روشهای انتگرالگیری ۷

فرمولهـای انتگرالگیـری ، کـه در فصلهای ۴ تا ۶ به دست آمدند ، اگرچه بسیارند ولی حوایج حساب دیفرانسیل و انتگرال عملی را کلا " برنمی‌آورند . لذا ، در فصل حـاضر به مسئلهٔ محاسبهٔ انتگرالها ،هم نامعین و هم معین، شدیدا " حمله می‌کنیـم . دوروش انتگرالگیری که از همه مهمترند عبارتنداز ***انتگرالگیری*** بوسیلهٔ ***جانشانی*** (ر.ک. بخش ۱.۷) و ***انتگرالگیری جزء به جزء*** (ر.ک. بخش ۲.۷) . این روشها ابراز اصلی بخشهـای آتی ، که در آنها انتگرالهای مختلفی شامل توابع مثلثاتی و رادیکالها مطرح می‌شوند ، نیز می‌باشند . علاوه‌براین ، تکنیکی کلی برای انتگرالگیری از یک تابع گویای دلخواه وجود دارد که در بخش ۶.۷ داده خواهد شد .

ویژگی جالب این مبحث وجود انتگرالهای بسیاری است ، بعضی با صورت ساده ، که نمی‌توان آنها را " به شکل بسته " حساب کرد . مثلا " ، هیچیک از انتگرالهای

$$\int e^{-x^2}\,dx, \qquad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad \int \cos x^2\,dx \tag{1}$$

را نمی‌توان با فرمول‌صریحی شامل تعدادی‌متناهی عمل‌جبری ، به‌انضمام ترکیب و ریشه‌گیری بر توابع که در فصول قبل بررسی‌شدند ، بیان کرد (هر تابع که قابل بیان باچنین فرمولی باشد ***مقدماتی*** نام دارد) . برای پرداختن به‌انتگرالهایی چون (۱) باید به روشهای‌تقریب بخش ۸.۷ پناه برد یا از سریهای نامتناهی استفاده کرد (ر.ک. فصل ۹) . همچنین، می‌توان این گونه انتگرالها را توابع " جدیدی" گرفت و آنها را ، همانطور که در مورد انتگرال $\int (1/x)\,dx$ معرف لگاریتم طبیعی کردیم ، مطالعه نمود .

مفهوم انتگرال را می‌توان تعمیم داد تا ***انتگرالهای مجازی*** را نیز دربرگیرد ؛ یعنی ، انتگرالهایی با انتگرالدههای بی‌کران وانتگرالهاروی بازه‌های بی‌کران . بخش ۹.۷ به این مبحث مهم اختصاص دارد .

۱۰۷ انتگرالگیری به‌وسیلهٔ جانشانی

قاعدهٔ زنجیره‌ای برای مشتقگیری از یک‌تابع مرکب ما را به‌روش‌انتگرالگیری‌مهمی می‌رساند، به نام انتگرالگیری به وسیلهٔ **جانشانی** (یا انتگرالگیری به وسیلهٔ **تغییر متغیر**)، که می‌توان از آن برای محاسبهٔ انتگرالهای نامعین و معین استفاده کرد. ابتدا به انتگرالهای نامعین می‌پردازیم.

قضیهٔ ۱ (محاسبهٔ انتگرال نامعین به‌وسیلهٔ جانشانی). *فرض‌کنیم $f(u)$ تابع پیوسته‌ای بوده، و $u = u(x)$ تابعی با مشتق پیوستهٔ $u'(x)$ باشد. در این صورت،*

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(u)\,du\bigg|_{u=u(x)}, \tag{۱}$$

که درآن نماد سمت‌راست یعنی پس از محاسبهٔ‌انتگرال $\int f(u)\,du$ جانشانی $u = u(x)$ صورت می‌گیرد.

برهان. برای اثبات تساوی دو انتگرال در (۱)، فرض‌کنیم F یک پادمشتق f باشد، که وجود F را پیوستگی f تضمین می‌کند (ر.ک. قضیهٔ ۵، ص ۴۰۵). در این صورت، طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\frac{d}{dx}F(u(x)) = F'(u(x))u'(x),$$

و درنتیجه،

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int F'(u(x))u'(x)\,dx = F(u(x)) + C, \tag{۲}$$

که در آن C ثابت دلخواهی است. اما، از آن سو،

$$\int f(u)\,du\bigg|_{u=u(x)} = [F(u) + C]\bigg|_{u=u(x)} = F(u(x)) + C, \tag{۲'}$$

و مقایسهٔ (۲) و (۲') فوراً (۱) را نتیجه می‌دهد.

توجه کنیدکه عامل اضافی $u'(x)$ سمت چپ معادلهٔ (۱) در دیفرانسیل du سمت راست پنهان شده است، زیرا $du = u'(x)\,dx$. حال می‌توان استفاده از نماد انتگرالها را درک کرد که در آن عبارت پس از علامت انتگرال به صورت حاصلضرب تابعی که انتگره می‌شود (انتگرالده) و **دیفرانسیل** متغیر انتگرالگیری نوشته می‌شود. در واقع، اگر متغیر

انتگرالگیری تغییر کند ، دیفرانسیل خود بخود عمل قاعدهٔ زنجیره‌ای را می‌پذیرد . کار با دیفرانسیلها نقشی کلیدی در مثالهای زیر ایفا می‌کند .

مثال ۱ . $\int \sin^3 x \cos x \, dx$ را حساب کنید .

حل . فرض کنیم $u = \sin x$. در این صورت ، $du = (D_x \sin x)\, dx = \cos x \, dx$ ، و

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx = \int u^3 \, du = \frac{1}{4} u^4 + C.$$

بنابراین ، پس از تعویض u با $\sin x$ ،

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx = \frac{1}{4} \sin^4 x + C.$$

در اینجا ، مثل هر مسئلهٔ محاسبهٔ یک انتگرال نامعین ، امتحان نتیجهٔ کار باتحقیق‌اینکه مشتق جواب مساوی انتگرالده است فکر خوبی است (این کار را انجام دهید) . در این مثال توابع آمده در قضیهٔ ۱ عبارتنداز $f(u) = u^3$ و $u = \sin x$ ، و معادلهٔ (۱) شکل زیر را به خود می‌گیرد :

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx = \int u^3 \, du \Big|_{u = \sin x}$$

مثال ۲ . $\int \sin^3 x \, dx$ را حساب کنید .

حل . در مثال ۱ جانشانی مناسب $u = u(x)$ فورا" مشخص شد ، ولی در اینجا این‌انتخاب کمتر واضح است . ابتدا ممکن است اغوا شده همان جانشانی $u = \sin x$ را انجام دهیم ، ولی این انتخاب نامناسب است ، زیرا $du = \cos x \, dx$ و عاملی از $\cos x$ در انتگرال داده شده وجود ندارد . به جای این کار جانشانی $u = \cos x$ را انجام می‌دهیم . دراین‌صورت $du = (D_x \cos x)\, dx = -\sin x \, dx$ ،و انتگرالده قبلا" شامل $\sin x$ به‌عنوان عامل است ؛ درنتیجه ،

$$\int \sin^3 x \, dx = \int (-\sin^2 x)\, du.$$

حال پیشرفت بیشتر به عبارت $-\sin^2 x$ برحسب متغیر u بستگی دارد . این کار به سهولت انجام می‌شود ، زیرا

$$-\sin^2 x = \cos^2 x - 1 = u^2 - 1.$$

بنابراین،

$$\int \sin^3 x\, dx = \int (u^2 - 1)\, du = \frac{1}{3} u^3 - u + C,$$

که، پس از تعویض u با $\cos x$ ، نتیجه می‌دهد که

$$\int \sin^3 x\, dx = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C.$$

در اینجا توابع قضیهٔ ۱ عبارتنداز $f(u) = u^2 - 1$ و $u = \cos x$ ، و معادلهٔ (۱) شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$\int \sin^3 x\, dx = \int (u^2 - 1)\, du \Big|_{u = \cos x}$$

به محض گرفتن ایدهٔ انتگرالگیری بوسیلهٔ جانشانی، می‌توان بعضی ازمراحل میانی حتی معرفی صریح متغیر کمکی u ، را حذف کرد. لذا، جواب فشرده‌تر مثال ۲ عبارت‌است از

$$\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx = \int (-\sin^2 x)\, d(\cos x)$$

$$= \int (\cos^2 x - 1)\, d(\cos x) = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C,$$

که در آن تمام عبارت $\cos x$ متغیر انتگرالگیری گرفته شده است.

مثال ۳. $\int x\sqrt{2 + 3x}\, dx$ را حساب کنید.

حل. فرض کنیم $u = 2 + 3x$. دراین‌صورت، $x = \frac{1}{3}(u - 2)$ ، $du = 3\, dx, dx = \frac{1}{3}du,$ ؛ و درنتیجه،

$$\int x\sqrt{2 + 3x}\, dx = \frac{1}{9} \int (u - 2) \sqrt{u}\, du = \frac{1}{9} \int (u^{3/2} - 2u^{1/2})\, du$$

$$= \frac{2}{45} u^{5/2} - \frac{4}{27} u^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{45} (2 + 3x)^{5/2} - \frac{4}{27} (2 + 3x)^{3/2} + C.$$

این نتیجه را با مشتقگیری مستقیم از عبارت سمت راست تحقیق کنید .

مثال ۴ . $\int \sec x\, dx$ را حساب کنید .

حل . با همان شیوه‌ای که به‌فرمول (۴') ، صفحهٔ ۴۹۸ ، برای انتگرال $\tan x$ منجر شد ، می‌توان‌دید که اگر $\sec x$ را به شکل زیر بنویسیم

$$\sec x = \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} = \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x},$$

صورت عبارت اخیر مشتق مخرج آن است . لذا ، با انتخاب $u = \sec x + \tan x$ ، داریم $du = (\sec x \tan x + \sec^2 x)\, dx$ ، و درنتیجه ،

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x}\, dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C.$$

لذا ،

$$\int \sec x\, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C. \qquad (۳)$$

به‌طور معادل ، (۳) را می‌توان با قرار دادن $f(x) = \sec x + \tan x$ درفرمول

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln |f(x)| + C, \qquad (۴)$$

که در صفحهٔ ۴۹۸ با مشتقگیری مستقیم از $\ln |f(x)|$ ثابت شد ، به دست آورد . به عنوان تمرین ، رابطهٔ (۴) را با جانشانی $u = f(x)$ تحقیق کنید .

حال مشابه قضیهٔ ۱ را برای انتگرالهای معین درنظر می‌گیریم .

قضیهٔ ۱' (محاسبهٔ انتگرال معین به وسیلهٔ جانشانی) . فرض‌کنیم $u = u(x)$ و $f(u)$ *در شرایط قضیهٔ ۱ بر بازهٔ* $a \le x \le b$ *و بر بازهٔ* $A \le u \le B$ *که نقش* $a \le x \le b$ *تحت جا نشانی* $u = u(x)$ *است صدق کنند . در این صورت ،*

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\, du.$$

برهان . فرض‌کنیم F یک پادمشتق f باشد . در این صورت ، طبق فرمول (۲) و دو کاربرد

قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال،

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = F(u(x))\Big|_a^b = F(u(b)) - F(u(a)) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du.$$

توجه کنید که فرض نکرده‌ایم $u = u(x)$ بر $[a, b]$ یکنواست؛ درنتیجه، رابطهٔ لازمی بین $u(a)$، $u(b)$ و A, B وجودندارد. از آن‌سو، جانشانیهای یکنوا متداولترین‌جانشانی‌اند، و در این صورت، اگر u بر $[a, b]$ صعودی باشد، $A = u(a)$ و $B = u(b)$، و اگر u بر $[a, b]$ نزولی باشد، $A = u(b)$ و $B = u(a)$.

مثال ۵. $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$ را حساب کنید.

حل. با جانشانی $u = u(x) = \ln x$، داریم $du = dx/x$. به‌علاوه، $u(1) = \ln 1 = 0$، $u(e) = \ln e = 1$. پس از قضیهٔ ۱۰ معلوم می‌شودکه

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 u\,du = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}. \tag{۵}$$

به صورت دیگر، چون

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C,$$

می‌توان با استفاده از قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نوشت

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e = \frac{1}{2}(\ln e)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2 = \frac{1}{2},$$

ولی این راه مؤثر نیست، زیرا عملاً نیازی به برگشت از u به متغیر اصلی x نیست. در واقع، به محض محاسبه شدن انتگرال (۵)، اولین انتگرال نیز معلوم است، زیرا هر دو انتگرال معین، و لذا عدد، می‌باشند.

مثال ۶. با شروع از تعریف لگاریتم طبیعی

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

برهان دیگری برای فرمول

$$\ln ab = \ln a + \ln b \ (a \text{ و } b \text{ مثبت})$$

که قبلاً " در قضیهٔ ۱، صفحهٔ ۴۸۷، ثابت شد بیاورید.

حل. داریم

$$\ln b = \int_1^b \frac{dt}{t} = \int_1^b \frac{a\,dt}{at} = \int_a^{ab} \frac{du}{u},$$

که در آخرین مرحله به متغیر جدید $u = at$ رو آورده و تغییرات نظیر را درحدود انتگرال گیری انجام می‌دهیم. بنابراین، پس از بازگشت به متغیر انتگرالگیری (ظاهری) اصلی،

$$\ln b = \int_a^{ab} \frac{dt}{t},$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\ln ab = \int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^{a} \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t} = \ln a + \ln b.$$

روش دیگر. تا اینجا، در اعمال روش انتگرالگیری به‌وسیلهٔ جانشانی، در جستجوی یک جانشانی $u = u(x)$ و یک‌تابع $f(u)$ باانتگرال آسان‌بوده‌ایم به‌طوری‌که تابعی‌که می‌خواهیم انتگره کنیم (آن را $g(x)$ می‌نامیم) را بتوان به شکل

$$g(x) = f(u(x))u'(x) \tag{۶}$$

درآورد. زیرا در این صورت، طبق قضیهٔ ۱،

$$\int g(x)\,dx = \int f(u)\,du\Big|_{u=u(x)}, \tag{۷}$$

و، طبق قضیهٔ ′۱،

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du, \tag{′۷}$$

روش دیگر جانشانیی به شکل $x = x(u)$ مستقیماً " در انتگرال $\int g(x)\,dx$ است. اگر $x(u)$ دارای مشتق پیوستهٔ $x'(u)$ باشد، درنتیجه بخصوص $dx = x'(u)\,du$ ، این جا نشانی $\int g(x)\,dx$ را به

$$\int g(x(u))x'(u)\,du = \int f(u)\,du.$$

" تبدیل می‌کند"، که در آن

$$f(u) = g(x(u))x'(u), \tag{۸}$$

و اگر جانشانی $x = x(u)$ بدقت انتخاب شده باشد، تابع $f(u)$ را می‌توان به خلاف تابع

اصلی $g(x)$ به آسانی انتگره کرد .

اختیاری . بین این دو روش انتگرالگیری با جانشانی رابطهٔ سادهای وجود دارد . فرضکنیم $x = x(u)$ تابع یک به یکی با معکوس $u = u(x)$ باشد . در این صورت ، بنابر قضیهٔ ۴ ، صفحهٔ ۴۶۰ ، در باب مشتق یک تابع معکوس ،

$$u'(x) = \frac{1}{x'(u)}$$

(در اینجا فرض اضافی ناصفر بودن $x'(u)$ را میپذیریم) ؛ درنتیجه ،

$$x'(u) = \frac{1}{u'(x)}.$$

با گذاردن این عبارت $x'(u)$ در فرمول (۸) فوراً به فرمول (۶) ، و درنتیجه فرمولهای (۷) و ('۷) ، میرسیم . لذا ، دو روش اساساً یکی میباشند .

مثال ۷ . $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}$ را به دو راه حساب کنید .

حل . باتوجه به اینکه $\sqrt{x}$ دوبار در انتگرالده ظاهر شده است ، جانشانی $u = \sqrt{x}$ را انجام میدهیم . در این صورت ،

$$du = d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}},$$

درنتیجه ، $dx = 2\sqrt{x}\,du = 2u\,du$. بنابراین ،

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})} = 2\int \frac{u\,du}{u(1+u)} = 2\int \frac{du}{1+u} = 2\ln|1+u| + C,$$

یا ، پس از بازگشت به متغیر x ،

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})} = 2\ln(1+\sqrt{x}) + C.$$

عبارت $2\ln(1+\sqrt{x})$ را میتوانید ، در صورت تمایل ، با $\ln(1+\sqrt{x})^2$ عوض کنید .

به صورت دیگر ، ظاهراً جانشانی $x = u^2$ (معکوس $u = \sqrt{x}$) انتخاب مناسبیاست زیرا رادیکال را از بین میبرد . با این جانشانی ، $dx = 2u\,du$ ، $\sqrt{x} = u$ ، و

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})} = \int \frac{2u\,du}{u(1+u)} = 2\int \frac{du}{1+u},$$

که به همان نتیجهٔ قبل ختم می‌شود .

مسائل

انتگرالهای زیر را با استفاده از انتگرالگیری به‌وسیلهٔ جانشانی حساب کنید .

۱. $\int (1-2x)^9\,dx$

۲. $\int (1+x^2)^{49}\,x\,dx$

۳. $\int \sqrt{4+5x}\,dx$

۴. $\int \frac{dx}{\sqrt{\pi+2x}}$

۵. $\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx$

۶. $\int (x^2-4x+4)^{-5/3}\,dx$

۷. $\int x\sqrt[3]{1-x}\,dx$

۸. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$

۹. $\int \left(\frac{2+\sqrt{x}}{x}\right)^{1/2} dx$

۱۰. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}}$

۱۱. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

۱۲. $\int \cos^3 x \sin x\,dx$

۱۳. $\int \cos^3 x\,dx$

۱۴. $\int \sin^4 x \cos x\,dx$

۱۵. $\int \sin^5 x\,dx$

۱۶. $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

۱۷. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}}\,dx$

۱۸. $\int \cos(\tan x)\sec^2 x\,dx$

۱۹. $\int x \sec x^2 \tan x^2\,dx$

۲۰. $\int \frac{\sec^2 x^{1/3}}{x^{2/3}}\,dx$

۲۱. $\int e^{x^2}\,x\,dx$

۲۲. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

۲۳. $\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

۲۴. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$

۲۵. $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}-1}\,dx$ ✓

۲۶. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+e^{-\sqrt{x}})}$ ✓

۲۷. $\int \frac{e^{x}}{e^{2x}+1}\,dx$ ✓

۲۸. $\int \frac{2^{x}}{4^{x}+1}\,dx$ ✓

۲۹. $\int \frac{2^{x}}{\sqrt{4^{x}+1}}\,dx$ ✓

۳۰. $\int x\cosh x^{2}\,dx$ ✓

۳۱. $\int \frac{\sinh\sqrt{x}\,\cosh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ ✓

۳۲. $\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{x^{2}+1}\,dx$ ✓

۳۳. $\int \frac{1}{x^{2}}\tan\frac{1}{x}\,dx$ ✓

۳۴. با استفاده از انتگرالگیری به‌وسیلهٔ جانشانی، قاعدهٔ (چهار)، صفحهٔ ۴۰۲، را تحقیق کنید که می‌گوید هرگاه F یک پادمشتق f باشد، آنگاه

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \qquad (a \neq 0).$$

نشان دهید که

۳۵. $$\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x+\cot x| + C = \ln|\csc x-\cot x| + C$$

۳۶. $$\int \csc x\,dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C,$$
$$\int \sec x\,dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

۳۷. $$\int \sec x\,dx = \tanh^{-1}(\sin x) + C,$$
$$\int \csc x\,dx = -\tanh^{-1}(\cos x) + C$$

۳۸. $$\int \sec x\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C,$$
$$\int \csc x\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C$$

۳۹. با استفاده از انتگرالگیری به‌وسیلهٔ جانشانی، نشان دهید که اگر f زوج باشد،

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

ولی اگر f فرد باشد ،

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

و این قبلاً" در مسئلهٔ ۱ ، صفحهٔ ۴۱۵ ، به روشی دیگر ثابت شده است . فرض کنید f بر $[-a, a]$ پیوسته باشد .

۴۰. به فرض آنکه f بر $[0, a]$ پیوسته باشد ، نشان دهید که

$$\int_0^a f(a-x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$$

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۴۱. $\int_{-1}^{1} (1+x^3)^7 x^2\,dx$

۴۲. $\int_0^2 s\sqrt{1+2s^2}\,ds$

۴۳. $\int_4^9 \dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}-1}\,dt$

۴۴. $\int_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{x}+1}\,dx$

۴۵. $\int_1^3 \dfrac{ds}{\sqrt{s}\,(1+s)}$

۴۶. $\int_0^{\pi} \cos^4 t \sin t\,dt$

۴۷. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 u\,du$

۴۸. $\int_1^e \dfrac{dv}{v[1+(\ln v)^2]}$

۴۹. $\int_0^2 \dfrac{3^w}{3^w+1}\,dw$

۵۰. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec x\,dx$

۵۱. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc x\,dx$

۵۲. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sec x \csc x\,dx$

۵۳. فرض کنید f بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته و متناوب با دورهٔ تناوب p باشد؛ درنتیجه ، $f(x+p) \equiv f(x)$. فرمول

$$\int_a^{a+p} f(x)\,dx = \int_0^p f(x)\,dx \quad (\text{دلخواه } a)$$

را تحقیق کنید ، که نشان می‌دهد f بر هر بازه به طول p انتگرال یکسان دارد .

۵۴. نشان دهید که

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^3 x\,dx = 0 \quad (\text{دلخواه } a)\,.$$

۵۵. نشان دهید که

$$\int_{-1/2}^{1/2} \ln \frac{1+x}{1-x} \sin^{10} x\, dx = 0.$$

۵۶. با استفاده از مسئلهٔ ۴۰، نشان دهید هرگاه f بر $[0, 1]$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx.$$

۲.۷ انتگرالگیری جزء به جزء

حال روش مهم دیگری از انتگرالگیری را درنظر می‌گیریم که نتیجه‌ای است از قاعدهٔ حاصل ضرب برای مشتقگیری. فرض کنیم $u = u(x)$ و $v = v(x)$ دو تابع مشتقپذیر با مشتقات پیوستهٔ $u'(x)$ و $v'(x)$ باشند. با مشتقگیری از حاصلضرب $u(x)v(x)$ نسبت به x، خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

یا معادلاً

$$u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - v(x)u'(x). \tag{۱}$$

پس انتگرالگیری از طرفین (۱) نتیجه می‌دهد که

$$\int u(x)v'(x)\, dx = \int [u(x)v(x)]'\, dx - \int v(x)u'(x)\, dx.$$

اما

$$\int [u(x)v(x)]'\, dx = u(x)v(x) + C,$$

و درنتیجه،

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\, dx, \tag{۲}$$

که درآن می‌توان C را حذف‌کرد، زیرا در هریک‌از دوانتگرال نامعین یک ثابت‌انتگرالگیری وجود دارد. با معرفی دیفرانسیلهای

$$du = u'(x)\, dx, \qquad dv = v'(x)\, dx,$$

و حذف شناسهٔ توابع به خاطر سادگی، می‌توان (۲) به شکل فشردهٔ زیر نوشت:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du. \tag{۳}$$

معادلهٔ (۳) ، به نام فرمول **انتگرالگیری جزء به جزء** ، یکی از با ارزش‌ترین تکنیکهای انتگرالگیری است که ، همانطور که امثلهٔ زیر نشان می‌دهند ، اغلب یک انتگرال مشکل را برحسب انتگرالهای آسانتر بیان می‌کند .

برای یافتن فرمول نظیر به **انتگرالهای معین** ، از طرفین (۱) نسبت به x از a تا b انتگرال می‌گیریم . از این نتیجه می‌شود که

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \int_a^b [u(x)v(x)]'\,dx - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx.$$

اما ، بنابر قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال ،

$$\int_a^b [u(x)v(x)]'\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b,$$

و درنتیجه ،

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx, \qquad (۲')$$

یا ، به‌طور خلاصه‌تر ،

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du, \qquad (۳')$$

که در آن $uv|_a^b$ اختصاری است برای

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

توجه کنید که (۳') از (۳) با گذاردن حدود انتگرالگیری در انتگرالهای نامعین $\int u\,dv$ و $\int v\,du$ و تعویض تابع uv با تفاضل $uv|_a^b$ ، که البته عدد است ، به دست می‌آید .

مثال ۱ . $\int x \sin x\,dx$ را حساب کنید .

حل . فرض کنیم $u = x, dv = \sin x\,dx$. پس $du = dx, v = -\cos x$ و درنتیجه ، بنابر (۳) ،

$$\int x \sin x\,dx = -x\cos x - \int(-\cos x)\,dx$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C,$$

که در آن C ثابت انتگرالگیری دلخواه است .

انتخاب مناسب جزءها . در مثال ۱ $u = x$ را به جای $u = \sin x$ اختیار می‌کنیم ، زیرا x برخلاف $\sin x$ با مشتقگیری ساده می‌شود . تمام نکتهٔ انتگرالگیری جزء به جزء این است که محاسبهٔ $\int v\,du$ باانتخاب "جزءهای" u و dv به‌طور مناسب از انتگرال $\int u\,dv$ آسانتر است ؛ اگر $u = \sin x, dv = x\,dx$ را انتخاب می‌کردیم ، آنگاه $du = \cos x\,dx, v = \frac{1}{2}x^2$ ، و فرمول (۳) ما را به

$$\int x \sin x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \sin x - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\,dx$$

می‌رساند ، که در آن انتگرال سمت راست از انتگرال اصلی سمت چپ مشکلتر است!

در انتگرالگیری جزء به جزء ، برای رفتن از dv به v لازم نیست ثابت انتگرالگیری اضافی k را واردکنیم (لذا ،درمثال۱به‌جای $v = -\cos x + k$ نوشتیم $v = -\cos x$) . در واقع ، این منجر به جملاتی اضافی می‌شود که در تشکیل طرفهای‌راست (۳)و(۳') حذف می‌شوند . شرح جزئیات را به عنوان تمرین می‌گذاریم (v را با $v + k$ عوض کرده و ببینید چه رخ می‌دهد) .

مثال ۲ . $\int \ln x\,dx$ را حساب کنید .

حل . در اینجا انتخاب فوری عبارت است از $u = \ln x, dv = dx$ ، و این بی‌درنگ کار می‌کند . در واقع ، $du = dx/x, v = x$ ، و (۳) نتیجه می‌دهد که

$$\int \ln x\,dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

(و این در مسئلهٔ ۳۱ ، صفحهٔ ۴۹۵ ، پیش‌بینی شد) .

مثال ۳ . $\int x \ln x\,dx$ را حساب کنید .

حل . در اینجا حالات مختلفی وجود دارند . می‌توان $u = x \;\; dv = \ln x\,dx$ یا $u = \ln x, dv = x\,dx$ یا حتی $u = \ln x, dv = x\,dx$ را اختیار کرد . تنها انتخاب مناسب $u = x \ln x, dv = dx$ است، زیرا فقط این انتخاب است که $\int v\,du$ را ، با راحت شدن از لگاریتم ، از $\int u\,dv$ ساده‌تر می‌کند . در این صورت ، داریم $du = dx/x, v = \frac{1}{2}x^2$ ؛ و

درنتیجه، بنابر (۳)،

$$\int x \ln x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C. \quad (۴)$$

به بیان معادل، با اختیار دیفرانسیل توابع می‌توان از معرفی صریح متغیرهای کمکی u و v احتراز کرد. لذا،

$$\int x \ln x\, dx = \int \ln x\, d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x^2\, d(\ln x)$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C,$$

که در آن توجه کنید که $d(\frac{1}{2}x^2) = x\,dx,\ d(\ln x) = dx/x$.

مثال ۴. $\int_1^e x \ln x\, dx$ را حساب کنید.

حل. با استفاده از (۳') با همان u و dv مثال ۳، داریم

$$\int_1^e x \ln x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\, dx = \frac{1}{2}e^2 \ln e - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^e$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1).$$

مثال ۵. $\int_0^1 \arctan x\, dx$ را حساب کنید.

حل. در اینجا تنها امید ما این است که انتخاب $u = \arctan x\ ,\ dv = dx$ موثر باشد، که هست. در واقع، داریم $du = dx/(x^2+1),\ v = x$ ، و (۳') به صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_0^1 \arctan x\, dx = x \arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, dx$$
$$= \arctan 1 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

برای محاسبهٔ یک انتگرال، اغلب لازم است بیش از یکبار جزء به جزء انتگرالگیری کرد.

مثال ۶ . $\int x^2e^x\,dx$ را حساب کنید .

حل . فرض کنیم $u = x^2, dv = e^x\,dx$. پس $du = 2x\,dx, v = e^x$ ، و انتگرالگیری جزءبه جزء نتیجه می‌دهد که

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx. \tag{۵}$$

برای محاسبهٔ انتگرال سمت راست ، مجدداً ، با انتخاب $u = x, dv = e^x\,dx, du = dx, v = e^x$ جزءبه‌جزء انتگرال می‌گیریم :

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + k \tag{۶}$$

(k دلخواه) . با گذاردن (۶) در (۵) ، خواهیم داشت

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

($C = -2k$ دلخواه) .

گاهی روش انتگرالگیری جزء به جزء به معادله‌ای ختم می‌شود که می‌توان آن را نسبت به انتگرال داده شده حل کرد .

مثال ۷ . $\int \sec^3 x\,dx$ را حساب کنید .

حل . فرض کنیم $u = \sec x, dv = \sec^2 x\,dx$. پس $du = \sec x \tan x\,dx, v = \tan x$ ، و انتگرالگیری جزء به جزء نتیجه می‌دهد که

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x\,dx.$$

چون $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ، این را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x\,dx,$$

یعنی ،

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx,$$

که در آن انتگرال $\int \sec^3 x\,dx$ که می‌خواهیم آن را حساب کنیم سمت راست با علامت مخالف

ظاهر شده و می‌توان معادله را نسبت به آن حل کردا با این کار فورا " معلوم می‌شود که

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\int \sec x\,dx.$$

با استفاده از فرمول مربوط به $\int \sec x\,dx$ که قبلا " در مثال ۴ ، صفحهٔ ۵۹۵ ، به دست آمد ، بالاخره خواهیم داشت

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C. \tag{۷}$$

مثال ۸ . $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ $(ab \neq 0)$ را حساب کنید .

حل . ابتدا انتخاب می‌کنیم

$$u = e^{ax}, \qquad dv = \cos bx\,dx, \qquad du = ae^{ax}\,dx, \qquad v = \frac{\sin bx}{b},$$

و انتگرالگیری جزء به جزء نتیجه می‌دهد که

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx. \tag{۸}$$

با آنکه انتگرال سمت راست به مشکلی انتگرالی است که می‌خواهیم حساب کنیم ،آن‌را جزء به جزء ، این بار با اختیار

$$u = e^{ax}, \qquad dv = \sin bx\,dx, \qquad du = ae^{ax}\,dx, \qquad v = -\frac{\cos bx}{b}$$

انتگره می‌کنیم . درنتیجه ، خواهیم داشت

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx, \tag{۸'}$$

و با گذاردن (۸') در (۸) ، نتیجه می‌گیریم که

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} + \frac{ae^{ax}\cos bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

حال می‌توان معادله را نسبت به انتگرال $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ ، که سمت راست تکرارشده‌است، حل کرد و به دست آورد

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\frac{a\cos bx + b\sin bx}{b^2},$$

یا معادلاً "

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} + C, \qquad (۹)$$

که در آن C ثابت دلخواهی است[۱]. به همین نحو، با گذاردن (۸) در (۸') و حل معادلهٔ حاصل نسبت به $\int e^{ax}\sin bx\,dx$، فرمول همتای

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2} + C \qquad (۹')$$

را به دست می‌آوریم.

مسائل

انتگرالهای زیر را با استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء حساب کنید.

۱. $\int x\cos x\,dx$ ✓
۲. $\int (x-1)\ln x\,dx$ ✓
۳. $\int x^2\ln x\,dx$ ✓
۴. $\int xe^{-2x}\,dx$ ✓
۵. $\int \arcsin x\,dx$ ✓
۶. $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ ✓
۷. $\int e^{-x}\sin 2x\,dx$ ✓
۸. $\int \sinh^{-1} x\,dx$ ✓
۹. $\int (\ln x)^2\,dx$ ✓
۱۰. $\int x3^x\,dx$ ✓
۱۱. $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$ ✓
۱۲. $\int x^2\sin 2x\,dx$ ✓
۱۳. $\int \sin x\cos 2x\,dx$ ✓
۱۴. $\int x^5\ln x\,dx$ ✓
۱۵. $\int x^3\cos x\,dx$ ✓
۱۶. $\int x\csc^2 x\,dx$ ✓

---

۱. هر انتگرال نامعین فقط با تقریب ثابت انتگرالگیری دلخواهی تعریف شده‌است، و اغلب شایسته است که این ثابت را در آخر محاسبات "آورد" (یعنی، اضافه کرد).

۱۷. $\int x \operatorname{sech}^2 x\, dx$

۱۸. $\int x^2 \sinh x\, dx$

۱۹. $\int x\sqrt{2x+3}\, dx$

۲۰. $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$

۲۱. $\int \csc^3 x\, dx$

۲۲. $\int x^3 e^{-x^2}\, dx$

۲۳. $\int \sin(\ln x)\, dx$

۲۴. $\int x(x+1)^9\, dx$

۲۵. $\int_0^1 xe^{-x}\, dx$

۲۶. $\int_0^{e-1} \ln(x+1)\, dx$

۲۷. $\int_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx$

۲۸. $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin x\, dx$

۲۹. $\int_0^{\pi} x^3 \sin x\, dx$

۳۰. $\int_1^2 x \log_2 x\, dx$

۳۱. $\int_1^e (\ln x)^3\, dx$

۳۲. $\int_0^{\pi/4} y \sec^2 y\, dy$

۳۳. $\int_{-1}^1 \arccos z\, dz$

۳۴. فرض کنید f دارای مشتق دوم پیوستهٔ f'' بر $[a, b]$ باشد. نشان دهید که

$$\int_a^b xf''(x)\, dx = [bf'(b) - f(b)] - [af'(a) - f(a)].$$

مساحت A ناحیهٔ R بین منحنیهای زیر را بیابید.

۳۵. $y = \ln x$ و $y = (\ln x)^2$

۳۶. $y = x \ln x$ و $y = (4 \ln x)/x$

در هر حالت، ناحیهٔ R را رسم نمایید.

۳۷. فرض کنید توابع $u = u(x)$ و $v = v(x)$ دارای مشتقات پیوستهٔ $u', v', u'', v'', \ldots, u^{(n)}, v^{(n)}, u^{(n+1)}, v^{(n+1)}$ از هر مرتبه تا $n+1$ باشند. نشان دهید که

$$\int uv^{(n+1)}\, dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n u^{(n)} v + (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)} v\, dx. \quad \text{(یک)}$$

۳۸. فرض کنید $u = u(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n بوده، و تابع $v = v(x)$ دارای مشتقات پیوستهٔ $v', v'', \ldots, v^{(n)}, v^{(n+1)}$ از تمام مراتب تا $n+1$ باشد. نشان دهید که

$$\int uv^{(n+1)}\,dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n u^{(n)}v + C. \qquad (\text{یکَ})$$

با استفاده از این فرمول، $\int x^5 \sin x\,dx$ و $\int x^4 e^x\,dx$ را حساب کنید.

۳۹. نشان دهید

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx,$$

که در آن m و n اعداد صحیح‌مثبت‌دلخواهی می‌باشند. سپس این انتگرال‌را محاسبه نمایید.

۳.۷ فرمولهای تحویل

با استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء می‌توان *فرمولهای تحویل* را ثابت کرد؛ یعنی، فرمولهایی که در آنها انتگرالهای مستلزم توانهایی‌از یک‌عبارت برحسب‌انتگرالهای‌مستلزم توانهای پایین آن عبارت بیان شده‌اند.

مثال ۱. نشان دهید که

$$(1) \quad \int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

حل. با اختیار $u = \sin^{n-1} x,\ dv = \sin x\,dx$، جزء به جزء انتگرال می‌گیریم. در این صورت، $du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,dx,\ v = -\cos x$، و

$$\int \sin^n x\,dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx.$$

اما $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$؛ درنتیجه،

$$\int \sin^n x\,dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx,$$

که در آن جملهٔ آخر سمت راست شامل انتگرالی است که می‌خواهیم حساب کنیم. با بردن

این جمله به طرف چپ معادله و تلفیق دو جملهٔ شامل $\int \sin^n x\,dx$ ، فرمول زیر به‌دست می‌آید :

$$n\int \sin^n x\,dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx,$$

که با (۱) معادل است .

مثال ۲ . نشان دهید که

$$(۲)\quad \int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

حل . فرض‌کنیم $u = \cos^{n-1} x,\ dv = \cos x\,dx$ ،و جزء به‌جزء انتگرال می‌گیریم . جزئیات همانند مثال ۱ است ، و به عنوان تمرین گذارده می‌شود .

با کاربرد مکرر فرمولهای‌تحویل (۱) و (۲) ،می‌توان محاسبهٔانتگرالهای $\int \sin^n x\,dx$ و $\int \cos^n x\,dx$ را به محاسبهٔ یکی از انتگرالهای آسان $\int dx$ ، $\int \sin x\,dx$ ، و $\int \cos x\,dx$ تحویل کرد .

مثال ۳ . $\int \sin^4 x\,dx$ را حساب کنید .

حل . در فرمول (۱) ابتدا $n = 4$ و سپس $n = 2$ را اختیار می‌کنیم ، به دست می‌آید

$$\int \sin^4 x\,dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx$$

و

$$\int \sin^2 x\,dx = -\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}\int dx.$$

بنابراین ، پس از گذاردن به جای $\int \sin^2 x\,dx$ ،

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x\,dx &= -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x - \frac{3}{8}\sin x \cos x + \frac{3}{8}\int dx\\ &= -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x - \frac{3}{8}\sin x \cos x + \frac{3}{8}x + C.\end{aligned}$$

مثال ۴. $\int \cos^5 x\,dx$ را حساب کنید.

حل. در فرمول (۲) ابتدا $n = 5$ و سپس $n = 3$ را اختیار می‌کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$\int \cos^5 x\,dx = \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{5}\int \cos^3 x\,dx$$

و

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\int \cos x\,dx.$$

بنابراین، پس از گذاردن به جای $\int \cos^3 x\,dx$،

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x\,dx &= \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{15}\cos^2 x \sin x + \frac{8}{15}\int \cos x\,dx\\ &= \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{15}\cos^2 x \sin x + \frac{8}{15}\sin x + C.\end{aligned}$$

مثال ۵. نشان دهید که

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, \qquad (۳)$$

که در آن $n = 1, 2, \ldots$ و می‌توان فرض کرد $a > 0$.

حل. با انتخاب

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, \qquad dv = dx, \qquad du = -\frac{2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx, \qquad v = x$$

انتگرال سمت راست را جزء به جزء انتگره می‌کنیم. این کار نتیجه می‌دهد که

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx.$$

اما $x^2 = (x^2+a^2) - a^2$؛ و درنتیجه،

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx &= \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx\\ &= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}.\end{aligned}$$

از تلفیق دو معادلهٔ اخیر خواهیم داشت

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - 2na^2 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}},$$

که با (۳) معادل می‌باشد.

با کاربرد مکرر فرمول تحویل (۳)، می‌توان محاسبهٔ انتگرال سمت چپ را به‌محاسبهٔ انتگرال معلوم

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \tag{۴}$$

تحویل کرد (ر.ک. ص ۴۷۰). لذا، با انتخاب $n = 1, 2, \ldots$ در فرمول (۳)، خواهیم داشت

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a} + C, \tag{۵}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$$

$$= \frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5}\arctan\frac{x}{a} + C, \tag{۶}$$

و غیره. درواقع، ثابت C در (۵) $1/2a^2$ برابر ثابت C در (۴) است، ثابت C در (۶) $3/4a^2$ برابر ثابت C در (۵) است ولی لازم نیست آن را تصریح کنیم، زیرا هرکدام یک ثابت انتگرالگیری دلخواه است.

مسائل

فرمول تحویل داده شده را، که در آن n عدد صحیح مثبت دلخواهی است، تحقیق کنید.

۱. $\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$

۲. $\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$

۳. $\int x^n \sin x\,dx = -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx$

۴. $\int x^n \cos x\,dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x\,dx$

انتگرالهای زیر را با استفاده از یک فرمول تحویل حساب کنید .

۵. $\int \cos^4 x\,dx$

۶. $\int \sin^5 x\,dx$

۷. $\int x^5 e^x\,dx$

۸. $\int (\ln x)^3\,dx$

۹. $\int x^4 \sin x\,dx$

۱۰. $\int x^6 \cos x\,dx$

۱۱. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$

۱۲. $\int \frac{e^x}{(e^{2x}+1)^3}\,dx$

۱۳. نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح زوج $n > 0$ ،

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{n-1}{n}\frac{\pi}{2} \qquad (n = 2, 4, \ldots) \qquad \text{(یک)}$$

لذا ، مثلاً ،

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}.$$

همچنین ، نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح فرد $n > 1$ ، بدون عاملی از $\pi/2$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{2}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{n-1}{n} \qquad (n = 3, 5, \ldots), \qquad \text{(یک')}$$

لذا ، مثلاً ،

$$\int_0^{\pi/2} \sin^7 x\,dx = \frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7} = \frac{16}{35}.$$

۱۴. با استفاده از مسئلهٔ ۵۶ ، صفحهٔ ۶۰۲ ، نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح نامنفی n ،

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$$

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۱۵. $\int_0^{\pi/2} \sin^{10} x\,dx$

۱۶. $\int_0^{\pi/2} \cos^{12} x\,dx$

۱۷. $\int_0^{\pi/4} \sin^5 x \cos^5 x\,dx$

۱۸. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{14} t\,dt$

۱۹. $\int_0^{\pi} \sin^{15} u\, du$

۲۰. $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^9 v\, dv$

۲۱. فرمول تحویل زیر را تحقیق کنید:

$$\int x^a (\ln x)^n\, dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} (\ln x)^n - \frac{n}{a+1} \int x^a (\ln x)^{n-1}\, dx, \qquad \text{(دو)}$$

که در آن $a \neq -1$ و n عدد صحیح مثبت دلخواهی است.

تذکار. حالت $a = -1$ به آسانی اثبات می‌شود، زیرا

$$\int x^{-1} (\ln x)^n\, dx = \int (\ln x)^n\, d(\ln x) = \frac{1}{n+1} (\ln x)^{n+1} + C.$$

انتگرالهای زیر را با استفاده از فرمول (دو) حساب کنید.

۲۲. $\int x^3 (\ln x)^2\, dx$

۲۳. $\int \sqrt{x} (\ln x)^3\, dx$

۲۴. $\int_1^e x (\ln x)^3\, dx$

۲۵. $\int_e^3 x^2 (\ln x)^2\, dx$

۲۶. فرمولهای تحویل زیر را تحقیق کنید:

$$\int \tan^n x\, dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\, dx,$$

$$\int \sec^n x\, dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-1} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x\, dx,$$

که در آنها n عدد صحیح دلخواهی بزرگتر از 1 است.

۴.۷ انتگرالهای مثلثاتی

انتگرالدههای به شکل $\sin^p x \cos^q x$. انتگرالهایی که انتگرالده آنها ترکیبی از توابع مثلثاتی‌اند *انتگرالهای مثلثاتی* نام دارند، و چندتایی از آنها قبلاً در بخشهای قبل حساب شده‌اند. اکنون به حالتی می‌پردازیم که در آن انتگرالده حاصلضربی از توانهای توابع مثلثاتی است. با انتگرال

$$\int \sin^p x \cos^q x\, dx,$$

مستلزم دو مؤلفهٔ p و q آغاز می‌کنیم. اگر یکی از نماهای p , q عدد صحیح فرد مثبتی باشد، یا هر دو نما اعداد صحیح زوج مثبتی باشند، محاسبهٔ انتگرال فوق آسان است. در

حالت اول، از یکی از اتحادهای

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \qquad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \tag{۱}$$

استفاده کرده، انتگرالده را به شکل $f(\sin x)\cos x$ یا $f(\cos x)\sin x$ درمی‌آوریم و سپس انتگرال را می‌توان با جانشانی $u = \sin x$ یا $u = \cos x$ حساب کرد. در حالت‌دوم از اتحادهای

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \tag{۲}$$

چند بار استفاده کرده، تمام توانهای بزرگتر از یک $\sin x$ و $\cos x$ را حذف می‌نماییم. مثالهای زیر این تکنیکها را توضیح می‌دهند.

مثال ۱. $\int \sin^4 x \cos^7 x\,dx$ را حساب کنید.

حل. در اینجا $p = 4$، $q = 7$، و q یک عدد صحیح فرد مثبت است. عامل $\cos x$ را از $\cos^7 x$ جدا، و سپس از دومین فرمول (۱) استفاده کرده، عامل باقیماندهٔ $\cos^6 x$ را کاملا" برحسب $\sin x$ بیان می‌کنیم. این نتیجه می‌دهد که

$$\int \sin^4 x \cos^7 x\,dx = \int \sin^4 x \cos^6 x \cos x\,dx$$
$$= \int \sin^4 x\,(1 - \sin^2 x)^3 \cos x\,dx.$$

حال انتگرالده به‌شکل $f(\sin x)\cos x$ است؛ و درنتیجه، جانشانی $u = \sin x,\ du = \cos x\,dx$ موثر می‌باشد. به‌طور مشروح،

$$\int \sin^4 x \cos^7 x\,dx = \int u^4(1 - u^2)^3\,du = \int u^4(1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6)\,du$$
$$= \int (u^4 - 3u^6 + 3u^8 - u^{10})\,du$$
$$= \frac{1}{5}u^5 - \frac{3}{7}u^7 + \frac{1}{3}u^9 - \frac{1}{11}u^{11} + C$$
$$= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{3}{7}\sin^7 x + \frac{1}{3}\sin^9 x - \frac{1}{11}\sin^{11} x + C.$$

مثال ۲. $\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}}\, dx$ را حساب کنید.

حل. در اینجا $p = 5$, $q = -\frac{1}{2}$، و p عدد صحیح فرد مثبتی است. عامل $\sin x$ را از $\sin^5 x$ جدا کرده و سپس، با استفاده از فرمولهای (۱)، عامل باقیماندهٔ $\sin^4 x$ را کاملاً برحسب $\cos x$ بیان می‌کنیم. درنتیجه، خواهیم داشت

$$\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}}\, dx = \int \frac{\sin^4 x}{\sqrt{\cos x}} \sin x\, dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x)^2}{\sqrt{\cos x}} \sin x\, dx.$$

حال انتگرالده به‌شکل $f(\cos x) \sin x$ است؛ و درنتیجه، جانشانی $u = \cos x,\ du = -\sin x\, dx$ موثر است. به‌طور مشروح،

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}}\, dx &= -\int \frac{(1 - u^2)^2}{\sqrt{u}}\, du = -\int \frac{u^4 - 2u^2 + 1}{\sqrt{u}}\, du \\
&= -\int (u^{7/2} - 2u^{3/2} + u^{-1/2})\, du \\
&= -\frac{2}{9} u^{9/2} + \frac{4}{5} u^{5/2} - 2u^{1/2} + C \\
&= -\frac{2}{9} (\cos x)^{9/2} + \frac{4}{5} (\cos x)^{5/2} - 2(\cos x)^{1/2} + C.
\end{aligned}$$

مثال ۳. $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$ را حساب کنید.

حل. در اینجا $p = 2$, $q = 4$، و هر دو نما اعداد صحیح زوج مثبتی هستند. بنابراین، نماهای $\sin^2 x$ و $\cos^4 x$ را با استفاده از فرمولهای (۲) پایین می‌آوریم، به صورت زیر:

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)^2\, dx \\
&= \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x)(1 + \cos 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos 2x\, dx - \frac{1}{8} \int \cos^2 2x\, dx - \frac{1}{8} \int \cos^3 2x\, dx \\
&= \frac{1}{8} x + \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{8} \int \cos^2 2x\, dx - \frac{1}{8} \int \cos^3 2x\, dx. \qquad (۳)
\end{aligned}$$

دو انتگرال اخیر کمی کار دارند . برای محاسبهٔ $\int \cos^2 2x\,dx$ ، مجدداً از دومین فرمول (۲) استفاده می‌کنیم . از این نتیجه می‌شود که

$$\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x \qquad (۴)$$

(در آخر محاسبات ثابت انتگرالگیری اضافه خواهد شد) . چون انتگرال $\int \cos^3 2x\,dx$ شامل توان فرد مثبتی از $\cos x$ است ، می‌توان آن را به روش مثال ۱ حساب کرد . لذا ،

$$\int \cos^3 2x\,dx = \int \cos^2 2x \cos 2x\,dx = \int (1-\sin^2 2x)\cos 2x\,dx,$$

و با جانشانی $u=\sin 2x,\ du = 2\cos 2x\,dx$ به دست می‌آوریم

$$\int \cos^3 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-u^2)\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{6}u^3 = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{6}\sin^3 2x. \qquad (۵)$$

با گذاردن (۴)و(۵) در (۳) و درج ثابت انتگرالگیری C ، پس از کمی عمل جبری داریم

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

به عنوان تمرین ، نشان دهید که این انتگرال را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$$
$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\sin x\cos^3 x + \frac{1}{16}\sin^3 x\cos x + \frac{1}{6}\sin^3 x\cos^3 x + C,$$

که در آن سینوس و کسینوسهای سمت راست همه دارای شناسهٔ x می‌باشند .

انتگرالدهها به شکل $\tan^p x\sec^q x$. حال به انتگرال

$$\int \tan^p x\sec^q x\,dx,$$

مستلزم دو نمای p و q می‌پردازیم . محاسبهٔ این انتگرال وقتی p عدد صحیح فرد مثبت یا q عدد صحیح زوج مثبتی باشد آسان است . در حالت اول از اتحاد

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1 \qquad (۶)$$

استفاده کرده انتگرالده را به شکل $f(\sec x)\sec x\tan x$ درآورده ، و سپس با جانشانی $u=\sec x$ آن را حساب می‌کنیم . در حالت دوم ، از اتحاد

$$\sec^2 x = \tan^2 x + 1 \qquad (۷)$$

استفاده کرده انتگرالده را به شکل $f(\tan x)\sec^2 x$ درمی‌آوریم ، و سپس آن را باجانشانی

$u = \tan x$ حساب می‌کنیم .

مثال ۴ . $\int \sqrt{\tan x} \sec^4 x\, dx$ را حساب کنید .

حل . در اینجا $p = \frac{1}{2}$, $q = 4$ ، و q عدد صحیح زوج مثبتی است . عامل $\sec^2 x$ را از $\sec^4 x$ جدا کرده و، با استفاده از فرمول (۷) ، عامل باقیماندهٔ $\sec^2 x$ را برحسب $\tan x$ بیان نمایید . این کار نتیجه می‌دهد که

$$\int \sqrt{\tan x} \sec^4 x\, dx = \int (\sqrt{\tan x} \sec^2 x) \sec^2 x\, dx$$
$$= \int \sqrt{\tan x} (\tan^2 x + 1) \sec^2 x\, dx.$$

با جانشانی $u = \tan x$, $du = \sec^2 x\, dx$ مآلا" خواهیم داشت

$$\int \sqrt{\tan x} \sec^4 x\, dx = \int \sqrt{u}(u^2 + 1)\, du = \int (u^{5/2} + u^{1/2})\, du$$
$$= \frac{2}{7} u^{7/2} + \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{2}{7} (\tan x)^{7/2} + \frac{2}{3} (\tan x)^{3/2} + C.$$

مثال ۵ . $\int \tan^3 x \sec^5 x\, dx$ را حساب کنید .

حل . در اینجا $p = 3$, $q = 5$ ، و p عدد صحیح فرد مثبتی است ، ولی q عدد صحیح زوج مثبتی نیست . لذا ، شایسته است عامل $\sec x \tan x$ را از انتگرالده جدا کرده‌و ، بااستفاده از فرمول (۶) ، عامل باقیمانده را کلا" برحسب $\sec x$ بیان کنیم . به‌طور مشروح ،

$$\int \tan^3 x \sec^5 x\, dx = \int \tan^2 x \sec^4 x (\sec x \tan x)\, dx$$
$$= \int (\sec^2 x - 1) \sec^4 x (\sec x \tan x)\, dx$$
$$= \int (\sec^6 x - \sec^4 x) \sec x \tan x\, dx.$$

در این صورت ، جانشانی $u = \sec x, du = \sec x \tan x\, dx$ نتیجه می‌دهد که

$$\int \tan^3 x \sec^5 x\,dx = \int (u^6 - u^4)\,du = \frac{1}{7}u^7 - \frac{1}{5}u^5 + C$$
$$= \frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{1}{5}\sec^5 x + C.$$

مثال ۶ . $\int \tan^2 x \sec^3 x\,dx$ را حساب کنید .

حل . نکات فوق در اینجا به کار نمی‌آیند ، زیرا $p = 2$ زوج و $q = 3$ فرد است ،ولی ابزار محاسبهٔ انتگرال در دست ماست . ابتدا ملاحظه می‌کنیم که ، به کمک فرمول (۶) ،

$$\int \tan^2 x \sec^3 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec^3 x\,dx$$
$$= \int \sec^5 x\,dx - \int \sec^3 x\,dx. \tag{۸}$$

برای محاسبهٔ انتگرال $\int \sec^5 x\,dx$ ، با انتخاب $u = \sec^3 x,\ dv = \sec^2 x\,dx$ جزء به جزء انتگرالگیری می‌کنیم . در این صورت ،

$$du = 3\sec^3 x \tan x\,dx, \qquad v = \tan x,$$

و

$$\int \sec^5 x\,dx = \sec^3 x \tan x - 3\int \tan^2 x \sec^3 x\,dx, \tag{۹}$$

که در آن انتگرال مورد محاسبه مجددا " سمت راست ظاهر می‌شود با گذاردن (۹) در (۸) و حل نسبت به این انتگرال ، داریم

$$\int \tan^2 x \sec^3 x\,dx = \frac{1}{4}\sec^3 x \tan x - \frac{1}{4}\int \sec^3 x\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\sec^3 x \tan x - \frac{1}{8}\sec x \tan x$$
$$-\frac{1}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C,$$

که در آخرین مرحله از مثال ۷ ، صفحهٔ ۶۰۶ ، استفاده کرده‌ایم . به عنوان تمرین ، همین جواب را با اعمال فرمول تحویل $\int \sec^n x\,dx$ داده شده درمسئلهٔ ۲۶ ، صفحهٔ ۶۱۵ ، به دست آورید .

به‌خاطر توازی موجود بین خواص توابع $\sec x$ ، $\tan x$ و نیز بین $\csc x$, $\cot x$ ، اساساً همین تکنیکها را می‌توان برای محاسبهٔ انتگرال

$$\int \cot^p x \csc^q x\, dx,$$

به کمک فرمولهای

$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1, \tag{۶'}$$

$$\csc^2 x = \cot^2 x + 1 \tag{۷'}$$

به کار برد.

مثال ۷. $\int \cot^3 x \csc^3 x\, dx$ را حساب کنید.

حل. داریم

$$\begin{aligned}\int \cot^3 x \csc^3 x\, dx &= \int \cot^2 x \csc^2 x (\csc x \cot x)\, dx\\ &= -\int (\csc^2 - 1) \csc^2 x\, d(\csc x)\\ &= -\int (\csc^4 x - \csc^2 x)\, d(\csc x)\\ &= -\frac{1}{5}\csc^5 x + \frac{1}{3}\csc^3 x + C,\end{aligned}$$

که در آن تمام عبارت $\csc x$ را متغیر انتگرالگیری گرفته، بدین وسیله از جانشانی صریح $u = \csc x$ احتراز نموده‌ایم.

انتگرالگیری از حاصلضرب سینوسها و کسینوسها با شناسه‌های مختلف

انتگرالهای مثلثاتی

$$\int \sin ax \cos bx\, dx, \qquad \int \cos ax \cos bx\, dx, \qquad \int \sin ax \sin bx\, dx$$

در مسائل کار بستهٔ مربوط به پدیده‌های نوسانی، مانند ارتعاشات مکانیکی و امواج رادیویی، مکرر ظاهر می‌شوند. برای محاسبهٔ انتگرالهای از این نوع، اتحادهای مثلثاتی زیر را به

کار می‌گیریم :

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin (a+b)x + \sin (a-b)x],$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos (a+b)x + \cos (a-b)x],$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos (a-b)x - \cos (a+b)x],$$

که فورا " از قوانین جمع برای توابع سینوس و کسینوس نتیجه می‌شوند (ر.ک.ص ۹۵) .

مثال ۸ . $\int \sin 2x \cos 5x\, dx$ را حساب کنید .

حل . به کمک اولین اتحاد فوق داریم

$$\int \sin 2x \cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int [\sin (2+5)x + \sin (2-5)x]\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \sin 7x\, dx - \frac{1}{2}\int \sin 3x\, dx$$
$$= -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{6}\cos 3x + C.$$

مسائل

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۱ . $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$ ✓

۲ . $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$ ✓

۳ . $\int \sin^3 4x \cos^2 4x\, dx$ ✓

۴ . $\int \sin^5 x \cos^4 x\, dx$

۵ . $\int \sin^7 x \sqrt{\cos x}\, dx$ ✓

۶ . $\int (\sin x)^{2/3} \cos^5 x\, dx$ ✓

۷ . $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\, dx$ ✓

۸ . $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx$ ✓

۹ . $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\, dx$ ✓

۱۰ . $\int_0^{\pi/6} \sin^3 s \cos^3 s\, ds$ ✓

۱۱. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^4 t \, dt$

۱۲. $\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{\cos^5 u}{\sin^4 u} \, du$

۱۳. $\int \tan^3 2x \sec 2x \, dx$

۱۴. $\int \tan^3 x \sec^3 x \, dx$

۱۵. $\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx$

۱۶. $\int \tan^3 x \, dx$

۱۷. $\int \cot^2 x \csc^4 x \, dx$

۱۸. $\int \sec^4 x \, dx$

۱۹. $\int \tan^4 3x \, dx$

۲۰. $\int \cot^3 x \csc x \, dx$

۲۱. $\int \cot^3 x \, dx$

۲۲. $\int_0^{\pi/4} (\tan s)^{3/2} \sec^4 s \, ds$

۲۳. $\int_0^{\pi/3} \tan^3 t \sec t \, dt$

۲۴. $\int_{1/6}^{5/6} \cot^2 \pi u \csc^2 \pi u \, du$

۲۵. $\int \sin 5x \cos 3x \, dx$

۲۶. $\int \cos 4x \cos 5x \, dx$

۲۷. $\int \sin 3x \sin 6x \, dx$

۲۸. $\int \sin \pi x \cos 2\pi x \, dx$

۲۹. $\int \cos \frac{2x}{3} \cos \frac{x}{3} \, dx$

۳۰. $\int \sin \frac{5x}{2} \sin \frac{x}{2} \, dx$

۳۱. $\int_0^{\pi} \sin 3x \cos 4x \, dx$

۳۲. $\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \sin 6y \sin 9y \, dy$

۳۳. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2z \cos 4z \, dz$

۳۴. فرض کنید m و n اعداد صحیح ناصفر دلخواهی باشند. فرمولهای زیر را که در ریاضیات کار بسته اهمیت زیادی دارند تحقیق کنید:

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ ، } m \neq n \text{ اگر} \\ \pi \text{ ، } m = n \text{ اگر} \end{cases}$$

نشان دهید که این فرمولها در اثر تعویض حدود انتگرالگیری $0, 2\pi$ با $-\pi, \pi$ نیز برقرارند .

۵.۷ جانشانیهای مثلثاتی و هذلولوی

مثالهای زیر ما را با نوع جانشانیهای این بخش آشنا می‌سازند .

مثال ۱ . انتگرال نامعین

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \qquad (a > 0)$$

را حساب کنید .

حل . فرض‌کنیم $x = a \sin u$ ، که در آن $-\pi/2 \le u \le \pi/2$. پس $dx = a \cos u\, du$ ، و

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u} = a\sqrt{1 - \sin^2 u} = a\sqrt{\cos^2 u} = a \cos u,$$

زیرا $\cos u$ به ازای مقادیر داده شده از u نامنفی است . بنابراین ،

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \int \cos^2 u\, du.$$

اما

$$\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}\int (\cos 2u + 1)\, du = \frac{1}{4} \sin 2u + \frac{1}{2} u + k$$
$$= \frac{1}{2} \sin u \cos u + \frac{1}{2} u + k,$$

که در آن k ثابت انتگرالگیری دلخواهی است ؛ درنتیجه ،

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} a^2 \sin u \cos u + \frac{1}{2} a^2 u + C, \qquad (۱)$$

که در آن ثابت $C = a^2 k$ نیز دلخواه است . به‌علاوه ،

$$\sin u = \frac{x}{a}, \qquad u = \arcsin \frac{x}{a},$$

$$\cos u = \sqrt{1 - \sin^2 u} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

و با گذاردن این عبـارات $\sin u$ ، $\cos u$ ، و u در (۱) ، مآلا" خواهیم داشت

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C. \qquad (۲)$$

جالب است که از طرف راست (۲) مشتق گرفته و دید که چگونه سه جملهٔ حاصل تلفیق و $\sqrt{a^2 - x^2}$ تشکیل می‌شود .

مثال ۲ . انتگرال معین

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \qquad (۳)$$

حساب کنید .

حل . از رابطهٔ (۲) معلوم می‌شود که

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a}\right]_0^a$$
$$= \frac{1}{2} a^2 \arcsin 1 = \frac{1}{2} a^2 \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} \pi a^2$$

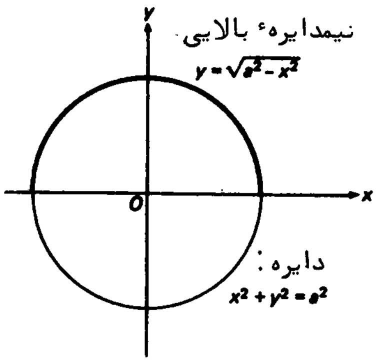
(در مرحلهٔ دوم معلوم می‌شود که سه جمله صفرند) . همچنین ، می‌توان (۳) را مستقیما" بدون محاسبهٔ انتگرال نامعین (۲) حساب کرد . در واقع ، باهمان‌جانشانی $x = a \sin u$ $(-\pi/2 \le u \le \pi/2)$ مثـــال ۱ و توجه به اینکه $x = 0$ ایجاب می‌کند که $u = 0$ در حالی که $x = a$ ایجاب می‌کند که $u = \pi/2$ (جانشانی یک به یک است) ، به دست می‌آوریم

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2\left[\frac{1}{4} \sin 2u + \frac{1}{2} u\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} \pi a^2.$$

راه حتی ساده‌تر برای‌محاسبهٔ انتگرال (۳)تشخیص این است که (۳) مساحت تحت منحنی $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ درربع اول و مساوی‌یکچهارم مساحت A ی محصور به‌دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ به شعاع a و مرکز مبداء است (ر.ک. شکل۱) . اما $A = \pi a^2$ ؛ و لذا ، انتـگرال مساوی $\frac{1}{4}\pi a^2$ می‌باشد .

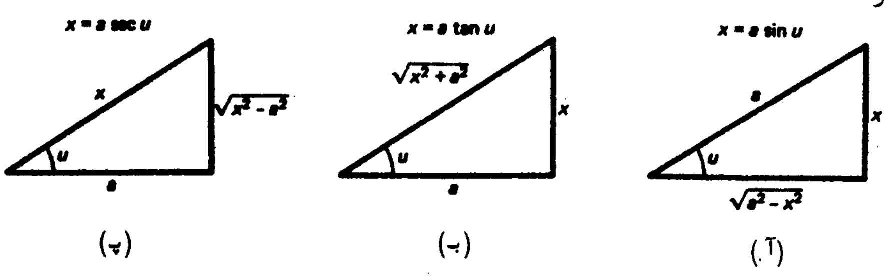
جانشانیهای $x = a \sin u$ ، $x = \tan u$ ، و $x = a \sec u$. به‌طورکلی ، هر انتگرال شامل یکی از عبارات گنگ

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad \sqrt{x^2 + a^2}, \qquad \sqrt{x^2 - a^2} \qquad (a > 0) \qquad (۴)$$



شکل ۱

را غالبا" می‌توان با یک *جانشانی مثلثاتی*، یعنی جانشانی $x = x(u)$ شامل یک تابع مثلثاتی، حساب کرد. شکل ۲ جانشانیهای مناسب این سه حالت را نشان می‌دهد. توجه کنید که در هر قسمت شکل، x و a طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند، و طول ضلع دیگر یکی از عبارات فوق است، و متغیر جدید u یکی از زوایای مثلث (به رادیان) است. در هر مثلث $0 < u < \pi/2$ ،ولی جانشانیهای مذکور به ازای مقادیر دیگری از u نیز کارسازند (ر.ک. زیر). پس از آنکه انتگرال داده شده برحسب متغیر جدید u حساب شد، همان مثلث جانشانیهای لازم برای بازگشت به متغیر اصلی x را پیشنهاد می‌کند. در اینجا فرض می‌کنیم جانشانی $x = x(u)$ یک به یک است، و این با تحدید مناسب مقادیر u تضمین خواهد شد.



شکل ۲

مثلثهای شکل ۲ راه مناسبی برای به‌خاطر آوردن اطلاعات مفصلتر زیرند.

(یک) در یک انتگرال شامل $\sqrt{a^2-x^2}$ جانشانی $x = a\sin u$ را انجام دهید که در آن $-\pi/2 \le u \le \pi/2$. در این صورت، $dx = a\cos u\,du$ ، و

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 u} = a\sqrt{1-\sin^2 u} = a\sqrt{\cos^2 u} = a\cos u,$$

زیرا به ازای این مقادیر u ، $\cos u \geq 0$.اگر عبارت $\sqrt{a^2 - x^2}$ در مخرج‌انتگرالده ظاهر شود ، باید u را به بازهٔ باز $-\pi/2 < u < \pi/2$ تحدید کنیم ، زیرا به‌ازای $u = \pm\pi/2$ ، $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos u$ مساوی صفر است .

(دو) در یک انتگرال شامل $\sqrt{x^2 + a^2}$ جانشانی $x = a \tan u$ را انجام دهید ، که‌در آن $-\pi/2 < u < \pi/2$ (توجه کنید که $\tan u$ به ازای $u = \pm\pi/2$ تعریف نشده است) . در این صورت ، $dx = a \sec^2 u \, du$ ، و

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \tan^2 u + a^2} = a\sqrt{\tan^2 u + 1} = a\sqrt{\sec^2 u} = a \sec u,$$

زیرا به ازای این مقادیر u ، $\sec u \geq 0$.

(سه) در یک انتگرال شامل $\sqrt{x^2 - a^2}$ جانشانی $x = a \sec u$ را انجام دهید که در آن $0 \leq u < \pi/2$ (توجه کنید که $\sec u$ بــه ازای $u = \pi/2$ تعریف نشده است) . در این صورت ، $dx = a \sec u \tan u \, du$ ، و

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 u - a^2} = a\sqrt{\sec^2 u - 1} = a\sqrt{\tan^2 u} = a \tan u,$$

زیرا به ازای این مقادیر u ، $\tan u \geq 0$. همچنین ، u می‌تواند مقادیـر $\pi/2 < u \leq \pi$ را بگیرد ، ولی در این صـورت ، $\sqrt{x^2 - a^2} = a\sqrt{\tan^2 u} = -a \tan u$ ، زیرا به ازای این مقادیر u ، $\tan u \leq 0$.اگر عبارت $\sqrt{x^2 - a^2}$ در مخرج انتگرالده ظاهرشود ،باید مقادیر $u = 0$ و $u = \pi$ را مستثنی‌کنیم ،زیرا $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan u$ به ازای این مقادیر u مساوی صفر است .

باید توجه داشت‌که در هر حالت‌مقادیر u چنان محدود شده‌اند که تابـع $x = x(u)$ یک به یک است . لذا ، در (یک) تابع $x = a \sin u$ درصورتی یک به یک بـا معکـوس $u = \arcsin (x/a)$ اسـت کـه $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$ ، در (دو) تابع $x = a \tan u$ درصورتی یک به یک با معکوس $u = \arctan (x/a)$ است کـه $-\pi/2 < u < \pi/2$ ، و در (سه) تابع $x = a \sec u$ درصورتی یک به یک با معکوس $u = \text{arcsec} (x/a)$ است که $0 \leq u < \pi/2$ یـا $\pi/2 < u \leq \pi$.

جانشانیهای $x = a \sinh u$ و $x = a \cosh u$. اولین عبارت (۴) را می‌توان با جا نشـانی $x = a \cos u$ ،دومین عبارت‌رابا $x = a \cot u$ ،و سومین عبارت را با $x = a \csc u$ نیز ساده کرد (این حکم را ثابت کنید) . اما این جانشانیها زایدند ، زیرا هرکاری‌که‌اینها بتوانند انجام دهند را می‌توان ساده‌تر با جانشانیهای $x = a \sin u$ ، $x = a \tan u$ ،و

$x = a \sec u$ صورت داد. آنچه جالبتر است جانشانیهای هذلولوی $x = a \sinh u$ و $x = a \cosh u$ هستند، که در ساده‌کردن عبارات $\sqrt{x^2 + a^2}$ و $\sqrt{x^2 - a^2}$ $(a > 0)$ به خوبی جانشانیهای مثلثاتی $x = a \tan u$ و $x = a \sec u$ می‌باشند. در واقع، هرگاه $x = a \sinh u$ که در آن $-\infty < u < \infty$، آنگاه $dx = a \cosh u\, du$، و

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \sinh^2 u + a^2} = a\sqrt{\sinh^2 u + 1} = a\sqrt{\cosh^2 u} = a \cosh u,$$

زیرا $\cosh u > 0$، حال آنکه اگر $x = a \cosh u$ که در آن $0 \le u < \infty$، داریم $dx = a \sinh u\, du$، و

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \cosh^2 u - a^2} = a\sqrt{\cosh^2 u - 1} = a\sqrt{\sinh^2 u} = a \sinh u,$$

چرا که اگر u نامنفی باشد، $\sinh u \ge 0$.

مثال ۳. انتگرال زیر را با استفاده از جانشانی هذلولوی حساب کنید:

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx \qquad (a > 0)$$

حل. فرض کنیم $x = a \sinh u$؛ درنتیجه، $dx = a \cosh u$، $\sqrt{x^2 + a^2} = a \cosh u$، و

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = a^2 \int \cosh^2 u\, du.$$

اما

$$\int \cosh^2 u\, du = \frac{1}{2} \int (\cosh 2u + 1)\, du = \frac{1}{4} \sinh 2u + \frac{1}{2} u + C,$$

و لذا،

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{2} a^2 \sinh u \cosh u + \frac{1}{2} a^2 u + C, \qquad (۵)$$

زیرا $\sinh 2u = 2 \sinh u \cosh u$. به‌علاوه،

$$\sinh u = \frac{x}{a}, \qquad u = \sinh^{-1} \frac{x}{a},$$

$$\cosh u = \sqrt{\sinh^2 u + 1} = \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}.$$

با گذاردن این عبارات به جای $\sinh u$ ، $\cosh u$ ،و u در (۵) ،مآلا" خواهیم داشت

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \sinh^{-1} \frac{x}{a} + C. \tag{۶}$$

تشابه بین فرمولهای (۲) و (۶) قابل توجه است . با استفاده از فرمول (۳')،صفحهٔ ۵۷۴، می‌توان (۶) را ، پس از جذب $-\frac{1}{2}a^2 \ln a$ در ثابت انتگرالگیری دلخواه C ، به شکل معادل زیر نوشت :

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C. \tag{۶'}$$

مثال ۴ . مثال ۳ را با جانشانی *مثلثاتی* حل کنید .

حل . فرض کنیم $x = a \tan u, dx = a \sec^2 u\, du$ ؛ درنتیجه ، $\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec u$ ، و به کمک مثال ۷ ، صفحهٔ ۶۰۶ ،

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = a^2 \int \sec^3 u\, du$$
$$= \frac{1}{2} a^2 \sec u \tan u + \frac{1}{2} a^2 \ln |\sec u + \tan u| + C.$$

باتوجه به شکل ۲ (ب) ، که در آن $\tan u = x/a$ ، معلوم می‌شود که

$$\sec u = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}.$$

بنابراین ،

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln \left|\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C$$
$$= \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,$$

و مجددا" ، پس از جذب $-\frac{1}{2}a^2 \ln a$ در C ، رابطهٔ (۶') را خواهیم داشت . (چرا حذف علامت قدرمطلق مجاز است ؟)

مثال ۵ . $\int \frac{dx}{(9x^2 + 4)^{3/2}}$ را حساب کنید .

حل . این بار فرض می‌کنیم $x = \frac{2}{3}\tan u$ ؛ درنتیجه ، $dx = \frac{2}{3}\sec^2 u\, du$ ، و

$$(9x^2+4)^{3/2} = (4\tan^2 u + 4)^{3/2} = 8\sec^3 u.$$

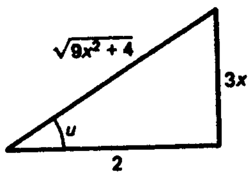
در این صورت ،

$$\int \frac{dx}{(9x^2+4)^{3/2}} = \int \frac{\frac{2}{3}\sec^2 u}{8\sec^3 u}\, du = \frac{1}{12}\int \frac{du}{\sec u}$$

$$= \frac{1}{12}\int \cos u\, du = \frac{1}{12}\sin u + C.$$

معاینهٔ شکل ۳ ، که در آن $\tan u = 3x/2$ ، نشان می‌دهد که

$$\sin u = \frac{3x}{\sqrt{9x^2+4}}.$$



شکل ۳

بنابراین ،

$$\int \frac{dx}{(9x^2+4)^{3/2}} = \frac{x}{4\sqrt{9x^2+4}} + C.$$

به عنوان تمرین ، نشان دهید که جانشانی هذلولوی $x = \frac{2}{3}\sinh u$ به همین جواب ختم می‌شود .

مثال ۶ . انتگرال

$$\int \frac{dx}{(16x^2-25)^{3/2}} \tag{۷}$$

را حساب کنید .

حل . فرض کنیم $x = \frac{5}{4}\sec u$ $(0 < u < \pi/2)$ ؛ درنتیجه ، $dx = \frac{5}{4}\sec u \tan u\, du$ ، و

$$(16x^2-25)^{3/2} = (25\sec^2 u - 25)^{3/2} = 125\tan^3 u.$$

در این صورت ،

$$\int \frac{dx}{(16x^2-25)^{3/2}} = \int \frac{\frac{5}{4}\sec u \tan u}{125\tan^3 u}\,du = \frac{1}{100}\int \frac{du}{\cos u \dfrac{\sin^2 u}{\cos^2 u}}$$

$$= \frac{1}{100}\int \frac{1}{\sin u}\frac{\cos u}{\sin u}\,du = \frac{1}{100}\int \csc u \cot u\,du$$

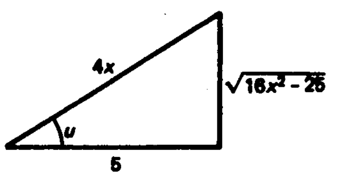
$$= -\frac{1}{100}\csc u + C.$$

با توسل به شکل ۴ ، که در آن $\sec u = 4x/5$ ، معلوم می‌شود که

$$\csc u = \frac{4x}{\sqrt{16x^2-25}},$$

و لذا ،

$$\int \frac{dx}{(16x^2-25)^{3/2}} = -\frac{1}{25}\frac{x}{\sqrt{16x^2-25}} + C,$$



شکل ۴

مشروط براینکه $x > \frac{5}{4}$. بـه‌عنوان تمرین ، نشان دهید که همین فرمول بـه ازای $x < -\frac{5}{4}$ برقرار است .

مثال ۷ . مثال ۶ را با جانشانی هذلولوی حل کنید .

حل . فرض کنیم $x = \frac{5}{4}\cosh u$ $(0 \le u < \infty)$ ؛ درنتیجه ، $dx = \frac{5}{4}\sinh u\,du$ ، و

$$(16x^2-25)^{3/2} = (25\cosh^2 u - 25)^{3/2} = 125\sinh^3 u.$$

در این صورت ،

$$\int \frac{dx}{(16x^2-25)^{3/2}} = \int \frac{\frac{5}{4}\sinh u}{125\sinh^3 u}\,du = \frac{1}{100}\int \frac{du}{\sinh^2 u}$$
$$= \frac{1}{100}\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\frac{1}{100}\coth u + C$$
$$= -\frac{1}{100}\frac{\cosh u}{\sinh u} + C.$$

اما

$$\cosh u = \frac{4x}{5}, \qquad \sinh u = \frac{\sqrt{16x^2-25}}{5},$$

و درنتیجه ، مثل قبل ،

$$\int \frac{dx}{(16x^2-25)^{3/2}} = -\frac{1}{100}\frac{4x}{5}\frac{5}{\sqrt{16x^2-25}} + C = -\frac{1}{25}\frac{x}{\sqrt{16x^2-25}} + C.$$

این حالت $x > \frac{5}{4}$ را سامان می‌دهد ،وحالت $x < -\frac{5}{4}$ را می‌توان‌باجانشانی $x = -\frac{5}{4}\cosh u$ سامان داد (بیشتر توضیح دهید) .

مثال ۸ . $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ را حساب کنید .

حل . در اینجا زیر رادیکال توان اول x وجود دارد ، ولی می‌توان آن را با کامل‌کردن‌مربع از بین برد . در واقع ،

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = y^2 + \frac{3}{4},$$

که در آن $y = x + \frac{1}{2}$ ؛ و درنتیجه ،

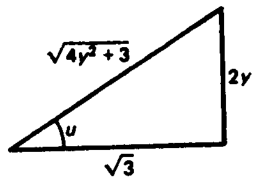
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+\frac{3}{4}}}$$

$(dx = dy)$. برای محاسبهٔ انتگرال طرف راست ، قرار می‌دهیم $y = (\sqrt{3}/2)\tan u$. در این صورت ، $dy = (\sqrt{3}/2)\sec^2 u\,du, \sqrt{y^2+\frac{3}{4}} = (\sqrt{3}/2)\sec u$ و ، به کمک مثال ۴ ، صفحهٔ ۵۹۵ ،

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+\frac{3}{4}}} = \int \frac{\sec^2 u}{\sec u}\,du = \int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C.$$

معاینهٔ شکل ۵ ، که در آن $\tan u = 2y/\sqrt{3}$ ، نشان می‌دهد که

$$\sec u = \frac{\sqrt{4y^2+3}}{\sqrt{3}},$$



شکل ۵

و درنتیجه ، پس‌از جذب $-\ln\sqrt{3}$ در ثابت دلخواه انتگرالگیری C ،

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+\frac{3}{4}}} = \ln\left|\frac{\sqrt{4y^2+3}}{\sqrt{3}}+\frac{2y}{\sqrt{3}}\right| + C = \ln\left(\sqrt{4y^2+3}+2y\right)+C$$

(حذف علامت قدرمطلق را توجیه کنید) . با مراجعه به متغیر اصلی x ، داریم

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} &= \ln\left[\sqrt{4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+3}+2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+C\\ &= \ln\left[\sqrt{4x^2+4x+4}+2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+C\\ &= \ln\left(\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}\right)+\ln 2+C.\end{aligned}$$

بالاخره ، با جذب $\ln 2$ در C ، به دست می‌آوریم

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \ln\left(\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}\right)+C.$$

مثال ۹ . $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$ را حساب کنید .

حل . عبارت $4x - x^2$ را مربع کامل می‌کنیم ، به دست می‌آید

$$4x - x^2 = 4-(x-2)^2 = 4-y^2,$$

که در آن $y = x-2$. در این صورت ، $x = 2+y,\ dx = dy$ ، و

$$\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx = \int_{-1}^1 \frac{2+y}{\sqrt{4-y^2}}\,dy$$
$$= 2\int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} + \int_{-1}^1 \frac{y}{\sqrt{4-y^2}}\,dy.$$

دومین انتگرال مجموع سمت راست مساوی صفر است، زیرا انتگرالده فرد بوده و بازهٔ انتگرالگیری نسبت به مبداء متقارن است. برای محاسبهٔ انتگرال اول، از فرمول (۲')، صفحهٔ ۴۶۸، استفاده کرده به دست می‌آوریم

$$\int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = \left[\arcsin\frac{y}{2}\right]_{-1}^1 = 2\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

لذا، بالاخره،

$$\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx = \frac{2\pi}{3}.$$

در بعضی حالات، انتگرالی که قابل محاسبه با جانشانی مثلثاتی یا هذلولوی‌است‌را می‌توان با جانشانی جبری ساده‌تری حساب کرد، و لازم است همیشه آمادهٔ این امکان باشیم. مثلاً، با جانشانی مثلثاتی $x = 2\sin u$ معلوم می‌شود که

$$\int x\sqrt{4-x^2}\,dx = 8\int \cos^2 u \sin u\,du$$
$$= -\frac{8}{3}\cos^3 u + C = -\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2} + C,$$

ولی جانشانی جبری $u = 4 - x^2$ سر راست‌تر، و درنتیجه ارجح، می‌باشد:

$$\int x\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du$$
$$= -\frac{1}{3}u^{3/2} + C = -\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2} + C.$$

لازم است متذکر شویم که یک جانشانی مثلثاتی یا هذلولوی اغلب به کشف فرمولی منتهی می‌شود که از قبل معلوم است. مثلاً، با جانشانی مثلثاتی $x = \sin u$ معلوم می‌شود که

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos u}{\cos u}\,du = \int du = u + C = \arcsin x + C,$$

که همان فرمول (۲)، صفحهٔ ۴۶۸، است، حال آنکه جانشانی مثلثاتی $x = \tan u$ نتیجه

می‌دهد که

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int \frac{\sec^2 u}{\sec^2 u}\, du = \int du = u + C = \arctan x + C,$$

که همان‌فرمول (۶) ، صفحهٔ ۴۷۰ ، می‌باشد . به‌همین نحو ، جانشانی هذلولوی $x = 3 \sinh u$ نتیجه می‌دهد که

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \int \frac{3 \cosh u}{3 \cosh u}\, du = \int du = u + C = \sinh^{-1} \frac{x}{3} + C,$$

که حالت خاصی از فرمول (۲') ، صفحهٔ ۵۷۴ ، می‌باشد . لذا ، اغلب طرق مختلفی برای محاسبهٔ یک انتگرال وجود دارد ، و باید راهی را اختیار کنید که از همه مؤثرتر باشد . همواره می‌توان با مشتقگیری تحقیق کرد که انتگرال درست حساب شده است یا نه .

مسائل

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۱ . $\int \sqrt{1-9x^2}\, dx$

۲ . $\int \sqrt{4x^2+25}\, dx$

۳ . $\int \sqrt{16x^2-1}\, dx$

۴ . $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

۵ . $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+64}}$

۶ . $\int \frac{dx}{\sqrt{36x^2-49}}$

۷ . $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-3x^2}}\, dx$

۸ . $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-25}}\, dx$

۹ . $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$

۱۰ . $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-100x^2}}$

۱۱ . $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-2}}$

۱۲ . $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$

۱۳ . $\int \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}\, dx$

۱۴ . $\int (1-x^2)^{3/2}\, dx$

۱۵ . $\int (x^2-1)^{3/2}\, dx$

۱۶ . $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\, dx$

۱۷ . $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}\, dx$

۱۸ . $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{5/2}}$

۱۹. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}}$

۲۰. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2x+2}\,dx$

۲۱. $\displaystyle\int \sqrt{2x-x^2}\,dx$

۲۲. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+6}}$

۲۳. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$

۲۴. $\displaystyle\int \frac{dx}{(4x^2+8x-1)^{3/2}}$

۲۵. $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \sqrt{x^2-x+1}\,dx$

۲۶. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{ds}{\sqrt{4-2s-s^2}}$

۲۷. $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{t}{\sqrt{t^2+2t+5}}\,dt$

۲۸. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{12+4x-x^2}}\,dx$

۲۹. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{ds}{s^2\sqrt{9-s^2}}$

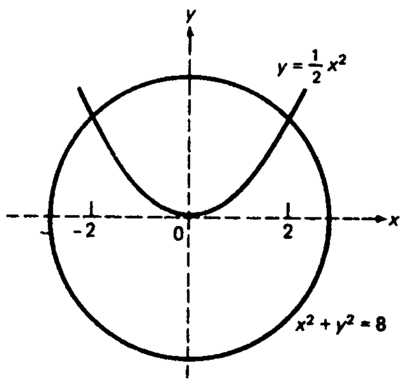
۳۰. $\displaystyle\int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{dt}{t(t^2+1)}$

۳۱. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^u}{\sqrt{e^{2u}-1}}\,du$

۳۲. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin v}{\sqrt{\cos^2 v+1}}\,dv$

۳۳. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \frac{\sec^2 w}{\sqrt{4-\tan^2 w}}\,dw$

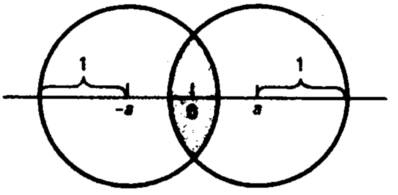
۳۴. مساحات دو ناحیه‌ای را بیابید که سهمی $y=\frac{1}{2}x^2$ درون دایرهٔ $x^2+y^2=8$ را تقسیم می‌کند (ر.ک. شکل ۶).



شکل ۶

۳۵. مراکز دو قرص مستدیر به شعاع واحد در فاصلهٔ $2a$ از هم قرار دارند $(0 \le a \le 1)$.

مساحت A ی ناحیه‌ای را بیابید که دو قرص روی هم قرار گرفته‌اند (ناحیهٔ لنـزی شکل ۷) .



شکل ۷

۳۶. نشان دهید که به ازای $|x| \ge a > 0$ ،

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2} a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

۳۷. مساحت A ی قطاع هذلولوی POQ نموده شده در شکل ۱۹ (ب) ، صفحهٔ ۵۶۶ ، را بیابید .

راهنمایی . توجه کنید که $A = \frac{1}{2}\cosh\theta \sinh\theta - \int_1^{\cosh\theta} \sqrt{x^2 - 1}\, dx$.

۳۸. با استفاده از جانشانی مثلثاتی ، فرمول تحویل

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n - 1}{2na^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

(ر.ک. مثال ۵ ، صفحهٔ ۶۱۲) را از فرمول تحویل

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx$$

(ر.ک. مثال۲ ، صفحهٔ ۶۱۱) نتیجه بگیرید .

۶.۷ انتگرالگیری از توابع گویا ؛ کسرهای جزئی

توابع گویای حقیقی و مجازی . در این بخش طرز انتگرالگیری توابع گویا را نشان‌می‌دهیم . به یاد آورید که یک تابع گویا به صورت خارج قسمت دو چند جمله‌ای تعریف شده است ؛ یعنی ، تابعی به شکل زیر :

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_N x^N} \qquad (a_n \ne 0, b_N \ne 0). \tag{1}$$

صورت $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n است، زیرا $a_n \neq 0$، درحالی که مخرج $Q(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ N است، زیرا $b_N \neq 0$. (همواره فرض است که صورت و مخرج عامل مشترک ندارند، زیرا در غیر این صورت می‌توان عوامل مشترک را از اول حذف کرد.) اگر $n < N$ ، یعنی اگر درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج کمتر باشد، گوییم تابع گویای $R(x)$ حقیقی است. اگر $R(x)$ مجازی باشد، یعنی $n \geq N$ ، می‌توان $Q(x)$ را بر $P(x)$ تقسیم کرده و $R(x)$ را به صورت مجموعی از یک چندجمله‌ای و تابع گویای دیگر $R_1(x)$ با همان مخرج $Q(x)$ بیان کرد، که در آن $R_1(x)$ اینک حقیقی می‌باشد. اما چندجمله‌ایها به‌آسانی انتگره می‌شوند (ر.ک. مثال۶، صفحهٔ ۴۰۳)؛ و درنتیجه، اصل مسئله انتگرالگیری از $R_1(x)$ می‌باشد.

مثال ۱. $\int \frac{x^2+x+1}{x-1}\,dx$ را حساب کنید.

حل. انتگرالده تابعی گویاست ولی مجازی است، زیرا درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج متجاوز است. بنابراین، صورت را بر مخرج تقسیم کرده، به دست می‌آوریم

$$\begin{array}{r|l} & x+2 \\ \hline x-1 & x^2+x+1 \\ & \underline{x^2-x} \\ & \quad 2x+1 \\ & \quad \underline{2x-2} \\ & \qquad 3 \end{array}$$

که در آن $x+2$ خارج‌قسمت و 3 باقیمانده است. لذا،

$$\frac{x^2+x+1}{x-1} = x+2+\frac{3}{x-1},$$

و انتگرالده را به صورت مجموع چندجمله‌ای $x+2$ وتابع‌گویای حقیقی $3/(x-1)$ بیان کرده‌ایم. پس نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{x^2+x+1}{x-1}\,dx = \int (x+2)\,dx + 3\int \frac{dx}{x-1}$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3\ln|x-1| + C,$$

که در آن C ثابت انتگرالگیری است.

مثال ۲. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$ را حساب کنید.

حل. انتگرال مجدداً یک تابع گویای مجازی است، زیرا صورت و مخرج همدرجه می‌باشند. این بار با تقسیم متوالی باتوجه‌به اینکه صورت x^2-1 را می‌توان به شکل $(x^2+1)-2$ نوشت، داریم

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1},$$

بنابراین،

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx = \int dx - 2\int \frac{dx}{x^2+1} = x - 2\arctan x + C.$$

چند جمله‌ای درجهٔ دوم تحویل‌ناپذیر. در مثال ۱ صورت $x-1$ یک چند جمله‌ای خطی است، حال آنکه در مثال ۲ مخرج x^2+1 یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم **تحویل‌ناپذیر** می‌باشد؛ یعنی، یک‌چندجمله‌ای درجهٔ‌دوم‌که قابل‌تجزیه به‌حاصل ضربی ازچند جمله‌ایهای خطی نیست. برای‌آنکه تحویل‌ناپذیری x^2+1 را ببینیم، ملاحظه می‌کنیم‌که‌هرگاه x^2+1 تجزیه‌ای به صورت زیر می‌داشت:

$$x^2+1 = (x-a)(x-b),$$

آنگاه x^2+1 به‌ازای $x=a$ یا $x=b$ صفرمی‌شد؛ یعنی، معادلهٔ‌درجهٔ‌دوم $x^2+1=0$ جواب می‌داشت. اما این ناممکن است، زیرا به ازای هر x حقیقی، $x^2+1 \ge 1 > 0$.

به‌طورکلی، چندجمله‌ای درجهٔ‌دوم x^2+px+q تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2+px+q=0$ جواب (حقیقی) نداشته باشد. بنابر فرمول ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم، این برقرار است اگر و فقط اگر $p^2-4q<0$ یا معادلاً $p^2<4q$. در واقع، اگر $p^2 \ge 4q$، معادلهٔ $x^2+px+q=0$ دارای ریشه‌های $a = \frac{1}{2}(-p+\sqrt{p^2-4q})$ و $b = \frac{1}{2}(-p-\sqrt{p^2-4q})$ است، که درصورت $p^2=4q$ یکی می‌باشند، و در این صورت به آسانی معلوم می‌شود که

$$x^2+px+q = (x-a)(x-b),$$

ولی هرگاه $p^2<4q$، آنگاه به ازای هر x حقیقی،

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right) \ge q - \frac{p^2}{4} > 0$$

تجزیهٔ $Q(x)$. برای بررسی تابع گویای کلی به شکل (۱)، قدم اول تجزیهٔ مخرج

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_N x^N \qquad (b_N \neq 0) \tag{۲}$$

است . در اینجا متکی‌به قضیه‌ای از جبر هستیم‌که می‌گوید **هرچند جمله‌ای با ضرایب حقیقی مانند $Q(x)$ را می‌توان به صورت حاصل‌ضربی از عوامل درجهٔ دوم‌خطی و تحویل ناپذیر نوشت** . به‌طورمشروح، هرگاه N درجهٔ $Q(x)$ باشد ، آنگاه

$$Q(x) = a(x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \cdots (x^2 + p_m x + q_m)^{s_m}, \tag{۳}$$

که در آن $k, m, r_1, \ldots, r_k, s_1, \ldots, s_m$ اعداد صحیح مثبتی هستند به‌طوری که

$$r_1 + \cdots + r_k + 2s_1 + \cdots + 2s_m = N, \tag{۴}$$

و $a, c_1, \ldots, c_k, p_1, q_1, \ldots, p_m, q_m$ ثابتهایی حقیقی‌اند به‌طوری که هر جفت p_i, q_i در شرط تحویل‌ناپذیری $p_i^2 < 4q_i$ صدق‌می‌کند (چرا(۴) برقرار است؟) همچنین ، تجزیهٔ(۳) صرف‌نظر از ترتیب عوامل منحصر به فرد است . البته ، فرض‌است که هیچ دو عامل‌خطی یا عامل درجهٔ دوم در (۳) یکی نیستند .

قضیهٔ زیر ابزار جستجو برای عوامل خطی یک چندجمله‌ای را فراهم می‌سازد .

قضیهٔ ۲ (قضیهٔ عاملی) . چندجمله‌ای $Q(x)$ بر عامل خطی $x - c$ بخشپذیر است اگر و فقط اگر $Q(c) = 0$.

برهان *(اختیاری)* . هرگاه $Q(x)$ بر $x - c$ بخشپذیر باشد ، آنگاه $Q(x) = (x - c)S(x)$ ، که در آن $S(x)$ چندجمله‌ای دیگری است؛ و درنتیجه ،

$$Q(c) = (c - c)S(c) = 0.$$

به عکس، هرگاه $Q(x)$ با (۲) داده شده باشد و $Q(c) = 0$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} Q(x) &= Q(x) - Q(c) \\ &= (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_N x^N) - (b_0 + b_1 c + b_2 c^2 + \cdots + b_N c^N) \\ &= b_1(x - c) + b_2(x^2 - c^2) + \cdots + b_N(x^N - c^N). \end{aligned} \tag{۵}$$

اما

$$x^n - c^n = (x - c)(x^{n-1} + x^{n-2}c + \cdots + xc^{n-2} + c^{n-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots, N).$$

بنابراین ، $x - c$ عامل هر جملهٔ سمت راست (۵) است؛ و درنتیجه ، عاملی از چند جمله‌ای $Q(x)$ نیز هست .

مثال ۳ . $Q(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x - 4$ را تجزیه کنید .

حل . پس‌از کمی آزمایش‌معلوم می‌شودکه $Q(2) = 0$. بنابراین ، $Q(x)$ بر $x - 2$ بخشپذیر است . با تقسیم متوالی معلوم می‌شود که $Q(x) = (x-2)S(x)$ ، که در آن

$$S(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2.$$

با آزمایش بیشتر معلوم می‌شود که $S(-1) = 0$ ؛ درنتیجه ، $S(x)$ بر $x + 1$ بخشپذیر است . این بار با تقسیم خواهیم داشت

$$S(x) = (x+1)(x^2 + 2x + 2),$$

که در آن عامل درجهٔ دوم تحویل‌ناپذیر است (چرا؟) . لذا ، بالاخره ،

$$Q(x) = (x-2)S(x) = (x-2)(x+1)(x^2 + 2x + 2),$$

که به شکل (۳) است بـا $k = 2, m = 1, r_1 = r_2 = s_1 = 1\ (N = 4), a = 1,\ c_1 = 2,$
$c_2 = -1, p_1 = q_1 = 2\ (p_1^2 < 4q_1)$

بسط به صورت کسر جزئی . وقتی مخرج $Q(x)$ تابع گویای داده شدهٔ $R(x)$ تجزیه شد ، می‌توان با استفاده از قضیهٔ زیر (که برهانش حذف شده زیرا نسبتاً فنی بوده و بیشتر جبری است تا متعلق به حساب دیفرانسیل و انتگرال) آمادهٔ انتگرالگیری‌شد . اما صورت و معنی قضیه به‌قدر کافی ساده‌اند . ایده نمایش $R(x)$ به صورت مجموعی از توابع گویای ساده ، به نام *کسرهای جزئی* ، است . این توابع به شکل زیر می‌باشند :

$$\frac{A}{(x-c)^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

یا

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n} \qquad (p^2 < 4q, n = 1, 2, \ldots),$$

و همانطور که ذیلاً می‌بینیم ، انتگرال آنها را می‌توان فوراً حساب کرد . مجموع کسرهای جزئی نمایش $R(x)$ را *بسط به‌صورت کسری جزئی* $R(x)$ می‌نامند .

قضیهٔ ۳ (بسط به صورت کسری جزئی یک تابع گویا) . فرض‌کنیم $R(x)$ *یک تابع گویای حقیقی با مخرج*

$$Q(x) = a(x-c_1)^{r_1} \cdots (x-c_k)^{r_k}(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \cdots (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}$$

باشد ، که در آن هیچ دو عامل خطی یا درجهٔ دوم یکسان نبوده و عوامل درجهٔ دوم همه

تحویل ناپذیرند . در این صورت ، $R(x)$ مجموع k قالب از جملات به شکل زیر است[۱]:

$$\frac{A_1}{x-c_i}+\frac{A_2}{(x-c_i)^2}+\cdots+\frac{A_{r_i}}{(x-c_i)^{r_i}}, \tag{۶}$$

برای هر عامل خطی متمایز $x-c_i$ یکی ، و m قالب به شکل

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+p_ix+q_i}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+p_ix+q_i)^2}+\cdots+\frac{B_{s_i}x+C_{s_i}}{(x^2+p_ix+q_i)^{s_i}}, \tag{۷}$$

برای هر عامل درجهٔ دوم متمایز $x^2+p_ix+q_i$ یکی. ضرایب $A_1,\ldots,A_{r_i}, B_1,\ldots,B_{s_i}, C_1,\ldots,C_{s_i}$ ثابتهایی حقیقی بوده و منحصراً بهوسیلهٔ تابع $R(x)$ معین میشوند.

قالب (۶) فقط از یک جمله ، اولی اگر $r_i=1$ ، تشکیل شدهاست و همین امر درمورد قالب (۷) اگر $s_i=1$ درست است . چندجملهای $Q(x)$ معمولاً معدودی عامل دارد ، و برای ضرایب میتوان نمادسادهتری را پذیرفت . ما از حروف بزرگ $A, B, C, D, E, F, \ldots$ بدون زیرنویس استفاده خواهیم کرد .

یکسانی چندجملهایها . پیش از چند مثال از کاربرد قضیهٔ ۳ باید آخرین ابزار جبری را به دست آوریم .

قضیهٔ ۴ (چندجملهایهای یکسان ضرایب یکساندارند) . *هرگاه دوچندجملهای از x متحداً مساوی باشند ، آنگاه چندجملهایها درجهٔ یکسان داشته و توانهای یکسان از x ضرایب یکسان خواهند داشت . به عبارت دیگر ، هرگاه*

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\equiv b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_Nx^N, \tag{۸}$$

که در آن $a_n\neq 0, b_N\neq 0$ ، آنگاه

$$n=N,\ a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ldots,a_n=b_n$$

برهان *(اختیاری)* . فرض کنیم $n\neq N$. در این صورت ، اگر $n>N$ ، از اتحاد (۸) n بار مشتق میگیریم تا به دست آید $n!a_n=0$ (ر.ک . مثال ۳ ، صفحهٔ ۲۲۵) ، حال آنکه اگر $n<N$ ، از (۸) N بار مشتق گرفته به دست میآوریم $N!b_N=0$. لذا ،اگر $n\neq N$ ، $a_n=0$ یا $b_N=0$ که با فرض متناقض است . پس نتیجه میشود که $n=N$ ؛ درنتیجه ، (۸) شکل زیر را به خود میگیرد :

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\equiv b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n. \tag{۸'}$$

---

۱. *برای زیاد نشدن نمادها ،تمایزی بین ضرایب قالبها بهشکل (۶) یا (۷) نخواهیم گذاشت .*

با فرض $x = 0$ در (۸') فورا" نتیجه می‌شود $a_0 = b_0$. به‌علاوه، با n بار مشتقگیری از (۸') و گذاردن $x = 0$ در معادلات حاصل (جز آخری) به دست می‌آوریم $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$.

مثال ۴. تابع گویای

$$\frac{x^2 + 2}{(x - 2)(x + 1)^2}$$

را به صورت کسرهای جزئی بسط داده، و سپس انتگرال آن را بیابید .

حل. با اعمال قضیهٔ ۳، می‌بینیم که این تابع گویا مجموعی از تنها جملهٔ

$$\frac{A}{x - 2}$$

نظیر به عامل $x - 2$ در مخرج، و قالب دوجمله‌ای

$$\frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$$

نظیر به عامل دیگر $(x + 1)^2$ می‌باشد. بنابراین،

$$\frac{x^2 + 2}{(x - 2)(x + 1)^2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}, \qquad (۹)$$

که در آن، به خاطر سادگی، ضرایب را با حروف متوالی A ، B ، و C نشان می‌دهیم .

برای تعیین ضرایب، طرفین معادلهٔ (۹) را در $(x - 2)(x + 1)^2$ ضرب می‌کنیم. از این نتیجه می‌شود که

$$x^2 + 2 = A(x + 1)^2 + B(x - 2)(x + 1) + C(x - 2), \qquad (۱۰)$$

یا معادلا"

$$x^2 + 2 = (A + B)x^2 + (2A - B + C)x + (A - 2B - 2C). \qquad (۱۰')$$

هرگاه (۱۰) یا (۱۰') به‌ازای هر x برقرار باشد، آنگاه مسلما" (۹) به ازای هر x جز مقادیر $x = 2$ و $x = -1$ ، کـه مخرجها را صفر می‌کنند، برقرار است. با اعمال قضیهٔ ۴ براتحاد چندجمله‌ای (۱۰')، معلوم می‌شود که ضرایب x^2 در طرفین چپ و راست (۱۰') باید مساوی‌باشند، وهمین‌امرباید در مورد ضرایب x وجملات ثابت درست باشد (جملات اخیر را می‌توان ضرایب x^0 درنظر گرفت). این ما را فورا" به دستگاه سه معادلهٔ خطی زیرازسه

مجهول A ، B ، و C می‌رساند[1] :

$$A + B = 1,$$
$$2A - B + C = 0, \qquad (۱۱)$$
$$A - 2B - 2C = 2.$$

با حل این دستگاه معلوم می‌شود که

$$A = \frac{2}{3}, \qquad B = \frac{1}{3}, \qquad C = -1.$$

در واقع ، با افزودن دوبرابر معادلهٔ دوم به معادلهٔ سوم خواهیم داشت $5A - 4B = 2$ ، که همراه بـــا $A + B = 1$ یا $B = 1 - A$ ایجاب می‌کند که

$$5A - 4(1 - A) = 2, \quad 9A = 6, \quad A = \tfrac{2}{3}, \quad B = \tfrac{1}{3}, \quad C = B - 2A = \tfrac{1}{3} - \tfrac{4}{3} = -1.$$

با گذاردن این مقادیر از ضرایــب A, B, C در (۹) ، معلوم می‌شود که تابع گویای داده شده دارای بسط به صورت کسر جزئی زیر است :

$$\frac{x^2 + 2}{(x - 2)(x + 1)^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x - 2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x + 1}\right) - \frac{1}{(x + 1)^2}.$$

حال می‌توان تابع گویا را به آسانی انتگره کرد :

$$\int \frac{x^2 + 2}{(x - 2)(x + 1)^2}\, dx = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x - 2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x + 1} - \int \frac{dx}{(x + 1)^2}$$
$$= \frac{2}{3} \ln |x - 2| + \frac{1}{3} \ln |x + 1| + \frac{1}{x + 1} + C.$$

راه موءثرتر دیگری برای تعیین ضرایب A, B, C در مثال ۴ وجود دارد ، که در آن لزومی به حل دستگاه (۱۱) نیست . این روش مبتنی بر این امر است که اگر دوچندجمله‌ای از x متحدا" مساوی باشند ، مقادیرشان باید به ازای هر x یکسان باشند . اما با نگاهی به (۱۰) معلوم می‌شود که عبارت سمت راست به ازای $x = 2$ یـــا $x = -1$ شـــکل ســادهای می‌یابد ، زیرا در هر حالت دوجمله از سه‌جمله صفر می‌باشند . مثلا" ، با قرار دادن $x = 2$

---

۱. منظور از یک معادلهٔ خطی از n متغیر (یا " مجهول ") $x_1, x_2, \ldots, x_n$ یعنی معادله‌ای درجهٔ اول نسبت به متغیرها ؛ یعنی ، معادله‌ای به شکل $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ که در آن $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ ثابت‌اند . بعضی از این ثابتها ممکن است صفر باشند ، و معادلهٔ خطی را همگن گوییم اگر $b = 0$.

در (۱۰) فورا" داریم $9A = 6$ یا $A = \frac{2}{3}$ ، و با قرار دادن $x = -1$ به دست می‌آوریم $-3C = 3$ یا $C = -1$. پس از معادلهٔ اول (۱۱) معلوم می‌شود که $B = \frac{1}{3}$. به صورت دیگر، می‌توان با قرار دادن $A = \frac{2}{3}, C = -1, x = 0$ در (۱۰) به دست آورد $2 = \frac{2}{3} - 2B + 2$ ، که $B = \frac{1}{3}$ را به ما خواهد داد.

مثال ۵. تابع گویای

$$\frac{3x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2}$$

را به صورت کسرهای جزئی بسط داده، و سپس انتگرال آن را بیابید.

حل. چون $x^2 + 2$ تحویل ناپذیر است، از قضیهٔ ۳ معلوم می‌شود که تابع گویای داده شده مجموع تنها جملهٔ

$$\frac{A}{x},$$

نظیر به عامل x در مخرج، و قالب دوجمله‌ای

$$\frac{Bx + C}{x^2 + 2} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 2)^2},$$

نظیر به عامل دیگر $(x^2 + 2)^2$ ، است. بنابراین،

$$\frac{3x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 2)^2}, \tag{۱۲}$$

که در آن این بار ضرایب با حروف A ، B ، C ، D ، و E نموده شده‌اند. با ضرب (۱۲) در $x(x^2 + 2)^2$ به دست می‌آوریم

$$3x^2 + x + 4 = A(x^2 + 2)^2 + (Bx + C)(x^2 + 2)x + (Dx + E)x,$$

یا معادلا"

$$3x^2 + x + 4 = (A + B)x^4 + Cx^3 + (4A + 2B + D)x^2 + (2C + E)x + 4A. \tag{۱۳}$$

با اعمال قضیهٔ ۴ براین اتحاد، دستگاهی از پنج معادلهٔ خطی از پنج مجهول A، B، C، D ، و E به دست می‌آید:

$$A + B = 0,$$
$$C = 0,$$
$$4A + 2B + D = 3,$$

$$2C + E = 1,$$
$$4A = 4.$$

این دستگاه معادلات، به خلاف ظاهر پیچیده‌اش، با کمی زحمت حل می‌شود. در واقع، معادلات پنجم و دوم فورا" به ما می‌گویندکه $A = 1,\ C = 0$ ، و سپس از معادلات دیگر بی‌درنگ نتیجه می‌شود که $B = -A = -1,\ D = 3 - 4A - 2B = 1,\ E = 1$. لذا،

$$A = 1, \qquad B = -1, \qquad C = 0, \qquad D = 1, \qquad E = 1,$$

و با گذاردن این مقادیر از ضرایب در (۱۲) معلوم می‌شود که تابع گویای ما دارای بسط به صورت کسر جزئی زیر است:

$$\frac{3x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 2} + \frac{x + 1}{(x^2 + 2)^2}$$
$$= \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 2} + \frac{x}{(x^2 + 2)^2} + \frac{1}{(x^2 + 2)^2}.$$

انتگرالگیری از تابع گویا آسان است. درواقع،.

$$\int \frac{3x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2 + 2}\,dx + \int \frac{x}{(x^2 + 2)^2}\,dx + \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2}$$
$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{x^2 + 2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2 + 2)^2} + \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2}$$
$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2 + 2}\right) + \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2}.$$

برای محاسبهٔ آخرین انتگرال، در فرمول (۵)، صفحهٔ ۶۱۳، قرار می‌دهیم $a = \sqrt{2}$ تا به دست آید

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2 + 2}\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

بنابراین، مآلا" داریم

$$\int \frac{3x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2 + 2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2 + 2}\right)$$
$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln \frac{x^2}{x^2 + 2} + \frac{x - 2}{4(x^2 + 2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

مثال ۶ . $\int \frac{3x}{x^3-1}dx$ را حساب کنید .

حل . مخرج انتگرالده را تجزیه می‌کنیم :

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1),$$

که در آن چندجمله‌ای درجهٔ دوم x^2+x+1 تحویل‌ناپذیر است (چرا؟) . از اینرو ، بنابر قضیهٔ ۳ ،

$$\frac{3x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

با ضرب طرفین این معادله در x^3-1 ، خواهیم داشت

$$3x = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1). \tag{۱۴}$$

با اختیار $x=1$ معلوم می‌شودکه $3A=3$ یا $A=1$. بااین مقدار A ، (۱۴)را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$3x - (x^2+x+1) = -x^2+2x-1 = (Bx+C)(x-1),$$

که ایجاب می‌کند که

$$Bx + C = \frac{-x^2+2x-1}{x-1} = \frac{(x-1)(-x+1)}{x-1} = -x+1.$$

لذا ، بسط انتگرالده به صورت کسر جزئی عبارت است از

$$\frac{3x}{x^3-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{-x+1}{x^2+x+1}.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\int \frac{3x}{x^3-1}dx &= \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{-x+1}{x^2+x+1}dx = \ln|x-1| + \int \frac{-x+1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx \\ &= \ln|x-1| + \int \frac{-y+\frac{3}{2}}{y^2+\frac{3}{4}}dy \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\int \frac{d(y^2)}{y^2+\frac{3}{4}} + \frac{3}{2}\int \frac{dy}{y^2+\frac{3}{4}},\end{aligned}$$

که در آن $y = x + \frac{1}{2}$ ؛ و درنتیجه ، به کمک فرمول (۶′) ، صفحهٔ ۴۷۰ ،

$$\int \frac{3x}{x^3-1}\,dx = \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\left(y^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2y}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C,$$

این بخش را با نشان دادن اینکه روش کسرهای جزئی به ما توان محاسبهٔ انتگرال یک تابع گویای *دلخواه*، دست کم به‌طور نظری، می‌بخشد به پایان می‌بریم.

اختیاری. بنابرقضیهٔ ۳، انتگرال یک کسر جزئی نظیر به یک عامل خطی در مخرج یک تابع گویای حقیقی به شکل زیر است:

$$\int \frac{A}{(x-c)^n}\,dx \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{۱۵}$$

حال آنکه انتگرال هر کسر جزئی نظیر به یک عامل درجهٔ دوم تحویل‌ناپذیر به شکل زیر می‌باشد:

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\,dx \qquad (p^2 < 4q, n = 1, 2, \ldots). \tag{۱۶}$$

می‌توان (۱۵) را فورا" حساب کرد: با جانشانی $u = x - c$ داریم

$$\int \frac{A}{x-c}\,dx = A\int \frac{du}{u} = A\ln|u| = A\ln|x-c|$$

اگر $n = 1$، و

$$\int \frac{A}{(x-c)^n}dx = A\int \frac{du}{u^n} = A\int u^{-n}\,du = A\left(\frac{u^{-n+1}}{-n+1}\right) = -\frac{A}{(n-1)(x-c)^{n-1}}$$

اگر $n > 1$. به خاطر سادگی، در نوشتن انتگرال کسرهای جزئی ثابتهای انتگرالگیری را حذف می‌کنیم، با این فرض که یک ثابت انتگرالگیری در پایان تمام محاسبات خواهدآمد.

برای محاسبهٔ (۱۶)، ابتدا در مخرج مربع را کامل می‌کنیم. از این نتیجه می‌شود که

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right) = u^2 + a^2,$$

که در آن

$$u = x + \frac{p}{2}, \qquad a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

لذا ، اگر $n = 1$ ، داریم

$$\int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}\,dx = \int \frac{Bu + [C - (Bp/2)]}{u^2 + a^2}\,du = \frac{B}{2}\int \frac{2u}{u^2 + a^2}\,du + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{du}{u^2 + a^2}$$

$$= \frac{B}{2}\ln(u^2 + a^2) + \frac{1}{a}\left(C - \frac{Bp}{2}\right)\arctan\frac{u}{a}$$

$$= \frac{B}{2}\ln(x^2 + px + q) + \frac{2C - Bp}{\sqrt{4q - p^2}}\arctan\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}. \qquad (۱۷)$$

اگر $n > 1$ ، خواهیم داشت

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n}\,dx = \int \frac{Bu + [C - (Bp/2)]}{(u^2 + a^2)^n}\,du = \frac{B}{2}\int \frac{2u}{(u^2 + a^2)^n}\,du + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^n}.$$

برای محاسبهٔ انتگرال دوم ، فرمول تحویل ثابت شده در مثال ۵ ، صفحهٔ ۶۱۲ ، را به‌کار می‌بریم ، حال آنکه در محاسبهٔ انتگرال اول از جانشانی $v = u^2 + a^2$ استفاده‌می‌کنیم :

$$\int \frac{2u}{(u^2 + a^2)^n}du = \int \frac{dv}{v^n} = \int v^{-n}\,dv = \frac{v^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{1}{(n-1)(u^2 + a^2)^{n-1}}.$$

بقیهٔ محاسبات صرفا" جبر بوده و چیزی بیش از بیان u و a برحسب x ، p ، و q ، مثل حالت $n = 1$ ، نخواهد بود .

مسائل

چندجمله‌ای داده‌شده را به‌صورت حاصل ضربی از عوامل خطی و درجهٔ‌دوم تحویل‌ناپذیر بیان نمایید .

۱. $x^4 - x^3 + x^2 - x$ ✓

۲. $2x^3 - 8x^2 + 2x + 12$ ✓

۳. $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ ✓

۴. $x^4 - 6x^2 + 8x - 3$ ✓

۵. $x^4 - x^3 - 91x^2 + x + 90$ ✓

۶. $x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4$ ✓

۷. در صفحهٔ ۴۹۹ نشان داده شد که

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} \ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C \qquad (a \neq b).$$

این فرمول را با استفاده از کسرهای جزئی به دست آورید .

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۸. $\int \frac{x}{x-2}\,dx$

۹. $\int \frac{8x-3}{4x+1}\,dx$

۱۰. $\int \frac{dx}{x^2+4x-77}$

۱۱. $\int \frac{dx}{(x+2)(3x+4)}$

۱۲. $\int \frac{x^2+2}{x^2-1}\,dx$

۱۳. $\int \frac{x}{x^2-x-6}\,dx$

۱۴. $\int \frac{x}{(2x+1)(2x+3)}\,dx$

۱۵. $\int \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2 dx$

۱۶. $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

۱۷. $\int \frac{dx}{x^3+1}$

۱۸. $\int \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\,dx$

۱۹. $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}\,dx$

۲۰. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$

۲۱. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}$

۲۲. $\int \frac{dx}{x^4-1}$

۲۳. $\int \frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$

۲۴. $\int \frac{x^3}{(x^2+9)^3}\,dx$

۲۵. $\int \frac{32x}{(2x-1)(2x-3)(2x-5)}\,dx$

۲۶. $\int \frac{x^2+1}{x^3+8}\,dx$

۲۷. $\int \frac{x+2}{(x^2+1)(x^2+3)}\,dx$

۲۸. $\int \frac{2x^7+3x^4+x-6}{x^3-1}\,dx$

۲۹. $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,dx$

۳۰. $\int \frac{6-9x-3x^2}{x^4-5x^2+4}\,dx$

۳۱. $\int \frac{x^2}{x^4-16}\,dx$

۳۲. $\int \frac{x^4+1}{x^6-1}\,dx$

۳۳. $\int \frac{x^9}{(x^4-1)^2}\,dx$

حل . فرض کنیم $u = e^x$. پس $du = e^x\,dx,\ dx = du/u$ ؛ درنتیجه ،

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} - e^x + 2}\,dx = \int \frac{u + 1}{u(u^2 - u + 2)}\,du,$$

و مسئله به انتگرالگیری از یک تابع گویا از u با بسط به صورت کسرهای جزئی

$$\frac{u + 1}{u(u^2 - u + 2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} - \frac{u - 3}{u^2 - u + 2}\right)$$

تحویل شده است . بنابراین ، به کمک فرمول (۱۷) ، صفحهٔ ۶۴۹ ،

$$\int \frac{u + 1}{u(u^2 - u + 2)}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{u - 3}{u^2 - u + 2}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| - \frac{1}{4}\ln(u^2 - u + 2) + \frac{5}{2\sqrt{7}}\arctan\frac{2u - 1}{\sqrt{7}} + C,$$

با مراجعه به متغیر x ، معلوم می‌شود که

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} - e^x + 2}\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\ln(e^{2x} - e^x + 2) + \frac{5}{2\sqrt{7}}\arctan\frac{2e^x - 1}{\sqrt{7}} + C.$$

انتگرالگیری از توابع گویا برحسب $\sin x$ و $\cos x$. منظور از *چندجمله‌ای از دو متغیر* x و y یعنی مجموع تعدادی متناهی جمله به شکل ax^my^n که در آن m و n اعداد صحیح نامنفی بوده و a ثابت دلخواهی می‌باشد . به عنوان مثال ،

$$\sqrt{5} + 7xy^2 + 9x^2y^3 - \frac{1}{2}y^4$$

یک چندجمله‌ای از x و y است . خارج‌قسمت

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

دو چندجمله‌ای $P(x, y)$ و $Q(x, y)$ از x و y را یک *تابع گویا از* x و y می‌نامند[1] . یک مثال از این نوع توابع عبارت است از

$$\frac{x - y}{1 - 2x^2 + 3xy}. \qquad (۲)$$

هرگاه $R(x, y)$ تابع گویایی از x و y باشد ، آنگاه $R(\sin x, \cos x)$ یک *تابع گویا از* $\sin x$

---

۱ . در نوشتن $P(x, y)$ ، $Q(x, y)$ ، و $R(x, y)$ ، نماد توابع دو متغیره پیش‌بینی شده است (ر . ک . بخش ۱۳ ۱۰) .

و $\cos x$ نام دارد . لذا ، از تعویض x با $\sin x$ و y با $\cos x$ در (۲) ، تابع گویای زیر از $\sin x$ و $\cos x$ به دست می‌آید :

$$\frac{\sin x - \cos x}{1 - 2\sin^2 x + 3\sin x \cos x}. \qquad (۲')$$

همانطور که اینک نشان می‌دهیم ، انتگرال هر تابع گویا از $\sin x$ و $\cos x$ راهمیشه‌می‌توان به کمک یک جانشانی گویاساز مناسب محاسبه نمود .

قضیهٔ ۵ (انتگرالگیری از یک تابع گویــا از $\sin x$ و $\cos x$) . فرض کنیم $R(\sin x, \cos x)$ *یک تابع گویا از* $\sin x$ و $\cos x$ بوده ، و

$$u = \tan\frac{x}{2} \qquad (-\pi < x < \pi). \qquad (۳)$$

در این صورت ،

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R_1(u)\,du,$$

که در آن $R_1(u)$ تابع گویایی از تنها متغیر u است . بخصوص ، چون انتگرال سمت راست‌را همیشه می‌توان به روش کسرهای جزئی حساب کرد ، همین امر در مورد انتگرال سمت چپ نیز صادق خواهد بود .

برهان . ابتــدا $\sin x$ و $\cos x$ را برحسب متغیر جدید u بیان می‌کنیم . بنابر فرمولهـای زاویهٔ مضاعف برای سینوس و کسینوس ، همراه با اتحــاد $\cos^2 (x/2) + \sin^2 (x/2) = 1$ ، داریم

$$\sin x = \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \cos 2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}},$$

که در آخرین مرحلهٔ محاسبه‌صورت ومخرج‌را بــر $\cos^2 (x/2)$ تقسیم کرده‌ایم .این فرمولها

پس از جانشانی (۳)، که به جانشانی نصف زاویه معروف است، به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \tag{۴}$$

مبین آنکه $\sin x$ و $\cos x$ هر دو توابع گویایی از u اند. مشتق dx/du نیز تابع گویایی از u است. در واقع، (۳) معادل است با

$$x = 2 \arctan u, \tag{۳'}$$

و مشتقگیری از (۳') فوراً نتیجه می‌دهد که

$$\frac{dx}{du} = \frac{2}{1+u^2}. \tag{۵}$$

حال، به کمک (۴) و (۵)، انتگرال $R(\sin x, \cos x)$ را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\int R(\sin x, \cos x)\, dx &= \int R(\sin x, \cos x) \frac{dx}{du}\, du \\ &= \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \frac{2}{1+u^2}\, du = \int R_1(u)\, du,\end{aligned}$$

که در آن

$$R_1(u) = R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \frac{2}{1+u^2}$$

یک تابع گویا از تنها متغیر u است. این امر از این نتیجه می‌شود که خارج‌قسمت دو چند جمله‌ای در $2u/(1+u^2)$ و $(1-u^2)/(1+u^2)$ پس از ضرب صورت و مخرج در توان مناسبی از $1+u^2$ به صورت تابع گویایی از u در می‌آید (بیشتر توضیح دهید). چون $R_1(u)$ تابعی گویاست، می‌توان آن را به روش توابع جزئی انتگره کرده به انتگرالی مانند $I_1(u)$ رسید که عموماً مجموعی است از توابع گویا، لگاریتمها، و تانژانتهای معکوس. در این صورت، انتگرال $R(\sin x, \cos x)$، پس از بازگشت به متغیر اصلی x، مساوی است با

$$I_1\left(\tan \frac{x}{2}\right).$$

مثال ۴. $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x + 2\cos x + 2}$ را حساب کنید.

حل. با استفاده از جانشانی نصف زاویهٔ (۳) و فرمولهای (۴) و (۵)، معلوم می‌شود که

$$\int \frac{dx}{3\sin x + 2\cos x + 2} = \int \frac{1}{\dfrac{6u}{1+u^2} + 2\dfrac{1-u^2}{1+u^2} + 2} \frac{2}{1+u^2}\, du$$

$$= \int \frac{2}{6u + 2(1-u^2) + 2(1+u^2)}\, du = \int \frac{du}{3u+2}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3u+2| + C = \frac{1}{3}\ln\left|3\tan\frac{x}{2} + 2\right| + C.$$

مثال ۰۵ $\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\, dx$ را حساب کنید .

حل . این بار داریم

$$\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\, dx = \int \frac{1 - \dfrac{2u}{1+u^2}}{1 + \dfrac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2}\, du = \int \frac{1+u^2-2u}{1+u^2}\, du$$

$$= \int \left(1 - \frac{2u}{1+u^2}\right) du = u - \ln(1+u^2) + C$$

$$= \tan\frac{x}{2} - \ln\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right) + C = \tan\frac{x}{2} - \ln\left(\sec^2\frac{x}{2}\right) + C,$$

یا معادلا "

$$\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\, dx = \tan\frac{x}{2} + \ln\left(\cos^2\frac{x}{2}\right) + C.$$

بنابر قضیهٔ ۵ ، جانشانی نصف‌زاویهٔ (۳) عمومی است‌بدین معنی که اصولا "می‌توان از آن برای انتگرالگیری از یک تابع گویای دلخواه از $\sin x$ و $\cos x$ استفاده کرد . با اینحال ، در عمل ، اغلب جانشانیهای دیگر مناسبترند ، و این امر را مثالهای زیر نشان خواهند داد .

مثال ۰۶ $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 2}\, dx$ را حساب کنید .

حل . باتوجه به اینکه

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 2}\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x + 2}\sin x\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x + 2}\sin x\,dx,$$

جانشانی $u = \cos x$ را انجام می‌دهیم . پس $du = -\sin x\,dx$ ، و

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 2}\,dx = \int \frac{u^2-1}{u+2}\,du = \int \left(u - 2 + \frac{3}{u+2}\right)du$$

$$= \frac{1}{2}u^2 - 2u + 3\ln|u+2| + C$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2 x - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C$$

(چرا می‌توان علامت قدرمطلق را انداخت ؟) فرض کنید به جای جانشانی $u = \cos x$ از جانشانی نصف زاویهٔ (۳) استفاده کرده باشیم . در این صورت ، به جای انتگرالده‌نسبتاً" سادهٔ $(u^2-1)/(u+2)$ ، انتگرالدهٔ پیچیدهٔ زیر را می‌داشتیم :

$$\frac{16u^3}{(u^2+3)(u^2+1)^3},$$

که انتگرالگیری از آن بسیار مشکلتر است (ر.ک. مسئلهٔ ۲۵) .

مثال ۷. انتگرال

$$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$$

را ، که در آن a و b ثابتهای مثبت دلخواهی هستند ، حساب کنید .

حل. از تقسیم صورت و مخرج بر $a^2\cos^2 x$ داریم

$$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int \frac{\dfrac{1}{a^2\cos^2 x}}{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{b^2}{a^2}}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + \dfrac{b^2}{a^2}}\,dx,$$

که از آن در این حالت آشکار است که جانشانی گویاساز مناسب ، به جای جانشانی نصف زاویهٔ $u = \tan(x/2)$ ، جانشانی $u = \tan x$ می‌باشد . در واقع ، هرگاه $u = \tan x$ ، آنگاه $du = \sec^2 x\,dx$ ، و

$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{u^2 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{a}{b} \arctan \frac{au}{b}\right) + C$$

$$= \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a}{b} \tan x\right) + C.$$

مسائل

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

۱. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x} + 1}$ ✓

۲. $\int \frac{dx}{4\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ ✓

۳. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + 1} dx$ ✓

۴. $\int \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} dx$ ✓

۵. $\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} dx$ ✓

۶. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}$ ✓

۷. $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$ ✓

۸. $\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$ ✓

۹. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}$ ✓

۱۰. $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$ ✓

۱۱. $\int \frac{e^x}{1 - e^{2x}} dx$

۱۲. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$

۱۳. $\int \frac{dx}{2 + \cos x}$

۱۴. $\int \frac{dx}{3 - \sin x}$

۱۵. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

۱۶. $\int \frac{dx}{1 - \sin x + \cos x}$

۱۷. $\int \frac{\cos^3 x}{2 \sin x - 1} dx$

۱۸. $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$

۱۹. $\int \frac{\cos x}{1 + \sin x - \cos x} dx$

۲۰. $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx$

۲۱. $\int \frac{dx}{\cos x \sin x - 2 \sin x}$

۲۲. $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$

۲۳. $\int \frac{dx}{a + b\tan x}$ $(ab \neq 0)$

۲۴. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$

۲۵. مثال ۶ را با راه مشکل جانشانی $u = \tan(x/2)$ حل کنید.

۲۶. با استفاده از جانشانی

$$x = a\cos^2 u + b\sin^2 u \qquad (0 < u < \pi/2)$$

نشان دهید که

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C \qquad (a < x < b).$$

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

۲۷. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$

۲۸. $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{9\sin^2 x + \cos^2 x}$

۲۹. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$

۳۰. $\int_0^{\pi/4} \frac{ds}{2 + \tan s}$

۳۱. $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{2 - \sin t + \cos t}$

۳۲. $\int_2^5 \frac{du}{\sqrt{(u-1)(6-u)}}$

۸.۷ انتگرالگیری تقریبی و قاعدهٔ سیمپسون[1]

مسئلهٔ محاسبهٔ انتگرال معین

$$\int_a^b f(x)\, dx \tag{1}$$

از تابع پیوستهٔ f را درنظر میگیریم. سادهترین راه محاسبهٔ I استفاده از قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال است، که میگوید

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a),$$

که در آن F یک پاد مشتق (یا معادلا "انتگرال نامعین) انتگرالده f میباشد. اما اینک میدانیم که ممکن است یافتن فرمول صریحی برای F، ولو اینکه وجود F را قضیهٔ ۵، صفحهٔ ۴۰۵، تضمین میکند، مشکل یا حتی غیرممکن باشد.

---

1. Simpson

قاعدهٔ نقطهٔ میانی. معهذا، در این حالات هنوز می‌توان انتگرال I را با هردقت مطلوب حساب کرد. ایده تقریب I به وسیلهٔ مجموع مناسبی است. (این امر تعجبی ندارد، زیرا انتگرال I ابتدا به صورت مقدار حدی مجموع ریمان f وقتی ماکزیمم طول زیربازه‌های بازهٔ انتگرالگیری $[a, b]$ کوچک‌شود تعریف شد.) در واقع، عدد زوج مثبت $N = 2n$ رااختیار کرده و بازهٔ $[a, b]$ را با معرفی نقاط تقسیم *متساوی‌الفاصله*

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i \qquad (i = 0, 1, \ldots, N)$$

به فاصلهٔ

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{b-a}{2n}$$

از هم افراز می‌کنیم (توجه کنید که $x_0 = a, x_N = b$). در این صورت، از سه روش انتگرالگیری تقریبی یا عددی‌توصیف‌شده‌دراین‌بخش، اولی به‌نام **قاعدهٔ نقطهٔ میانی** چیزی جز تقریب I به وسیلهٔ مجموع ریمانی به شکل

$$\sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2}\right)(x_{2i} - x_{2i-2}), \tag{۲}$$

مستلزم n زیربازهٔ $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \ldots, [x_{2n-2}, x_{2n}]$ ، هر یک به‌طول $x_{2i} - x_{2i-2}$ مساوی

$$2h = \frac{b-a}{n}$$

نیست.

نقطهٔ

$$\frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

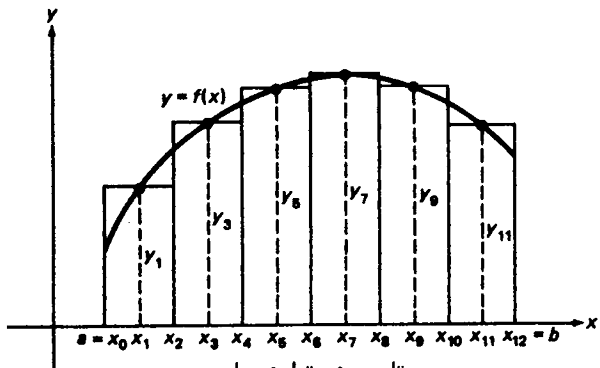
نقطهٔ میانی x_{2i-1} بازهٔ $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ بوده و می‌توان (۲) را به شکل زیر نوشت:

$$2h \sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} y_{2i-1}, \tag{۲'}$$

که در آن $y_{2i-1} = f(x_{2i-1})$ مقدار تابع f در x_{2i-1} است. لذا، قاعدهٔ نقطهٔ میانی عبارت است از تقریب

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}), \tag{۳}$$

به‌طور هندسی، این یعنی تعویض مساحت تحت منحنی $y=f(x)$ با مجموع مساحات n مستطیل، که هر مستطیل به عرض $2h=(b-a)/n$ بوده ومستطیل i م به ارتفاع y_{2i-1} و مساحت $2hy_{2i-1}$ می‌باشد، و این در شکل ۸ برای حالت 6 مستطیل $(n=6, N=12)$ توضیح داده شده است.



قاعده‌ء نقطه‌ء میانی

شکل ۸

خطای E_M قاعده‌ء نقطه‌ء میانی عددی است مانند E_M که باید به طرف راست (۳) افزودتاامعادله‌ء دقیق به دست آید؛ یعنی،

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})+E_M.$$

واضح است که E_M تابعی از n ، یعنی تعداد زیربازه‌ها، است و براین امر می‌توان بانوشتن $E_M=E_M(n)$ تأکید نمود. فرض کنیم f دارای مشتق دوم f'' پیوسته بر بازه‌ء $[a, b]$ باشد. می‌توان (بااستدلالی‌که خیلی تکنیکی است) نشان داد که به ازای نقطه‌ای چون c در $[a, b]$،

$$E_M=\frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(c) \tag{۴}$$

بخصوص، (۴) ایجاب می‌کند

$$|E_M| \le \frac{(b-a)^3}{24n^2}\max|f''|, \tag{۴'}$$

که در آن $\max|f''|$ مقدار ماکزیمم $|f''(x)|$ بربازه‌ء $[a, b]$ است. ویژگی کلیدی‌فرمول(۴) این است که E_M به‌طور معکوس با مربع n متناسب است. لذا، می‌توان خطای E_M را با انتخاب n بزرگ، یعنی، یک‌تقسیم به‌قدرکافی‌ظریف‌ازبازه‌ء انتگرالگیری $[a, b]$، به قدر

مطلوب کوچک کرد.

مثال ۱. با استفاده از قاعدهٔ نقطهٔ میانی به ازای $n = 10$ ، انتگرال

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

را تقریب نمایید؛ دقت تقریب چقدر است؟

حل. چون از قبل می‌دانیم که $I = \ln 2 = 0.693147\ldots$ ، هدف این مثال نشان‌دادن قدرت قاعدهٔ نقطهٔ میانی است. در اینجا $a = 1, b = 2, f(x) = 1/x, N = 2n = 20$ ، و زیر بازه‌ها عبارتنداز $[1.0, 1.1], [1.1, 1.2], \ldots, [1.9, 2.0]$ با نقاط میانی $x_1 = 1.05, x_3 = 1.15, \ldots, x_{19} = 1.95$. عرضهای نظیر $y_1, y_3, \ldots, y_{19}$ را تا چهار رقم اعشار حساب می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{array}{ll}
x_1 = 1.05 & y_1 = 0.9524 \\
x_3 = 1.15 & y_3 = 0.8696 \\
x_5 = 1.25 & y_5 = 0.8000 \\
x_7 = 1.35 & y_7 = 0.7407 \\
x_9 = 1.45 & y_9 = 0.6897 \\
x_{11} = 1.55 & y_{11} = 0.6452 \\
x_{13} = 1.65 & y_{13} = 0.6061 \\
x_{15} = 1.75 & y_{15} = 0.5714 \\
x_{17} = 1.85 & y_{17} = 0.5405 \\
x_{19} = 1.95 & y_{19} = 0.5128 \\
\hline
 & \text{مجموع} = 6.9284
\end{array}$$

بنابراین، طبق رابطهٔ (۳)،

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{10}(y_1 + y_3 + \cdots + y_{19}) = \frac{6.9284}{10} = 0.69284.$$

برای تعیین دقت این تقریب، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{x} = \frac{2}{x^3}.$$

لذا، فرمول (۴) به صورت زیر درمی‌آید:

$$|E_M| \leq \frac{1}{24n^2} \max \left|\frac{2}{x^3}\right|,$$

یا

$$|E_M| \le \frac{1}{12n^2}, \qquad (۵)$$

زیرا ماکزیمم $|2/x^3|$ بر $[1,2]$ مساوی 2 است که در نقطهٔ $x = 1$ گرفته می‌شود. در واقع، با استفاده از فرمول (۴) و این امر که f'' بر $[1,2]$ مثبت است، می‌بینیم که E_M نیز مثبت است. بنابراین، (۵) را می‌توان با

$$0 < E_M \le \frac{1}{12n^2} \qquad (۵')$$

عوض کرد. لذا، در این حالت، قاعدهٔ نقطهٔ میانی مقدار انتگرال I را تخمین نقصانی می‌زند. با گذاردن $n = 10$ در (۵')، معلوم می‌شود که

$$0 < E_M \le \frac{1}{1200} < 0.00084.$$

هر یک از عرضهای y_i تا چهار رقم اعشار حساب شده بود؛ و لذا، دارای خطای گردشدهٔ کمتر از 0.00005 است. اما کمیت 6.9284/10 متوسط ۱۰ عرض $y_1, y_3, \ldots, y_{19}$ است؛ و درنتیجه، خطای گرد شدهٔ آن از 0.00005 نیز کمتر می‌باشد (چرا؟). این امر، همراه با تخمین خطای E_M، نشان می‌دهد که I بین $0.69284 - 0.00005 = 0.69279$ و $0.69284 + 0.00005 + 0.00084 = 0.69373$ قرار دارد. لذا، می‌توان نتیجه گرفت که با تقریب 0.001، $I = 0.693$ (یا حتی با تقریب 0.0005، $I = 0.69325$).

قاعدهٔ ذوزنقه. حال به روش انتگرالگیری تقریبی دیگری می‌پردازیم که به **قاعدهٔ ذوزنقه** معروف است. در این روش ایده تقریب انتگرال دادهٔ شدهٔ I به وسیله مجموعی به شکل

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}) \qquad (۶)$$

است که مستلزم نقاط تقسیم متساوی‌الفاصلهٔ

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

و n زیر بازهٔ $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ هر یک به طول $x_i - x_{i-1}$ مساوی

$$h = \frac{b-a}{n}$$

می‌باشد. (نمادگذاری (۶) از قاعدهٔ نقطهٔ میانی (۲) ساده‌تر است، زیرا نیازی به نقاط تقسیم اضافی برای نقاط میانی زیر بازه‌ها وجود ندارد.) توجه کنید که هر جمله در

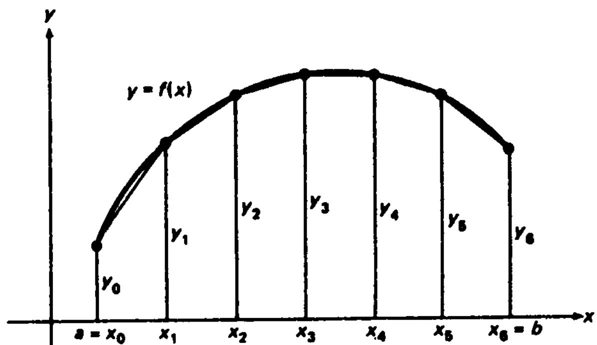
مجموع (۶) شامل متوسط دو مقدار از تابع f است، یعنی مقادیر در نقاط انتهایی یک زیر بازه، حال آنکه هر جمله در مجموع (۲) مستلزم فقط یک مقدار از f، یعنی مقدارش در نقطهٔ میانی یک زیر بازه، می‌باشد. همچنین، (۶) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1})+f(x_i)]=\frac{b-a}{2n}\sum_{i=1}^{n}(y_{i-1}+y_i), \qquad (۶')$$

که در آن $y_i=f(x_i)$. لذا، قاعدهٔ ذوزنقه عبارت است از تقریب

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{2n}(y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n) \qquad (۷)$$

(هر عرض y_i جز y_0 و y_n به صورت جفت در جملات متوالی $y_{i-1}+y_i$ ظاهر می‌شود؛ و لذا، در مجموع سمت راست ضریبی برابر 2 دارد). به‌طور هندسی، (۷) عبارت است از تعویض مساحت تحت منحنی $y=f(x)$ با مجموع مساحات n ذوزنقه، که در آن هر ذوزنقه به عرض $h=(b-a)/n$ بوده و ذوزنقهٔ i م اضلاع موازی y_{i-1}, y_i داشته و، بنابر فرمول آشنایی از هندسهٔ مقدماتی، مساحت $h(y_{i-1}+y_i)/2$ را دارد. در شکل ۹ این تقریب برای حالت شش ذوزنقه $(n=6)$ توضیح داده شده است.



قاعدهٔ ذوزنقه

شکل ۹

خطای $E_T=E_T(n)$ قاعـدهٔ ذوزنقه مساوی عدد E_T تعریف می‌شود که باید به‌طرف راست (۷) افزوده شود تا معادلهٔ دقیق به دست آید؛ یعنی،

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{2n}(y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n)+E_T.$$

فرض کنیم f بر بازهٔ $[a,b]$ مشتق دوم f'' پیوسته داشته باشد. در این صورت، می‌توان

نشان داد که به ازای نقطه‌ای مانند c در $[a, b]$ ،

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c) \qquad (۸)$$

بخصوص، (۸) ایجاب می‌کند که

$$|E_T| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max |f''|, \qquad (۸')$$

که در آن $\max |f''|$ ماکزیمم $|f''(x)|$ بر بازهٔ $[a, b]$ است. واضح است که هرقدر n بزرگتر باشد، خطای E_T کوچکتر است؛ و در واقع، با عکس n^2 متناسب می‌باشد.

مثال ۲. انتگرال

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} \qquad (= \ln 2)$$

را با استفاده از قاعدهٔ ذوزنقه به ازای $n = 10$ تقریب کنید. خطای تقریب چقدر است؟

حل. در اینجا، مثل مثال ۱، $a = 1, b = 2, f(x) = 1/x, n = 10$ ، و زیر بازه‌ها مجدداً $[1.0, 1.1], [1.1, 1.2], \ldots, [1.9, 2.0]$ با نقاط انتهایی $x_0 = 1.0, x_1 = 1.1, x_2 = 1.2, \ldots, x_9 = 1.9, x_{10} = 2.0$ می‌باشند. با محاسبهٔ عرضهای نظیر $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_9, y_{10}$ تا چهار رقم اعشار، به دست می‌آوریم

$x_1 = 1.1$	$y_1 = 0.9091$	$x_0 = 1.0$	$y_0 = 1.0000$
$x_2 = 1.2$	$y_2 = 0.8333$	$x_{10} = 2.0$	$y_{10} = 0.5000$
$x_3 = 1.3$	$y_3 = 0.7692$		مجموع $= 1.5000$
$x_4 = 1.4$	$y_4 = 0.7143$		
$x_5 = 1.5$	$y_5 = 0.6667$		
$x_6 = 1.6$	$y_6 = 0.6250$		
$x_7 = 1.7$	$y_7 = 0.5882$		
$x_8 = 1.8$	$y_8 = 0.5556$		
$y_9 = 1.9$	$y_9 = 0.5263$		
	مجموع $= 6.1877$		

بنابراین، طبق (۷)،

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{2(10)} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_9 + y_{10})$$

$$= \frac{1}{20}\left[(y_0 + y_{10}) + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_9)\right]$$

$$= \frac{1}{20}\left[1.5000 + 2(6.1877)\right] = \frac{13.8754}{20} = 0.69377.$$

برای تعیین دقت این تقریب ، ملاحظه می‌کنیم که بار دیگر $f''(x) = 2/x^3$, $\max|f''| = 2$, $n = 10$. لذا ، از (۸) و (۸') نتیجه می‌شود که $E_T < 0$ و

$$|E_T| \le \frac{1}{6n^2} = \frac{1}{600} < 0.00167.$$

توجه کنید که در این حالت قاعدهٔ ذوزنقه مقدار I را **تخمین اضافی** می‌زند . خطای گرد شدهٔ هر عرض از حیث قدرمطلق از 0.00005 کمتر است ؛ و درنتیجه ، همین امر در مورد کمیت $13.8754/20$ درست‌است (توجه‌کنید که مجموع $\frac{1}{20}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_9 + y_{10})$ در واقع متوسط 20 عدد $y_0, y_1, y_1, y_2, y_2, \ldots, y_9, y_9, y_{10}$ است که هر یک از اعداد $y_1, y_2, \ldots, y_9$ دوبار ظاهر شده است) . این امر ، همراه با تخمین ما از خطای E_T ، نشان می‌دهد که I بین $0.69377 - 0.00005 - 0.00167 = 0.69205$ و $0.69377 + 0.00005 = 0.69382$ قرار دارد . لذا ، می‌توان نتیجه گرفت که ، درست مثل مثال ۱ ، با تقریب 0.001 ، $I = 0.693$.

قاعدهٔ سیمپسون . قاعدهٔ سیمپسون مبتنی بر تقریب انتگرال

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

روی هر یک از n زیر بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ سازندهٔ بازهٔ انتگرالگیری $[a, b]$ به وسیلهٔ مساحت تحت نمودار یک‌تابع خطی $y = Ax + B$ ، یعنی پاره خط واصل‌بین‌دونقطهٔ (x_{i-1}, y_{i-1}) و (x_i, y_i) که $y_i = f(x_i)$ می‌باشد . حال به روش بسیار تواناتری از انتگرالگیری عددی به نام **قاعدهٔ سیمپسون** روی‌می‌آوریم . در اینجا شایسته‌است‌ازهمان‌نمادهای‌قاعدهٔ‌نقطهٔ‌میانی استفاده کنیم ، زیرا لازم است نقاط میانی زیربازه‌ها و نقاط‌انتهایی آنها را شماره گذاری کنیم . لذا ، با انتخاب عدد زوج مثبت $N = 2n$ ، نقاط تقسیم متساوی‌الفاصلهٔ

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}\,i \qquad (i = 0, 1, \ldots, N),$$

به فاصلهٔ

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{b-a}{2n}$$

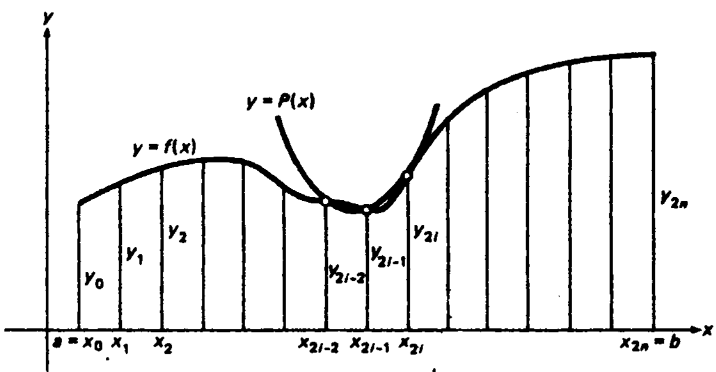
از یکدیگر، مثل صفحهٔ ۶۶۰، را معرفی می‌کنیم. نقاط $a = x_0, x_2, x_4, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n} = b$ بازهٔ $[a, b]$ را به n زیربازه هر یک به طول $2h$ تقسیم می‌کنند، که x_{2i-1} نقطهٔ میانی $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ می‌باشد. سپس انتگرال داده شده را به صورت

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx \tag{۹}$$

می‌نویسیم، و هر انتگرال مجموع سمت راست را با مساحت تحت نمودار تابع درجهٔ دوم

$$y = P(x) = A + Bx + Cx^2$$

تقریب می‌کنیم، که در آن ضرایب A، B، و C چنانند که منحنی $y = P(x)$ از سه نقطهٔ (x_{2i-2}, y_{2i-2})، (x_{2i-1}, y_{2i-1})، و (x_{2i}, y_{2i}) می‌گذرد. هرگاه این نقاط غیر همخط باشند، آنگاه $C \neq 0$، و منحنی $y = P(x)$ سهمیی است که محور تقارنش مثل شکل ۱۰ قائم می‌باشد.



قاعدهٔ سیمپسون

شکل ۱۰

حال، با فرض $r = x_{2i-2}$ و $s = x_{2i}$ جهت اختصار، درمی‌یابیم که

$$\int_r^s P(x)\,dx = \int_r^s (A + Bx + Cx^2)\,dx = \left[Ax + \frac{1}{2}Bx^2 + \frac{1}{3}Cx^3\right]_r^s$$

$$= A(s - r) + \frac{1}{2}B(s^2 - r^2) + \frac{1}{3}C(s^3 - r^3)$$

$$= \frac{s - r}{6}[6A + 3B(r + s) + 2C(r^2 + rs + s^2)].$$

بنابراین ، پس از کمی عمل جبری ،

$$\int_r^s P(x)\,dx$$
$$= \frac{s-r}{6}\left[A + Br + Cr^2 + 4A + 4B\left(\frac{r+s}{2}\right) + 4C\left(\frac{r+s}{2}\right)^2 + A + Bs + Cs^2\right]$$

و درنتیجه ،

$$\int_r^s P(x)\,dx = \frac{s-r}{6}\left[P(r) + 4P\left(\frac{r+s}{2}\right) + P(s)\right] \qquad (10)$$

چون $s - r = x_{2i} - x_{2i-2} = 2h$ و $\frac{1}{2}(r+s) = \frac{1}{2}(x_{2i-2} + x_{2i}) = x_{2i-1}$ ،فرمول (۱۰) برحسب x_{2i-2} ، x_{2i-1} ، و x_{2i} به صورت زیر درمی‌آید :

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} P(x)\,dx = \frac{h}{3}[P(x_{2i-2}) + 4P(x_{2i-1}) + P(x_{2i})].$$

اما $f(x)$ و $P(x)$ به ازای $x = x_{2i-2}$ ، $x = x_{2i-1}$ ، و $x = x_{2i}$ یکی هستند ، زیرا منحنی $y = P(x) = A + Bx + Cx^2$ طوری اختیار شده است که از نقاط (x_{2i-2}, y_{2i-2}) ، (x_{2i-1}, y_{2i-1}) ، و (x_{2i}, y_{2i}) می‌گذرد . لذا ،

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} P(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]$$
$$= \frac{b-a}{6n}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})$$

(توجه کنید که لازم نیست ضرایب A ، B ، و C صریحا" تعیین شوند) . با تقریب هریک از n انتگرال سمت راست (۹) با عبارتی از این نوع (مساحت تحت یک سهمی) ،بالاخره قاعدهٔ سیمپسون به دست می‌آید :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\sum_{i=1}^{n}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}), \qquad (11)$$

یا معادلا"

$$\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\approx \frac{b-a}{6n}[(y_0 + y_n) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1})]. \qquad (11')$$

خطای $E_S = E_S(n)$ قاعدهٔ سیمپسون مساوی عدد E_S تعریف می‌شود که باید به طرف راست (۱۱) افزود تا معادلهٔ دقیق به دست آورد؛ یعنی،

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}\sum_{i=1}^{n}(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i})+E_S.$$

فرض کنیم f دارای مشتق چهارم $f^{(4)}$ بر بازهٔ $[a, b]$ باشد. در این صورت، می‌توان با استدلالی پیشرفته نشان داد که به ازای نقطه‌ای چون c در $[a, b]$،

$$E_S = -\frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}f^{(4)}(c) \tag{۱۲}$$

بخصوص، (۱۲) ایجاب می‌کند که

$$|E_S| \le \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}\max|f^{(4)}|, \tag{۱۲'}$$

که در آن $|f^{(4)}|$ ماکزیمم $|f^{(4)}(x)|$ بر بازهٔ $[a, b]$ است. ویژگی اصلی فرمول (۱۲) این است که E_S با توان چهارم n نسبت‌عکس دارد؛ درنتیجه، E_S با افزایش n به‌طوربسیار سریع به صفر نزدیک می‌شود.

مثال ۳. انتگرال

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} \qquad (= \ln 2)$$

را با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون به ازای $n = 5$ تقریب کنید. خطای تقریب چقدر است؟

حل. همانند مثالهای ۱ و ۲، $a = 1,\ b = 2,\ f(x) = 1/x$، ولی در اینجا زیربازه‌ها عبارتند از $[1.0, 1.2], [1.2, 1.4], \ldots, [1.8, 2.0]$ با نقاط انتهایی $x_0 = 1.0,\ x_2 = 1.2,\ x_4 = 1.4, \ldots, x_8 = 1.8,\ x_{10} = 2.0$ و نقاط میانی $x_1 = 1.1,\ x_3 = 1.3, \ldots, x_9 = 1.9$. اگر عرضهای نظیر را تا پنج رقم اعشار حساب کنیم، به دست می‌آوریم

$x_0 = 1.0$	$y_0 = 1.00000$	$x_1 = 1.1$	$y_1 = 0.90909$
$x_{10} = 2.0$	$y_{10} = 0.50000$	$x_3 = 1.3$	$y_3 = 0.76923$
	مجموع $= 1.50000$	$x_5 = 1.5$	$y_5 = 0.66667$
		$x_7 = 1.7$	$y_7 = 0.58824$
		$x_9 = 1.9$	$y_9 = 0.52632$
			مجموع $= 3.45955$

$$\begin{array}{ll} x_2 = 1.2 & y_2 = 0.83333 \\ x_4 = 1.4 & y_4 = 0.71429 \\ x_6 = 1.6 & y_6 = 0.62500 \\ x_8 = 1.8 & y_8 = 0.55556 \\ \hline & \text{مجموع} = 2.72818 \end{array}$$

بنابراین، طبق (۱۱') به ازای $n = 5$ ،

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{6(5)} [(y_0 + y_{10}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)]$$

$$= \frac{1}{30} [1.500000 + 2(2.72818) + 4(3.45955)] = \frac{20.79456}{30} = 0.693152.$$

برای تعیین دقت این تقریب، ملاحظه‌می‌کنیم‌که مشتق چهارم انتگرالده $f(x) = 1/x$ مساوی است با

$$f^{(4)}(x) = \frac{d^4}{dx^4}\frac{1}{x} = \frac{24}{x^5}.$$

بنابراین، طبق رابطهٔ (۱۲)، $E_S < 0$ ؛ درنتیجه، قاعدهٔ سیمپسون در این حالت مقدار I را *تخمین اضافی* می‌زند. به‌علاوه، طبق (۱۲')،

$$|E_S| \le \frac{24}{180(10)^4} = \frac{1}{75000} < 0.000014,$$

زیرا ماکزیمم $|24/x^5|$ بر بازهٔ $[1, 2]$ مساوی 24 است که در نقطهٔ $x = 1$ گرفته می‌شود. هر عرض تا پنج رقم اعشار حساب شده است؛ ولذا، خطای گرد شده از 0.000005 کمتر است. از اینرو، خطای گرد شدهٔ کمیت 20.79456/30 نیز از 0.000005 کمتر می‌باشد (20.79456/30 را به عنوان متوسط 30 عدد تعبیر کنید). این امر، همراه با تخمین ما از خطای E_S ، نشان می‌دهد که I بین $0.693152 - 0.000005 - 0.000014 = 0.693133$ و $0.693157 = 0.693152 + 0.000005$ قرار دارد. لذا، می‌توان نتیجه گرفت که با تقریب 0.000012، $I = 0.693145$. درواقع، همانطور که قبلاً گفته شد، $I = \ln 2 = 0.693147\ldots$.

مقایسهٔ مثالهای ۱ تا ۳ قدرت عظیم قاعدهٔ سیمپسون را آشکار می‌سازد. در واقع، در محاسبهٔ انتگرال $\int_1^2 dx/x$ ، قاعدهٔ سیمپسون فقط با پنج زیربازه خیلی از قواعدنقطهٔ میانی یا ذوزنقه با دوبرابر این تعداد زیربازه دقیقتر است؟

مثال ۴. انتگرال

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

را با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون تقریب کنید.

حل. همانطورکه درصفحهٔ ۵۹۱ گفته شد، انتگرال نامعین $\int e^{-x^2}dx$ یک تابع مقدماتی نیست. لذا، باید I را بهوسیلهٔ انتگرالگیری تقریبی حساب کنیم. برای این کار قاعدهٔ سیمپسون را به ازای $n = 5$ بهکار میبریم. ماکزیمم قدر مطلق مشتق چهارم انتگرالده e^{-x^2} بربازهٔ $[0, 1]$ مساوی 12 است (ر.ک. مسئلهٔ ۲۳)؛ و درنتیجه، بنابر تخمین (۱۲')،

$$|E_S| \le \frac{12}{180(10)^4} = \frac{1}{150000} < 0.000007.$$

با استفاده از ماشین حساب، عرضها را تا پنج رقم اعشار حساب میکنیم، خواهیم داشت

$x_0 = 0.0$	$y_0 = 1.00000$	$x_1 = 0.1$	$y_1 = 0.99005$
$x_{10} = 1.0$	$y_{10} = 0.36788$	$x_3 = 0.3$	$y_3 = 0.91393$
	مجموع $= 1.36788$	$x_5 = 0.5$	$y_5 = 0.77880$
		$x_7 = 0.7$	$y_7 = 0.61263$
		$x_9 = 0.9$	$y_9 = 0.44486$
			مجموع $= 3.74027$

$x_2 = 0.2$	$y_2 = 0.96079$
$x_4 = 0.4$	$y_4 = 0.85214$
$x_6 = 0.6$	$y_6 = 0.69768$
$x_8 = 0.8$	$y_8 = 0.52729$
	مجموع $= 3.03790$

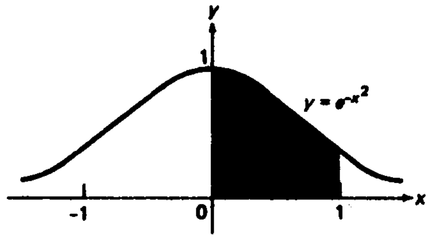
بنابراین، طبق همان صورتی از قاعدهٔ سیمپسون که در مثال ۳ به کار رفت،

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{30}[1.36788 + 2(3.03790) + 4(3.74027)]$$

$$= \frac{22.40476}{30} = 0.746825.$$

پس از احتساب خطای گرد شده و تخمین ما از $|E_S|$، معلوم میشود که در اینجا I فقط با تقریب $0.000007 + 0.000005 = 0.000012$ معلوم است. لذا، فقط میتوان از چهار رقم

اول اعشار مطمئن بود ، ولی محاسبات دقیقتر نشان می دهند که تقریب $I \approx 0.746825$ در واقع با تقریب 0.000001 درست است . در شکل ۱۱ منحنی $y = e^{-x^2}$ را کشیده‌ایم که



شکل ۱۱

" زنگدیس " است . انتگرال I مساحت ناحیهٔ سایه‌دار تحت منحنی از $x = 0$ تا $x = 1$ است . (برای راه دیگر تقریب I ، ر.ک . مثال ۹ ، صفحهٔ ۸۵۷ .)

تبصره . تابع غیرمقدماتی

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad (۱۳)$$

اهمیت زیادی در ریاضیات ، بخصوص در نظریهٔ احتمال و کاربردهای آن ، دارد . تابع

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt, \qquad (۱۳')$$

که با (۱۳) در عامل $2/\sqrt{\pi}$ اختلاف دارد ، ***تابع خطا*** نام دارد . انتگرال (۱۳) وقتی $x \to \infty$ ، به $\sqrt{\pi}/2$ نزدیک می‌شود (ر.ک . مثال ۳ ، صفحهٔ ۱۳۹۹) ؛ و درنتیجه ، عامل $2/\sqrt{\pi} = 1.128379\ldots$ در (۱۳′) سبب می‌شود که وقتی $x \to \infty$ ، $\operatorname{erf} x$ به 1 نزدیک شود.

مسائل

انتگرال داده شده را ابتدا با قاعدهٔ نقطهٔ میانی و سپس قاعدهٔ ذوزنقه به‌ازای n مشخص شده ، یعنی تعداد زیربازه‌ها ، تقریب کنید . مقادیر عرضها را تا چهار رقم اعشار حساب کرده ، و جواب را تا سه رقم (بدون تلاش در تخمین خطا) بیان نمایید .

۱ . $\int_0^2 \sqrt{x^4+1}\,dx, n = 4$

۲ . $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}, n = 4$

۳ . $\int_0^{\pi/3} \sqrt{\cos x}\,dx, n = 5$

۴ . $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx, n = 5$

۵. $\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx, n = 5$ ۶. $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx, n = 10$

در مسئلهٔ ۴، مقدار انتگرالده در $x = 0$ مساوی 1 گرفته شده است.

۷. فرض کنید M_n تقریب انتگرال $I = \int_a^b f(x)\,dx$ مبتنی بر قاعدهٔ نقطهٔ میانی با n زیربازه بوده، و T_n تقریب I مبتنی بر قاعدهٔ ذوزنقه با n زیربازه باشد. T_{2n} را برحسب T_n و M_n بیان کنید.

۸. نشان دهید که مجموع (۶) مذکور در قاعدهٔ ذوزنقه در واقع مجموع ریمانی برای تابع f بر بازهٔ $[a, b]$ است.

۹. با استفاده از فرمول (۴′)، تعداد n زیربازه‌هایی را بیابید که خطای E_M حاصل از تقریب انتگرال $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ به‌وسیلهٔ قاعدهٔ نقطهٔ میانی ازحیث قدر مطلق از 0.0001 کوچکتر باشد. با استفاده از فرمول (۸′)، همین کار را برای قاعدهٔ دوزنقه انجام دهید.

۱۰. نشان دهید که هر دو قاعدهٔ نقطهٔ میانی و قاعدهٔ ذوزنقه درصورتی مقدار دقیق انتگرال $I = \int_a^b f(x)\,dx$ را به دست می‌دهند که انتگرالده یک تابع خطی مانند $f(x) = Ax + B$ باشد ولی اگر یک تابع درجهٔ دوم باشد $f(x) = A + Bx + Cx^2$ $(C \neq 0)$ این طور نخواهد بود.

۱۱. برای خطاهای $E_M = E_M(n)$ و $E_T = E_T(n)$ حاصل در قواعد نقطهٔ میانی و ذوزنقه برای تقریب انتگرال $I = \int_{-1}^{1} |x|\,dx$ عبارات دقیق پیدا کنید.

۱۲. فرض کنید $I = \int_a^b f(x)\,dx$، که در آن f دارای مشتق دوم f'' پیوسته بر $[a, b]$ است که در هر نقطه از $[a, b]$ ناصفر می‌باشد. نشان دهید هرگاه f بر $[a, b]$ به بالا مقعر باشد، آنگاه قاعدهٔ نقطهٔ میانی I را تخمین نقصانی زده و قاعدهٔ دوزنقه I را تخمین اضافی می‌زند، حال آنکه اگر f بر $[a, b]$ به پایین مقعر باشد، قاعدهٔ نقطهٔ میانی I را تخمین اضافی و قاعدهٔ ذوزنقه I را تخمین نقصانی می‌زند.

۱۳. نشان دهید که فرمول منشور

$$\int_r^s P(x)\,dx = \frac{s-r}{6}\left[P(r) + 4P\left(\frac{r+s}{2}\right) + P(s)\right] \qquad \text{(یک)}$$

به ازای هر چندجمله‌ای $P(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ از درجهٔ نابیشتر از 3 معتبر است. (به ازای $D = 0$، فرمول (یک) قبلاً" درحین اثبات قاعدهٔ سیمپسون ثابت شده است.) با مثال، شکست فرمول منشور را برای یک چندجمله‌ای درجهٔ 4 نشان دهید.

۱۴ . نشان دهید که اگر انتگرالده تابعی مکعبی چون $f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ باشد، قاعدهٔ سیمپسون مقدار دقیق انتگرال $I = \int_a^b f(x)\,dx$ را به ما می‌دهد، ولی درصورتی که $f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4\ (E \neq 0)$ این‌طور نخواهد بود .

راهنمایی . از فرمول (۱۲) استفاده کنید .

انتگرالهای زیر را با استفاده از فرمول منشور (یک) حساب کنید .

۱۵ . $\int_0^2 (x^3 + x^2 + x + 1)\,dx$

۱۶ . $\int_{1/2}^{3/2} (8x^3 - 4x^2 + 2x - 1)\,dx$

۱۷ . جدول مقادیر

x	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35
$f(x)$	2.36	2.50	2.74	3.04	3.46	3.98	4.60

تمام چیزی است که از تابع f می‌دانیم . انتگرال $\int_{1.05}^{1.35} f(x)\,dx$ را بااستفاده‌ازقاعدهٔ سیمپسون تخمین بزنید .

۱۸ . مقدار دقیق انتگرال

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}$$

را یافته ، و تحقیق کنید که تقریب I با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون با فقط دو زیر بازه به اندازهٔ 0.00001 دقیق است .

انتگرال داده شده را با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون با مقدار ذکر شدهٔ n که تعداد زیر بازه‌هاست تقریب نمایید . مقادیر عرضها را تا پنج رقم اعشار حساب کرده ، و جواب را (بدون سعی در تخمین خطا) تا چهار رقم اعشار بیان نمایید .

۱۹ . $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx,\ n = 3$

۲۰ . $\int_2^3 \frac{dx}{\ln x},\ n = 4$

۲۱ . $\int_1^2 \sqrt{\ln x}\,dx,\ n = 4$

۲۲ . $\int_0^2 \sin\frac{\pi x^2}{2}\,dx,\ n = 8$

۲۳ . اگـر $f(x)=e^{-x^2}$ ، نشان دهید که قدرمطلق مشتق چهارم $f^{(4)}(x)$ بـر بـازهٔ $[0, 1]$ از 12 تجاوز نمی‌کند . آیا $f^{(4)}$ بر $[0, 1]$ علامت ثابت دارد ؟

۹.۷ انتگرالهای مجازی

در معرفی مفهوم انتگرال معین $\int_a^b f(x)\,dx$ از آغاز فرض‌شد که بازهٔ انتگرالگیری $[a, b]$ بسته و *کراندار* است . به‌علاوه ، انتگرالده f باید بر $[a, b]$ *کراندار* باشد ، زیرا در غیر ایـن صورت حد معرف انتگرال موجود نیست (ر.ک . مسئلهٔ ۳۳ ، صفحهٔ ۳۸۱) .لذا ، در حال حاضر ، انتگرال

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \qquad (۱)$$

بی‌معنی است ، زیرا بازهٔ انتگرالگیری بی‌کران است . انتگرال

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \qquad (۲)$$

نیز بی‌معنی است ، زیرا انتگرالده $1/\sqrt{x}$ وقتی $x \to 0^+$ به بی‌نهایت نزدیک می‌شود؛ولذا ، بر بازهٔ $[0, 1]$ بی‌کران می‌باشد .

تبصره . تابع $1/\sqrt{x}$ درنقطهٔ $x=0$ تعریف نشده‌است ، ولی در کنار دلیل عدم‌وجود (۲) که بی‌کرانی $1/\sqrt{x}$ بر بازهٔ انتگرالگیری است ، تصادفی می‌باشد . مثلا" ،

$$f(x)=\begin{cases} 1/\sqrt{x} \text{ ، } & x>0 \text{ اگر} \\ 0 \text{ ، } & x=0 \text{ اگر} \end{cases}$$

نیز بر $[0, 1]$ بی‌کران و درنتیجه انتگرال‌ناپذیر است ،اگرچه در هرنقطه از $[0, 1]$ تعریف شده است .

هر انتگرال با بازهٔ انتگرالگیری بی‌کران یا انتگرالدهٔ بی‌کران (یا هر دو) را ، به خلاف انتگرالهای معمولی یا حقیقی که تا بحال دیده‌ایم ، **مجازی** می‌نامند . همانطور کـه اینک نشان می‌دهیم ، راهی برای انتساب مقدار عددی به انتگرالهای مجازی ، بخصوص انتگرالهای (۱) و (۲) ، وجود دارد .

بازه‌های انتگرالگیری بی‌کران . ابتدا انتگرالهـایی مجازی مانند انتگرال (۱) ، با بازهٔ انتگرالگیری بی‌کران ،رادرنظر می‌گیریم . فرض کنیم f بر بازهٔ نامتناهی $[a, \infty)$ پیوستـه بوده ، و حد

$$\lim_{u\to\infty} \int_a^u f(x)\,dx \qquad (u>a) \qquad (۳)$$

موجود و متناهی باشد . (چون تابع f بر $[a, \infty)$ پیوسته است ،بر هرزیـر بـازهٔ $[a, u]$ پیوسته و درنتیجه انتگرالپذیر است .) در این صورت ، گوییم انتگرال مجازی

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \tag{۴}$$

همگرا است ، و مقدار (۳) را به آن نسبت می‌دهیم . اما ، اگر حد (۳) نامتناهی بوده یا وجود نداشته باشد ، گوییم انتگرال (۴) **واگرا** است . به همین نحو ، فرض کنیم f بر بازهٔ $(-\infty, b]$ پیوسته بوده ، و حد

$$\lim_{u\to-\infty}\int_u^b f(x)\,dx \qquad (u < b) \tag{۳'}$$

موجود و متناهی باشد . در این صورت ، گوییم انتگرال مجازی

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx \tag{۴'}$$

همگراست و به آن مقدار (۳') را نسبت می‌دهیم ، ولی انتگرال (۴') را واگرا گوییم اگرحد (۳') نامتناهی بوده یا موجود نباشد .

همچنین ، انتگرالهای مجازی از نوع

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx \tag{۵}$$

وجود دارند ، که در آن هر دو حد انتگرالگیری نامتناهی بوده و f بر تمام خط حقیقی $(-\infty, \infty)$ پیوسته است . فرض کنیم هر دو انتگرال (مجازی)

$$I_2 = \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{و} \quad I_1 = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx$$

همگرا باشند ، که درآنها a عدد حقیقی دلخواهی است . در این صورت ، گوییم انتگرال (۵) **همگرا** است و به آن مقدار $I_1 + I_2$ نسبت می‌دهیم ؛ یعنی ،

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx, \tag{۶}$$

ولی در غیر این صورت گوییم (۵) **واگرا** می‌باشد . به عنوان تمرین ، نشان دهیدکه‌انتخاب خاص عدد a بر همگرایی یا واگرایی I_1 و I_2 ، یا مقدار $I_1 + I_2$ در حالت همگرایی،تأثیر ندارد ؛ درنتیجه ، می‌توان مثلا " $a = 0$ را اختیار کرد .

مثال ۱. انتگرال مجازی

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2},$$

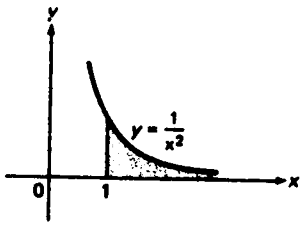
که در آغاز بخش مطرح شد ، همگراست . در واقع ،

$$\lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{dx}{x^2} = \lim_{u\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^u = \lim_{u\to\infty}\left(1-\frac{1}{u}\right) = 1,$$

و لذا ،

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{dx}{x^2} = 1.$$

با تعمیم طبیعی تعریف مساحت تحت یک منحنی در حالت بازهٔ انتگرالگیری کراندار ، می‌توان مقدار این انتگرال مجازی ، یعنی عدد ۱ ، را مساحت تحت منحنی $y = 1/x^2$ از $x = 1$ تا $x = \infty$ گرفت.[1] لذا ، ممکن است برای یک ناحیهٔ بی‌کران ، در اینجا ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۱۲ "که تا بی‌نهایت گسترش یافته " ، مساحت متناهی داشته باشیم .



شکل ۱۲

از نظر تکنیکی ، یک‌ناحیه را *کراندار* یا *متناهی* گوییم اگر کاملا " داخل دایرهٔ (به‌قدر کافی بزرگی) به مرکز مبداء قرار داشته باشد . در غیر این صورت گوییم ناحیه *بی‌کران* یا *نامتناهی* است . به عبارت دیگر ، یک ناحیهٔ بی‌کران شامل نقاطی است که بدلخواه‌ازمبداء دور می‌باشند .

مثال ۲. انتگرال مجازی

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}$$

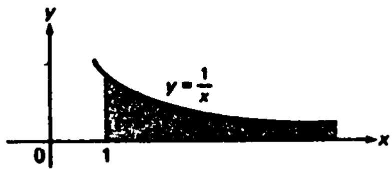
---

۱ . در نگارش $x = \infty$ قید قبلی (برای گذاردن علامت ∞ یا $-\infty$ بعد از علامت تساوی) را برمی‌داریم تا نمادها یکنواخت باشند .

واگراست ، زیرا

$$\lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{dx}{x} = \lim_{u\to\infty} \ln x\Big|_1^u = \lim_{u\to\infty} \ln u = \infty.$$

لذا ، مساحت تحت‌منحنی $y = 1/x$ از $x = 1$ تـا $x = \infty$ ،یعنی مساحت‌ناحیهٔ سایه‌دار بی‌کران در شکل ۱۳ ، را باید نامتناهی درنظر گرفت .



شکل ۱۳

مثال ۳. چون تابع

$$\int_0^u \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^u = 1 - \cos u$$

وقتـی $u \to \infty$ ، بین مقادیر 0 و 2 جلو و عقب می‌رود ، فورا" می‌بینیم که حد

$$\lim_{u\to\infty}\int_0^u \sin x\, dx$$

وجـود ندارد . لذا ، انتگرال مجازی

$$\int_0^\infty \sin x\, dx$$

واگرا می‌باشد .

مثال ۴. انتگرال مجازی

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}\, dx$$

همگراست . در واقع ،

$$\int_0^\infty e^{-|x|}\, dx = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = \lim_{u\to\infty}\int_0^u e^{-x}\, dx$$
$$= \lim_{u\to\infty} (-e^{-x})\Big|_0^u = \lim_{u\to\infty} (1 - e^{-u}) = 1,$$

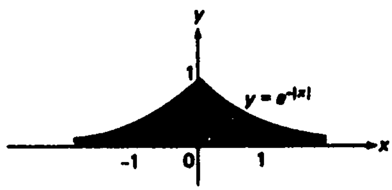
زیرا به ازای $x \geq 0$ ، $|x| = x$ و وقتی $u \to \infty$ ، $e^{-u} \to 0$ ، حال آنکه

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{u\to-\infty}\int_{u}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{u\to-\infty} e^{x}\Big|_{u}^{0} = \lim_{u\to-\infty}(1-e^{u}) = 1,$$

زیرا به ازای $x \leq 0$ ، $|x| = -x$ و وقتی $u \to -\infty$ ، $e^{u} \to 0$. بنابراین، طبق رابطهٔ (۶) به ازای $a = 0$ ،

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-|x|}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-|x|}\,dx = 1 + 1 = 2.$$

لذا، می‌توان عدد 2 را مساحت‌ناحیهٔ سایه‌دار نامتناهی‌شکل ۱۴ تحت منحنی $y = e^{-|x|}$ از $x = -\infty$ تا $x = \infty$ درنظر گرفت.



شکل ۱۴

انتگرالدهای بی‌کران. حال انتگرالهای مجازی، مانند انتگرال (۲)، باانتگرالده‌بی‌کران را درنظر می‌گیریم. فرض‌کنیم $f(x)$ تابع پیوسته‌ای بر بازهٔ نیمباز $[a, b)$ باشد که‌وقتی $x \to b^-$ به‌بی‌نهایت (∞ یا $-\infty$) نزدیک می‌شود، و نیز حد

$$\lim_{u\to b^-}\int_{a}^{u} f(x)\,dx \qquad (a < u < b) \tag{۷}$$

موجود و متناهی باشد. (چرا f بر هر زیر بازهٔ $[a, u]$ انتگرالپذیر است؟) دراین‌صورت گوییم انتگرال مجازی

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \tag{۸}$$

همگرا است، و به آن مقدار (۷) را نسبت می‌دهیم. اما، اگر حد (۷) نامتناهی بوده یا وجود نداشته باشد، گوییم انتگرال (۸) *واگرا* می‌باشد. به همین نحو، فرض‌کنیم $f(x)$ تابع پیوسته‌ای بر $(a, b]$ باشد که‌وقتی $x \to a^+$ به بی‌نهایت نزدیک می‌شود، و نیز حد

$$\lim_{u\to a^+}\int_{u}^{b} f(x)\,dx \qquad (a < u < b) \tag{۷'}$$

موجود و متناهی باشد . در این صورت ، گوییم انتگرال مجازی (۸) همگراست و مقدار ('۷) را به آن نسبت می‌دهیم ، ولی انتگرال (۸) واگراست اگر حد ('۷) نامتناهی بوده‌یاوجود نداشته باشد .

همچنین ، حالتی وجود دارد که در آن $f(x)$ با نزدیک شدن x به نقطهٔ درونی c از $[a, b]$ بی‌نهایت می‌شود . به‌طور دقیقتر ،فرض‌کنیم $f(x)$ در دوطرف c ، یعنی بربازه‌های $[a, c)$ و $(c, b]$ ، پیوسته بوده ، و وقتی x از یک یا دوطرف به c نزدیک شود ، $f(x)$ به بی‌نهایت نزدیک می‌شود . در این صورت ، اگر هر دو انتگرال

$$I_1 = \int_a^c f(x)\,dx, \qquad I_2 = \int_c^b f(x)\,dx$$

همگرا باشند (یا یکی همگرا و دیگری حقیقی باشد) ، گوییم انتگرال (۸) همگراست و مقدار $I_1 + I_2$ را به آن نسبت می‌دهیم ؛ یعنی ،

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

ولی در غیر این صورت گوییم (۸) واگراست .

مثال ۵. انتگرال مجازی

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

مطرح شده در آغاز بخش، همگراست . در واقع ،

$$\lim_{u\to 0^+} \int_u^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{u\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_u^1 = \lim_{u\to 0^+} (2 - 2\sqrt{u}) = 2,$$

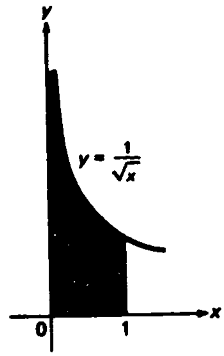
و درنتیجه ،

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{u\to 0^+} \int_u^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

لذا ، می‌توان‌عدد 2 را مساحت‌تحت‌منحنی $y = 1/\sqrt{x}$ از $x = 0$ تا $x = 1$ گرفت (مساحت ناحیهٔ سایه‌دار بی‌کران در شکل ۱۵) . این مثال دیگری است از یک ناحیهٔ نامتناهی با مساحت متناهی .

مثال ۶. انتگرال مجازی

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} \tag{۹}$$

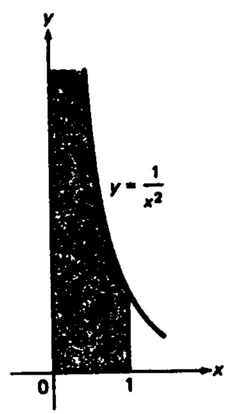


شکل ۱۵

واگراست ، زیرا

$$\lim_{u\to 0^+}\int_u^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{u\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_u^1 = \lim_{u\to 0^+}\left(\frac{1}{u}-1\right) = \infty.$$

لذا ، مساحت تحت منحنی $y = 1/x^2$ از $x = 0$ تا $x = 1$ (مساحت ناحیهٔ سایه‌دار بی‌کران شکل ۱۶) را باید نامتناهی گرفت .



شکل ۱۶

مثال ۷. چون انتگرال (۹) واگراست ، انتگرال

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$$

نیز چنین است (ر.ک . بحث پیش از مثال ۵) . فرض کنیم در محاسبهٔ صوری این انتگرال

اشتباه کرده، این امر را که انتگرالده در مبداء $x = 0$ به بی‌نهایت نزدیک می‌شود نادیده بگیریم. در این صورت، نتیجهٔ پوچ

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -2$$

را به دست می‌آوریم که تابع مثبتی با انتگرال منفی را نشان می‌دهدا

مثال ۸. انتگرال مجازی

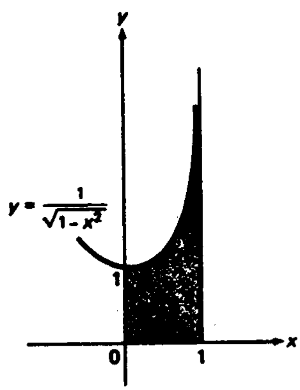
$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

همگرا و مساوی $\pi/2$ است. در واقع، بنابر پیوستگی سینوس معکوس،

$$I = \lim_{u \to 1^-} \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{u \to 1^-} \arcsin x \Big|_0^u$$

$$= \lim_{u \to 1^-} \arcsin u = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

از نظر هندسی، I مساحت ناحیهٔ سایه‌دار بی‌کران شکل ۱۷ است.



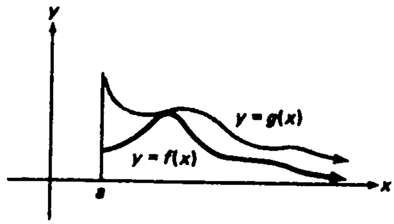
شکل ۱۷

قضیهٔ زیر یک ابزار قوی برای بررسی انتگرالهای مجازی به ما می‌دهد.

قضیهٔ ۶ (آزمون مقایسه برای انتگرالهای مجازی). *فرض کنیم f و g توابع پیوسته‌ای باشند به طوری که به ازای هر $x \geq a$، $0 \leq f(x) \leq g(x)$. در این صورت،*

(یک) اگر $\int_a^\infty g(x)\,dx$ همگرا باشد ، $\int_a^\infty f(x)\,dx$ نیز چنین است ؛
(دو) اگر $\int_a^\infty f(x)\,dx$ واگرا باشد ، $\int_a^\infty g(x)\,dx$ نیز چنین است .

با آنکه برهان قضیهٔ ۶ مستلزم تکنیکهایی است ، و لذا حذف شده است ، مضمون شهودی قضیه از شکل ۱۸ واضح است : هرگاه مساحت‌تحت منحنی بالایی $y = g(x)$ متناهی



مقایسهٔ دو تابع بر یک بازهٔ بی‌کران

شکل ۱۸

باشد ، آنگاه مساحت تحت منحنی پایینی $y = f(x)$ نیز چنین است ، زیرا دومی نمی‌تواند از اولی متجاوز باشد . از آن سو ، اگر مساحت تحت منحنی پایینی نامتناهی باشد ، مساحت تحت منحنی بالایی نیز چنین است ، زیرا دومی نمی‌تواند از اولی تجاوز کند . توجه کنید که چون توابع f و g نامنفی‌اند ، نوسانات شبیه مثال ۳ نمی‌توانند در اینجا رخ دهند ، و واگرایی انتگرالهای $\int_a^\infty f(x)\,dx$ و $\int_a^\infty g(x)\,dx$ فقط می‌تواند به معنی

$$\lim_{u \to \infty} \int_a^u f(x)\,dx = \infty \quad , \quad \lim_{u \to \infty} \int_a^u g(x)\,dx = \infty$$

باشد .

مشابه‌های آزمون مقایسه برای انواع دیگر انتگرالهای مجازی وجود دارند . مثلاً ، فرض کنیم f و g توابع پیوسته‌ای باشند به‌طوری که

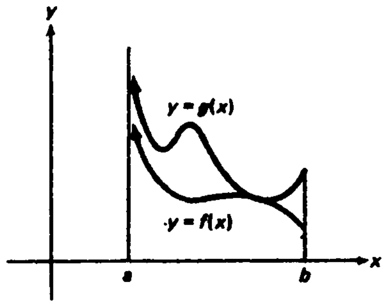
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = \infty,$$

و فرض می‌کنیم به ازای هر $a < x \le b$ ، $0 \le f(x) \le g(x)$. در این صورت ،
(یک') اگر $\int_a^b g(x)\,dx$ همگرا باشد ، $\int_a^b f(x)\,dx$ نیز چنین است ؛
(دو') اگر $\int_a^b f(x)\,dx$ واگرا باشد ، $\int_a^b g(x)\,dx$ نیز چنین است .
باتوجه به شکل ۱۹ ، قسمتهای (یک') و (دو') را تعبیر هندسی کنید .

مثال ۹. نشان دهید که انتگرال مجازی

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

همگراست.



مقایسهٔ دو تابع بی‌کران

شکل ۱۹

حل. چون I مجموع انتگرال حقیقی

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

و انتگرال مجازی

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx \qquad (۱۰)$$

است، کافی است نشان دهیم که انتگرال (۱۰) همگراست. با توجه‌به $0 \le e^{-x^2} \le e^{-x}$ به ازای هر $x \ge 1$ (ولی نه به ازای $0 < x < 1$)، و اعمال قضیهٔ ۶، می‌توان همگرایی انتگرال "مشکل" (۱۰) را از انتگرال خیلی "آسانتر"

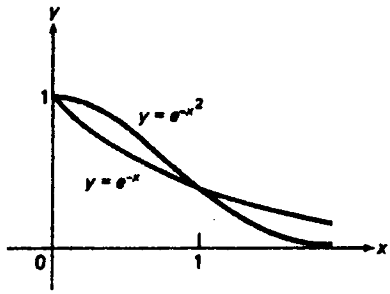
$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{u\to\infty}\int_1^u e^{-x}\,dx = \lim_{u\to\infty}(-e^{-x})\Big|_1^u$$
$$= \lim_{u\to\infty}(e^{-1} - e^{-u}) = e^{-1}$$

نتیجه گرفت. شکل ۲۰ معنی هندسی آزمون مقایسه، به کار رفته در این مثال، را نشان می‌دهد. همانطور که در تبصرهٔ صفحهٔ ۶۷۲ گفتیم، معلوم می‌شود که $I = \sqrt{\pi}/2$.

مثال ۱۰. نشان دهید که انتگرال مجازی

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x \sin x}$$

واگراست .



شکل ۲۰

حل . لازم نیست انتگرال را حساب کنیم . ابتدا ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای هر $0 < x \leq \pi/2$ ،

$$\frac{1}{x \sin x} \geq \frac{1}{x} > 0$$

(چرا ؟) ، و سپس اینکه انتگرال

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x}$$

واگراست ، زیرا

$$\lim_{u \to 0^+} \int_u^{\pi/2} \frac{dx}{x} = \lim_{u \to 0^+} \ln x \Big|_u^{\pi/2} = \lim_{u \to 0^+} \left(\ln \frac{\pi}{2} - \ln u \right) = \infty.$$

حال واگرایی I نتیجه‌ای است از آزمون مقایسه به شکل (دو′) .

همچنین ، انتگرالهای مجازی " از نوع مخلوط " ، که در آنها بازهٔ انتگرالگیری و انتگرالده هر دو بی‌کرانند ، نیز وجود دارند . مثلا" ، فرض کنیم $f(x)$ بر بازهٔ (a, ∞) پیوسته بوده و وقتی $x \to a^+$ بـه بی‌نهایت نزدیک شود ، و نیز هر دو انتگرال مجازی

$$I_1 = \int_a^c f(x)\,dx, \qquad I_2 = \int_c^\infty f(x)\,dx \qquad (a < c < \infty)$$

همگرا باشند . در این صورت ، گوییم انتگرال مجازی

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \tag{11}$$

همگراست و به آن مقدار $I_1 + I_2$ را نسبت می‌دهیم؛ یعنی،

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)\,dx, \qquad (۱۲)$$

ولی در غیر این صورت گوییم (۱۱) واگرا می‌باشد. در اینجا به این مطلب ساده تکیه داریم که همگرایی یا واگرایی انتگرالهای I_1 و I_2، و مقدار مجموع آنها درصورتی‌که هردو همگرا باشند، به انتخاب نقطهٔ میانی c بستگی ندارد (این مطلب را نشان دهید).

مثال ۱۱. انتگرال مجازی

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}$$

واگراست. در واقع، با انتخاب $c = 1$ در (۱۲)، داریم

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}.$$

از دو انتگرال سمت راست، دومی طبق مثال ۱ همگراست ولی اولی طبق مثال ۶ واگراست. از اینرو، انتگرال سمت چپ نیز واگرا می‌باشد.

مثال ۱۲. انتگرال مجازی

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

همگراست. برای نشان دادن این، ابتدا می‌نویسیم

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

سپس می‌بینیم که اولین انتگرال سمت راست، از مقایسه با انتگرال همگرای $\int_0^1 dx/\sqrt{x}$، همگراست (ر.ک. مثال ۵)، حال آنکه دومین انتگرال، از مقایسه با انتگرال همگرای $\int_1^\infty e^{-x}\,dx = e^{-1}$، همگرا می‌باشد (جزئیات را به عنوان تمرین می‌گذاریم). لذا، انتگرال سمت چپ نیز همگراست و مقدارش در مسئلهٔ ۴۹ داده شده است.

مسائل

اگر انتگرال مجازی داده شده همگرا باشد، مقدارش را بیابید. در غیر این صورت، بگویید که واگراست.

۱. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$

۲. $\int_0^1 \frac{dx}{x^4}$

۳. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+1}$

۴. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$

۵. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2-1}$

۶. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$

۷. $\int_{-1}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

۸. $\int_0^{16} \frac{ds}{\sqrt[4]{s}}$

۹. $\int_{-32}^1 \frac{dt}{\sqrt[5]{t}}$

۱۰. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

۱۱. $\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$

۱۲. $\int_{-4}^0 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

۱۳. $\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

۱۴. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

۱۵. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

۱۶. $\int_{-\infty}^0 \cos x\,dx$

۱۷. $\int_0^{\pi/2} \tan y\,dy$

۱۸. $\int_0^\infty e^{-3z}\,dz$

۱۹. $\int_0^1 \ln x\,dx$

۲۰. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$

۲۱. $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx$

۲۲. $\int_0^\infty e^{-3x}\cos 2x\,dx$

۲۳. $\int_0^\infty e^{-2x}\sin x\,dx$

۲۴. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

۲۵. $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$

۲۶. $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$

۲۷. $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$

۲۸. $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

۲۹. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

۳۰. $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$

به ازای $a > 0$ ، نشان دهید که

۳۱. $\int_0^a x^p\,dx$ همگراست اگر و فقط اگر $p > -1$.

۳۲. $\int_a^\infty x^p\,dx$ همگراست اگر و فقط اگر $p < -1$.

۳۳. $\int_0^\infty x^p\,dx$ به ازای هر p واگراست .

انتگرالهای زیر را به ازای $a > 0$ داده شده حساب کنید .

۳۴. $\int_0^\infty e^{-ax}\,dx$

۳۵. $\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$

۳۶. $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$

مساحت A ناحیهٔ R بین منحنیهای زیر را بیابید .

۳۷. $y = x^{-1/2}$ و $y = \frac{1}{2}x^{-1/3}$ از $x = 0$ تا $x = 1$.

۳۸. $y = e^{-x}$ و $y = 1/(x^2+1)$ از $x = 0$ تا $x = \infty$.

۳۹. $y = \cosh x$ و $y = \sinh x$ در ربع اول .

در هر حالت ، ناحیهٔ R را رسم نمایید .

همگرایی یا واگرایی انتگرال مجازی داده شده را با آزمون مقایسه تعیین کنید

۴۰. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$

۴۱. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$

۴۲. $\int_0^1 \frac{dx}{x\cos x}$

۴۳. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+\ln x}$

۴۴. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$

۴۵. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$

۴۶. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{x}\,dx$

۴۷. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4+x^2}}$

۴۸. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$

با معلوم گرفتن فرمول $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ، نشان دهید که

۴۹. $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\pi}$

۵۰. $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$

عدد x را طوری بیابید که

۵۱. $\int_0^x e^{-t}\,dt = \int_x^\infty e^{-t}\,dt$

۵۲. $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$

۵۳. $\int_0^x \frac{dt}{t^2+1} = \int_x^\infty \frac{dt}{t^2+1}$

۵۴. فرض کنید f بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته بوده ، و انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ همگرا باشد .نشان دهید که اگر f زوج باشد ،

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

حال آنکه اگر f فرد باشد ،

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0$$

۵۵. تابع f را طوری مثال بزنید که $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ واگرا بوده ولی

$$\lim_{u\to\infty} \int_{-u}^{u} f(x)\,dx = 0.$$

۵۶. یک مالک ، که از مستأجرین خود در سال D دلار اجارهٔ مرکب (به اقساط ماهانه) دریافت می‌کند ، ساختمان را به معرض فروش گذارده است . اگر وی معمولاً " به محض دریافت اجاره آن را با نرخ سود سالانهٔ $100r$ درصد به طور پیوسته مرکب سپرده می‌گذارد ، چرا D/r دلار را بهای عادلانه می‌داند؟

راهنمایی . با استفاده از یک انتگرال مجازی ، ارزش فعلی " جریان درآمد " مرکب از تمام دریافتهای اجارهٔ آینده را تقریب کنید .

اصطلاحات و مباحث کلیدی

انتگرالگیری با جانشانی : $\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(u)\,du|_{u=u(x)}$

انتگرالگیری جزء به جزء : $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

فرمولهای تحویل

انتگرالگیری از حاصل ضرب توانهایی از $\sin x$ و $\cos x$

انتگرالگیری از حاصلضرب توانهایی از $\tan x$ و $\sec x$

انتگرالگیری از حاصلضرب سینوسها و کسینوسها با شناسه‌های مختلف جانشانیهای

$x = a\sin u$ ، $x = a\tan u$ ، و $x = a\sec u$

جانشانیهای $x = a\sinh u$ و $x = a\cosh u$

توابع گویای حقیقی و مجازی

تجزیهٔ چندجمله‌ایها با ضرایب حقیقی

بسط تابع گویا به صورت کسرهای جزئی

انتگرالگیری از توابع گویا به کمک کسرهای جزئی
جانشانیهای گویاساز، جانشانی نصف زاویه
انتگرالگیری از توابع گویا برحسب $\sin x$ و $\cos x$
قاعدهٔ نقطهٔ میانی و خطای آن
قاعدهٔ ذوزنقه و خطای آن
قاعدهٔ سیمپسون و خطای آن
انتگرالهای مجازی با بازهٔ انتگرالگیری بی‌کران
انتگرالهای مجازی با انتگرالده بی‌کران
آزمون مقایسه برای انتگرالهای مجازی

برای مرور فرمولهای اصلی انتگرالگیری، ر.ک. آخر کتاب، شماره‌های ۱ تا ۲۸.

مسائل تکمیلی

انتگرال داده شده را به هر روشی که خواستید حساب کنید.

۱. $\int x^5 e^{x^2}\, dx$

۲. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$

۳. $\int \frac{x^2}{(x-1)^9}\, dx$

۴. $\int \sin 7x \cos 8x\, dx$

۵. $\int \frac{x^3}{x^3+1}\, dx$

۶. $\int \frac{ds}{\tan^5 s}$

۷. $\int (x^2+1)^{3/2}\, dx$

۸. $\int \sin^6 t \cos^5 t\, dt$

۹. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}}$

۱۰. $\int \sin^2 x \cot^3 x\, dx$

۱۱. $\int \frac{dx}{\sin x \cos 2x}$

۱۲. $\int x^2 \sinh x\, dx$

۱۳. $\int \sqrt{x^4+x}\, dx$

۱۴. $\int \frac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}}\, dx$

۱۵. $\int \frac{y}{\sqrt{y+1}+1}\, dy$

۱۶. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$

۱۷. $\int \tanh^{-1} x\, dx$

۱۸. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,(\arccos x)^2}$

۱۹. $\int (1 - x^2)^{5/2}\, dx$

۲۰. $\int \frac{\tan^2 z + 1}{\tan^2 z - 1}\, dz$

۲۱. $\int \operatorname{sech} x\, dx$

۲۲. $\int \operatorname{csch} x\, dx$

۲۳. $\int \sqrt{1 - x^2} \arcsin x\, dx$

۲۴. $\int (\arcsin x)^2\, dx$

۲۵. $\int x \coth^2 x\, dx$

۲۶. $\int \sec^2 u \csc^2 u\, du$

۲۷. $\int x e^x \sin x\, dx$

۲۸. $\int v^2 \ln \frac{v - 1}{v}\, dv$

۲۹. $\int \frac{3x^2 - 1}{x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1}\, dx$

۳۰. $\int e^{2x} \sqrt{e^x + 2}\, dx$

۳۱. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\, dx$

۳۲. $\int \cot^4 w \csc^4 w\, dw$

۳۳. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}}\, dx$

۳۴. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1 + \sqrt[4]{x})^3}$

۳۵. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$

۳۶. $\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)}$

۳۷. $\int (\tan y - \sec y)^2\, dy$

۳۸. $\int \frac{1}{x} \left(\frac{x + 2}{x - 1}\right)^2 dx$

۳۹. $\int x \cos \sqrt{x}\, dx$

۴۰. $\int \sin^3 x \tan x\, dx$

۴۱. $\int \frac{dx}{(x - 1)^2 (x + 1)^3}$

۴۲. $\int \frac{\ln z}{\sqrt{z}}\, dz$

۴۳. $\int \sin x \sinh x\, dx$

۴۴. $\int \sinh 2x \cosh x\, dx$

۴۵. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 + x}}\, dx$

۴۶. $\int \cos \pi v \cos v\, dv$

۴۷. $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^4 - x^3 - 91x^2 + x + 90}\, dx$

۴۸. $\int \cos^2 x \csc^3 x \, dx$

۴۹. $\int \frac{x + \sin x \cos x}{(x \sin x + \cos x)^2} dx$

۵۰. $\int \arctan \sqrt{2x - 1} \, dx$

۵۱. $\int \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1} dx$

۵۲. $\int \left(\frac{u}{u \cos u - \sin u}\right)^2 du$

۵۳. $\int \frac{\tan^2 x}{1 + \cos^2 x} dx$

۵۴. $\int \sqrt{1 - \sin x} \, dx$

۵۵. $\int \cos x \tan^4 x \, dx$

۵۶. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$

۵۷. $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$

۵۸. $\int \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx$

۵۹. $\int \frac{x^4 - 1}{x^6 - 1} dx$

۶۰. $\int \tan^3 x \sec^4 x \, dx$

۶۱. $\int \frac{ds}{e^{3s} - e^s}$

۶۲. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$

۶۳. $\int \frac{t^5 + 1}{t^6 + t^4} dt$

۶۴. $\int \cot^6 x \, dx$

۶۵. $\int \frac{\sqrt{\tan z}}{\sin 2z} dz$

۶۶. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx$

۶۷. $\int \frac{dx}{\sin(x+1)\sin(x-1)}$

۶۸. $\int \frac{du}{\sin^3 u \cos^5 u}$

۶۹. $\int y^4 \ln y \, dy$

۷۰. $\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$

۷۱. $\int \frac{\sin v}{\sin 3v} dv$

۷۲. $\int \tanh^4 x \, dx$

۷۳. $\int \operatorname{sech}^3 x \, dx$

۷۴. $\int \frac{ds}{s\sqrt{s^3 - 1}}$

۷۵. $\int \frac{dt}{2 \sin t + \sin 2t}$

۷۶. $\int \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1}\right)^2 dx$

۷۷. $\int \frac{\sin x}{2 + \sin x + \cos x} dx$

۷۸. $\int \frac{dx}{1 - \tanh x}$

۷۹. فرض کنید $Q(x) = (x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)$ ، که در آن $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ثابتهای متمایزی هستند (یعنی ، $c_i \neq c_j$ اگر $i \neq j$) ، و $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ٔ کمتر از n باشد . نشان دهید که

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(c_i)}{Q'(c_i)} \ln|x - c_i| + C. \qquad \text{(یک)}$$

انتگرالهای زیر را با استفاده از فرمول (یک) حساب کنید .

۸۰. $\int \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$

۸۱. $\int \frac{x^2+5}{(x-1)(x+2)(x+3)}\,dx$

۸۲. $\int \frac{x^3}{(x^2-1)(x^2-4)}\,dx$

۸۳. نشان دهید که $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{8}\pi \ln 2$

انتگرال داده شده را با استفاده ازقواعد ذکر شده تقریب کنید ،که‌درآن n تعداد زیربازه‌ها، می‌باشد . مقادیر عرضها را تا چهار رقم اعشار حساب کرده ، و جواب را (بدون تلاش در تخمین خطا) تا سه رقم اعشار بدهید .

۸۴. $\int_1^2 \frac{\cos x}{x}\,dx$ ، قواعد نقطه‌ٔ میانی و ذوزنقه ، $n = 5$.

۸۵. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,dx$ ، قواعد نقطه‌ٔ میانی و ذوزنقه، $n = 6$.

۸۶. $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ ، قواعد ذوزنقه و سیمپسون ، $n = 4$.

۸۷. چه مقدار از n ،یعنی تعداد زیربازه‌ها ، تضمین می‌کند که قدرمطلق خطای E_S ناشی از استفاده‌ٔ قاعده‌ٔ سیمپسون در تقریب انتگرال مسئله‌ٔ ۸۶ کوچکتر از 0.00001 باشد .

۸۸. به کمک نامساوی $x^2 \geq 2ax - a^2$ نشان دهید که $\int_3^\infty e^{-x^2}\,dx < 0.00003$. سپس ، با استفاده از قاعده‌ٔ سیمپسون به ازای $n = 12$ ، انتگرال مجازی $I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ را تقریب نمایید . مقادیر عرضها را تا پنج رقم اعشار حساب کرده و ، با تحلیل خطا ،

مقدار I را که به اندازهٔ 0.0001 دقیق است پیدا نمایید. جواب را به‌وسیلهٔ مقایسه با مقدار دقیق I امتحان کنید.

اگر انتگرال مجازی داده شده همگرا باشد، مقدار آن را بیابید. در غیر این صورت، بگویید که واگراست.

۸۹. $\int_0^\infty \frac{dx}{x+1}$

۹۰. $\int_2^\infty \frac{dy}{\ln y}$

۹۱. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$

۹۲. $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (a<b)$

۹۳. $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

۹۴. $\int_0^\infty \frac{x}{x^2-1}\,dx$

۹۵. $\int_0^1 \frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}}$

۹۶. $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

۹۷. $\int_0^\pi \frac{dt}{1+\cos t}$

۹۸. $\int_0^\infty e^{-x}\sin x\cos x\,dx$

۹۹. $\int_0^\infty e^{-2x}\sinh x\,dx$

۱۰۰. $\int_0^\infty e^{-x}\cosh x\,dx$

۱۰۱. نشان دهیدکه انتگرال مجازی

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p}$$

همگراست اگر و فقط اگر $p>1$.

۱۰۲. با استفادهٔ مکرر از انتگرالگیری جزء به جزء، نشان دهید که

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!,$$

که در آن n عدد صحیح مثبتی می‌باشد.

۱۰۳. با جانشانی $x=\tan t$ نشان دهید که

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{اگر } n=1 \\ \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-3}{2n-2}\frac{\pi}{2} & \text{اگر } n=2,3,\ldots \end{cases}$$

۱۰۴ . به کمک مسئلهٔ ۱۰۲ و جانشانی $x = -(m+1)\ln t$ ، نشان دهید

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n \, dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}},$$

که در آن m عدد صحیح نامنفی بوده و n عدد صحیح مثبتی می‌باشد .

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۱۰۵ . $\int_0^\infty x^6 e^{-x} \, dx$

۱۰۶ . $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^4}$

۱۰۷ . $\int_0^1 x^2 (\ln x)^3 \, dx$

۱۰۸ . نشان دهید که انتگرال مجازی $\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ همگراست اگر و فقط اگر $x > 0$.

۱۰۹ . به ازای x مثبت ، انتگرال مسئلهٔ قبل تابعی از x را تعریف می‌کند که به *تابع گاما* معروف بوده و با $\Gamma(x)$ نموده می‌شود . لذا ،

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \qquad (x > 0),$$

که در آن علامت Γ گامای بزرگ یونانی (معادل G انگلیسی)است . نشان دهید که

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad (x > 0),$$

و بخصوص

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

۱۱۰ . نشان دهید که

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1} \, dx = 0.$$