مفهوم انتگرال

۱- حاصل کدام انتگرال درست نیست؟

۱) $\int_{۰}^{۴}[x]dx=۶$ ۲) $\int_{-۱}^{۳}(x-[x])dx=۲$ ۳) $\int_{-۱}^{۲}x\,dx=\frac{۳}{۲}$ ۴) $\int_{-۱}^{۲}|x-۱|dx=۳$

۲- کدام از بقیه بیش‌تر است؟

۱) $\int_{۰}^{۲}x\,dx$ ۲) $\int_{-۱}^{۱}|x|dx$ ۳) $\int_{۰}^{۲}([x]+[-x])dx$ ۴) $\int_{۰}^{۲\pi}[\sin x]dx$

۳- جواب کدام انتگرال صفر نیست؟

۱) $\int_{-۲}^{۲}x^۲\,dx$ ۲) $\int_{-۱}^{۳}(|x|-|x-۲|)dx$ ۳) $\int_{-۲}^{۲}[x+\frac{۱}{۲}]dx$ ۴) $\int_{۰}^{۲\pi}\cos x\,dx$

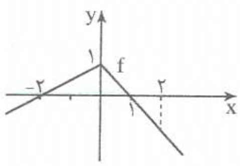
۴- حاصل $\int_{۱-\sqrt{۲}}^{۱+\sqrt{۲}}(x^۳-۳x^۲+۲)dx$ برابر است با:

۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۸}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}-۱}{۸}$ ۴) صفر

۵- حاصل $\int_{۰}^{۴}|x-۲|dx$ برابر است با: *(آزاد ۸۰)*

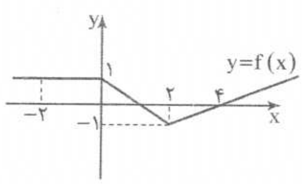
۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۶- با توجه به شکل مقابل $\int_{-۲}^{۲}f(x)dx$ کدام است؟ *(سنجش ۸۵)*



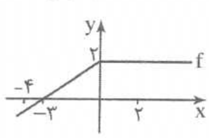
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۳

۷- شکل مقابل نمودار تابع f است. حاصل $\int_{-۲}^{۴}f(x)dx$ کدام است؟ *(سراسری ۸۱)*



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۸- با توجه به شکل تابع f، حاصل $\int_{-۴}^{۲}f(x)dx$ کدام است؟ *(سنجش ۸۶)*



۱) $\frac{۱۷}{۳}$ ۲) $\frac{۱۹}{۳}$ ۳) $\frac{۲۰}{۳}$ ۴) $\frac{۲۲}{۳}$

۹- حاصل $\int_{-۲\pi}^{۲\pi}[\sin x]dx$ برابر است با:

۱) $-\pi$ ۲) -۲π ۳) صفر ۴) -۴π

۱۰- حاصل $\int_{-۲}^{۲}(x+[x])dx$ ، کدام است؟ *(سراسری ۸۸)*

۱) ۲- ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۴

۱۱- حاصل $\int_{۰}^{۵}\sqrt{۲۵-x^۲}\,dx$ چند برابر π است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) $\frac{۲۵}{۲}$ ۴) $\frac{۲۵}{۴}$

قضیه‌ی اساسی اول و تابع مساحت

۱۲- مشتق تابع $A(x)=\int_{-2}^{x}\frac{3t-1}{t^3+1}dt$ در $x=1$ چه‌قدر است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) -1 ۴) 0

۱۳- اگر F تابعی با ضابطه‌ی $F(x)=\int_{-1}^{x}\frac{\cos\pi t}{t^4-1}dt$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(2+h)-F(2)}{h}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{15}$ ۴) $\frac{-1}{15}$

۱۴- اگر $A(x)=\int_{-1}^{x}(t+1)dt$، آن‌گاه آهنگ متوسط تغییر تابع $A(x)$ در بازه‌ی $[-1,3]$ چه‌قدر بیش‌تر از آهنگ آنی آن در $x=2$ است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

۱۵- اگر $G(x)=\int_{2}^{x}\frac{t}{t^2-1}dt$ آن‌گاه مشتق تابع $G(\frac{1}{x})$ در $x=2$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۱۶- اگر $G(x)=\int_{2}^{x}\frac{\cos\pi t^2}{\sqrt{2t+t+1}}dt$ آن‌گاه مشتق تابع $x^2G(x)$ در $x=2$ کدام است؟

۱) $0/6$ ۲) $0/8$ ۳) $0/5$ ۴) $0/4$

۱۷- اگر $F(x)=\int_{-\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-t^2}\,dt$ حاصل $F''(x)$ کدام است؟ $(0<x<\frac{\pi}{2})$

۱) $2\sin 2x$ ۲) $-2\sin 2x$ ۳) $2\cos 2x$ ۴) $-2\cos 2x$

۱۸- اگر $f(x)=\int_{3}^{x}(t^2+1)dx$، مشتق $f(2x^2)$ در نقطه‌ای به طول $\sqrt{2}$ چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

۱) 17 ۲) 34 ۳) 68 ۴) 102

۱۹- اگر $y=\int_{x}^{2}e^t\,dt$، حاصل $y''-4y'$ کدام است؟

۱) $4e^x$ ۲) $3e^x$ ۳) $-4e^x$ ۴) $-5e^x$

۲۰- اگر $G(x)=\int_{2}^{x}\frac{t}{\sqrt{1+t^3}}dt$ آن‌گاه مشتق راست تابع $y=xG(x)$، در نقطه‌ی $x=2$ کدام است؟ (سراسری ۸۷)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۲۱- اگر $F(x)=\int_{1}^{x}\frac{1+2t}{5+t^3}dt$، آن‌گاه مشتق تابع $FoF(x)$ در $x=1$ چه‌قدر است؟

۱) $0/1$ ۲) $0/2$ ۳) $0/3$ ۴) $0/4$

۲۲- اگر $\int_{0}^{x}\frac{f(t)}{t}dt=2\sqrt{x}-x\sin x+C$ باشد، $f(1)$ چه‌قدر است؟

۱) $\sin 1-\cos 1$ ۲) $1-\sin 1-\cos 1$ ۳) $\sin 1+\cos 1$ ۴) $1-\sin 1+\cos 1$

۲۳- اگر $G(x)=\int_{1}^{x}\frac{\cos\pi t}{1+t^2}dt$ آن‌گاه G در بازه‌ی $(3,8)$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

۱) 4 ۲) 5 ۳) 6 ۴) 7

۲۴- اگر $F(x)=\int_{1}^{x}\cos^6\frac{t}{2}dt$، با تغییر x از ۱ تا ۳، $F(x)$ چگونه تغییر می‌کند؟

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) ابتدا نزولی و سپس صعودی ۴) ابتدا صعودی و سپس نزولی

انتگرال نامعین

۲۵- اگر $f(x)=\int x\sin x\,dx$ مقدار $f'(\frac{\pi}{۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) $-\frac{\pi}{۲}$

۲۶- اگر $\int ۲x\sin ۳x\,dx = Ax\cos ۳x + B\sin ۳x + C$ باشد، AB کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۲۷}$ ۲) $-\frac{۳}{۲۷}$ ۳) $-\frac{۴}{۲۷}$ ۴) $-\frac{۶}{۲۷}$

۲۷- حاصل $\int (x^۲-۱)^۲dx$ کدام است؟

۱) $\frac{x^۳}{۳}-x$ ۲) $(\frac{x^۳}{۳}-x)^۲$ ۳) $\frac{x^۵}{۵}-\frac{۲x^۳}{۳}+۱$ ۴) $\frac{x^۵}{۵}-\frac{۲x^۳}{۳}+x$

۲۸- حاصل $\int \frac{x\sqrt{x}+۲x}{\sqrt{x}+۲}$ کدام است؟ (آزاد ۸۷)

۱) $x^۲+C$ ۲) $۲x^۲+C$ ۳) $-\frac{۱}{۲}x^۲+C$ ۴) $\frac{۱}{۲}x^۲+C$

۲۹- حاصل $\int \frac{x^۳+x^۲-x+۲}{x^۲}dx$ برابر است با:

۱) $\frac{x^۲}{۲}+x-\frac{۲}{x}-\mathrm{Ln}|x|$ ۲) $\frac{x^۲}{۲}-x+\frac{۱}{x^۲}-\mathrm{Ln}|x|$ ۳) $\frac{x^۲}{۲}+x-\mathrm{Ln}|x|+\frac{۲}{x}$ ۴) $\frac{x^۴}{۴}+\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۲}{۲}+۲x$

۳۰- حاصل $\int \sqrt{(x^۳-\frac{۱}{x^۳})^۲+۴}\,dx$ کدام است؟ $(x>۱)$

۱) $\frac{x^۶-۳}{۲x^۲}+C$ ۲) $\frac{x^۶-۲}{۲x^۲}+C$ ۳) $\frac{x^۴-۲}{۴x^۲}+C$ ۴) $\frac{x^۶-۲}{۴x^۲}+C$

۳۱- اگر $\int (x+\frac{۱}{x})^۵dx = f(x)$ باشد، ضریب جمله $x^۴$ در تابع $f(x)$ کدام است؟ (آزاد ۸۲)

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۳۲- اگر $\int \frac{x+۱}{x^۳}dx = \frac{f(x)}{۲x^۲}+C$ باشد آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟ (آزاد ۸۰)

۱) $-۲x+۱$ ۲) $-۲x-۱$ ۳) $۲x+۱$ ۴) $۲x-۱$

۳۳- اگر $\int \frac{x^۲+۲}{x^۲}dx = \frac{f(x)}{x}+C$ ، آن‌گاه $f(x)$ برابر کدام است؟ (سنجش ۸۲)

۱) $x^۲-۲$ ۲) $x^۲-x+۱$ ۳) $x^۲+۲$ ۴) $x^۲+x-۱$

۳۴- حاصل $\int (x\sqrt{x}-۱)^۲dx$ کدام است؟ (آزاد ۸۱)

۱) $\frac{x^۴}{۴}+\frac{۴}{۵}x^۲\sqrt{x}+x+C$ ۲) $\frac{x^۴}{۴}-\frac{۴}{۵}x^۲\sqrt{x}+x+C$ ۳) $\frac{x^۳}{۳}-\frac{۲}{۵}x\sqrt{x}+x+C$ ۴) $\frac{x^۳}{۳}+\frac{۲}{۵}x\sqrt{x}+x+C$

۳۵- اگر $F(x)=\int (۱-\sqrt{x})^۲dx$ حاصل $F(۴)-F(۰)$ کدام است؟ (سنجش ۸۶)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۶- اگر حاصل $\int \frac{x+۳}{\sqrt{x}}dx$ به صورت $۲\sqrt{x}f(x)+C$ باشد $f(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{x}{۳}+۳$ ۲) $\frac{x}{۲}+۳$ ۳) $\frac{x}{۳}+۶$ ۴) $\frac{x}{۲}+۶$

۳۷- اگر $\int \frac{۳x-۲}{\sqrt{x}}dx = f(x)\sqrt{x}+C$ آن‌گاه $f(x)$ برابر کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $۲x-۱$ ۲) $۲x-۴$ ۳) $۳x-۲$ ۴) $۳x-۴$

۳۸- اگر $\int(۳\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}})dx=\sqrt{x}f(x)+C$ ، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟ *(سراسری ۸۳)*

۱) $۳x-۱$ ۲) $۳x-۲$ ۳) $۲x-۲$ ۴) $x-۲$

۳۹- اگر $\int x(۱-۵\sqrt{x})dx=\frac{x^۲}{۲}f(x)+C$ ، تابع $f(x)$ کدام است؟ *(سراسری ۸۵)*

۱) $۱-۴\sqrt{x}$ ۲) $۱-۲\sqrt{x}$ ۳) $x-۲\sqrt{x}$ ۴) $x-x\sqrt{x}$

۴۰- اگر $\int\frac{(۱+\sqrt{x})^۲-x}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{x}f(x)+C$ ، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟ *(سراسری ۸۶)*

۱) $۱+\sqrt{x}$ ۲) $۱+۲\sqrt{x}$ ۳) $۲+\sqrt{x}$ ۴) $۲+۲\sqrt{x}$

۴۱- اگر $\int\frac{x^۴+x^۲+\sqrt{x}}{x^۲\sqrt{x}}dx=F(x)+G(x)+C$ و $\int\frac{x^۲+x+۱}{\sqrt{x}}dx=F(x)+C$ آن‌گاه $G(x)$ کدام است؟ *(آزاد ۸۱)*

۱) $\frac{۱}{x}-\frac{۲}{۳}x\sqrt{x}$ ۲) $-\frac{۱}{x}-\frac{۲}{۳}x\sqrt{x}$ ۳) $\frac{۱}{x}-x\sqrt{x}$ ۴) $-\frac{۱}{x}-x\sqrt{x}$

۴۲- حاصل انتگرال $\int((x^۲-\sqrt[۳]{x})^۲-(x^۲+\sqrt[۳]{x})^۲)dx$ به صورت ax^b+C بیان می‌شود. حاصل ab برابر است با:

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) ۲

۴۳- اگر $\int(\sqrt{x}+۱)(\sqrt[۳]{x}+۱)dx=\sqrt[۶]{x}f(x)$ ، ضریب عددی جمله‌ی $x\sqrt[۳]{x}$ در تابع $f(x)$ کدام است؟ *(آزاد ۸۳)*

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۶}{۱۱}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱۱}{۶}$

۴۴- حاصل $\int\frac{۱-\sin^۳x}{۱+\sin x+\sin^۲x}dx$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $x-\cos x+C$ ۲) $x-\frac{\sin^۴x}{۴}+C$ ۳) $x+\frac{\sin^۲x}{۲}+C$ ۴) $x+\cos x+C$

۴۵- حاصل $\int\tan x\sqrt{۱-\sin^۲x}\,dx$ در بازه‌ی $(\frac{\pi}{۲},\pi)$ کدام است؟

۱) $C-\sin x$ ۲) $C-\cos x$ ۳) $\sin x+C$ ۴) $\cos x+C$

۴۶- یک تابع اولیه‌ی $f(x)=\cos^۴\frac{x}{۲}-\sin^۴\frac{x}{۲}$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $\cos(\frac{\pi}{۲}+x)$ ۲) $\cos(\frac{\pi}{۲}-x)$ ۳) $\cos(\pi+x)$ ۴) $\cos(\pi-x)$

۴۷- حاصل $\int(\tan x-\cot x)^۲dx$ کدام است؟

۱) $\tan x-\cot x+۴x+C$ ۲) $\tan x+\cot x-۴x+C$ ۳) $\tan x-\cot x-۴x+C$ ۴) $\tan x+\cot x+۴x+C$

۴۸- حاصل انتگرال $\int\frac{۱-\cos ۲x}{۱+\cos ۲x}dx$ کدام است؟

۱) $\tan x+C$ ۲) $\tan x-x+C$ ۳) $\cot^۲x+۱+C$ ۴) $x+\frac{\sin ۲x}{۲}+C$

۴۹- حاصل $\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx+\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ کدام است؟ *(آزاد ۸۷)*

۱) $x+C$ ۲) $\cos x-\sin x+C$ ۳) $\cos x+\sin x+C$ ۴) $۲x+C$

۵۰- اگر $f(x)=۴\sin x\cos x$ ، در کدام گزینه یک تابع اولیه‌ی f نیامده است؟

۱) $-\cos ۲x$ ۲) $۲\sin^۲x$ ۳) $-۲\cos^۲x$ ۴) $۲\sin ۲x$

۵۱- برای $f(x)=(\tan x+\cot x)^۲$ تابع اولیه‌ای پیدا کرده‌ایم که از نقطه‌ی $(۲,\frac{\pi}{۴})$ می‌گذرد، برای این تابع اولیه، مقدار $F(-\frac{\pi}{۴})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) -۲

۵۲- حاصل $\int\frac{(۲x\sqrt{x}+\sqrt{x})^۴}{x^۲}dx$ برابر است با: *(آزاد ۸۰)*

۱) $\frac{(۲x+۱)^۵}{۵}+C$ ۲) $\frac{(۲x+۱)^۵}{۱۰}+C$ ۳) $\frac{۲(۲x+۱)^۵}{۵}+C$ ۴) $\frac{۴(۲x+۱)^۵}{۵}+C$

۵۳- اگر $\int x\sqrt{x+۱}dx$ برابر $۲(x+۱)\sqrt{x+۱}f(x)+C$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳x+۱}{۱۵}$ ۲) $\frac{۳x-۲}{۱۵}$ ۳) $\frac{۳x+۲}{۱۵}$ ۴) $\frac{۳x-۱}{۱۵}$

انتگرال معین

۵۴- در تابع $f(x)=۴x+۱$ اگر $\int_{۱}^{۳} f(x)dx=f(b)$ ، مقدار b کدام است؟

۱) $\frac{۱۷}{۴}$ ۲) $\frac{۱۷}{۲}$ ۳) $\frac{۱۹}{۴}$ ۴) $\frac{۱۹}{۲}$

۵۵- حاصل $\int_{-۲}^{۱}(\frac{|x|}{x}+[x])dx$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۴ ۳) -۵ ۴) -۶

۵۶- حاصل $\int_{-۲}^{۲}(۲x+|x|)dx$ کدام است؟ *(سراسری ۸۶)*

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۵۷- حاصل $\int_{۰}^{۳}(\frac{|۱-x|}{۱-x}+x)dx$ کدام است؟ *(آزاد ۸۴)*

۱) $-\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) $-\frac{۱۱}{۲}$

۵۸- اگر $f(x)=(x+|x|)[x]$ آن‌گاه $\int_{-۱}^{۲} f(x)dx$ برابر کدام است؟ *(سراسری ۸۴)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۹- حاصل $\int_{۲}^{۳}[x+\frac{۱}{۲}]dx$ کدام است؟ *(آزاد ۸۱)*

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۱

۶۰- حاصل $\int_{-۲}^{۲}(\frac{|x|}{x}+x)dx$ کدام است؟ *(آزاد ۸۳)*

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) صفر ۴) ۱۴

۶۱- حاصل $\int_{-۲}^{۴}(|x|+۲x)dx$ کدام است؟ *(آزاد ۸۶)*

۱) ۶ ۲) ۱۱ ۳) ۲۲ ۴) ۴۴

۶۲- $\int_{-۲}^{۰}(x^{۳}+۳x^{۲}+۳x)\,dx$ برابر است با:

۱) -۱ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۴

۶۳- حاصل انتگرال $\int_{-۱}^{۰}(x^{۳}-۳x)dx$ برابر است با: *(آزاد ۸۱)*

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $-\frac{۵}{۴}$ ۴) ۱

۶۴- حاصل $\int_{۱}^{۲}(x^{۳}-۳x^{۲}+۳x+۲)dx$ کدام است؟ *(آزاد ۸۶)*

۱) ۳ ۲) $\frac{۱۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱۱}{۴}$ ۴) ۴

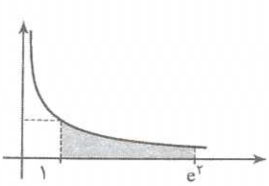
۶۵- حاصل $\int_{۰}^{۱}\frac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۶۶- حاصل $\int_{۰}^{۱}(x\sqrt{x}+۱)^{۲}dx$ کدام است؟ *(آزاد ۸۷)*

۱) ۲ ۲) $\frac{۲۰}{۴۱}$ ۳) $\frac{۱۹}{۲۰}$ ۴) $\frac{۴۱}{۲۰}$

۶۷- شکل مقابل نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ است $(x>۰)$. سطح سایه‌زده چه قدر است؟



۱) ۲ ۲) $e^{۲}$ ۳) $e^{۲}-۱$ ۴) ۱

۶۸- اگر $\int_0^b \sqrt[3]{x}\,dx = 12$ باشد b کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۶۹- حاصل $\int_0^1 (\sqrt[3]{x} + \frac{1}{(1+x)^2})dx$ کدام است؟ (سراسری ۸۴)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۷۰- حاصل $\int_1^4 \frac{x\sqrt{x}+1}{x^2}dx$ برابر است با: (آزاد ۸۳)

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{7}{4}$ ۳) $\frac{13}{4}$ ۴) $\frac{11}{4}$

۷۱- حاصل $\int_1^4 (\sqrt{x} + \frac{1}{x^2})dx$ چه‌قدر است؟ (آزاد ۸۵)

۱) $\frac{41}{12}$ ۲) $\frac{65}{12}$ ۳) $\frac{71}{12}$ ۴) $\frac{53}{12}$

۷۲- حاصل $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})^2 dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\pi - 1}{3}$

۷۳- حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos^2 x - \sin^2 x)dx$ کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

۷۴- حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin^2 x + 4\cos^2 x + \sin x)dx$ چه‌قدر است؟ (آزاد ۸۲)

۱) $1 + 2\pi$ ۲) $2\pi - 1$ ۳) 1 ۴) 2π

۷۵- حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + 1)dx$ برابر است با: (آزاد ۸۳)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۷۶- اگر $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = A$ و $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = B$ ، آن‌گاه: (آزاد ۸۲)

۱) $A = 2B$ ۲) $A + B = 0$ ۳) $B = 2A$ ۴) $A = B$

۷۷- حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})dx$ کدام است؟ (آزاد ۸۴)

۱) 2 ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) -1 ۴) 1

۷۸- حاصل $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 2x}dx$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

۷۹- سطح بین نمودار تابع $y = \sin x$ و محور x ها و خطوط $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{\pi}{2}$ کدام است؟ (آزاد ۸۷)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) 2

۸۰- حاصل $\int_0^{\pi} |\sin x + \cos x|dx$ کدام است؟ (آزاد ۸۴)

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) 2 ۳) $2\sqrt{2} + 2$ ۴) $2\sqrt{2} - 2$

سطح محصور

۸۱- سطح محصور به نمودار تابع $y=x^3-x$ و محور افقی چه‌قدر است؟ (آزاد ۸۷)

۱) صفر　۲) ۲　۳) $\frac{1}{2}$　۴) $\frac{1}{4}$

۸۲- سطح بین منحنی $y=x^2-2x+|x|$ و محور x ها کدام است؟ (آزاد ۸۰)

۱) $\frac{1}{6}$　۲) ۱　۳) $\frac{1}{3}$　۴) $\frac{1}{2}$

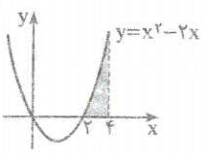
۸۳- مساحت ناحیه‌ی محدود به منحنی $y=-x^2+4x$ و محور x ها کدام است؟ (سنجش ۸۴)

۱) $\frac{16}{3}$　۲) $\frac{34}{3}$　۳) $\frac{25}{3}$　۴) $\frac{32}{3}$

۸۴- مساحت ناحیه‌ی محدود به منحنی $y=\frac{1}{2}x^2-2$ و محور x ها کدام است؟ (سنجش ۸۳)

۱) $\frac{4}{3}$　۲) $\frac{8}{3}$　۳) $\frac{14}{3}$　۴) $\frac{16}{3}$

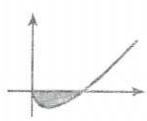
۸۵- در شکل مقابل سطح سایه‌زده کدام است؟



۱) $\frac{14}{3}$　۲) $\frac{16}{3}$

۳) $\frac{20}{3}$　۴) $\frac{22}{3}$

۸۶- با توجه به نمودار تابع با ضابطه $f(x)=x-\sqrt{x}$ مساحت ناحیه سایه زده، کدام است؟ (سراسری ۸۸)



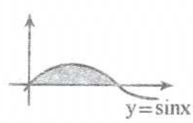
۱) $\frac{1}{6}$　۲) $\frac{1}{4}$

۳) $\frac{1}{3}$　۴) $\frac{2}{3}$

۸۷- مساحت ناحیه‌ی محدود به دو نمودار به معادلات $y=x^2$ و $y=1$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$　۲) $\frac{4}{3}$　۳) $\frac{5}{3}$　۴) $\frac{3}{2}$

۸۸- سطح سایه‌زده در شکل زیر چه‌قدر است؟



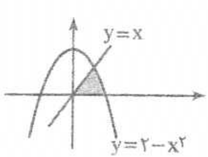
۱) ۱　۲) $\sqrt{3}$

۳) ۲　۴) π

۸۹- مساحت زیر منحنی $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$; $|x|\le\frac{\pi}{6}$ و بالای محور x ها کدام است؟ (سنجش ۸۶)

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　۲) $\sqrt{3}$　۳) $\frac{1}{2}$　۴) ۱

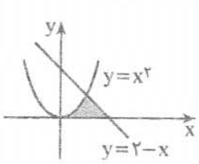
۹۰- مساحت ناحیه‌ی سایه‌زده چه‌قدر است؟



۱) $\frac{8\sqrt{2}-7}{3}$　۲) $\frac{8\sqrt{2}-7}{6}$

۳) $\frac{4\sqrt{2}-7}{3}$　۴) $\frac{4\sqrt{2}-7}{6}$

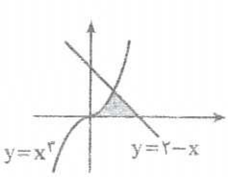
۹۱- با توجه به شکل مقابل مساحت ناحیه‌ی سایه‌زده چه‌قدر است؟ (سراسری ۸۳)



۱) $\frac{4}{3}$　۲) $\frac{7}{6}$

۳) $\frac{5}{6}$　۴) $\frac{2}{3}$

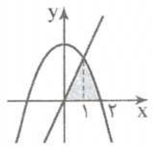
۹۲- مساحت قسمت سایه‌خورده در شکل مقابل چه‌قدر است؟



۱) $\frac{3}{4}$　۲) $\frac{3}{2}$

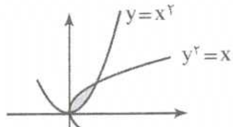
۳) $\frac{7}{4}$　۴) $\frac{5}{4}$

۹۳- مساحت ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = ۴ - x^۲$ و خطی به معادله‌ی $y = ۳x$ و محور x ها واقع در ناحیه‌ی اول کدام است؟ *(سراسری ۸۵)*



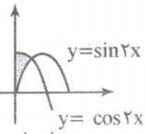
۱) $\frac{۱۳}{۶}$ ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $\frac{۱۹}{۶}$

۹۴- مساحت هاشورخورده چه‌قدر است؟



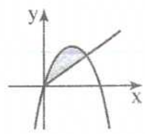
۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۹۵- مساحت ناحیه‌ی هاشورزده‌ی شکل مقابل کدام است؟ *(سراسری ۸۰)*



۱) $۲ - \sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲} - ۱$ ۳) $\frac{۱}{۲}(۲ - \sqrt{۲})$ ۴) $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۲} - ۱)$

۹۶- مساحت ناحیه‌ی زیر منحنی به معادله‌ی $y = -x^۲ + ۵x$ و بالای خط $y = x$ کدام است؟ *(سراسری ۸۷)*



۱) $\frac{۱۶}{۳}$ ۲) $\frac{۲۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲۸}{۳}$ ۴) $\frac{۳۲}{۳}$

۹۷- سطح محصور بین منحنی $y = \frac{x^۳ + ۲}{x^۲}$ و مجانب مایل آن از $x = ۱$ تا $x = ۲$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

انتگرال‌های بد

۹۸- $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ برابر است با:

۱) $-\cos\sqrt{x}$ ۲) $\sqrt{x}\cos\sqrt{x}$ ۳) $-۲\cos\sqrt{x}$ ۴) $\frac{\sin\sqrt{x}}{x}$

۹۹- حاصل $\int ۲x(x^۲ + ۱)^۵ dx$ به کدام صورت است؟

۱) $\frac{۲}{۵}(x^۲ + ۱)^۵$ ۲) $(x^۲ + ۱)^۶$ ۳) $\frac{۱}{۶}(x^۲ + ۱)^۶$ ۴) $\frac{۱}{۶}x^۲(x^۲ + ۱)^۶$

۱۰۰- حاصل $\int \frac{\cos x}{\sin^۴ x} dx$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sin^۳ x}$ ۲) $-\frac{۱}{\sin^۳ x}$ ۳) $\frac{۱}{۳\sin^۳ x}$ ۴) $\frac{-۱}{۳\sin^۳ x}$

۱۰۱- حاصل $\int \sin^۲ x(۱ + \cos x) dx$ کدام است؟ *(آزاد ۸۵)*

۱) $\frac{۱}{۳}\sin^۳ x + \frac{۱}{۴}\sin ۲x + \frac{x}{۲} + C$

۲) $\frac{۱}{۳}\sin^۳ x - \frac{۱}{۴}\sin ۲x + \frac{x}{۲} + C$

۳) $\frac{۱}{۳}\sin^۳ x - \frac{۱}{۴}\sin ۲x - \frac{x}{۲} + C$

۴) $-\frac{۱}{۳}\sin^۳ x - \frac{۱}{۴}\sin ۲x + \frac{x}{۲} + C$

۱۰۲- حاصل $\int_۱^۲ \frac{x}{x^۲ + ۱} dx$ کدام است؟

۱) $\mathrm{Ln}\frac{۵}{۲}$ ۲) $\mathrm{Ln}\sqrt{\frac{۵}{۲}}$ ۳) $\mathrm{Ln}\sqrt{۵}$ ۴) ۲

۱۰۳- حاصل $\int_۱^۳ \frac{۲x + ۱}{\sqrt{x^۲ + x}}$ کدام است؟ *(سنجش ۸۳)*

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۳} - \sqrt{۲}$ ۴) $۲(۲\sqrt{۳} - \sqrt{۲})$

۱۰۴- حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) 1 ۴) $\frac{\pi}{6}$

۱۰۵- حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x\, dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{12}$ ۲) $\frac{3\pi}{8}$ ۳) $\frac{3\pi-8}{12}$ ۴) $\frac{3\pi+2}{12}$

۱۰۶- حاصل $\int_e^{e^3} \frac{1}{xLnx} dx$ چه‌قدر است؟

۱) 3 ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $Ln3$ ۴) $Ln\frac{1}{3}$

۱۰۷- حاصل انتگرال $\int (\frac{2x-1}{(x+1)^2})^2 dx$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $\frac{1}{3}(\frac{2x-1}{x+1})^2 + C$ ۲) $\frac{1}{9}(\frac{2x-1}{x+1})^3 + C$ ۳) $\frac{1}{3}(\frac{2x-1}{(x+1)^2})^2 + C$ ۴) $3(\frac{2x-1}{(x+1)^2})^3 + C$

۱۰۸- حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 10 \cos x \sin^4 x\, dx$ کدام است؟ (آزاد ۸۶)

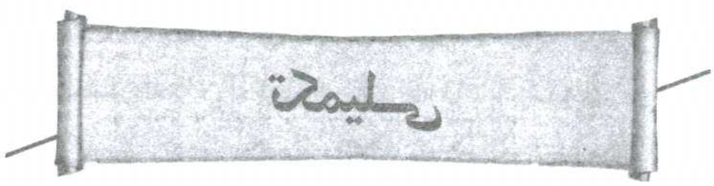
۱) $\frac{1}{5}$ ۲) 1 ۳) 2 ۴) 5

۱۰۹- یک حاصل $\int \frac{2\sin x}{\cos^3 x} dx$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $\frac{1}{4}\cos^4 x$ ۲) $\cot^2 x$ ۳) $\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ ۴) $\tan x$

۱۱۰- حاصل $\int_0^1 \frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}} dx$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$ ۲) $\frac{2}{3}(2+\sqrt{2})$ ۳) $\frac{2}{3}(\sqrt{2}+1)$ ۴) $\frac{1}{3}(\sqrt{2}+1)$



۱۱۱- در تابع مساحت $G(x) = \int_2^x \frac{\cos \pi t}{1+t^2} dt$ مقدار $G(2)+G'(2)+G''(2)$ کدام است؟

۱) $0/01$ ۲) $0/02$ ۳) $0/04$ ۴) $0/08$

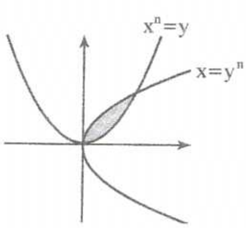
۱۱۲- اگر $F(x) = \int_1^x \frac{e^{t^2}}{1+t^4} dt$ آن‌گاه مشتق تابع $x^2F(x)+\frac{F(x^2)}{x}$ در $x=1$ کدام است؟

۱) e ۲) $\frac{e}{2}$ ۳) صفر ۴) $\frac{3e}{2}$

۱۱۳- حاصل $\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x \sqrt[3]{1+t^2}\, dt}{\int_{x^2}^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t^3} dt}$ کدام است؟

۱) 2 ۲) $\sqrt[3]{4}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt[3]{16}$

۱۱۴- مساحت ناحیه‌ی سایه‌زده در شکل مقابل چه‌قدر است؟



۱) $\frac{n-1}{n+1}$ ۲) $\frac{n-1}{n}$ ۳) $\frac{n}{n+1}$ ۴) $\frac{n+1}{n+2}$

۱۱۵- حاصل $\int_{3}^{7}(x-[x]+\sin\frac{\pi[x]}{2})dx$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۶- حاصل $\int_{0}^{2}(x^2-[x^2])dx$ چه‌قدر است؟

۱) $5-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ۲) $\frac{8}{3}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$

۱۱۷- کدام نادرست است؟

۱) $\int_{-2}^{1}e^{x^2}dx=\int_{-1}^{2}e^{x^2}dx$ ۲) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\log\frac{1-x}{1+x}dx=0$ ۳) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-x^2}{2}}dx=0$ ۴) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^7 xdx=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos^7 xdx$

۱۱۸- فرض کنید: $A=\int_{0}^{1}\sqrt{x}dx$, $B=\int_{0}^{1}xdx$, $C=\int_{0}^{1}x^3dx$, $D=\int_{0}^{1}\frac{1}{x}dx$, $E=\int_{0}^{1}e^xdx$، کدام گزاره درست نیست؟

۱) $A>E>C$ ۲) $A>B>C$ ۳) $E>B$ ۴) $D>E$

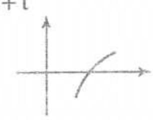
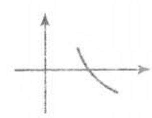
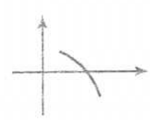
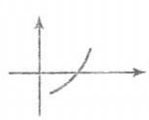
۱۱۹- حاصل $\int_{1}^{n}\log[x]dx$ چه‌قدر است؟ $(n\in\mathbb{N})$

۱) $\log n$ ۲) $\log\frac{n(n-1)}{2}$ ۳) $\log(n-1)!$ ۴) $\log\frac{n+1}{n}$

۱۲۰- اگر $f(x)=\int_{0}^{x}\frac{\cos^6\pi t}{8+\sqrt{2t}}dt$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$ آن‌گاه مشتق $y=fog(x)$ در $x=5$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{20}$ ۳) $\frac{1}{40}$ ۴) $\frac{1}{50}$

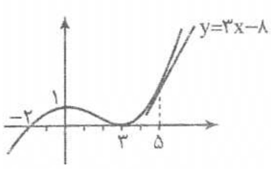
۱۲۱- نمودار تابع $f(x)=\int_{1}^{x}\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}dt$ در $x=1$ چگونه است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۱۲۲- اگر $\int_{0}^{x^2}f(t)dt=x\sin\pi x$ آن‌گاه $f(\frac{1}{4})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۲۳- شکل روبه‌رو نمودار تابع f است. حاصل $\int_{-2}^{0}f'(x)dx$ چند برابر حاصل $\int_{3}^{5}f''(x)dx$ است؟



۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۲۴- اگر $y''=6x+1$ و نمودار تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول (-1) بر نیمساز ناحیه‌ی دوم مماس باشد، این تابع محور عرض‌ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۱) $(0,-1)$ ۲) $(0,-\frac{1}{2})$ ۳) $(0,-\frac{3}{2})$ ۴) $(0,-\frac{5}{2})$

۱۲۵- اگر $y'\sqrt{x}+\frac{y}{2\sqrt{x}}=3x^2$ و منحنی تابع از نقطه‌ی $(4,1)$ بگذرد، $f(1)$ کدام است؟

۱) -61 ۲) -62 ۳) -63 ۴) -64

۱۲۶- اگر $f(1)=\frac{2}{5}$ و $f'(x^2)=x^3$ در این صورت $f(3)$ کدام است؟ $(x>0)$

۱) $\frac{18\sqrt{3}}{5}$ ۲) $\frac{9\sqrt{3}}{5}$ ۳) $\frac{9}{5}$ ۴) $\frac{27}{5}$

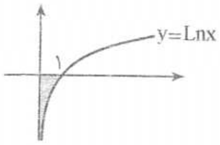
۱۲۷- اگر حاصل $\int_{a}^{b}(2x-x^2)dx$ حداکثر مقدار ممکن خود را داشته باشد $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۸- خط $y=3x-5$ در نقطه‌ی $x=1$ بر نمودار تابع f مماس است. اگر $f''(x)=12x$ باشد، مقدار $f(3)$ کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۳۳ ۳) ۴۴ ۴) ۵۰

۱۲۹- مساحت سایه‌زده شکل زیر چه‌قدر است؟



۱) ۱   ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) e   ۴) ۲

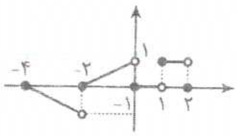
۱۳۰- اگر $\int_1^4 \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}dx = n$ مقدار $\int_1^4 \frac{dx}{(1+\tan^2 x)\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) n ۲) $3-n$ ۳) $2-n$ ۴) $n+1$

۱۳۱- حاصل $V = \int_0^h \pi(a+\frac{(b-a)}{h}x)^2 dx$ چه‌قدر است؟

۱) $\pi h\frac{(a^2+b^2)}{3}$ ۲) $\pi hab(a+b)$ ۳) $ab\pi h$ ۴) $\frac{\pi h}{3}(a^2+ab+b^2)$

۱۳۲- شکل مقابل نمودار تابع f است. کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار یک انتگرال معین به صورت $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$ چه‌قدر اختلاف دارند؟



۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۱۳۳- حاصل $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx$ کدام است؟

۱) -2 ۲) ۲   ۳) صفر   ۴) $+\infty$

۱۳۴- چندتا از رابطه‌های زیر درست هستند؟

الف) $\int Lnx\,dx = xLnx - x + C$ ب) $\int x\sin x\,dx = \sin x - x\cos x + C$ ج) $\int \tan x\,dx = Ln|\cos x| + C$ د) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = Ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۱۳۵- اگر $\int_c^x f(t)\,dt = x^3+1$ ، آن‌گاه $f(c^2+1)$ چه‌قدر است؟

۱) ۱۲   ۲) ۳   ۳) ۲۷   ۴) صفر

۱۳۶- اگر $F(x) = \int_2^x \int_1^{2t} \sqrt{u^3+8}\,du\,dt$ آن‌گاه $F''(0)$ برابر است با:

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $8\sqrt{2}$

۱۳۷- حاصل $\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{6}$ ۴) $\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}$

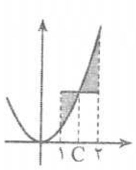
۱۳۸- اگر $g(x) = \int_1^x \sqrt{t^3+1}\,dt$ آن‌گاه حاصل $\int_{-1}^{2} g''(x)\,dx$ برابر است با:

۱) ۳   ۲) ۲   ۳) ۱   ۴) $\sqrt{2}$

۱۳۹- اگر $f(x) = \int_{\cot x}^{\tan x} \frac{1}{t^2+t^4}dt$ و $0 < x < \frac{\pi}{2}$ باشد، ضابطه‌ی $f(x)$ کدام است؟

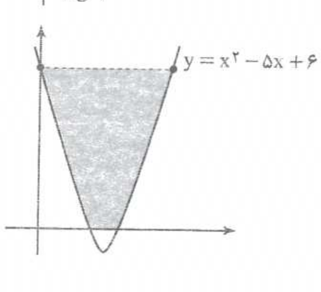
۱) $\tan x + \cot x$ ۲) $\tan x - \cot x - 2x + \frac{\pi}{2}$ ۳) $\cot x - \tan x$ ۴) $\tan x - \cot x - 2x$

۱۴۰- شکل مقابل نمودار تابع $y = x^2$ است.
اگر مساحت دوناحیه‌ی سایه‌زده با هم مساوی باشد، C برابر است با:



۱) $\frac{\sqrt{8}}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{19}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{21}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{26}}{3}$

۱۴۱- در شکل زیر مساحت سایه‌زده چه‌قدر است؟



۱) $\frac{52}{3}$ ۲) $\frac{62}{3}$ ۳) ۲۴   ۴) $\frac{74}{3}$

پاسخ‌های تشریحی
فصل ۸

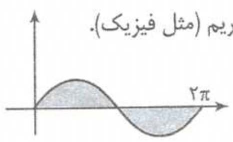
۱- گزینه‌ی «۴»

مفهوم انتگرال

- نماد $\int$ حرف S انگلیسی است که از دو طرف کشیده شده است، در واقع $\int_a^b f(x)dx$ یعنی مساحت.
- این مساحت بین ۴ تا چیز محصور شده است:

۱) خط $x=a$ **۲)** خط $x=b$ **۳)** محور افقی (x ها)   **۴)** نمودار تابع f

- به $x=a$ و $x=b$، حدود انتگرال می‌گوییم. dx هم یعنی محور افقی! (البته معنی dx خیلی دقیق‌تر از این حرف‌ها است)
- دقت کنید که مساحت در این‌جا، یک مقدار هندسی نیست، پس اگر زیر محور x ها بود آن را منفی درنظر می‌گیریم (مثل فیزیک).



و جواب $\int_a^b f(x)dx$ ممکن است مثبت یا منفی یا حتی صفر باشد.

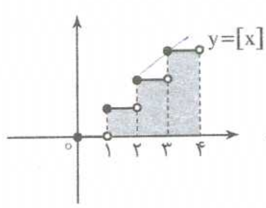
مثلاً تابلو است که $\int_{0}^{2\pi}\sin x\,dx$ می‌شود صفر، چون مساحت زیر و بالای محور مساوی‌اند و جمعشان صفر می‌شود.

خب اگر بتوانیم $f(x)$ را بکشیم و مساحت سایه زده شده، یک شکل هندسی ساده باشد، حاصل انتگرال را می‌شود پیدا کرد.

- اما چه تابع‌هایی این‌طوری‌اند؟ خط، براکت، دایره (!) و ... . پس انتگرال از این تابع‌ها در واقع محاسبه سطح با استفاده از هندسه هستند.
- راستی مساحت زیر تابع ثابت $f(x)=k$ می‌شود $\int_a^b kdx = k(b-a)$. اگر گفتی چرا؟

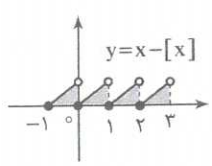
خب برویم شکل بکشیم:

۱ این که درست بود



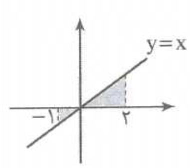
$$\longrightarrow \int_{0}^{۴}[x]dx = ۱+۲+۳=۶$$

۲ این هم درست است



$$\longrightarrow \int_{-۱}^{۳}(x-[x])dx = ۴\times\frac{۱\times۱}{۲}=۲$$

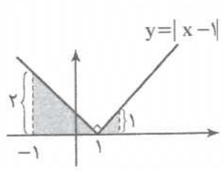
۳ آهان، دقت کنید. مساحت در فاصله‌ی ۱- تا ۰، زیر محور افقی قرار دارد پس منفی است. جواب انتگرال می‌شود:



$$\longrightarrow \int_{-۱}^{۲}x\,dx = -\frac{۱\times۱}{۲}+\frac{۲\times۲}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

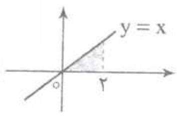
۴ خب حتماً این درست نیست دیگه، حالا ببینیم:

دوتا مثلث بالای محور افقی‌اند. جواب می‌شود

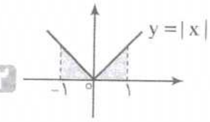


$$\longrightarrow \int_{-۱}^{۲}|x-۱|dx = \frac{۲\times۲}{۲}+\frac{۱\times۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

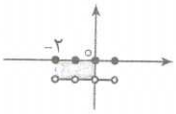
۲- گزینه‌ی «۱» هر ۴ تا را بلدیم. شکل‌ها هم خط می‌شوند پس مساحت را می‌توانیم حساب کنیم. خب برویم:

۱ 

$S=\frac{۲\times۲}{۲}=۲$

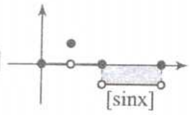
۲ 

$S=۲\times\frac{۱\times۱}{۲}=۱$

۳ 

$S=\boxed{-}\,۲\times۱=-۲$

زیر محور افقی

۴ 

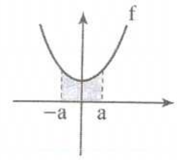
$S=\boxed{-}\,\pi\times۱=-\pi$

زیر محور افقی

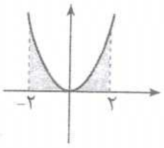
اشاره چون $|x|$ نسبت به محور y ها تقارن داشت، مساحت را در فاصله ۰ تا ۱ حساب و دو برابر کردیم.

همیشه اگر تابع نسبت به محور y ها تقارن داشته باشد (یعنی $f(-x)=f(x)$)، داریم:

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=۲\int_{۰}^{a}f(x)\,dx=۲\int_{-a}^{۰}f(x)\,dx$$

شکل را هم ببینید: 

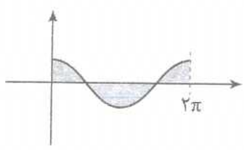
۳- گزینه‌ی «۱» خب تابلو است که ۱ صفر نیست.



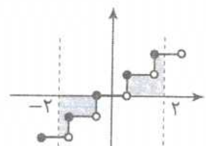
چون $x^۲$ همیشه بالای محور است و مساحت زیر آن در هر بازه‌ی (a,b) مثبت می‌شود. ببینید:

پس $\int_{-۲}^{۲}x^۲\,dx$ مثبت است (بعداً می‌بینیم می‌شود $\frac{۱۶}{۳}$)

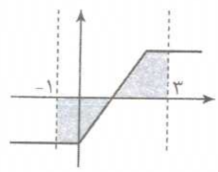
برویم سراغ بقیه گزینه‌ها، نمودار هر سه را بلدیم:



$y=\cos x$



$y=[x+\frac{۱}{۲}]$

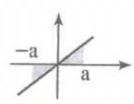


$y=|x|-|x-۲|$

خب هر ۳ تا شکل داد می‌زنند که مساحت زیر محور با بالا مساوی است.

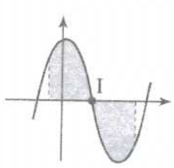
اما قرار بود مساحت زیر را منفی بگیریم پس با هم حذف می‌شوند و جواب می‌شود صفر.

اشاره وقتی نمودار تابع نسبت به مبدأ تقارن داشته باشد ($f(-x)=-f(x)$)، حاصل $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx$ می‌شود صفر.

ببینید: 

مثلاً برای $x^۵$، $\sqrt[۳]{x}$، $۲^x-۲^{-x}$ و ... این‌طوری است.

۴- گزینه‌ی «۴»

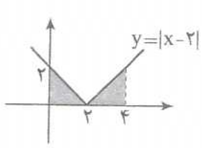


مرکز تقارن این تابع، نقطه‌ی عطفش است یعنی $I\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.$. حدود هم نسبت به $x=۱$ متقارن‌اند پس انتگرال می‌شود صفر.

ببینید:

مساحت زیر و بالا با هم حذف می‌شوند. *دندونات ریفت!*

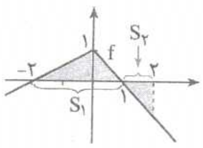
۵- گزینه‌ی «۳»



اگر شکل بکشیم، خیلی خوب حل می‌شود.

مساحت هر یک از مثلث‌ها $\frac{۲\times۲}{۲}$ است که روی هم می‌شود ۴.

۶- گزینه‌ی «۱»

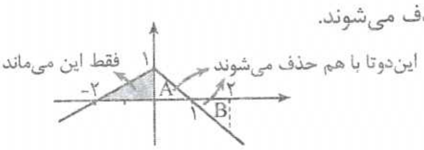


باز هم مساحت محصور از ۲- تا ۲ دوتکه است:

یک مثلث بالای محور افقی که قاعده‌اش ۳ و ارتفاعش ۱ است $S_1=\frac{3\times1}{2}$. یک مثلث زیر محور افقی که قائم‌الزاویه است و مساحت آن $S_2=\frac{1\times1}{2}$ است.

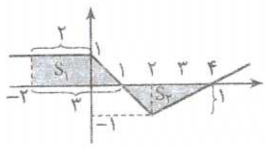
پس جواب می‌شود: $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = S_1+(-S_2)=1$

چتربازی می‌شد گفت در سمت راست محور yها، مساحت‌های زیر و بالا با هم برابرند و حذف می‌شوند.



پس فقط سمت چپ را بگیریم یعنی $\frac{2\times1}{2}=1$. ببینید:

۷- گزینه‌ی «۳»

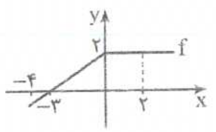


این مساحت دوتکه است، یک ذوزنقه بالای محور x و یک مثلث زیر محور x.

$$S_1 = \text{مساحت ذوزنقه} = \frac{(3+2)1}{2}=\frac{5}{2} \quad , \quad S_2 = \text{مساحت مثلث} = \frac{3\times1}{2}=\frac{3}{2}$$

پس جواب می‌شود: $\int_{-2}^{4} f(x)dx = S_1+(-S_2)=1$

۸- گزینه‌ی «۳»



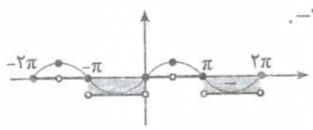
مساحت زیر نمودار f از ۳- تا ۲، سطح یک ذوزنقه است که برابر است با $\frac{(5+2)2}{2}$ یعنی ۷.

از ۴- تا ۳- هم یک مثلث قائم‌الزاویه کوچک داریم که مساحتش $\frac{1\times\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{3}$ است.

پس جواب انتگرال می‌شود: $\frac{20}{3}=(-\frac{1}{3})+7$، اگر گفتید از کجا فهمیدیم ارتفاع مثلث کوچک $\frac{2}{3}$ است؟ خب از شیب، یا تشابه!

۹- گزینه‌ی «۲»

خب شکل تابلوئه، دوتا مستطیل $1\times\pi$ زیر محور افقی داریم پس مساحت می‌شود -2π.



اگر عشق فرمول دارید یاد بگیرید که وقتی $f(x)$ نسبت به مبدأ تقارن دارد $(f(-x)=-f(x))$ آن‌وقت $\int_{-a}^{a}[f(x)]dx=-a$. (البته برد $f(x)$ نباید زیرمجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ باشد)

۱۰- گزینه‌ی «۱»

$$\int_{-2}^{2}(x+[x])dx = \int_{-2}^{2} x\,dx + \int_{-2}^{2}[x]dx$$

برای x که انتگرال از ۲- تا ۲ می‌شود صفر، چون x نسبت به مبدأ تقارن دارد و مساحت بالا و پایین با هم ساده می‌شوند.

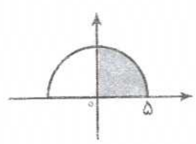
برای $[x]$ هم که گفته بودیم $\int_{-a}^{a}[f(x)]dx=-a$. البته می‌توانیم خیلی سریع شکل بکشیم خلاصه جواب می‌شود $-2=(-2)+0$.

۱۱- گزینه‌ی «۴»

سعی می‌کنیم شکل بکشیم:

$$y=\sqrt{25-x^2} \Rightarrow y^2=25-x^2 \Rightarrow x^2+y^2=25$$

پس، این دایره بوده، داریم:



$$O\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix} \ , \ R=5 \Rightarrow S=\frac{1}{4}\pi R^2=\frac{25}{4}\pi$$

عشق فرمول‌ها، حفظ کنند: نیم‌دایره: $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}a^2$ ، ربع دایره: $\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_{-a}^{0}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}a^2$

۱۲- گزینه‌ی «۱»

قضیه‌ی اول و تابع مساحت

- اگر حد بالا یا پایین یک انتگرال، متغیر باشد، به آن انتگرال می‌گوییم. تابع مساحت مثلاً $\int_{1}^{x}(2x+1)dx$ یک تابع مساحت است. در نوشتن تابع‌های مساحت، رسم این‌طوری است که درون انتگرال را برحسب متغیر دیگری (معمولاً t) می‌نویسند. پس درست‌تر این بود که بگوییم $\int_{1}^{x}(2t+1)dt$. تابع مساحت را هم معمولاً با $A(x)$ نشان می‌دهند. پس داریم $A(x)=\int_{a}^{x}f(t)dt$.
- فرم کلی‌تر تابع مساحت به صورت $A(x)=\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)dt$ می‌تواند باشد که حد بالا و پایین هر دو تابعی از x هستند، حالا با قضیه‌ی اساسی اول حساب دیفرانسیل و انتگرال آشنا می‌شویم: $A(x)=\int_{a}^{x}f(t)dt \Rightarrow A'(x)=f(x)$

یعنی مشتق انتگرال از a تا x می‌شود تابع توی انتگرال. حالا اگر تابع مساحت خفن‌تر بود:

$$A(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt \Longrightarrow A'(x)=v'(x)f(v(x))-u'(x)f(u(x))$$

راستی این $A'(x)$، مثل مشتق‌های قبلی که داشتیم، آهنگ تغییر و شیب مماس و ... را هم به ما می‌دهد.

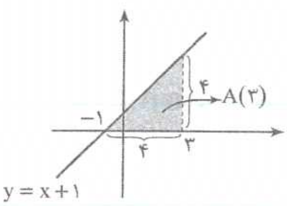
خب گفتیم $A'(x)=f(x)$ پس داریم:

$$A'(x)=\frac{۳x-۱}{x^۳+۱} \Longrightarrow A'(۱)=\frac{۳(۱)-۱}{۱^۳+۱}=۱$$

۱۳- گزینه‌ی «۳» خب این حدی که داده می‌شود $F'(۲)$. مشتق انتگرال هم که کاری ندارد:

$$F'(x)=\frac{\cos\pi x}{x^۴-۱}\Longrightarrow F'(۲)=\frac{\cos ۲\pi}{۱۶-۱}=\frac{۱}{۱۵}$$

۱۴- گزینه‌ی «۱» خب آهنگ متوسط می‌شود $\frac{A(۳)-A(-۱)}{۳-(-۱)}$. پس باید $A(۳)$ و $A(-۱)$ را پیدا کنیم:



$$A(۳)=\int_{-۱}^{۳}(t+۱)\,dt=\frac{۴\times۴}{۲}=۸$$

$$A(-۱)=\int_{-۱}^{-۱}(t+۱)\,dt=۰$$

پس آهنگ متوسط در بازه‌ی $[-۱,۳]$ شد $\frac{۸-۰}{۴}$ یعنی ۲. آهنگ آنی هم که مشتق است:

$$A'(x)=x+۱\Longrightarrow A'(۲)=۳$$

خلاصه آهنگ متوسط از آنی، یکی کم‌تر است یعنی ۱− تا بیش‌تر.

۱۵- گزینه‌ی «۳»

خب مشتق $G(\frac{۱}{x})$ می‌شد $-\frac{۱}{x^۲}G'(\frac{۱}{x})$. خودش هم گفته $x=۲$، پس داریم $-\frac{۱}{۴}G'(\frac{۱}{۲})$.

حالا چون $G'(x)=\frac{x}{x^۲-۱}$ است، مشتق برابر است با:

$$y'=\frac{-۱}{۴}G'(\tfrac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۴}\times\frac{\frac{۱}{۲}}{(\frac{۱}{۲})^۲-۱}=-\frac{۱}{۴}\times\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{-۳}{۴}}=\frac{۱}{۶}$$

۱۶- گزینه‌ی «۲»

$$y=x^۲G(x)\Longrightarrow y'=۲xG(x)+x^۲G'(x)$$

حالا در $x=۲$:

$$y'(۲)=۴G(۲)+۴G'(۲)$$

اما $G(۲)$ می‌شود صفر ($\int_a^a$ می‌شود صفر). پس داریم:

$$y'(۲)=۴G'(۲)=۴\left.\frac{\cos\pi x^۲}{\sqrt{۲x}+x+۱}\right|_{x=۲}=۴\frac{\cos۴\pi}{۲+۲+۱}=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

۱۷- گزینه‌ی «۲»

خب گفتیم مشتق $A(x)=\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)\,dt$ می‌شود $v'(x)f(v(x))-u'(x)f(u(x))$ پس داریم:

$$F'(x)=-\sin x\sqrt{۱-\cos^۲x}-(-\cos x)\sqrt{۱-\sin^۲x}$$

حالا گفته $۰<x<\frac{\pi}{۲}$، پس با خیال راحت، همه مثبت هستند:

$$F'(x)=-\sin^۲x+\cos^۲x=\cos۲x\Longrightarrow F''(x)=-۲\sin۲x$$

اشاره انتگرال $\int_{-۱}^{-۱}(t+۱)\,dt$ شد صفر. چون بین خط‌های $x=-۱$ و $x=-۱$ چیزی محصور نیست. در حالت کلی $\int_a^a f(x)\,dx$ همیشه صفر است. راستی اگر حدود جابه‌جا باشد یعنی $\int_b^a f(x)\,dx$ می‌توانیم جای آن‌ها را عوض کنیم اما انتگرال قرینه می‌شود، یعنی داریم:

$$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$$

۱۸- گزینه‌ی «۳» مشتق $f(۲x^۲)$ می‌شود $۴xf'(۲x^۲)$، حالا $x=\sqrt{۲}$ بگذاریم می‌شود: $۴\sqrt{۲}f'(۴)$.

خاطره مشتق $f(u)$ می‌شد $u'f'(u)$.

پس باید $f'(۴)$ را حساب کنیم. از قضیه اساسی اول یادمان هست که مشتق یک انتگرال به شکل $\int_a^x$ می‌شد تابع توی انتگرال.

پس $f'(x)=x^۲+۱$ و درنتیجه $f'(۴)=۱۷$، یعنی جواب مسئله می‌شود $۴\sqrt{۲}f'(۴)=۴\sqrt{۲}\times۱۷=۶۸\sqrt{۲}$.

۱۹- گزینه‌ی «۲» مشتقِ انتگرال را که بلدیم اما این انتگرال از a تا x نیست، حالا دوتا راه داریم:

خب بگوییم حاصل $\int_x^{2}$ برابر $-\int_2^x$ است: $y=-\int_2^x e^t\,dt \Longrightarrow y'=-e^x \Longrightarrow y''=-e^x$

و درنتیجه $y''-4y'=3e^x$.

یه جوردیگه از رابطه‌ی $(\int_u^v f(t)dt)'=v'f(v)-u'f(u)$ استفاده کنیم. داریم: $y'=0e^2-1e^x=-e^x$ حالا بقیه راه مثل بالا است.

یک راه ضایع دیگر هم داریم، انتگرال بگیریم، بعد مشتق و ... !!

۲۰- گزینه‌ی «۳»

مشتق $xG(x)$ می‌شود: $y'=1G(x)+xG'(x)$، خودش گفته در $x=2$، پس داریم: $y'(2)=G(2)+2G'(2)$

$G(2)$ که صفر است، برای $G'(2)$ هم می‌دانیم مشتق یک انتگرال به صورت $\int_a^x f(t)dt$ همان تابع توی انتگرال یعنی $f(x)$ است. پس:

$G'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^3}} \Longrightarrow G'(2)=\frac{2}{\sqrt{1+8}}=\frac{2}{3}$ و جواب مسأله می‌شود: $2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

۲۱- گزینه‌ی «۱» خب مشتق FoF می‌شود $F'(x)F'(F(x))$، پس در $x=1$ داریم $F'(1)F'(F(1))$.

حالا مشتق بگیریم (می‌شود تابع توش): $F'(x)=\frac{1+2x}{5+x^3}$ و داریم: $F'(1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

از آن طرف $F(1)$ می‌شود $\int_1^1\frac{1+2t}{5+t^3}dt=0$ و $F'(F(1))=F'(0)=\frac{1}{5}$ و جواب می‌شود $\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=0/1$.

۲۲- گزینه‌ی «۲» خب مشتق بگیریم:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}-(1\sin x+x\cos x) \Longrightarrow f(x)=\sqrt{x}-x\sin x-x^2\cos x \Longrightarrow f(1)=1-\sin 1-\cos 1$$

۲۳- گزینه‌ی «۲»

خب مشتق بگیریم: $G'(x)=\frac{\cos\pi x}{1+x^2}$

نقطه‌ی بحرانی جایی است که مشتق صفر شود یا وجود نداشته باشد. $G'(x)=0 \Longrightarrow \cos\pi x=0 \Longrightarrow \pi x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Longrightarrow x=k+\frac{1}{2}$

$x=3/5,4/5,5/5,6/5,7/5$ در بازه‌ی $(3,8)$ هستند، پس می‌شود ۵ نقطه.

۲۴- گزینه‌ی «۱»

خب مشتق بگیریم: $F'(x)=\cos^6\frac{x}{2}$، تابلو است که این مشتق همه‌جا مثبت (نامنفی) است، پس F همه‌جا صعودی است.

۲۵- گزینه‌ی «۱»

انتگرال نامعین

- انتگرال نامعین، به زبانی، عکس مشتق است. $\sin x \underset{\text{انتگرال}}{\overset{\text{مشتق}}{\rightleftarrows}} \cos x$
- فرمول‌ها را یاد بگیریم: $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \qquad (n\in\mathbb{Q}\ ,\ n\neq -1)$

خاطره در رادیکال‌ها، به شکل توان کسری می‌نویسیم: $\sqrt[m]{x^n}=x^{\frac{n}{m}}$.

$$\int \sin ax\,dx=\frac{-1}{a}\cos ax+C \qquad \int(1+\tan^2 ax)\,dx=\frac{1}{a}\tan ax+C \qquad \int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$$

$$\int \cos ax\,dx=\frac{1}{a}\sin ax+C \qquad \int(1+\cot^2 ax)\,dx=\frac{-1}{a}\cot ax+C \qquad \int e^x dx=e^x+C$$

اشاره $+C$ را برای چی می‌گذاریم؟ خب انتگرال گرفتن یعنی پیدا کردن تابعی که مشتقش را داریم. مثلاً $\int 2x\,dx$ یعنی چه تابعی مشتقش $2x$ است. خب x^2، x^2+1، $x^2-\pi$ و هر تابعی به شکل x^2+k می‌تواند باشد. ما می‌نویسیم x^2+C. در واقع جواب دسته‌ای از توابع است که در مقدار ثابت فرق دارند.

- **خط فکری:** در انتگرال، جمع و تفریق را بیش‌تر از ضرب و تقسیم دوست داریم. کسرها را تفکیک کنید، اتحاد را باز کنید و تا حد امکان ساده کنید.

گفتیم انتگرال برعکس مشتق است. پس اگر از انتگرال، مشتق بگیریم همان تابع داخل انتگرال به‌دست می‌آید:

$$f(x)=\int x\sin x\,dx \Longrightarrow f'(x)=x\sin x \Longrightarrow f'(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

۲۶- گزینه‌ی «۳»

یک راه خوب برای بررسی انتگرال‌های نامعین این است که از جواب مشتق بگیریم و باید همان تابع تحت (توی) انتگرال شود:

$$Ax\cos 3x+B\sin 3x+C \xrightarrow{\text{مشتق}} A\cos 3x+(-3\sin 3x)Ax+3B\cos 3x$$

حالا این باید بشود $2x\sin 3x$، پس داریم:

$$x\sin 3x \text{ ضریبِ}: -3A=2 \Longrightarrow A=-\frac{2}{3}$$

$$\cos 3x \text{ ضریبِ}: A+3B=0 \Longrightarrow B=\frac{-A}{3}=\frac{+2}{9}$$

$$\Longrightarrow AB=-\frac{4}{27}$$

۲۷- گزینه‌ی «۴»

اول اتحاد را باز کنیم:

$$\int(x^2-1)^2dx=\int(x^4-2x^2+1)dx$$

حالا، می‌دانیم $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$، برای تک‌تک جمله‌ها این کار را انجام می‌دهیم:

$$=\frac{x^{4+1}}{4+1}-2\frac{x^{2+1}}{2+1}+x+C=\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x+C$$

به ۲ چیز توجه کنید: اولاً! $\int 1\,dx$ می‌شود x.، ثانیاً: ضریب را می‌نویسیم و از قسمت x دار، انتگرال می‌گیریم.

$$\int 2\boxed{x^2}\,dx=2\boxed{\frac{x^3}{3}}+C$$

۲۸- گزینه‌ی «۴»

اگر در صورت از x فاکتور بگیریم می‌شود $\int\frac{x(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+2}dx$ به‌به! شد $\int x\,dx$ یعنی $\frac{x^2}{2}+C$.

۲۹- گزینه‌ی «۱»

قرار شد کسر را تفکیک کنیم:

$$=\int(\frac{x^3}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2})dx=\int(x^1+1-\frac{1}{x}+2x^{-2})\,dx$$

دقت کنید، انتگرال $\frac{1}{x}$ می‌شود $\text{Ln}\,|x|$؛ اما برای بقیه‌ی توان‌های گویای x، همان $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ برقرار است.

$$=\frac{x^2}{2}+x-\text{Ln}\,|x|+2\frac{x^{-1}}{-1}+C=\frac{x^2}{2}+x-\text{Ln}\,|x|-\frac{2}{x}+C$$

خاطره $x^{-m}=\frac{1}{x^m}$

۳۰- گزینه‌ی «۴» سنگ بزرگ علامت نزدن است. یعنی چی؟ یعنی رادیکال به این بزرگی سرِکاری است! ببینید:

$$(x^3-\frac{1}{x^3})^2+4=x^6+\frac{1}{x^6}-2x^3\frac{1}{x^3}+4=x^6+\frac{1}{x^6}+2=(x^3+\frac{1}{x^3})^2$$

حالا:

$$\sqrt{(x^3-\frac{1}{x^3})^2+4}=\sqrt{(x^3+\frac{1}{x^3})^2}=x^3+\frac{1}{x^3}$$

پس:

$$\int(x^3+\frac{1}{x^3})dx=\int(x^3+x^{-3})dx=\frac{x^4}{4}+\frac{x^{-2}}{-2}+C=\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2x^2}+C=\frac{x^6-2}{4x^2}+C$$

۳۱- گزینه‌ی «۱» خیلی سؤال خوبی است، آفرین به آزاد ۸۲:

دقت کنید، تابع $f(x)$ جواب انتگرال است و ما توی $f(x)$ دنبال x^4 هستیم. انتگرالِ چه چیزی می‌شود x^4؟ خب x^3.

پس ببینیم توی بسط $(x+\frac{1}{x})^5$، چندتا x^3 داریم؛

جمله‌ی عمومی بسط $\binom{5}{k}x^k(\frac{1}{x})^{5-k}$ است، تابلو است که باید $k=4$ باشد تا به ما x^3 بدهد:

$$k=4 \Longrightarrow \binom{5}{4}x^4(\frac{1}{x})^{5-4}=5x^3$$

پس اگر از این جمله انتگرال بگیریم در تابع $f(x)$، $\frac{5x^4}{4}$ داریم.

۳۲- گزینه‌ی «۲» تفکیک می‌کنیم:

$$\int(\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3})dx=\int(x^{-2}+x^{-3})dx=\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^{-2}}{-2}+C=\frac{-1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C=\frac{-2x-1}{2x^2}+C \Longrightarrow f(x)=-2x-1$$

۳۳- گزینه‌ی «۱» تفکیک کنیم ببینیم چه می‌شود:

$$\int\frac{x^2+2}{x^2}dx=\int(\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2})dx=\int(1+\frac{2}{x^2})dx=\int(1+2x^{-2})dx=x+2\frac{x^{-1}}{-1}+C=x-\frac{2}{x}+C$$

حالا چون صورت سؤال گفته $\frac{f(x)}{x}+C$، پس مخرج مشترک می‌گیریم:

$$=\frac{\boxed{x^2-2}\longrightarrow f(x)}{x}+C$$

۳۴- گزینه‌ی «۲» اتحاد را باز کنیم:

$$\int(x^2x-2x\sqrt{x}+1)\,dx=\int(x^3-2x^{\frac{3}{2}}+1)\,dx=\frac{x^4}{4}-2\times\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+x+C=\frac{x^4}{4}-\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}+x+C$$

۳۵- گزینه‌ی «۲» اول انتگرال را حساب کنیم:

$$F(x)=\int(1-\sqrt{x})^2dx=\int(1-2\underbrace{\sqrt{x}}_{x^{\frac{1}{2}}}+x)\,dx=x-2\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^2}{2}$$

پس داریم $F(x)=x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}$ یا $F(x)=x-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}$.

حالا $F(4)-F(0)$ را حساب کنیم:

$$F(4)-F(0)=(4-\frac{4}{3}4\sqrt{4}+\frac{4^2}{2})-0=4-\frac{32}{3}+8=\frac{4}{3}$$

چندتا توضیح: ۱) برای $\int\sqrt{x}\,dx$ اگر حفظ بودیم $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ دیگر نیازی به توان کسری و محاسبه نبود.

۲) چون قرار بود $F(4)-F(0)$ کنیم دیگر $+C$ را نگذاشتیم! (C ها با هم می‌رفتند) **۳)** در واقع $\int_0^4$ را حساب کردیم!

۳۶- گزینه‌ی «۱» این سؤال مهمی است باز هم تفکیک کنیم:

$$\int(\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{x}})dx=\int(\frac{x^1}{x^{\frac{1}{2}}}+3x^{-\frac{1}{2}})dx=\int(x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}})dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+3\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+6\sqrt{x}+C=2\sqrt{x}(\frac{x}{3}+3)+C$$

اشاره ۱) می‌شد $\frac{x}{\sqrt{x}}$ را یک مرتبه بنویسیم $\sqrt{x}$! یعنی $\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}$

۲) خیلی‌ها ترجیح می‌دهند حفظ کنند که $\int\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ و $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}$ **۳)** $x^{\frac{3}{2}}$ را نوشتیم $x^1\times x^{\frac{1}{2}}$، بعد شد $x\sqrt{x}$

۳۷- گزینه‌ی «۲»

$$\int\frac{3x-2}{\sqrt{x}}dx\xrightarrow{\text{تفکیک}}\int(\frac{3x}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}})dx=\int(3\sqrt{x}-2\frac{1}{\sqrt{x}})dx$$

الان اگر کسی $\int\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ و $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}$ را حفظ باشد، زندگی می‌کند:

$$=3\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2(2\sqrt{x})+C=(\underbrace{2x-4}_{f(x)})\sqrt{x}+C$$

اگر اینا رو حفظ نبودیم چی؟ خب $\sqrt{x}$ را می‌نویسیم $x^{\frac{1}{2}}$ و از $\int x^ndx$ می‌رویم. البته به شرطی که $\int x^ndx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ را یادمان باشد!!!

۳۸- گزینه‌ی «۳»

$$\int(3\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})\,dx=3\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C=\sqrt{x}(\underbrace{2x-2}_{f(x)})+C$$

۳۹- گزینه‌ی «۱» اول x را ضرب کنیم و بعد انتگرال می‌گیریم:

$$\int(x-5x\sqrt{x})\,dx=\int(x-5x^{\frac{3}{2}})\,dx=\frac{x^2}{2}-5\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C=\frac{x^2}{2}-2x^{\frac{5}{2}}+C$$

$x^{\frac{5}{2}}$ را می‌توانیم بنویسیم $x^{2+\frac{1}{2}}$ یعنی $x^2x^{\frac{1}{2}}$ یا $\sqrt{x}\,x^2$، پس داریم:

$$=\frac{x^2}{2}-2x^2\sqrt{x}+C=\frac{x^2}{2}(\underbrace{1-4\sqrt{x}}_{f(x)})+C$$

۴۰- گزینه‌ی «۴»

اول صورتش را ساده کنیم:

$$\int\frac{(1+\sqrt{x})^2-x}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{(1+2\sqrt{x}+x)-x}{\sqrt{x}}dx=\int(\frac{1}{\sqrt{x}}+2)dx$$

ما که بلدیم، $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}$:

$$=2\sqrt{x}+2x+C$$

خودش گفته از $\sqrt{x}$ فاکتور بگیریم:

$$=\sqrt{x}(2+2\sqrt{x})+C$$

اشاره دقت کردید که $x=\sqrt{x}\sqrt{x}$؟

۴۱- گزینه‌ی «۲» خب برای پیدا کردن G باید این دوتا را منها کنیم:

$$\int\frac{x^4+x^2+\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}}dx-\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}dx=F(x)+G(x)-F(x)=G(x)$$

پس داریم:

$$G(x)=\int\frac{x^4+x^2+\sqrt{x}-(x^2+x+1)x^2}{x^2\sqrt{x}}dx=\int\frac{\sqrt{x}-x^3}{x^2\sqrt{x}}dx=\int(\frac{1}{x^2}-\sqrt{x})\,dx=-\frac{1}{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$$

۴۲- گزینه‌ی «۱»

عبارت داد می‌زند که «من را با اتحاد مزدوج، تجزیه کن»:

$$(x^2-\sqrt[3]{x})^2-(x^2+\sqrt[3]{x})^2=((x^2-\sqrt[3]{x})-(x^2+\sqrt[3]{x}))((x^2-\sqrt[3]{x})+(x^2+\sqrt[3]{x}))=(-2\sqrt[3]{x})(2x^2)=-4x^2\sqrt[3]{x}=-4x^{\frac{7}{3}}$$

$$\Longrightarrow\int-4x^{\frac{7}{3}}dx=-4\frac{x^{\frac{7}{3}+1}}{\frac{7}{3}+1}+C=-\frac{12}{10}x^{\frac{10}{3}}+C\Longrightarrow a=-\frac{12}{10},\ b=\frac{10}{3}\Longrightarrow ab=-4$$

۴۳- گزینه‌ی «۱» توان کسری یادمان نرفته:

$$\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x}+1)dx=\int(x^{\frac{1}{2}}+1)(x^{\frac{1}{3}}+1)dx=\int(x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}+1)dx=\frac{x^{\frac{5}{6}+1}}{\frac{5}{6}+1}+\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+x+C$$

حال ضریب جمله‌ی $x\sqrt[3]{x}$ یعنی $x^{\frac{1}{3}+1}$ را خواسته که می‌شود: $\frac{1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{3}{4}$. سؤال خوبی بود!

۴۴- گزینه‌ی «۴»

این که معلومه. داد می‌زند که صورت را باید با اتحاد چاق و لاغر تجزیه کنیم.

خاطره $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

پس داریم:

$$\frac{1-\sin^3x}{1+\sin x+\sin^2x}=\frac{(1-\sin x)(1+\sin x+\sin^2x)}{1+\sin x+\sin^2x}=1-\sin x$$

خب دیگه کاری ندارد:

$$\int(1-\sin x)dx=x+\cos x+C$$

۴۵- گزینه‌ی «۴»

اول یک‌کم ساده کنیم:

$$\int\frac{\sin x}{\cos x}\sqrt{\cos^2x}\,dx=\int\sin x\frac{|\cos x|}{\cos x}dx$$

یادمان نرفته که $\sqrt{A^2}=|A|$، پس جواب رادیکال را با قدرمطلق نوشتیم. حالا به بازه‌ای که داده دقت کنید، cos در این بازه (ربع ۲) منفی است

پس:

$$\int\sin x\frac{-\cos x}{\cos x}dx=\int-\sin x\,dx=\cos x+C$$

۴۶- گزینه‌ی «۲» یک‌کم ساده کنیم:

چه باحال شد!

$$\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}=(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2})(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})=1\times\cos x=\cos x$$

اما این که توی گزینه‌ها نیست. خب نترسید!

$$\int\cos x\,dx=\sin x+C$$

$\cos(\frac{\pi}{2}-x)$ هم می‌شود همان $\sin x$. یعنی جواب ۲ درسته.

۴۷- گزینه‌ی «۳» به توان برسانیم:

$$\int(\tan^2 x+\cot^2 x-2\tan x\cot x)\,dx=\int(\tan^2 x+\cot^2 x-2)\,dx$$

فرمول‌هایی که بلدیم برای $\tan^2 x+1$ و $\cot^2 x+1$ هستند، پس به هر کدام یکی اضافه و کم می‌کنیم:

$$=\int((\tan^2 x+1)+(\cot^2 x+1)-4)\,dx=\tan x-\cot x-4x+C$$

۴۸- گزینه‌ی «۲»

یک کم ساده کنیم ...

$$\int\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}dx=\int\frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}dx=\int\tan^2 x\,dx$$

در سؤال قبل یاد گرفتیم که باید $\tan^2 x$ را به $\tan^2 x+1$ تبدیل کنیم:

$$\int((\tan^2 x+1)-1)\,dx=\tan x-x+C$$

خاطره

$1-\cos 2x=2\sin^2 x$ و $1+\cos 2x=2\cos^2 x$

۴۹- گزینه‌ی «۱»

خب چرا دوتا انتگرال؟ با هم جمع می‌کنیم می‌شود $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int 1\,dx=x+C$

۵۰- گزینه‌ی «۴» قرار شد اگر از جواب انتگرال، مشتق بگیریم، خودِ تابع بشود:

۱) $-\cos 2x \xrightarrow{\text{مشتق}} +2\sin 2x=2(2\sin x\cos x)=4\sin x\cos x$ ✓

۲) $2\sin^2 x \xrightarrow{\text{مشتق}} 2\times 2\sin x\cos x=4\sin x\cos x$ ✓

۳) $-2\cos^2 x \xrightarrow{\text{مشتق}} -2\times 2(-\sin x)\cos x=4\sin x\cos x$ ✓

۴) $2\sin 2x \xrightarrow{\text{مشتق}} 4\cos 2x\neq 4\sin x\cos x$ ✗

۵۱- گزینه‌ی «۲» اول برویم دنباله تابع اولیه:

$$\int(\tan x+\cot x)^2dx=\int(\tan^2 x+\cot^2 x+2\tan x\cot x)dx$$

خاطره $\tan x\cot x=1$. پس داریم:

$$\int(\tan^2 x+\cot^2 x+2)dx=\int(\tan^2 x+1+\cot^2 x+1)dx=\tan x-\cot x+C$$

فهمیدی چه‌کار کردیم؟ فرمول‌ها برای $(\tan^2 x+1)$ و $(1+\cot^2 x)$ جواب می‌دهند. ما ۲ را شکستیم به ۱+۱، تا بتوانیم شکل فرمول‌ها را بسازیم و ازشون استفاده کنیم. حالا گفته از نقطه‌ی $(\frac{\pi}{4},2)$ می‌گذرد پس $F(\frac{\pi}{4})=2$ است:

$$F(\frac{\pi}{4})=\tan\frac{\pi}{4}-\cot\frac{\pi}{4}+C=1-1+C=2\implies C=2$$

حالا $F(-\frac{\pi}{4})$ را می‌خواهیم:

$$F(-\frac{\pi}{4})=(-1)-(-1)+2=2$$

۵۲- گزینه‌ی «۲» در صورت کسر از $\sqrt{x}$ فاکتور بگیریم:

$$\int\frac{(\sqrt{x}(2x+1))^4}{x^2}dx=\int\frac{x^2(2x+1)^4}{x^2}dx=\int(2x+1)^4dx=\frac{(2x+1)^5}{2\times 5}+C$$

۵۳- گزینه‌ی «۲»

زورمان به $\sqrt{x+1}$ نمی‌رسد. وقتی زورمان به کسی نمی‌رسد باید سایرین را شبیه او کنیم! پس می‌نویسیم:

$$\int(x+1-1)\sqrt{x+1}\,dx=\int((x+1)\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1})dx=\int((x+1)^{\frac{3}{2}}-(x+1)^{\frac{1}{2}})dx$$

$$=\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}-\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C=2(x+1)\sqrt{x+1}(\frac{x+1}{5}-\frac{1}{3})+C=2(x+1)\sqrt{x+1}(\frac{3x-2}{15})+C$$

دقت کنید، از فرمول x^n برای $(x+1)^n$ هم استفاده کردیم. این کار همیشه درست است.

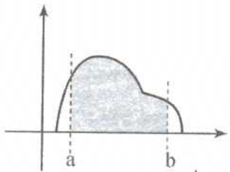
یعنی اگر: $\int f(x)dx=F(x)+C$ داریم: $\int f(x\pm a)dx=F(x\pm a)+C$

مثلاً برای $\int\sin(x+\frac{\pi}{4})dx=-\cos(x+\frac{\pi}{4})+C$ چون $\int\sin x=-\cos x+C$

و همچنین: $\int\frac{1}{x+3}dx=\mathrm{Ln}|x+3|+C$ چون $\int\frac{1}{x}dx=\mathrm{Ln}|x|+C$

۵۴- گزینه‌ی «۱»

انتگرال معین



برای حساب کردن انتگرال معین وقتی تابع داخل انتگرال خط یا براکت نباشد، اول حدود را بی‌خیال می‌شویم و مثل انتگرال نامعین، جواب را به‌دست می‌آوریم ($+C$ لازم نیست):

$$\int f(x)dx = F(x)$$

بعد، یک بار در $F(x)$، به جای x می‌گذاریم b؛ یک بار هم a می‌گذاریم و از هم کم می‌کنیم. یعنی: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

به این می‌گویند قضیه‌ی اساسی دوم حساب انتگرال.

در انتگرال معین هم قدرمطلق و براکت مزاحم‌اند. اگر بخواهیم آن‌ها را برداریم شاید مجبور بشویم انتگرال را چند قسمت کنیم. چاره‌ای نیست!

مساحت زیر تابع ثابت، یک مستطیل است و داریم: $\int_a^b \underset{\text{عدد ثابت}}{k}\, dx = k\underbrace{(b-a)}_{\text{طول بازه}}$

اول انتگرال بگیریم: $\int_۱^۳ (۴x+۱)dx = (\frac{۴x^۲}{۲}+x)\Big|_۱^۳ = (۲(۹)+۳) - (۲(۱)+۱) = ۱۸$

حالا باید داشته باشیم $f(b) = ۱۸$ پس $۴b+۱ = ۱۸$ که نتیجه می‌شود $b = \frac{۱۷}{۴}$.

۵۵- گزینه‌ی «۲»

این سؤال خیلی خیلی مهمه، جانِ هر کسی که دوست دارید دقت کنید.

گفتیم قدرمطلق و براکت مزاحم‌اند و باید از شرشان خلاص شد، پس می‌نویسیم:

$$\int_{-۲}^{-۱}(\frac{|x|}{x}+[x])dx + \int_{-۱}^{۰}(\frac{|x|}{x}+[x])dx + \int_{۰}^{۱}(\frac{|x|}{x}+[x])dx = \int_{-۲}^{-۱}((-۱)+(-۲))dx + \int_{-۱}^{۰}((-۱)+(-۱))dx + \int_{۰}^{۱}(۱+۰)dx$$
$$= (-۳)(۱) + (-۲)(۱) + ۱(۱) = -۴$$

یادگرفتید، خدا را شکر. این‌ها رو هم تأیید کنید لطفاً:

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} -۱ & , \quad x<۰ \\ ۱ & , \quad x>۰ \end{cases} \quad و \quad [x] = \begin{cases} -۲ & , \quad -۲ \le x < -۱ \\ -۱ & , \quad -۱ \le x < ۰ \\ ۰ & , \quad ۰ \le x < ۱ \end{cases}$$

یه جور دیگه شکل بکشیم.

۵۶- گزینه‌ی «۲»

قدرمطلق مزاحم است! دوتکه می‌کنیم، از -۲ تا صفر (که $|x|$ می‌شود $-x$) و از صفر تا ۲ (که قدرمطلق x می‌شود خودِ x):

$$= \int_{-۲}^{۰}(۲x+(-x))dx + \int_{۰}^{۲}(۲x+x)dx = \int_{-۲}^{۰} xdx + \int_{۰}^{۲} ۳xdx = \frac{x^۲}{۲}\Big|_{-۲}^{۰} + \frac{۳x^۲}{۲}\Big|_{۰}^{۲} = \frac{۰}{۲} - \frac{۴}{۲} + \frac{۱۲}{۲} - \frac{۰}{۲} = ۴$$

یه جور دیگه از -۲ تا ۲، انتگرال $۲x$ می‌شود صفر چون مساحت بالا و پایین مساوی‌اند و حذف می‌شوند. برای $\int_{-۲}^{۲}|x|dx$ هم شکل بکشیم.

۵۷- گزینه‌ی «۳»

بازهم قدرمطلق مزاحم است:

$$\int_{۰}^{۱}(\frac{۱-x}{۱-x}+x)dx + \int_{۱}^{۳}(\frac{-(۱-x)}{۱-x}+x)dx = \int_{۰}^{۱}(x+۱)dx + \int_{۱}^{۳}(x-۱)dx = (\frac{x^۲}{۲}+x)\Big|_{۰}^{۱} + (\frac{x^۲}{۲}-x)\Big|_{۱}^{۳} = (\frac{۱}{۲}+۱) - ۰ + (\frac{۹}{۲}-۳) - (\frac{۱}{۲}-۱) = \frac{۷}{۲}$$

علامت را ببینید:

x		۱	
$۱-x$	+	۰	−

۵۸- گزینه‌ی «۳»

از قدرمطلق و براکت خوشمان نمی‌آید. تکه‌تکه کنیم که از شرشان خلاص بشویم:

$$\int_{-۱}^{۲} f(x)dx = \int_{-۱}^{۰} f(x)dx + \int_{۰}^{۱} f(x)dx + \int_{۱}^{۲} f(x)dx$$

حالا در هر بازه تکلیف قدرمطلق و براکت معلوم است:

$$= \int_{-۱}^{۰}(x+\underset{\substack{x<۰ \\ |x|=-x}}{(-x)})\underset{\substack{-۱\le x<۰ \\ [x]=-۱}}{(-۱)}dx + \int_{۰}^{۱}(x+\underset{\substack{x>۰ \\ |x|=x}}{x})\underset{\substack{۰\le x<۱ \\ [x]=۰}}{۰}dx + \int_{۱}^{۲}(x+x)۱dx$$

خب دوتای اولی که صفرند. جواب می‌شود $\int_۱^۲ ۲xdx$ یعنی: $x^۲\Big|_۱^۲ = ۳$.

۵۹- گزینه‌ی «۳»

برای خلاصی از دست براکت مجبوریم دو تکه کنیم:

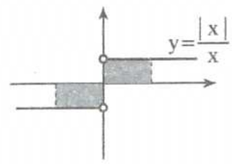
$$\int_{۲}^{۲/۵}[x+\frac{۱}{۲}]dx + \int_{۲/۵}^{۳}[x+\frac{۱}{۲}]dx = \int_{۲}^{۲/۵} ۲dx + \int_{۲/۵}^{۳} ۳dx = ۲(۰/۵) + ۳(۰/۵) = ۲/۵$$

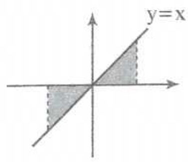
$۲/۵ < x < ۳ \Longrightarrow ۳ < x+\frac{۱}{۲} < ۳/۵ \Longrightarrow [x+\frac{۱}{۲}] = ۳$ و $۲ < x < ۲/۵ \Longrightarrow ۲/۵ < x+\frac{۱}{۲} < ۳ \Longrightarrow [x+\frac{۱}{۲}] = ۲$

۶۰- گزینه‌ی «۳» دو تکه کنیم که قدرمطلق را برداریم:

$$\int_{-۲}^{۰}(\frac{-x}{x}+x)\,dx+\int_{۰}^{۲}(\frac{x}{x}+x)\,dx=\int_{-۲}^{۰}(x-۱)\,dx+\int_{۰}^{۲}(x+۱)\,dx=(\frac{x^۲}{۲}-x)\Big|_{-۲}^{۰}+(\frac{x^۲}{۲}+x)\Big|_{۰}^{۲}=۰-(۲+۲)+(۲+۲)-۰=۰$$

چتربازی هم $\frac{|x|}{x}$ و هم $y=x$ نسبت به مبدأ تقارن دارند. بنابراین از ۲- تا ۲ که انتگرال بگیریم مساحت بالا و پایین با هم ساده می‌شوند و جواب صفر می‌شود! ببینید:





۶۱- گزینه‌ی «۳» باید از شر قدرمطلق خلاص بشویم، دو قسمت می‌کنیم:

$$\int_{-۲}^{۰}((-x)+۲x)\,dx+\int_{۰}^{۴}(x+۲x)\,dx=\int_{-۲}^{۰}x\,dx+\int_{۰}^{۴}۳x\,dx=\frac{x^۲}{۲}\Big|_{-۲}^{۰}+\frac{۳x^۲}{۲}\Big|_{۰}^{۴}=(\frac{۰}{۲}-\frac{۴}{۲})+(\frac{۳(۴)^۲}{۲}-\frac{۰}{۲})=-۲+۲۴=۲۲$$

۶۲- گزینه‌ی «۳»

خب اول انتگرال می‌گیریم: $F(x)=\frac{x^۴}{۴}+x^۳+\frac{۳}{۲}x^۲$

بعد هم ۰ و ۲- را قرار می‌دهیم و از هم کم می‌کنیم: $F(۰)-F(-۲)=۰-(\frac{۱۶}{۴}-۸+\frac{۳}{۲}(۴))=-۲$

یه جورِ دیگه این تابعی که داده خیلی شبیه اتحاد است، ببینید: $x^۳+۳x^۲+۳x=(x+۱)^۳-۱$

پس: $\int((x+۱)^۳-۱)\,dx=(\frac{(x+۱)^۴}{۴}-x)\Big|_{-۲}^{۰}=\frac{۱}{۴}-(\frac{۱}{۴}-(-۲))=-۲$

۶۳- گزینه‌ی «۲»

$$\int_{-۱}^{۰}(x^۳-۳x)\,dx=(\frac{x^۴}{۴}-\frac{۳x^۲}{۲})\Big|_{-۱}^{۰}=۰-(\frac{۱}{۴}-\frac{۳}{۲})=\frac{۵}{۴}$$

توضیح لازم است؟

۶۴- گزینه‌ی «۲»

داد می‌زند که اتحاد $(x-۱)^۳$ است!

$$\int_{۱}^{۲}(x^۳-۳x^۲+۳x+\overset{-۱+۳}{\boxed{۲}})\,dx=\int_{۱}^{۲}((x-۱)^۳+۳)\,dx=(\frac{(x-۱)^۴}{۴}+۳x)\Big|_{۱}^{۲}=\frac{۱}{۴}+۶-(\frac{۰}{۴}+۳)=\frac{۱۳}{۴}$$

۶۵- گزینه‌ی «۳»

تابع توی انتگرال ساده می‌شود، ببینید:

$$\int_{۰}^{۱}\frac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}\,dx=\int_{۰}^{۱}\frac{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt{x}-۱)}\,dx=\int_{۰}^{۱}(\sqrt{x}+۱)\,dx$$

بازهم حفظ بودن حاصل $\int\sqrt{x}\,dx$ به دادمون رسید:

$$=(\frac{۲}{۳}x\sqrt{x}+x)\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۲}{۳}+۱=\frac{۵}{۳}$$

۶۶- گزینه‌ی «۴»

$$\int_{۰}^{۱}(x\sqrt{x}+۱)^۲\,dx=\int_{۰}^{۱}(x^۳+۲x\sqrt{x}+۱)\,dx=\int_{۰}^{۱}(x^۳+۲x^{\frac{۳}{۲}}+۱)\,dx=(\frac{x^۴}{۴}+۲\frac{x^{\frac{۵}{۲}}}{\frac{۵}{۲}}+x)\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۱}{۴}+\frac{۴}{۵}+۱=\frac{۴۱}{۲۰}$$

۶۷- گزینه‌ی «۱»

این مساحت می‌شود $\int_{۱}^{e^۲}\frac{۱}{x}\,dx$ ، خوب یادمان هست که $\int\frac{۱}{x}\,dx=Ln|x|$ پس داریم: $S=Ln|x|\Big|_{۱}^{e^۲}=Lne^۲-Ln۱=۲Lne-Ln۱=۲$

خاطره Ln و log، توان را می‌اندازند پشت و $log۱=Ln۱=۰$ و $Lne=۱$.

چتربازی $\int_{۱}^{a}\frac{۱}{x}dx$ می‌شود Lna. اصلاً تعریف تابع Lnx این‌جوری است! پس جواب می‌شد $Lne^۲$ یعنی ۲.

۶۸- گزینه‌ی «۳»

$$\int_0^b x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_0^b = \frac{3}{4}b^{\frac{4}{3}} = 12 \Longrightarrow b^{\frac{4}{3}} = 16 = 2^4 \Longrightarrow b^{\frac{1}{3}} = 2 \Longrightarrow b = 8$$

۶۹- گزینه‌ی «۲»

این‌که کاری ندارد:
$$\int_0^1 (x^{\frac{1}{3}} + (1+x)^{-2})\,dx = \left(\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \frac{(1+x)^{-1}}{-1}\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{1+x}\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right) - (0-1) = \frac{5}{4}$$

۷۰- گزینه‌ی «۴»

اول تفکیک:
$$\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)dx = \left(2\sqrt{x} + \frac{x^{-1}}{-1}\right)\Big|_1^4 = \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^4 = 2(2) - \frac{1}{4} - (2(1)-1) = 4 - \frac{1}{4} - 1 = \frac{11}{4}$$

اشاره شما که حفظید $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}$ ؟!

۷۱- گزینه‌ی «۲»

$$\int_1^4 (\sqrt{x} + x^{-2})\,dx = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{x^{-1}}{-1}\right)\Big|_1^4 = \left(\frac{2}{3}4\sqrt{4} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{2}{3} - 1\right) = \frac{14}{3} + \frac{3}{4} = \frac{65}{12}$$

۷۲- گزینه‌ی «۱»

اول اتحاد را باز کنیم:
$$\int(\underbrace{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}_{1} - \underbrace{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}_{\sin x})\,dx$$

$$= \int(1 - \sin x)\,dx = (x + \cos x)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}$$

۷۳- گزینه‌ی «۱»

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

خاطره $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

۷۴- گزینه‌ی «۱»

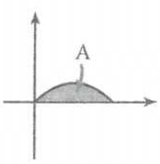
خیلی واضح است، خب $4\sin^2 x + 4\cos^2 x$ می‌شود ۴، حالا:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 + \sin x)\,dx = (4x - \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (2\pi - 0) - (0 - 1) = 2\pi + 1$$

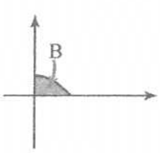
۷۵- گزینه‌ی «۲»

خب برای چی دوتا انتگرال از صفر تا $\frac{\pi}{4}$ بنویسیم؟ با هم جمع می‌کنیم:
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan x + 1 + \frac{\cos x - \sin x}{\cos x}\right)dx$$

حالا کسر را تفکیک می‌کنیم:
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + 1 + 1 - \tan x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\,dx = 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{2}$$

۷۶- گزینه‌ی «۱» انتگرال از صفر تا π تابع $\sin x$، مساحت یک طاق سینوسی است که می‌شود ۲.





$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ مساحت نصف این طاق است پس $A = 2B$.

۷۷- گزینه‌ی «۱»

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)dx = \left(-2\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-2\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (-2 + 0) = 2$$

۷۸- گزینه‌ی «۳»

فرمول انتگرال را یادمان نرفته که $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int (1+\tan^2 x)dx = \tan x + C$ پس $\int \frac{1}{\cos^2 2x}dx = \frac{1}{2}\tan 2x$ (اگر گفتید $\frac{1}{2}$ از کجا آمد؟)

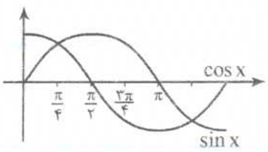
حالا:

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 2x}dx = \frac{1}{2}\tan 2x \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}(\tan\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$$

۷۹- گزینه‌ی «۳»

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۸۰- گزینه‌ی «۱»



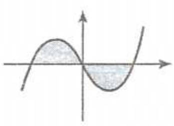
باید قدرمطلق را برداریم. از صفر تا $\frac{\pi}{2}$ که $\sin x$ و $\cos x$ مثبت هستند و $\sin x + \cos x$ هم مثبت می‌شود. از $\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{3\pi}{4}$ هم، $\sin x$ مثبت است و از نظر قدرمطلق، از $\cos x$ بیش‌تر است. اما در فاصله $\frac{3\pi}{4}$ تا π، $\sin x + \cos x$ منفی می‌شود. می‌توانستیم از $\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$ هم استفاده کنیم.

به هر حال:

$$\int_0^{\pi} |\sin x + \cos x|dx = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (\sin x + \cos x)dx + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} -(\sin x + \cos x)dx = (-\cos x + \sin x)\Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} + (\cos x - \sin x)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}$$

$$= (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) - (-1+0) + (-1-0) - (-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} + 1 - 1 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

۸۱- گزینه‌ی «۳» سؤال خوبی است. نمودار تقریبی $y = x^3 - x$ این شکلی است:



پس سطح محصور ۲ قسمت دارد:

۱ از -1 تا صفر که بالای محور افقی (مثبت) قرار دارد. ۲ از ۰ تا ۱ زیر محور افقی قرار دارد (منفی).

چتربازی چون مبدأ مختصات مرکز تقارن این تابع است، دوتا سطحی که گفتیم با هم برابرند. یکی را حساب می‌کنیم بعد ضرب در ۲ می‌کنیم.

$$\int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx = (\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2})\Big|_{-1}^{0} = 0 - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

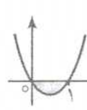
پس جواب می‌شود: $\frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$. اگر متقارن نبود چی؟ خب هر ۲ را حساب می‌کردیم، بعد قدرمطلق‌هایشان را با هم جمع می‌کردیم.

۸۲- گزینه‌ی «۱»

اول از شر قدرمطلق خلاص بشویم:

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + x & , \ x \geq 0 \\ x^2 - 2x - x & , \ x < 0 \end{cases} \Longrightarrow y = \begin{cases} x^2 - x & , \ x \geq 0 \\ x^2 - 3x & , \ x < 0 \end{cases}$$

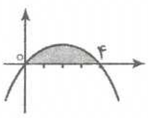
شکلش تقریباً این طوری است:



بنابراین مساحت محصور فقط مالِ ضابطه‌ی $x \geq 0$ است. واضح است که در نقاط $x = 0$ و $x = 1$ به محور افقی می‌خورد و انتگرال $\int_0^1 (x^2 - x)dx$ (که منفی می‌شود) مساحت را به دست می‌آورد:

$$\int_0^1 (x^2 - x)dx = (\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2})\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{6} \Longrightarrow S = \frac{1}{6}$$

۸۳- گزینه‌ی «۴»



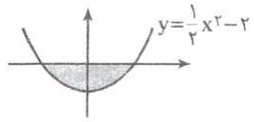
خب ببینیم سهمی کجا به محور افقی می‌خورد:

$$y = -x^2 + 4x = 0 \Longrightarrow x(-x+4) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

پس مساحت موردنظر می‌شود $\int_0^4 (-x^2 + 4x)dx$:

$$\int_0^4 (-x^2 + 4x)dx = (-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2})\Big|_0^4 = \frac{-64}{3} + 2(16) = \frac{32}{3}$$

۸۴- گزینه‌ی «۴»



اول ببینیم $y=\frac{1}{2}x^2-2$ کجا به محور x ها می‌خورد؟

$$y=\frac{1}{2}x^2-2=0 \implies x^2=4 \implies x=\pm 2$$

پس باید از ۲- تا ۲ انتگرال گرفت. البته می‌شود از ۰ تا ۲ گرفت و دو برابر کرد چون تابع نسبت به محور y ها تقارن دارد.

دقت کنیم که مساحت، زیر محور افقی است و با انتگرال منفی درمی‌آید، ما خودمان مثبتش می‌کنیم:

$$\int_0^2 (\frac{1}{2}x^2-2)\,dx=(\frac{1}{2}\times\frac{x^3}{3}-2x)\Big|_0^2=\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}-4=-\frac{8}{3}$$

پس جواب می‌شود $2\times\left|-\frac{8}{3}\right|$ یعنی $\frac{16}{3}$.

۸۵- گزینه‌ی «۳» خب این جایی که سایه زده دقیقاً زیر نمودار x^2-2x، از $x=2$ تا $x=4$ است.

پس می‌شود $\int_2^4 (x^2-2x)\,dx$، این هم که کاری ندارد:

$$\int_2^4 (x^2-2x)\,dx=(\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2})\Big|_2^4=(\frac{64}{3}-16)-(\frac{8}{3}-4)=\frac{56}{3}-12=\frac{20}{3}$$

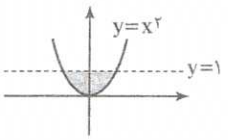
۸۶- گزینه‌ی «۱»

خب محل شروع و پایان کجاست؟ معلومه دیگه، جایی که به محور افقی می‌خورد. یعنی $x=0,1$.

پس داریم:

$$S=\left|\int_0^1 (x-\sqrt{x})\,dx\right|=\left|\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\,\Big|_0^1\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{6}$$

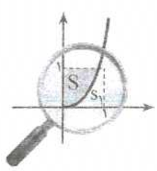
۸۷- گزینه‌ی «۲»



اول شکل بکشیم:

خب معلومه که مساحت نسبت به محور y ها تقارن دارد.

پس یک‌طرفش را حساب می‌کنیم بعد ۲ برابر می‌کنیم. یک‌کم روی شکل زوم کنیم:



خب $\int_0^1 x^2dx$، مساحت زیر نمودار یعنی ناحیه‌ی s_1 را حساب می‌کند:

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

ما s را می‌خواهیم، پس مساحت مربع ۱×۱ را منهای s_1 می‌کنیم:

$$s=1\times 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

پس مساحتی که ما می‌خواهیم $2\times\frac{2}{3}$ یعنی $\frac{4}{3}$ است.

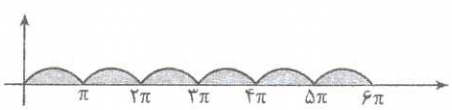
۸۸- گزینه‌ی «۳»

سطحی که می‌خواهد، زیر تابع $\sin x$ است آن هم تا π. از کجا می‌دانیم تا π؟

خب اولین باری که $\sin$ در سمت راست محور افقی صفر می‌شود، نقطه با طول π است!

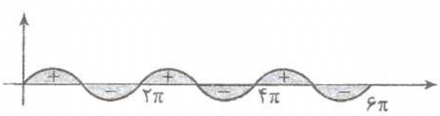
$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(-1-1)=2$$

چترباری خیلی‌ها حفظ می‌کنند که مساحت یک طاق تحت نمودار $\sin x$، برابر ۲ است.



حالا اگر گفتید $\int_0^{6\pi}|\sin x|\,dx$ چه‌قدر است؟

خب می‌شود ۶ تا طاق یعنی ۱۲=۲×۶.



اشاره اما دقت کنیم که $\int_0^{6\pi}\sin x\,dx=0$.

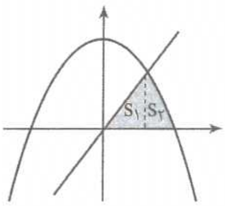
۸۹- گزینه‌ی «۱»

این حرف‌هایی که گفته یعنی $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos^2x-\sin^2x)\,dx$، که می‌شود:

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}-(-\frac{\sqrt{3}}{2}))=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

خاطره $\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$.

۹۰- گزینه‌ی «۲»



اگر خوب نگاه کنید این مساحت ۲ قسمت است. یک قسمت زیرخط $y=x$ و یک قسمت زیر سهمی قرار دارد.

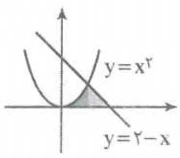
مرز این ۲ ناحیه، جایی است که $y=2-x^2$ و $y=x$ تلاقی می‌کنند. این هم واضحه که در $x=1$ می‌خورند به‌هم.

یک چیز دیگر هم باید معلوم بشود: نقطه‌ی انتهایی کجاست؟

از شکل معلوم است که باید محلی باشد که $y=2-x^2$ به محور افقی برخورد کند. پس این هم $x=\sqrt{2}$ است و داریم:

$$s=s_1+s_2=\int_0^1 x\,dx+\int_1^{\sqrt{2}}(2-x^2)\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+(2x-\frac{x^3}{3})\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}+(2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3})-(2-\frac{1}{3})=\frac{8\sqrt{2}-7}{6}$$

۹۱- گزینه‌ی «۳»



باز هم مساحت دو قسمت است، یک قسمت زیر سهمی و یک قسمت زیر خط، ببینید:

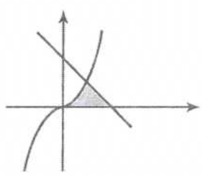
کاملاً تابلو است که مرز بین دو قسمت $x=1$ بوده، اگر قبول ندارید با هم تلاقی بدهید: $x^2=2-x$ که جواب مثبت این معادله می‌شود $x=1$. پس از ۰ تا ۱، سطح زیر سهمی و از ۱ تا ۲، سطح زیر خط را داریم:

$$s=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2-x)\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+(2x-\frac{x^2}{2})\Big|_1^2=\frac{1}{3}-\frac{0}{3}+(4-\frac{4}{2})-(2-\frac{1}{2})=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

یه جورایی از شکل معلوم بود که سطح زیرخط، یک مثلث قائم‌الزاویه 1×1 است و می‌شود $\frac{1}{2}$، نیازی به انتگرال‌گیری از خط نبود.

۹۲- گزینه‌ی «۱»

اگر به شکل دقت کنیم مساحت موردنظر دو قسمت دارد: یک قسمت زیر منحنی است و یک قسمت زیر خط.



$$\text{مساحت زیر منحنی}=\int_0^1 x^3\,dx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}$$

$$\text{مساحت زیر خط (مثلث)}=\frac{1\times1}{2}=\frac{1}{2}$$

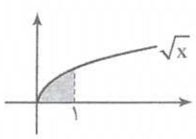
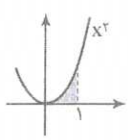
پس جواب می‌شود $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$. فقط از کجا فهمیدیم مرز دو قسمت $x=1$ است؟ خب باید ببینیم x^3 و $2-x$ کجا با هم تلاقی می‌کنند!

چتربازی از شکل معلوم بود که سطح زیرخط، یک مثلث 1×1 است و می‌شود $\frac{1}{2}$، مساحت زیر منحنی هم از آن کم‌تر است. پس جواب در مجموع از یک کم‌تر است و بین گزینه‌ها فقط ۱ امکان‌پذیر است.

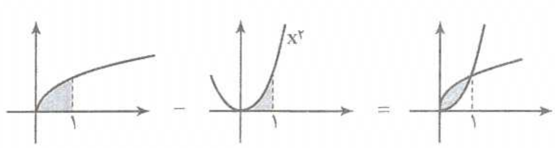
۹۳- گزینه‌ی «۴» از شکل معلومه که از ۰ تا ۱، سطح زیر خط را می‌خواهد و از ۱ تا ۲، زیرسهمی را:

$$=\int_0^1 3x\,dx+\int_1^2(4-x^2)\,dx=\frac{3x^2}{2}\Big|_0^1+(4x-\frac{x^3}{3})\Big|_1^2=\frac{3}{2}-0+(8-\frac{8}{3})-(4-\frac{1}{3})=\frac{3}{2}+4-\frac{7}{3}=\frac{9+24-14}{6}=\frac{19}{6}$$

۹۴- گزینه‌ی «۱» اول این دو تا را ببینید:

$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx=$  $=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$ و $\int_0^1 x^2\,dx=$  $=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$

حالا اگر این دوتا را از هم کم کنیم:

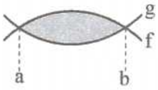


پس مساحتی که می‌خواهد، تفاضل دوتا انتگرال بوده! $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

عشق فرمول‌ها حفظ کنند که مساحت محصور به سهمی‌های افقی و قائم $y^2=2px$ و $x^2=2py$ می‌شود $\frac{4}{3}p^2$.

اشاره مساحت محصور به ۲ تابع، می‌شود انتگرال تفاضل آن‌ها.

$$\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx$$



۹۵- گزینه‌ی «۴»

خب این‌جایی که هاشور زده بین $\cos 2x$ و $\sin 2x$ افتاده، یعنی مساحت زیر $\cos 2x$ را منهای مساحت زیر $\sin 2x$ کنیم.

فقط باید بفهمیم از کجا تا کجا، شروعش که معلوم است از $x=0$ بوده، آخرش هم جایی است که $\sin 2x$ و $\cos 2x$ به هم می‌خورند.

خب $\sin 2x=\cos 2x$ یعنی $2x=\frac{\pi}{4}$ یا $x=\frac{\pi}{8}$. پس داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}}(\cos 2x-\sin 2x)\,dx=\left(\tfrac{1}{2}\sin 2x+\tfrac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}=\left(\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{\pi}{4}\right)-\left(\tfrac{1}{2}\sin 0+\tfrac{1}{2}\cos 0\right)=\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$$

خاطره $\int \sin ax\,dx=\frac{-1}{a}\cos ax+C \quad , \quad \int \cos ax\,dx=\frac{1}{a}\sin ax+C$

۹۶- گزینه‌ی «۴» خب باید سطح زیر سهمی را منهای سطح زیرخط کنیم. حدودش هم معلوم است، از صفر شروع می‌شود تا جایی که به هم می‌خورند:

$$-x^2+5x=x \implies x^2=4x \implies x=4$$

پس:

$$\int_0^4((-x^2+5x)-x)\,dx=\int_0^4(-x^2+4x)\,dx=\left(\frac{-x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4=\frac{-64}{3}+2(16)=\frac{32}{3}$$

۹۷- گزینه‌ی «۱» خیلی سؤال خوبی است.

اول مجانب مایل $\frac{x^3+2}{x^2}$ را پیدا کنیم. خب باید صورت را بر مخرج تقسیم کرد که جوابش می‌شود $y=x$.

حالا برای سطح محصور بین آن‌ها، از هم کم می‌کنیم:

$$\int_1^2\left(\frac{x^3+2}{x^2}-x\right)dx=\int_1^2\frac{2}{x^2}\,dx=\int_1^2 2x^{-2}\,dx=2\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)\Big|_1^2=\frac{-2}{x}\Big|_1^2=-1-(-2)=+1$$

۹۸- گزینه‌ی «۳»

انتگرال‌های بد

انتگرال‌هایی که به تغییر متغیر نیاز دارند:

هر وقت عبارتی که زیر توان یا زیر رادیکال یا کمان جلوی نسبت‌های مثلثاتی است، خفن بود (یعنی $ax+b$ نبود) باید از تغییر متغیر برویم.

همان عبارت زیر توان، رادیکال یا کمان را u می‌گیریم.

دقت کنید که مشتق این عبارت یعنی u'، باید در صورت انتگرال باشد، وگرنه مسأله حل نمی‌شود.

مثلاً: $\int 3x^2(x^3+1)^7\,dx$. اگر x^3+1 را u بگیریم، u' یعنی مشتق آن می‌شود $3x^2$ که داریم. پس می‌نویسیم:

$$\int \underbrace{3x^2}_{u'}(\underbrace{x^3+1}_{u})^7\,dx=\int u'u^7\,dx$$

حالا فرمول‌های انتگرال را برحسب u و u' یاد بگیرید:

$$\int u'u^n\,dx=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$$

$$\int \frac{u'}{u}\,dx=\mathrm{Ln}|u|+C \qquad \int u'(1+\tan^2 u)\,dx=\tan u+C \qquad \int u'\sin u\,dx=-\cos u+C$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{u}}\,dx=2\sqrt{u}+C \qquad \int u'(1+\cot^2 u)\,dx=-\cot u+C \qquad \int u'\cos u\,dx=\sin u+C$$

این را هم بد نیست یاد بگیرید که:

$$\int \frac{u'}{a^2+u^2}\,dx=\frac{1}{a}\mathrm{Arc}\tan\frac{u}{a}+C$$

اگر $\sqrt{x}$ را بگیریم u، داریم:

$$u=\sqrt{x} \implies u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

اما $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ نداریم، خب $\frac{1}{\sqrt{x}}$ را که داریم، کاری ندارد! یک ضریب ۲ برای صورت و مخرج می‌گذاریم تا شکلی بشود که می‌خواهیم:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\,dx=\int 2\times\underbrace{\boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}_{u'}\sin\underbrace{\boxed{\sqrt{x}}}_{u}\,dx=2\int u'\sin u\,dx=2(-\cos u)+C=-2\cos\sqrt{x}+C$$

۹۹- گزینه‌ی «۳»

الان عبارت زیر توان، یعنی x^2+1، باید u باشد:

$$u=x^2+1 \implies u'=2x$$

$2x$ را هم داریم. پس داریم درست جلو می‌رویم:

$$\int \underbrace{\boxed{2x}}_{u'}\ \underbrace{\boxed{(x^2+1)^5}}_{u^5}\,dx=\int u'u^5\,dx=\frac{1}{6}u^6+C=\frac{1}{6}(x^2+1)^6+C$$

۱۰۰- گزینه‌ی «۴» اگر $\sin x = u$ باشد $u' = \cos x$ را داریم.

پس می‌شود: $\int \frac{u'}{u^{۴}}dx$ یعنی $\int u^{-۴}u'dx$. که جواب آن $\frac{u^{-۴+۱}}{-۴+۱}+C$ است:

$$=\frac{u^{-۳}}{-۳} = -\frac{۱}{۳u^{۳}} = -\frac{۱}{۳\sin^{۳} x}+C$$

۱۰۱- گزینه‌ی «۲»

$$\int(\sin^{۲} x + \sin^{۲} x\cos x)dx$$

برای انتگرال گرفتن از $\sin^{۲} x$ ، باید توانش را از بین برد، می‌نویسیم: $\sin^{۲} x = \frac{۱-\cos ۲x}{۲}$

برای $\sin^{۲} x\cos x$ ، اگر $u=\sin x$ باشد مشتقش می‌شود $u'=\cos x$ که داریم.

خلاصه:
$$\int\frac{۱-\cos ۲x}{۲}dx + \int u^{۲}u'dx = \int(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos ۲x)dx + \frac{۱}{۳}u^{۳} + C = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۴}\sin ۲x+\frac{۱}{۳}\sin^{۳}x+C$$

۱۰۲- گزینه‌ی «۲»

اگر $x^{۲}+۱$ را u بگیریم مشتقش می‌شود $u'=۲x$ که داریم!
$$\int\frac{x}{x^{۲}+۱}dx = \frac{۱}{۲}\int\frac{۲x}{x^{۲}+۱}dx=\frac{۱}{۲}\int\frac{u'}{u}dx$$

$\int\frac{u'}{u}dx$ هم که بلدیم، می‌شود $Ln|u|$، پس جواب به صورت زیر است:

$$\frac{۱}{۲}Ln|u| = \frac{۱}{۲} Ln|x^{۲}+۱|\Big|_{۱}^{۲} = \frac{۱}{۲}Ln۵ - \frac{۱}{۲}Ln۲ = \frac{۱}{۲}(Ln۵-Ln۲)=\frac{۱}{۲}Ln\frac{۵}{۲} = Ln\sqrt{\frac{۵}{۲}}$$

آخرش یک کم لگاریتم‌بازی هم کردیم. اشکال نداره که!

۱۰۳- گزینه‌ی «۴»

اگر $x^{۲}+x$ را بگیریم u، مشتق $u'=۲x+۱$ است که داریم:
$$\int\frac{۲x+۱}{\sqrt{x^{۲}+x}}dx \xrightarrow{x^{۲}+x=u}\int\frac{u'}{\sqrt{u}}dx$$

یادمان هست که حاصل $\int\frac{u'}{\sqrt{u}}dx$ می‌شد $۲\sqrt{u}$، پس داریم:
$$=۲\sqrt{u} = ۲\sqrt{x^{۲}+x}\Big|_{۱}^{۳} = ۲(\sqrt{۹+۳}-\sqrt{۱+۱}) = ۲(\sqrt{۱۲}-\sqrt{۲}) = ۲(۲\sqrt{۳}-\sqrt{۲})$$

۱۰۴- گزینه‌ی «۲»

انتگرال $\sin^{۳} x$ یک‌کم جالبه، ببینید:
$$\int\sin^{۳}x\,dx = \int \sin x(\sin^{۲}x)dx = \int\sin x(۱-\cos^{۲}x)dx = \int\sin x\,dx - \int\sin x\cos^{۲} x\,dx$$

انتگرال اولی که تابلو است. در دومی هم $\cos x = u$ مناسب است:

$$=-\cos x + \int u'u^{۲}dx = -\cos x + \frac{۱}{۳}u^{۳} = (-\cos x+\frac{۱}{۳}\cos^{۳}x)\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} = ۰-(-۱+\frac{۱}{۳})=\frac{۲}{۳}$$

بعضی‌ها که بیکارِ حفظ کردن هستند یاد بگیرند که:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sin^{n} x\,dx \xrightarrow{n\ \text{زوج}} = \frac{(n-۱)(n-۳)\cdots۳\times۱}{n(n-۲)\cdots۴\times۲}\times\frac{\pi}{۲} \quad \text{و} \quad \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sin^{n} x\,dx\xrightarrow{n\ \text{فرد}} = \frac{(n-۱)(n-۳)\cdots۲}{n(n-۲)\cdots۱}$$

به این‌ها میگن حاصل‌ضرب والیس. مثلاً در این سؤال $n=۳$ بود و جواب می‌شد $\frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۳\times۱}$.

۱۰۵- گزینه‌ی «۳»

این شبیه شعبده بازی است (توان‌ها را دوتا درمیان اضافه و کم می‌کنیم):

$$\int\tan^{۴}x\,dx = \int(\tan^{۴}x+\tan^{۲}x-\tan^{۲}x+۱-۱)dx = \int(\tan^{۲}x(\tan^{۲}x+۱)-(\tan^{۲}x+۱)+۱)dx$$
$$=\int\tan^{۲}x(\tan^{۲}x+۱)dx - \int(\tan^{۲}x+۱)dx+\int ۱dx = \int u^{۲}u'dx - \tan x + x + C = \frac{۱}{۳}u^{۳}-\tan x+x+C$$

سخت بودها!
$$=(\frac{۱}{۳}\tan^{۳}x-\tan x+x)\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} = \frac{۱}{۳}-۱+\frac{\pi}{۴}-(۰-۰+۰)=\frac{\pi}{۴}-\frac{۲}{۳}=\frac{۳\pi-۸}{۱۲}$$

۱۰۶- گزینه‌ی «۳»

اگر Lnx را u بگیریم $\frac{۱}{x}$ می‌شود u'، پس:
$$\int\frac{۱}{x}\times\frac{۱}{Lnx} = \int u'\frac{۱}{u} dx = \int\frac{u'}{u}dx = Ln|u| = Ln|Lnx|$$
$$=Ln|Lnx|\Big|_{e}^{e^{۳}} = Ln|Lne^{۳}|-Ln|Lne| = Ln۳-Ln۱=Ln۳$$

۱۰۷- گزینه‌ی «۲»

اول یک کم ساده‌تر کنیم:

$$\int \frac{(2x-1)^2}{(x+1)^4}dx = \int (\frac{2x-1}{x+1})^2 \times \frac{1}{(x+1)^2}dx$$

حالا $\frac{2x-1}{x+1}$ را بگیریم u، مشتقش می‌شود $u'=\frac{3}{(x+1)^2}$، که داریم. پس می‌نویسیم:

$$\frac{1}{3}\int (\frac{2x-1}{x+1})^2 \frac{3}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{3}\int u^2u'dx = \frac{1}{3}\times\frac{u^3}{3}+C = \frac{1}{9}(\frac{2x-1}{x+1})^3+C$$

بازهم عشق فرمول‌ها حفظ کنند که:

$$\int \frac{(ax+b)^n}{(cx+d)^{n+2}}dx = \frac{1}{(n+1)(ad-bc)}(\frac{ax+b}{cx+d})^{n+1}+C$$

۱۰۸- گزینه‌ی «۳»

اگر $u=\sin x$ باشد $u'=\cos x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 10\cos x\sin^4 x\,dx$$

پس:

$$\int 10u'u^4dx = 10(\frac{u^5}{5}) = 2u^5 = 2\sin^5 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(1-0) = 2$$

۱۰۹- گزینه‌ی «۳»

$$\int\frac{2\sin x}{\cos^3 x}dx = \int\frac{2\sin x}{\cos x}\times\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int 2\underbrace{\tan x}_{u}\underbrace{(1+\tan^2 x)}_{u'}dx = u^2+C = \tan^2 x+C$$

خب حالا این کدام گزینه است؟ کاری ندارد، ببینید:

$$\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} = \frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x} = \tan^2 x$$

۱۱۰ - گزینه‌ی «۱» در مزدوج مخرج، ضرب و تقسیم کنیم ببینیم چی می‌شود:

$$\int\frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}\times\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2+1}}dx = \int\frac{x^2-x\sqrt{x^2+1}}{-1}dx = \int(x\sqrt{x^2+1}-x^2)dx = \int x\sqrt{x^2+1}dx - \int x^2dx$$

حالا x^2+1 را بگیریم u، مشتقش می‌شود $u'=2x$ که تقریباً داریم:

$$\frac{1}{2}\int\underbrace{2x}_{u'}\sqrt{\underbrace{x^2+1}_{u}}\,dx - \frac{x^3}{3}+C = \frac{1}{2}\int u'\sqrt{u}dx - \frac{x^3}{3}+C = \frac{1}{2}\times\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^3}{3}+C = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}+C = \frac{1}{3}((x^2+1)\sqrt{x^2+1}-x^3)+C$$

پس انتگرال از ۰ تا ۱ می‌شود:

$$F(1)-F(0) = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)-\frac{1}{3}(1) = \frac{2\sqrt{2}-2}{3}$$

۱۱۱- گزینه‌ی «۳»

خب $G(2)$ که می‌شود صفر: $G(2)=\int_2^2\frac{\cos\pi t}{1+t^2}dt = 0$

برای G' هم می‌دانیم مشتق انتگرال $\int_a^x$، می‌شود تابع توی انتگرال، پس:

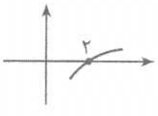
$$G'(x) = \frac{\cos\pi x}{1+x^2} \Longrightarrow G'(2) = \frac{\cos 2\pi}{1+4} = \frac{1}{5}$$

مشتق دوم هم می‌شود:

$$G''(x) = \frac{-\pi\sin\pi x(1+x^2)-2x\cos\pi x}{(1+x^2)^2} \Longrightarrow G''(2) = \frac{0-4(1)}{(1+4)^2} = \frac{-4}{25}$$

$$\Longrightarrow G(2)+G'(2)+G''(2) = 0+\frac{1}{5}-\frac{4}{25} = \frac{1}{25} = 0/04$$

اشاره شکل نمودار G در $x=2$ این‌طوری است:


(صعودی و تقعر به پایین)

۱۱۲- گزینه‌ی «۴»

اول مشتق:

$$y = x^2F(x)+\frac{F(x^2)}{x} \Longrightarrow y' = 2xF(x)+F'(x)x^2+\frac{2xF'(x^2)x-1F(x^2)}{x^2} \xrightarrow{x=1} y'(1) = 2F(1)+F'(1)+\frac{2F'(1)-F(1)}{1}$$

$F(1)$ که صفر است، $F'(1)$ هم می‌شود: $F'(x)=\frac{e^{x^2}}{1+x^4} \Longrightarrow F'(1)=\frac{e}{2}$؛ پس جواب:

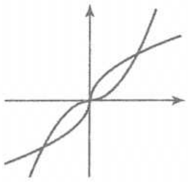
$$2\times 0+\frac{e}{2}+2(\frac{e}{2})-0 = \frac{3e}{2}$$

۱۱۳- گزینه‌ی «۴»

خب اگر x را بگذاریم ۱، می‌شود $\frac{0}{0}$، پس Hop می‌گیریم:

$$\xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\frac{\sqrt{x}}{1+x^3}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{16}$$

۱۱۴- گزینه‌ی «۱» اولاً از شکل‌ها بدیهی است که n زوج بوده، چون برای n فرد به شکل لُر درمی‌آید:



حالا مساحت: باید از تفاضل دو تابع انتگرال بگیریم. معلومه که مساحت هم از ۰ تا ۱ بوده، پس:

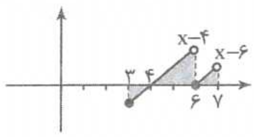
$$\int_0^1(\sqrt[n]{x}-x^n)dx=\int_0^1(x^{\frac{1}{n}}-x^n)dx=\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1=\frac{1}{\frac{1}{n}+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n-1}{n+1}$$

عشق فرمول‌ها حفظ کنند که برای n فرد جواب می‌شود $\frac{2(n-1)}{n+1}$.

۱۱۵- گزینه‌ی «۲» خب باید از شر براکت خلاص شویم پس می‌نویسیم:

$$\int_3^4(x-3+\sin\frac{3\pi}{2})dx+\int_4^5(x-4+\sin\frac{4\pi}{2})dx+\int_5^6(x-5+\sin\frac{5\pi}{2})dx+\int_6^7(x-6+\sin\frac{6\pi}{2})dx$$

$$=\int_3^4(x-4)dx+\int_4^5(x-4)dx+\int_5^6(x-4)dx+\int_6^7(x-6)dx=\int_3^6(x-4)dx+\int_6^7(x-6)dx$$



این انتگرال‌ها را می‌توانیم با قضیه‌ی اساسی دوم هم حساب کنیم، اما شکل بکشیم ببینیم:

مساحت مثلث زیر محور افقی (از ۳ تا ۴) با مساحت بالای محور (از ۶ تا ۷) ساده می‌شوند،

پس می‌ماند مثلث از ۴ تا ۶ که مساحتش می‌شود $\frac{2\times 2}{2}$ یعنی ۲.

۱۱۶- گزینه‌ی «۳» خب باید قسمت قسمت کنیم:

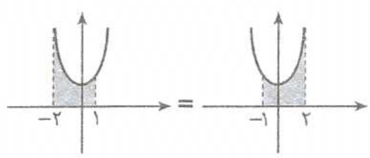
$$=\int_0^1(x^2-[x^2])dx+\int_1^{\sqrt{2}}(x^2-[x^2])dx+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}(x^2-[x^2])dx+\int_{\sqrt{3}}^{2}(x^2-[x^2])dx$$

$$=\int_0^1 x^2dx+\int_1^{\sqrt{2}}(x^2-1)dx+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}(x^2-2)dx+\int_{\sqrt{3}}^{2}(x^2-3)dx$$

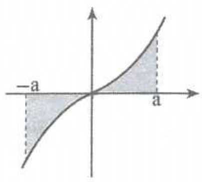
$$=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2-(1(\sqrt{2}-1)+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+3(2-\sqrt{3}))=\frac{8}{3}-(5-\sqrt{2}-\sqrt{3})=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\frac{7}{3}$$

۱۱۷- گزینه‌ی «۳» غُر نزنید، می‌رویم سراغ گزینه‌ها:

۱ درست است. چون e^{x^2} نسبت به محور yها تقارن دارد (x را به x− تبدیل کنیم تغییری نمی‌کند) پس انتگرال آن از ۲− تا ۱ با انتگرالش از ۱− تا ۲ فرق نداره.

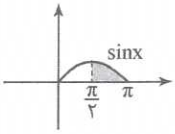


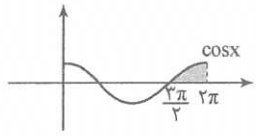
۲ هم درست است. $\log\frac{1-x}{1+x}$ نسبت به مبدأ مختصات تقارن دارد، چون اگر x را به x− و y را به y− تبدیل کنیم خودش می‌شود. وقتی تابع نسبت به مبدأ تقارن دارد انتگرال از a− تا a می‌شود صفر، مثلاً:



۳ درست نیست. جواب $e^{\frac{-x^2}{2}}$ همیشه مثبت است پس انتگرالش صفر نمی‌شود. کتاب درسی ریاضی عمومی (۱ و ۲) در صفحه‌ی ۷۹، این ضابطه را به‌صورت $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ برای توزیع طبیعی (نرمال) داده است، البته نگفته که $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}dx=1$.

۴ هم درسته. چون sin از $\frac{\pi}{2}$ تا π مثل cos از $\frac{3\pi}{2}$ تا 2π است. نمودارها را ببینید:

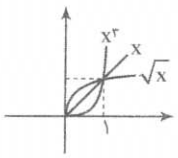


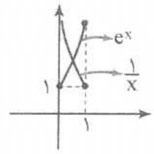


خب این دوتا شکل یکی هستند، به توان ۷ هم برسند همین‌طور.

۱۱۸- گزینه‌ی «۱»

خب چون همه‌ی انتگرال را از صفر تا یک می‌خواهیم، تابع‌های توی انتگرال را مقایسه می‌کنیم:





خب تابلوئه که در فاصله‌ی صفر و یک، $\sqrt{x} > x > x^{۳}$ پس $A > B > C$. اما بین D و E، تابع $\frac{۱}{x}$ از ∞ می‌آید پایین و مساحتش از ۰ تا ۱ کران‌دار نیست (یعنی می‌شود $+\infty$) پس $D > E$. اگر عددها را هم دوست دارید: $A=\frac{۲}{۳}$، $B=\frac{۱}{۲}$، $C=\frac{۱}{۴}$، $D=+\infty$ و $E=e-۱\simeq ۱/۷۲$.

اشاره خیلی جاها میگن تابع تحت انتگرال، حالا توی انتگرال یا تحت انتگرال مهم نیست، اصلاً integrand، شما هر چی خواستید ترجمه کنید!

۱۱۹- گزینه‌ی «۳»

باز هم باید تفکیک کنیم:

$$\int_{۱}^{۲}\log ۱\,dx+\int_{۲}^{۳}\log ۲\,dx+\cdots+\int_{n-۱}^{n}\log(n-۱)\,dx=$$

گفتیم $\int_a^b k\,dx$ می‌شود $k(b-a)$، یعنی عدد ضرب در طول بازه:

$$\log ۱(۲-۱)+\log ۲(۳-۲)+\cdots+\log(n-۱)(n-(n-۱))=\log ۱+\log ۲+\cdots+\log(n-۱)=\log(n-۱)!$$

۱۲۰- گزینه‌ی «۳»

$$y'=(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))\xrightarrow{x=۵}y'(۵)=\frac{۱}{۲\sqrt{۵-۱}}\times f'(۲)=\frac{۱}{۴}f'(۲)$$

برای f' هم می‌دانیم:

$$f'(x)=\frac{\cos^{۶}\pi x}{۸+\sqrt{۲x}}\Longrightarrow f'(۲)=\frac{۱}{۱۰}$$

پس جواب می‌شود $\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۱}{۴}$ یعنی $\frac{۱}{۴۰}$.

۱۲۱- گزینه‌ی «۱» خب $f(۱)$ که صفر است. برای مشتق هم داریم:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}}{۱+x^{۲}}\Longrightarrow f'(۱)=\frac{۱}{۲}\Longrightarrow f'(۱)>۰ \quad \text{و} \quad f''(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۱+x^{۲})-۲x\sqrt{x}}{(۱+x^{۲})^{۲}}\Longrightarrow f''(۱)=\frac{-۱}{۴}<۰$$

پس صعودی و تقعر به پایین. حالا اگر گفته بود معادله خط مماس بر منحنی $f(x)$ در $x=۱$، چی می‌شد:

مماس: $y-۰=\frac{۱}{۲}(x-۱)$

قائم: $y-۰=-۲(x-۱)$

۱۲۲- گزینه‌ی «۱»

از دو طرف مشتق بگیریم:

$$۲xf(x^{۲})=۱\sin\pi x+\pi x\cos\pi x\xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}}۲(\tfrac{۱}{۲})f(\tfrac{۱}{۴})=\sin\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi}{۲}\Longrightarrow f(\tfrac{۱}{۴})=۱$$

خاطره مشتق $\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)\,dt$ می‌شود: $v'f(v)-u'f(u)$

۱۲۳- گزینه‌ی «۳» خب کاری ندارد!

$$\int_{-۲}^{۰}f'(x)dx=f(x)\Big|_{-۲}^{۰}=f(۰)-f(-۲)=۱-۰=۱ \quad \text{و} \quad \int_{۳}^{۵}f''(x)dx=f'(x)\Big|_{۳}^{۵}=f'(۵)-f'(۳)=۳-۰=۳$$

اشاره چون خط $y=۳x-۸$ در نقطه‌ی $x=۵$ بر تابع مماس است پس $f'(۵)=۳$؛ $f'(۳)$ هم صفر است چون در $x=۳$ بر محور افقی مماس‌شده است.

۱۲۴- گزینه‌ی «۳»

$$y''=۶x+۱\Longrightarrow y'=\int(۶x+۱)dx=۳x^{۲}+x+C$$

حالا باید $y'(-۱)$ بشود (-۱)، چون بر نیم‌ساز ناحیه‌ی دوم $(y=-x)$ مماس شده است. پس:

$$۳(-۱)^{۲}+(-۱)+C=-۱\Longrightarrow C=-۳$$

$$y=\int y'dx=\int(۳x^{۲}+x-۳)dx=x^{۳}+\frac{x^{۲}}{۲}-۳x+K$$

و باید K را طوری انتخاب کنیم که $f(-۱)=۱$ بشود (باز هم چون بر $y=-x$ مماس شده) پس داریم: $f(-۱)=-۱+\frac{۱}{۲}+۳+K=۱ \Longrightarrow K=-\frac{۳}{۲}$

پس محور عرض‌ها را در نقطه‌ی $(۰,-\frac{۳}{۲})$ قطع می‌کند.

۱۲۵- گزینه‌ی «۱»

این $y'\sqrt{x}+\frac{y}{۲\sqrt{x}}$، مشتق $y\sqrt{x}$ است. پس:

$$(y\sqrt{x})'=۳x^۲ \Longrightarrow y\sqrt{x}=x^۳+C \Longrightarrow y=\frac{x^۳}{\sqrt{x}}+\frac{C}{\sqrt{x}}$$

حالا گفته از نقطه‌ی $(۴,۱)$ بگذرد یعنی:

$$\frac{۶۴}{۲}+\frac{C}{۲}=۱ \Longrightarrow C=-۶۲ \Longrightarrow f(۱)=\frac{۱^۳-۶۲}{\sqrt{۱}}=-۶۱$$

۱۲۶- گزینه‌ی «۱» سؤال جالبی است.

چون $f'(x^۲)$ شده $x^۳$ پس $f'(t)=t^{\frac{۳}{۲}}$ بنابراین $f(t)=\int t^{\frac{۳}{۲}}dt=\frac{۲}{۵}t^{\frac{۵}{۲}}+C$ ،

حالا گفته $f(۱)=\frac{۲}{۵}$ پس C می‌شود صفر و داریم:

$$f(۳)=\frac{۲}{۵}\times ۳^{\frac{۵}{۲}}=\frac{۲}{۵}\times ۹\sqrt{۳}=\frac{۱۸\sqrt{۳}}{۵}$$

یه جور دیگه از $f'(x^۲)$ که نمی‌شود انتگرال گرفت. اول دو طرف را در $۲x$ ضرب کنیم:

$$۲xf'(x^۲)=۲x^۴$$

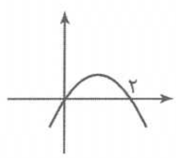
حالا انتگرال می‌گیریم:

$$\int ۲xf'(x^۲)dx=\int ۲x^۴dx \Longrightarrow f(x^۲)=\frac{۲}{۵}x^۵+C$$

$$f(۱)=\frac{۲}{۵} \Longrightarrow C=۰$$

حالا برای $f(۳)$ باید x را بگذاریم $\sqrt{۳}$ و نتیجه همان است.

۱۲۷- گزینه‌ی «۴»



تابع $۲x-x^۲$ این شکلی است:

مقدار مساحت وقتی ماکسیمم است که همه‌ی قسمت مثبت (بالای محور افقی) را بگیریم و اصلاً قسمت منفی را نگیریم یعنی در بازه‌ی $(۰,۲)$. پس $a+b=۲$

۱۲۸- گزینه‌ی «۳»

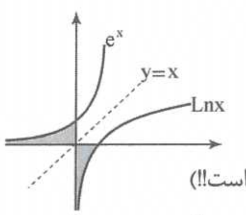
$$f''(x)=۱۲x \xrightarrow{\int} f'(x)=۶x^۲+C$$

چون در $x=۱$، شیب مماس ۳ است، پس $f'(۱)$ باید ۳ باشد یعنی $C=-۳$.

$$f'(x)=۶x^۲-۳ \xrightarrow{\int} f(x)=۲x^۳-۳x+k$$

حالا چون عرض نقطه‌ی $x=۱$، برابر -۲ باید باشد پس $k=-۱$ و داریم $f(x)=۲x^۳-۳x-۱$ حالا $f(۳)=۲(۳)^۳-۳(۳)-۱=۵۴-۱۰=۴۴$.

۱۲۹- گزینه‌ی «۱»



خب ما جواب $\int Ln\,x\,dx$ را بلد نیستیم[۱]، پس باید یه کار دیگر بکنیم: $Ln\,x$ از کجا می‌آمد؟ $Ln\,x$ معکوس e^x بود، یعنی e^x را نسبت به نیمساز ربع ۱ و ۳ آینه کردیم که $Ln\,x$ به‌دست آمد. حالا از e^x کمک می‌گیریم:

الآن دو تا مساحتی که سایه زدیم با هم مساوی‌اند. (چون در آینه تخت (در این‌جا $y=x$) طول تصویر با جسم مساوی است!!)

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{۰}e^xdx=\left|\int_{۰}^{۱}Ln\,x\,dx\right|=e^x\Big|_{-\infty}^{۰}=e^۰-e^{-\infty}=۱-۰=۱$$

چون گفته بود «مساحت» از انتگرال قدرمطلق گرفتیم که مثبت بشود!

۱۳۰- گزینه‌ی «۳»

خب $۱+\tan^۲x$ را می‌نویسیم $\frac{۱}{\cos^۲x}$:

$$\int_{۱}^{۴}\frac{dx}{(۱+\tan^۲x)\sqrt{x}}=\int_{۱}^{۴}\frac{\cos^۲x}{\sqrt{x}}dx$$

حالا می‌دانیم $\int_{۱}^{۴}\frac{\sin^۲x}{\sqrt{x}}dx=n$ ، اگر با هم جمع کنیم:

$$\int_{۱}^{۴}\frac{\sin^۲x+\cos^۲x}{\sqrt{x}}dx=\int_{۱}^{۴}\frac{۱}{\sqrt{x}}dx=۲\sqrt{x}\Big|_{۱}^{۴}=۲$$

پس $\int_{۱}^{۴}\frac{\cos^۲x}{\sqrt{x}}dx+n=۲$ یعنی $\int_{۱}^{۴}\frac{\cos^۲x}{\sqrt{x}}dx=۲-n$.

۱- البته ما بلدیم $\int Ln\,xdx=x\,Ln\,x-x+C$ ، قبول ندارید امتحان کنید!

۱۳۱- گزینه‌ی «۴»

این که کاری ندارد:

$$V=\pi\int_0^h\left(a^2+2a\frac{(b-a)}{h}x+\frac{(b-a)^2}{h^2}x^2\right)dx$$

$$=\pi\left(a^2x+\frac{a(b-a)}{h}x^2+\frac{(b-a)^2}{h^2}\times\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^h=\pi\left(a^2h+(ba-a^2)h+\frac{(b-a)^2}{3}h\right)=\pi h\left(a^2+ba-a^2+\frac{b^2-2ab+a^2}{3}\right)=\frac{\pi h}{3}(a^2+b^2+ab)$$

چتربازی برای $a=b$ باید می‌شد πa^2h.

۱۳۲- گزینه‌ی «۳»

خب بیش‌ترین انتگرال وقتی است که تمام مساحت بالای محور افقی را بگیریم که مثبت است.

پس $\int_{-2}^{2}f(x)dx$ بیش‌ترین مقدار را دارد که می‌شود $1\times1+\frac{2\times1}{2}$ یعنی ۲. کم‌ترین مقدار هم زمانی است که تمام مساحت زیر محور افقی را بگیریم.

پس $\int_{-4}^{-2}f(x)dx$ که می‌شود $-\frac{2\times1}{2}=-1$ حداقل مقدار است. بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار ۳ واحد اختلاف دارند.

۱۳۳- گزینه‌ی «۴»

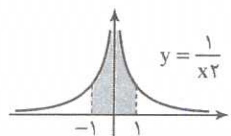
اول نامعین را حساب کنیم:

$$\int\frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx=\frac{x^{-1}}{-1}=-\frac{1}{x}$$

حالا داریم:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\frac{-1}{x}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{-1}{1}-\left(\frac{-1}{-1}\right)=-2$$

اشاره این غلطه! چون $\frac{1}{x^2}$ در نقطه به طول صفر پیوسته نیست، مجانب قائم دارد. حالا راه درست چطوری است؟ ببینید:



$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx \quad \text{یا} \quad \int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=2\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx$$

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\frac{-1}{x}\Bigg|_{0}^{1}=-\frac{1}{1}-\left(\frac{-1}{0^+}\right)=-1+\infty=+\infty$$

پس جواب می‌شود $+\infty$. البته از شکل هم تابلو است.

۱۳۴- گزینه‌ی «۳»

خب راه کنترل درستی یک انتگرال نامعین، این طوری است که از جواب مشتق بگیریم. باید همان تابع تحت انتگرال بشود

۱ $x\mathrm{Ln}x-x+C\xrightarrow{\text{مشتق}}1\mathrm{Ln}x+\left(\frac{1}{x}\right)x-1=\mathrm{Ln}x$ ✓

۲ $\sin x-x\cos x+C\xrightarrow{\text{مشتق}}\cos x-(1\cos x-x\sin x)=x\sin x$ ✓

۳ $\mathrm{Ln}|\cos x|+C\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$ ✗

۴ $\mathrm{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})+C\xrightarrow{\text{مشتق}}\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ ✓

پس ۳ تاشون درست بودند.

۱۳۵- گزینه‌ی «۱»

خب ما که بلدیم. این انتگرال‌ها فقط به دردِ مشتق گرفتن می‌خورند: $\xrightarrow{\text{مشتق}}f(x)=3x^2$

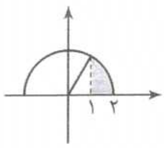
اما c را از کجا باید بیاریم؟ آهان، در تساوی $\int_c^x f(t)dt=x^3+1$ اگر به‌جای x بگذاریم c ، طرف چپ می‌شود صفر. پس $c^3+1=0$ یعنی $c=-1$.

حالا: $f(c^2+1)=f((-1)^2+1)=f(2)=3(2)^2=12$

۱۳۶- گزینه‌ی «۳»

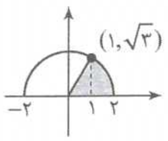
خب نترسید. اول $F'(x)$: مشتق انتگرال می‌شد تابع داخلش (به‌جای t هم می‌گذاریم x) $F'(x)=\int_1^{2x}\sqrt{u^3+8}\,du$

حالا $F''(x)$: $F''(x)=2\sqrt{(2x)^3+8}$ ، گفته $F''(0)$ که می‌شود $4\sqrt{2}$



۱۳۷- گزینه‌ی «۳» اول شکل را ببینید:

(گفتیم $y=\sqrt{4-x^2}$ یک نیم‌دایره است) خب مساحت این قسمت هاشور زده را از کجا بیاوریم؟ آهان، کتاب درسی ریاضی (۳)، توی اثبات $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ گفته بود که مساحت قطاع x رادیان از دایره می‌شود $\frac{1}{2}R^2x$.



پس مساحت قطاع را داریم:

$$y=\sqrt{4-x^2}\xrightarrow{x=1}y=\sqrt{3}\Longrightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

$$S=\frac{1}{2}R^2x=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

مساحت مثلث هم می‌شود $\frac{1\times\sqrt{3}}{2}$. پس مساحت مورد نظر ما برابر است با $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ یا $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{6}$.

۱۳۸- گزینه‌ی «۱»

خب $\int g''(x)dx$ می‌شود $g'(x)$. پس داریم:

$$\int_{-1}^{2}g''(x)dx=g'(x)\Big|_{-1}^{2}=g'(2)-g'(-1)$$

اگر از تعریف $g(x)$ هم مشتق بگیریم داریم:

$$g'(x)=\sqrt{x^3+1}$$

پس جواب می‌شود:

$$\sqrt{2^3+1}-\sqrt{(-1)^3+1}=\sqrt{9}=3$$

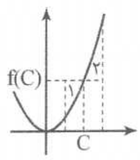
۱۳۹- گزینه‌ی «۲» خب ما که این انتگرال را بلد نیستیم. اما قیافه‌اش داد می‌زند که باید ازش مشتق بگیریم:

$$f'(x)=(1+\tan^2x)\frac{1}{\tan^2x+\tan^4x}-(-(1+\cot^2x))\frac{1}{\cot^2x+\cot^4x}=\frac{1}{\tan^2x}+\frac{1}{\cot^2x}=\cot^2x+\tan^2x$$

حالا $f(x)$ می‌شود انتگرالِ $f'(x)$، پس داریم:

$$f(x)=\int(\tan^2x+\cot^2x)dx=\int((\tan^2x+1)+(\cot^2x+1)-2)dx=\tan x-\cot x-2x+C$$

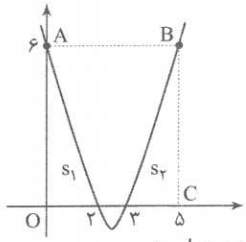
اما از $\int_{\cot x}^{\tan x}\frac{1}{t^2+t^4}dt$ تابلو است که $f(\frac{\pi}{4})=0$ پس $C=\frac{\pi}{2}$.



۱۴۰- گزینه‌ی «۳» خب ببینیم چه اتفاقی افتاده:

خب مساحت ۱ و ۲ با هم مساوی است. پس مساحت زیر سهمی $y=x^2$ باید با مساحت زیرخط افقی $y=f(C)$ یکی باشد.

$\int_1^2 f(c)dx=c=\int_1^2x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{7}{3}$ پس $f(c)=c^2=\frac{7}{3}$ یعنی $C=\sqrt{\frac{7}{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$.



۱۴۱- گزینه‌ی «۲» اول نقطه‌ها را پیدا کنیم:

محل تقاطع با محور yها، نقطه‌ی $A(0,6)$ است.

عرض نقطه‌ی B هم باید ۶ باشد پس:

$$y=x^2-5x+6=6\Longrightarrow x^2-5x=0\Longrightarrow x=0,5$$

یعنی طول آن ۵ بوده. دو نقطه‌ی تقاطع با محور افقی هم $x=2,3$ هستند:

$$y=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)=0\Longrightarrow x=2,3$$

حالا برای محاسبه‌ی مساحت موردنظر، باید از مستطیل OABC دو قسمت s_1 و s_2 را کم کنیم اما به دلیل تقارن، $s_1=s_2$ است.

داریم:

$$s_1=s_2=\int_0^2(x^2-5x+6)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x\Big|_0^2=\frac{8}{3}-10+12=\frac{14}{3}$$

و مساحت هاشورزده برابر است با:

$$6\times 5-2\times\frac{14}{3}=\frac{62}{3}$$

سوتی

- *شاهکار کتاب درسی، انتگرال از تابع $\frac{1}{x^2+1}$ است که به آرک تانژانت می‌رسد. امّا در ریاضی تجربی و فصل مشتق، اصلاً Arc tan x و مشتق آن مطرح نمی‌شود! نکته‌ی جالب‌تر این است که در جواب، آرک تانژانت را با حرف کوچک، یعنی به‌صورت arctan x نوشته که طبق متن ریاضی (۲)، همه‌ی کمان‌ها را بیان می‌کند. پس arctan x اصلاً تابع نیست و جای‌گذاری $\frac{\pi}{4}$ = arctan1 می‌تواند نادرست باشد.*
- *در محاسبه‌ی سطح محصور، محل قدرمطلق در فرمول خیلی مهم است که در برخی منابع به آن دقت نشده بود.*
- *خیلی‌ها هم که به یاد نظام قدیم، کلّ دیفرانسیل‌گیری و تغییر متغیر را گفته بودند! یاد گذشته‌ها به‌خیر!*