بهتری برای این انتگرال است؟ (h برای هر دو قاعده یکسان است).

(۱) $2/9$

(۲) $2/95$

(۳) $2/975$

(۴) $3/05$

۳۸- می‌دانیم که $T(h)$ تقریب قاعده‌ی دوزنقه‌ای و $M(h)$ تقریب قاعده‌ی نقطه میانی برای

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

است که خطای هر دو $O(h^3)$ است. α و β چگونه باشند تا $\alpha T(h) + \beta M(h)$ تقریبی از I با خطای $O(h^4)$ باشد؟

$$\alpha = -\frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\alpha = -\frac{1}{3}, \beta = \frac{2}{3} \quad (3)$$

۳۹- قاعده‌ی دوزنقه‌ای مرکب برای تخمین $\int_a^b f(x) dx$ در چه صورت برای چندجمله‌ای‌های تا درجه سوم دقیق است؟

(۱) f بر $[a, b]$ متناوب باشد.

(۲) $f'(a) = f'(b)$

(۳) $f(a) = f(b)$

(۴) $f''(a) = f''(b)$

۴۰- فرض کنید می‌خواهیم $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$ را با

$$M = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) \quad (*)$$

که در آن c_1, c_2, c_3 و x_1, x_2, x_3 تعیین می‌شوند، تقریب بزینم. با تعیین مناسب این مقادیر، بیشترین درجه‌ی چندجمله‌ای‌هایی که مقدار I وابسته به آن‌ها دقیقاً از (*) به‌دست می‌آید، برابر است با:

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۱- در پیاده‌سازی روش حذفی گاوس برای حل عددی دستگاه‌های معادلات خطی $Ax = b$ کدام کار به پایداری روش می‌افزاید؟

(۱) وارون ماتریس ضرایب محاسبه شود.

(۲) کوچکترین مقدار ممکن برای عنصر محوری انتخاب شود.

(۳) عناصر محوری مثبت اختیار شوند.

(۴) محورگیری سطری (جزئی) صورت گیرد.

۴۲- فرض کنید ماتریس متقارن معین مثبت A ، $n \times n$ ، دارای تجزیه چولسکی به‌صورت LL^t است. ماتریس DAD که در آن D یک ماتریس قطری $n \times n$ با درایه‌های قطری غیرصفر است دارای تجزیه چولسکی

(۱) نیست.

(۲) است اگر و تنها اگر همه‌ی درایه‌های قطری D مثبت باشند.

(۳) به‌صورت $\bar{L}\bar{L}^t$ که $\bar{L} = DL$.

(۴) است تنها اگر همه درایه‌های قطری D منفی باشند.

۴۳- فرض کنید A ماتریسی وارون‌پذیر باشد و $\bar{x}$ و $\tilde{x}$ را به‌ترتیب جواب دقیق و تقریبی دستگاه $Ax = b$ در نظر بگیرید. اگر $r = b - A\tilde{x}$ و $e = \bar{x} - \tilde{x}$ ، آنگاه $\|e\|$ بزرگتر یا مساوی است با:

$$\|r\| \cdot \|A^{-1}\| \quad (۱)$$

$$\|r\| \cdot \|A\| \quad (۴)$$

$$\frac{\|r\|}{\|A\|} \quad (۳)$$

۴۴- فرض کنید $A_{n \times n}$ یک ماتریس متقارن و معین مثبت باشد و دستگاه $Ax = b$ را در نظر بگیرید. اگر بدون محورگیری و مقیاس کردن، مرحله‌ی اول روش حذفی گاوس را انجام دهیم و سپس ماتریس حاصل از حذف سطر و ستون اول را با B نشان دهیم، آنگاه در مورد B کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) تمام اعضای روی قطر اصلی B مثبت هستند.
- (۲) در بین تمام درایه‌های B ، بزرگترین درایه از لحاظ قدرمطلق بر روی قطر اصلی B قرار دارد.
- (۳) B وارون‌پذیر است.
- (۴) B قطر غالب سطری است.

۴۵- تجزیه LU ی ماتریس A را که در آن $L = (l_{ij})$ پایین مثلثی با درایه‌های قطری ۱، و $U = (u_{ij})$ بالامثلثی با درایه‌های قطری ناصفر است، در نظر بگیرید. کدام گزاره نادرست است؟

- (۱) این تجزیه در صورت وجود منحصر به فرد است.
- (۲) اگر A معین مثبت یا قطر غالب اکید باشد، آنگاه دارای تجزیه‌ی LU است.
- (۳) A دارای تجزیه‌ی LU است اگر وارون‌پذیر باشد.
- (۴) اگر $A = LU$ ، آنگاه $u_{kk} = \frac{\det(A_k)}{\det(A_{k-1})}$ که A_i ، i امین زیر ماتریس اصلی پیشروی ماتریس A است.

----- پایان -----