تمرین‌های ریاضی عمومی ۲

گردآوری، تألیف و تنظیم

رسول کاظمی

استادیار دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه کاشان

فهرست مطالب

فصل ۱ بردارها، خط و صفحه ۱

۱-۱ تمرینات تشریحی ۱
۱-۲ تمرینات تستی ۲

فصل ۲ توابع برداری و رویه‌ها ۵

۲-۱ تمرینات تشریحی ۵
۲-۲ تمرینات تستی ۹

فصل ۳ توابع چند متغیره ۱۹

۳-۱ تمرینات تشریحی ۱۹
۳-۲ تمرینات تستی ۲۷

فصل ۴ انتگرال‌های چندگانه ۳۳

۴-۱ تمرینات تشریحی ۳۳
۴-۲ تمرینات تستی ۳۶

فصل ۵ آنالیز برداری ۴۱

۵-۱ تمرینات تشریحی ۴۱
۵-۲ تمرینات تستی ۴۶

فصل ۱

بردارها، خط و صفحه

۱-۱ تمرینات تشریحی

۱. فرض کنید $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}$ دو بردار یکه بوده که زاویهٔ بین آنها $\theta = \frac{\pi}{۳}$ باشد. مطلوب است تعیین مساحت مثلث ساخته شده روی دو بردار $۲\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

۲. مطلوب است حجم متوازی‌السطوح به رئوس

$$S(۲,۱,۰),\ R(۲,۱,-۱),\ Q(۰,۰,۱),\ P(۱,۰,-۱).$$

۳. مختصات دکارتی نقطهٔ برخورد خط $\frac{۲x-۱}{۲} = \frac{y+۳}{۳} = \frac{z-۱}{۵}$ و صفحهٔ $x - y - z = -۱$ چیست؟

۴. دوخط متنافر $L_۱$ و $L_۲$ به معادلات زیر مفروضند. معادلهٔ صفحه‌ای را به دست آورید که هیچ‌یک از این دو خط را قطع نکرده به فاصلهٔ مساوی از دو خط قرار گرفته باشد.

$$L_۱ = \begin{cases} x = t+۱ \\ y = ۲ \\ z = -t+۲ \end{cases} \qquad L_۲ = \begin{cases} x = ۲t-۳ \\ y = t+۱ \\ z = -t \end{cases}$$

۵. فرض کنید $\overrightarrow{a}$ ، $\overrightarrow{b}$ و $\overrightarrow{c}$ سه بردار غیر واقع بر یک صفحه و با رأس مشترک مبدأ مختصات و نقاط انتهایی A ، B و C باشند. اگر π صفحه‌ای شامل سه نقطهٔ A ،

B و C باشد، نشان دهید بردار $\lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) + \mu(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) + \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$ که در آن μ و λ اعداد حقیقی ثابت هستند، بر صفحهٔ π عمود است اگر و تنها اگر $\lambda = \mu = ۱$.

۶. تصویر نقطه‌ی $P(۴, ۲, -۲)$ را بر خط L به معادلات پارامتری

$$L = \begin{cases} x &= ۳ - ۲t \\ y &= ۶t \\ z &= -۱ + ۹t \end{cases}$$

به دست آورید.

۷. فصل مشترک دو صفحه‌ی $۲x - ۳y + ۴z - ۱ = ۰$ و $x + ۲y - z + ۳ = ۰$ را به دست آورید.

۸. صفحه‌ی گذرنده از سه نقطه‌ی $P_۱(۲, -۱, ۳)$، $P_۲(۱, ۲, ۲)$ و $P_۳(-۲, ۱, ۱)$ را بیابید.

۹. زاویه‌ی بین صفحات $۶x + ۶y - ۳z + ۵ = ۰$ و $x - ۲y + ۲z - ۴ = ۰$ را به دست آورید.

۱۰. تصویر نقطه‌ی $(۲, ۶, -۱)$ را بر صفحه‌ی $۳x - ۴y + ۱۲z - ۲۲ = ۰$ به دست آورید.

۱-۲ تمرینات تستی

۱۱. معادله صفحه‌ای که شامل نقاط $P(۱, ۰, ۱)$ ، $Q(۰, -۱, ۱)$ و $R(۱, ۰, ۰)$ باشد کدام است؟

الف) $x - y = ۱$ ب) $x + y - z = ۱$ ج) $x + y + z = ۱$ د) $x + y = ۱$

۱۲. فرض کنید $P(۲, ۰, -۱)$ ، $Q(۴, ۱, ۰)$ ، $R(۳, -۱, ۱)$ و $S(۲, -۲, ۲)$ چهار نقطه در $\mathbb{R}^۳$ باشند. حجم متوازی السطوحی که توسط بردارهای PQ ، PR و PS ساخته می شود کدام است؟

الف) ۳ ب) صفر ج) ۲ د) ۱

۱۳. فرض کنید $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$ دو بردار یکه‌اند که زاویهٔ بین آنها $\frac{\pi}{۴}$ است، مطلوبست محاسبهٔ مساحت مثلث ساخته شده توسط دو بردار $\overrightarrow{a} = ۲\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ و $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{u} + ۳\overrightarrow{v}$.

الف) $\frac{۳}{۴}$ ب) $\frac{۵}{۴}\sqrt{۲}$ ج) $\frac{۵}{۴}$ د) $\frac{۵}{۴}\sqrt{۲}$

۱۴. خطوط $L_۱ = \begin{cases} x = ۱ \\ y = t+۱ \\ z = t-۱ \end{cases}$ و $L_۲ = \begin{cases} x+۲z = ۲ \\ y = ۲ \end{cases}$ مفروضند.
فاصلهٔ بین دو خط $L_۱$ و $L_۲$ کدام است؟

الف) ۰ ب) $\frac{۵}{۳}$ ج) $\frac{۵}{۹}$ د) $\frac{۷}{۳}$

۱۵. فاصلهٔ نقطهٔ $P(۱,۲,۱)$ از صفحه $۲x+y+۲z=۲$ کدام است؟

الف) ۲ ب) صفر ج) $\frac{۴}{۳}$ د) $\frac{۷}{۳}$

فصل ۲

توابع برداری و رویه‌ها

۲-۱ تمرینات تشریحی

۱. خم C به معادله‌ی برداری

$$r(t) = \cosh t\,\overrightarrow{i} + \sinh t\,\overrightarrow{j} + (۱+t)\,\overrightarrow{k}$$

مفروض است. انحنای این خم و صفحه‌ی بوسان آن را در نقطه‌ی نظیر $t = ۰$ پیدا کنید.

۲. نشان دهید کلیه‌ی صفحه‌های قائم بر خم

$$r(t) = a\sin^۲ t\,\overrightarrow{i} + a\sin t\cos t\,\overrightarrow{j} + a\cos t\,\overrightarrow{k}$$

از مبدا مختصات می‌گذرد. هم‌چنین ثابت کنید خم فوق بر یک کره واقع است.

۳. خم C به معادله‌ی برداری

$$r(t) = e^t \sin ۲t\,\overrightarrow{i} + e^t \cos ۲t\,\overrightarrow{j} + ۲e^t\,\overrightarrow{k}$$

را در نظر بگیرید.
الف) معادله‌ی صفحه‌ی بوسان و انحنای منحنی را به ازای نقطه‌ی نظیر $t = ۰$ را به دست آورید.
ب) طول قوس منحنی C را برای $۰ \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{۴}$ محاسبه کنید.

۴. انحنای منحنی C حاصل از تلاقی رویه های $x^۲-y^۲+z^۲=۱$ و $y^۲-۲x+z=۰$ را در نقطه‌ی $(۱,۱,۱)$ بیابید.

۵. ماکزیمم انحنای منحنی $y=e^x$ را به دست آورید.

۶. نشان دهید شعاع انحنای $y=\cosh x$ در نقطه‌ی $P(x,y)$ برابر $y^۲$ است.

۷. در چه نقطه‌ای از سهمی $x^۲=۸y$ شعاع انحنای منحنی برابر $\frac{۱۲۵}{۱۶}$ است؟

۸. منحنی به معادله‌ی $y=a\cosh(\frac{x}{a}),\ a>۰$ مفروض است.
الف) ثابت کنید انحنا در هر نقطه‌ی (x,y) واقع بر این خم برابر $\frac{a}{y^۲}$ است..
ب) ثابت کنید انحنای این منحنی در نقطه‌ی $(۰,a)$ ماکزیمم مطلق است.

۹. ماکزیمم و مینیمم انحنای بیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ را بیابید و نقاطی که اکسترمم های انحنا در آن واقع می‌شوند را مشخص کنید.

۱۰. شعاع انحنای منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=a$ را در هر نقطه واقع بر آن بیابید.

۱۱. مولفه‌های مماس و قائم a_N و a_T، انحنا و معادله‌ی صفحه‌ی بوسان خم نظیر تابع برداری زیر را بیابید.

$$r(t)=(t+\frac{۱}{۳}t^۳)\overrightarrow{i}+(t-\frac{۱}{۳}t^۳)\overrightarrow{j}+t^۲\overrightarrow{k}$$

۱۲. نشان دهید که خم های به معادلات

$$r(t)=e^t\overrightarrow{i}+e^{۲t}\overrightarrow{j}+(۱-e^{-t})\overrightarrow{k}$$

و

$$r(\theta)=(۱-\theta)\overrightarrow{i}+(\cos\theta)\overrightarrow{j}+(\sin\theta)\overrightarrow{k}$$

در نقطهٔ $P=(۱,۱,۰)$ متقاطعند و زاویهٔ بین خطوط مماس بر آنها را در این نقطه بدست آورید.

۱۳. یک مارپیچ توسط تابع مکان

$$\overrightarrow{r(t)}=(a\cos\omega t)\overrightarrow{i}+(a\sin\omega t)\overrightarrow{j}+(b\omega t)\overrightarrow{k}$$

توصیف می‌شود که ω, b, a اعداد ثابت و مثبت هستند.
الف) مطلوب است محاسبهٔ شعاع انحنای خم در یک نقطهٔ دلخواه.
ب) مطلوب است محاسبهٔ معادلهٔ صفحهٔ بوسان در $t = ۰$.
ج) مطلوب است محاسبهٔ معادلهٔ صفحهٔ قائم در $t = \frac{\pi}{۲}$.

۱۴. منحنی $\gamma : r(t) = (t\cos t, t\sin t, e^t)$ را در نظر بگیرید.
الف) معادلهٔ رویه‌ای که γ بر آن واقع شده است را بیابید و رسم کنید.
ب) معادلهٔ خم حاصل از تصویر قائم γ را بر صفحهٔ xoy به دست آورید.

۱۵. خم C توسط تابع مکان

$$\overrightarrow{r(t)} = (\sin t + ۲\cos t)\,\overrightarrow{i} + (\sqrt{۲}(\sin t - \cos t))\,\overrightarrow{j} + (\sqrt{۳}\sin t)\,\overrightarrow{k}$$

توصیف می‌شود.
الف) مطلوب است محاسبهٔ انحنا و شعاع انحنای خم در یک نقطهٔ دلخواه .
ب) مطلوب است محاسبهٔ معادلهٔ صفحهٔ بوسان در $t = ۰$.

۱۶. معادلهٔ صفحهٔ بوسان، صفحهٔ نرمال و کرهٔ بوسان خم داده شده توسط $\overrightarrow{r(t)} = t\,\overrightarrow{i} + t^۲\,\overrightarrow{j} + t^۳\,\overrightarrow{k}$ را در نقطهٔ $(۰,۰,۰)$ واقع بر آن حساب کنید.

۱۷. نقطه‌ای از منحنی $y = \ln x$ را تعیین کنید که دارای بیشترین انحنا باشد.

۱۸. نشان دهید که خم $R(t) = (\ln t)\,\overrightarrow{i} + (t\ln t)\,\overrightarrow{j} + t\,\overrightarrow{k}$ بر رویهٔ

$$xz^۲ - yz + \cos xy = ۱$$

در $P(۰,۰,۱)$ مماس است.

۱۹. خم C که محل تلاقی رویهٔ $x^۲ + y^۲ = ۵$ با صفحهٔ $z = x$ است را در نظر بگیرید و انحنای آنرا در نقطهٔ $P = (۱,۲,۱)$ محاسبه کنید.

۲۰. رویهٔ $S_۱$ به معادلهٔ $z = x^y$ و رویهٔ $S_۲$ به معادلهٔ $xy = e^{z-۱}$ را در نظر بگیرید. معادلهٔ خط مماس بر خم حاصل از تلاقی این دو رویه را در نقطهٔ $P = (۱,۱,۱)$ بدست آورید.

۲۱. فرض کنید C خم حاصل از برخورد سهمیگون $z = (x+۱)^۲ + y^۲$ و صفحهٔ $z = ۲x + ۲$ است. اگر κ_p انحنای خم C در نقطه‌ای چون $p \in C$ باشد، نشان دهید که $\frac{۱}{۵} \leq \kappa_p \leq \sqrt{۵} \quad \forall p \in C$.

۲۲. خم C به معادلهٔ برداری $\overrightarrow{r}(t) = (e^t \sin t)\overrightarrow{i} + e^t \overrightarrow{j} + (e^t \cos t)\overrightarrow{k}$ مفروض است.
الف) بردارهای $\overrightarrow{T}$، $\overrightarrow{N}$ و $\overrightarrow{B}$ را در نقطهٔ $P(۰,۱,۱) \in C$ بدست آورید.
ب) معادلات پارامتری منحنی حاصل از تصویر قائم منحنی C بر صفحهٔ $x - y + ۲z = ۶$ را بدست آورید.

۲۳. اگر C خم به معادلهٔ $\overrightarrow{r}(t) = \cosh t \overrightarrow{i} + \sinh t \overrightarrow{j} + t\overrightarrow{k}$ باشد، مولفه‌های a_T و a_N (مولفه های مماسی و قائم شتاب) و معادلهٔ صفحهٔ بوسان خم را در نقطهٔ $(۱,۰,۰)$ تعیین نمایید.

۲۴. فرض کنید منحنی C' تصویر قائم منحنی C به معادلهٔ برداری $\overrightarrow{r}(t) = e^t \overrightarrow{i} + \sinh t \overrightarrow{j} + \cosh t \overrightarrow{k}$ بر صفحهٔ $\pi : x - y + z = ۳$ است. معادلات پارامتری خم C' را بدست آورید.

۲۵. خم C محل تلاقی صفحهٔ $x + y + z = ۱$ با هذلولیگون دو پارچه به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - z^۲ = -۱$ است. برای نقطهٔ $P = (۰,۰,۱)$ برروی این خم
الف) معادلهٔ خط مماس بر C در نقطهٔ P را بنویسید.
ب) انحنای خم C در نقطهٔ P را بدست آورید.

۲۶. فرض کنید $\overrightarrow{a}$، $\overrightarrow{b}$ و $\overrightarrow{c}$ سه بردار یکهٔ دوبه‌دو متعامد باشند. فرض کنید C منحنی نمایش تابع برداری $\overrightarrow{r}(t) = (\cos t)\overrightarrow{a} + (\sin t)\overrightarrow{b} + t\overrightarrow{c}$ باشد. نشان دهید که انحنای منحنی C در نقاط مختلف مقداری ثابت است.

۲۷. منحنی C حاصل تلاقی دو رویه به معادلات $z = x^۲ - y^۲$ و $y = x^۲$ است. مطلوبست تعیین معادلهٔ خط مماس و صفحهٔ بوسان منحنی C در نقطهٔ $(۱,۱,۰)$ از این منحنی.

۲۸. منحنی C با معادلات پارامتری $x(t) = t - t^۲$ و $y(t) = ۲t + ۴$ و $z(t) = t + t^۲$ مفروض است.
الف) نقطه ای از منحنی C را تعیین کنید که دارای بیشترین مقدار انحنا باشد.
ب) تصویر قائم منحنی C را بر صفحهٔ $x - y + z + ۴ = ۰$ به دست آورید. چه

نتیجه ای می گیرید؟
ج) خطوط مماس بر منحنی C در نقاط مختلف، صفحهٔ $x - y + z + ۴ = ۰$ را در امتداد یک منحنی قطع می کنند. مطلوب است تعیین معادلات پارامتری منحنی اخیر.

۲۹. خم $r(t) = \sqrt{e^{۲t} - ۱}\,\vec{i} + (e^t \sec t)\,\vec{j} + (e^t \tan t)\,\vec{k}$ را در نظر بگیرید.
الف) نشان دهید خم r روی یک رویهٔ درجهٔ ۲ واقع است. معادلهٔ رویه را به دست آورید و آنرا توصیف کنید.
ب) نشان دهید که در هیچ نقطه ای از این خم، خط مماس بر خم، نمی تواند بر صفحهٔ $y = ۰$ عمود باشد.

۳۰. فرض کنید C یک منحنی در صفحهٔ xoy با معادلات پارامتری $x = x(t)$ و $y = y(t)$ باشد که $x(t)$ و $y(t)$ دو بار مشتق پذیر هستند. ثابت کنید انحنای منحنی C از رابطهٔ زیر به دست می آید.

$$k = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^{۲} + y'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

۳۱. فرض کنید C منحنی با تعریف زیر باشد

$$r(t) = (e^t \cos t)\,\vec{i} + (e^t \sin t)\,\vec{j} + (e^t + ۱)\,\vec{k} \qquad (۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi)$$

الف) نقطه ای از C را تعیین کنید که صفحهٔ بوسان در آن نقطه بر صفحهٔ $x - y + z = ۱$ عمود باشد.
ب) نشان دهید تمام خطوط واصل از نقطهٔ $(۰, ۰, ۱)$ به نقاط منحنی C روی یک مخروط قرار دارند.

۲-۲ تمرینات تستی

۳۲. انحنای خم $\gamma : \; y = \tan^{-۱} x$ در نقطهٔ $(۱, \frac{\pi}{۴})$ کدام است؟

الف) $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$ ب) $\frac{۵\sqrt{۵}}{۴}$ ج) $\frac{۴}{\sqrt{۵}}$ د) $\frac{۴}{۵\sqrt{۵}}$

۳۳. خم C به معادلات پارامتری $\begin{cases} x &= 2e^t \sin t \\ y &= 3e^t \cos t \\ z &= e^t \end{cases}$ روی کدام یک از رویه‌های زیر واقع است؟

الف) کره ب) مخروط بیضوی ج) هذلولی‌گون یک پارچه د) سهمیگون

۳۴. در چه نقطه‌ای از خم $\begin{cases} x &= \sin t \\ y &= \cos t \\ z &= -\sin t \end{cases} \quad |t| < \frac{\pi}{2}$ خط مماس بر خم به موازات صفحهٔ $x + y + z = 1$ است؟

الف) $(0, 1, 0)$ ب) $(1, 0, -1)$ ج) $(-1, 0, 1)$ د) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

۳۵. فرض کنید خم C تقاطع دایرهٔ $x^2 + y^2 = 16$ و صفحهٔ $x + y + z = 5$ باشد. انحنای خم C در نقطهٔ $(0, 4, 1)$ کدام است؟

الف) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ب) $\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}$ ج) $\frac{1}{8}\sqrt{\frac{2}{3}}$ د) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

۳۶. طول کمانی از خم به معادلهٔ $\begin{cases} x &= \frac{t^2}{2} \\ y &= \ln t \\ z &= \sqrt{2}t \end{cases}$ بین دو نقطه متناظر با $t = 1$ و $t = 3$ برابر است با:

الف) $4 + \ln 3$ ب) $4 - \ln 3$ ج) $\frac{9}{2} + \ln 3$ د) $\frac{9}{2} - \ln 3$

۳۷. زاویه‌ای که خطوط مماس بر خم $\begin{cases} x &= t^2 \\ y &= t - t^2 \\ z &= t \end{cases}$ در هر نقطه با صفحهٔ $x + y - z = 1$ می‌سازد کدام است؟

الف) π ب) 0 ج) $\frac{\pi}{4}$ د) $\frac{\pi}{2}$

۳۸. معادلهٔ دایرهٔ بوسان خم $y = e^{-x^2}$: γ در نقطهٔ $(0, 1)$ کدام است؟

الف) $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ ب) $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

ج) $x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4}$ د) $(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

۳۹. خم C با معادلات پارامتری $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = ۱ \end{cases}$ مفروض است. طول قوس این خم از مبدا مختصات تا نقطهٔ نظیر t کدام است؟

الف) $\sqrt{۲}(e^t - ۱)$ ب) $\sqrt{۳}(e^t - ۱)$ ج) $\sqrt{۲}e^t - ۱$ د) $\sqrt{۲}e^{۲t} - ۱$

۴۰. معادلهٔ صفحهٔ بوسان‌خم $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = \ln t \\ z = t \end{cases}$ در نقطهٔ $(\frac{۱}{e}, ۰, ۱)$ کدام است؟

الف) $ex - y = \frac{۱}{e}$ ب) $ex + y = ۱$

ج) $ex + y = e$ د) $ex - y = e$

۴۱. خم C به معادلات پارامتری $\begin{cases} x(t) = \sinh t \\ y(t) = \cosh t \\ z(t) = t \end{cases}$ مفروض است. مولفهٔ قائم شتاب در هر نقطهٔ دلخواه کدام است؟

الف) ۱ ب) $\frac{۱}{۲\cosh^۲ t}$ ج) -۱ د) $۲\cosh^۲ t$

۴۲. طول خم C به معادلات پارامتری $x(t) = a\sin t$، $y(t) = a\cos t$ و $z(t) = bt$ (a و b ثابت) در فاصلهٔ $۰ \le t \le ۱$ کدام است؟

الف) a ب) b ج) $a^۲ + b^۲$ د) $\sqrt{a^۲ + b^۲}$

۴۳. خم C به معادلات پارامتری $x(t) = a\sin t$ ، $y(t) = a\cos t$ ($a > ۰$ ثابت) مفروض است. بردار قائم یکهٔ منحنی در نقطهٔ کلی نظیر پارامتر t عبارت است از

الف) $\mathbf{N}(t) = (\sin t)\,\overrightarrow{i} + (\cos t)\,\overrightarrow{j}$

ب) $\mathbf{N}(t) = (-\sin t)\,\overrightarrow{i} + (-\cos t)\,\overrightarrow{j}$

ج) $\mathbf{N}(t) = (\cos t)\,\overrightarrow{i} + (-\sin t)\,\overrightarrow{j}$

د) $\mathbf{N}(t) = (-\cos t)\,\overrightarrow{i} + (\sin t)\,\overrightarrow{j}$

۴۴. فرض کنید $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^۳$ یک تابع برداری مشتق پذیر باشد. اگر اندازهٔ $\mathbf{r}(t)$ مقداری ثابت و مستقل از t باشد آنگاه کدام‌یک از گزینه های زیر در حالت کلی درست است؟

الف) $\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t)=0$ ب) $\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t)=0$

ج) $\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}'(t)=\vec{o}$ د) $\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)=\vec{o}$

۴۵. طول قوس خم C به معادلات پارامتری $x(t)=at-a\sin t$ ، $y(t)=a-a\cos t$ ($a>0$ ثابت) روی بازه $0\le t\le 2\pi$ کدام است؟

الف) $4\pi a$ ب) $8\pi a$ ج) $2\pi\sqrt{3}a$ د) $8a$

۴۶. اگر $\mathbf{r}(t)$ یک تابع برداری مشتقپذیر دلخواه باشد، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر همواره درست است؟

الف) $\|\mathbf{r}(t)\|\ \|\mathbf{r}(t)\|'=0$ ب) $\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t)=0$

ج) $\|\mathbf{r}(t)\|'=\|\mathbf{r}'(t)\|$ د) $\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t)=\|\mathbf{r}(t)\|\ \|\mathbf{r}(t)\|'$

۴۷. اگر $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\,\vec{i}+(\sin t)\,\vec{j}+t\,\vec{k}$ آن‌گاه مقدار $\frac{d}{dt}\Big(\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\Big)$ در $t=0$ برابر است با

الف) صفر ب) ۲ ج) ۱ د) -2

۴۸. در چه نقطه‌ای از سهمی $x^2=8y$ شعاع انحنای خم برابر ۴ است؟

الف) $(0,0)$ ب) $(1,\frac{1}{8})$ ج) $(2,\frac{1}{2})$ د) $(-1,\frac{1}{8})$

۴۹. صفحهٔ بوسان منحنی C، به معادلهٔ برداری $\mathbf{r}(t)=e^t\,\vec{i}+e^{-t}\,\vec{j}+t\,\vec{k}$، در نقطهٔ $P(1,1,0)$ از این منحنی به موازات کدام‌یک از صفحات زیر است؟

الف) $x+y-z=0$ ب) $x+2y-z=1$

ج) $x-y-2z=2$ د) $x-y+z=-1$

۵۰. فرض کنید C خمی هموار با معادلهٔ برداری $\mathbf{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ بوده، نمودار C تماماً برروی کره‌ای به مرکز مبدا مختصات قرار داشته باشد. کدام‌یک از گزینه‌های زیر در حالت کلی درست است؟

الف) انحنای منحنی C در نقاط مختلف، مقداری ثابت است.

ب) مرکز انحنای منحنی نظیر نقاط مختلف، ثابت و همان مرکز کره است.

ج) زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{r}(t)$ و $\mathbf{r}'(t)$ مقداری ثابت و مستقل از t است.

د) زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{r}'(t)$ و $\mathbf{r}''(t)$ مقداری ثابت و مستقل از t است.

۵۱. منحنی C به معادلات $x(t)=t^۲-۱$، $y(t)=t^۲+t$ و $z(t)=۱-t^۳$ مفروض است. در کدام نقطه از این منحنی، صفحهٔ قائم بر C به موازات صفحهٔ xoz است؟

الف) $P(-۱,۰,۱)$ ب) $P(۰,۲,۰)$ ج) $P(۳,۶,-۷)$ د) $P(۰,۰,۲)$

۵۲. منحنی C به معادلهٔ برداری $r(t)=t\overrightarrow{i}+(t^۲-t)\overrightarrow{j}+(t^۳-t)\overrightarrow{k}$ مفروض است. صفحهٔ بوسان منحنی C در نقطه $P(۱,۰,۰)$ به موازات کدامیک از صفحات زیر است؟

الف) $\pi: x-y+z=۰$ ب) $\pi: x-۳y+z=۱$

ج) $\pi: x+۲y-z=۲$ د) $\pi: x+۲y+۲z=۳$

۵۳. منحنی C به معادلهٔ برداری $r(t)=t^۲\overrightarrow{i}+t\overrightarrow{j}+t\overrightarrow{k}$ مفروض است. معادلهٔ تصویر قائم C بر صفحه $x+y-z=۰$ کدام است؟

الف) $r_p(t)=\frac{۲t^۲}{۳}\overrightarrow{i}+(t+\frac{t^۲}{۳})\overrightarrow{j}+(t+\frac{t^۲}{۳})\overrightarrow{k}$

ب) $r_p(t)=\frac{۲t^۲}{۳}\overrightarrow{i}+(t+\frac{t^۲}{۳})\overrightarrow{j}+(t-\frac{t^۲}{۳})\overrightarrow{k}$

ج) $r_p(t)=\frac{۴t^۲}{۳}\overrightarrow{i}+(t-\frac{t^۲}{۳})\overrightarrow{j}+(t+\frac{t^۲}{۳})\overrightarrow{k}$

د) $r_p(t)=\frac{۴t^۲}{۳}\overrightarrow{i}+(t-\frac{t^۲}{۳})\overrightarrow{j}+(t+\frac{t^۲}{۳})\overrightarrow{k}$

۵۴. خم C به معادلهٔ برداری $\overrightarrow{r(t)}=\sin(t)\overrightarrow{i}+\cos(t)\overrightarrow{j}+۲\overrightarrow{k}$ مفروض است. تصویر منحنی C بر صفحهٔ xy در جهت مشخص شده توسط بردار $\overrightarrow{i}-\overrightarrow{k}$ کدام است؟

الف) $\begin{cases} x = \cos t + t \\ y = \sin t \\ z = ۰ \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = ۰ \end{cases}$

ج) $\begin{cases} x = \cos t - t \\ y = \sin t \\ z = ۰ \end{cases}$ د) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t + t \\ z = ۰ \end{cases}$

۵۵. فرض کنید $f(t)=t\overrightarrow{i}+t^۲\overrightarrow{j}+t^۳\overrightarrow{k}$ و $g(t)=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+t\overrightarrow{k}$. مقدار $\frac{d}{dt}(f\times g)(t)$ در $t=۰$ کدام است؟

الف) $\overrightarrow{i}-\overrightarrow{k}$ ب) $\overrightarrow{k}$ ج) $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$ د) $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$

۵۶. طول کمانی از خم به معادلهٔ $\begin{cases} x &= e^t \cos t \\ y &= e^t \sin t \end{cases}$ بین دو نقطهٔ نظیر $t = ۰$ و $t = ۴$ برابر است با:

الف) $e^۴ - ۱$ ب) $۲(e^۴ - ۱)$ ج) $\sqrt{۲}(e^۴ - ۱)$ د) $\sqrt{۲}(e^۴ + ۱)$

۵۷. نقطه‌ای از منحنی $y = \ln x$ را تعیین کنید که دارای بیشترین مقدار انحنا باشد.

الف) $(\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \ln(\frac{\sqrt{۲}}{۲}))$ ب) $(۱, ۰)$ ج) $(\sqrt{۲}, \ln(\sqrt{۲}))$ د) $(۲, ۲\ln(\sqrt{۲}))$

۵۸. معادلهٔ کرهٔ بوسان خم C به معادلهٔ برداری $\overrightarrow{r(t)} = t\overrightarrow{i} + t^۲\overrightarrow{j} + t^۳\overrightarrow{k}$ در نقطهٔ $(۰, ۰, ۰)$ کدام است؟

الف) $x^۲ + y^۲ + z^۲ = \frac{۱}{۴}$

ب) $(x - \frac{۱}{۲})^۲ + y^۲ + z^۲ = \frac{۱}{۴}$

ج) $x^۲ + (y - \frac{۱}{۲})^۲ + z^۲ = \frac{۱}{۲}$

د) $x^۲ + (y - \frac{۱}{۲})^۲ + z^۲ = \frac{۱}{۴}$

۵۹. خم C با معادلات پارامتری $C : \ x = e^t cost \ , \quad y = e^t sint \ , \quad z = t$ مفروض است.طول قوس این خم از مبدا مختصات تا نقطهٔ نظیر t کدام است؟

الف) $\sqrt{۲}e^t$ ب) $\sqrt{۳}e^t$ ج) $\sqrt{۳}e^{t^۲}$ د) $\sqrt{۳}e^{۲t}$

۶۰. معادلهٔ صفحهٔ بوسان‌خم C با معادلات پارمتری

$$C : \ x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt$$

(a, b ثابت) در نقطهٔ نظیر $t = ۰$ کدام است؟

الف) $by - az = ۰$ ب) $by + az = ۰$

ج) $ay - bz = ۰$ د) $ay + bz = ۰$

۶۱. خم C به معادلات $x(t) = \cos t$ ،$y(t) = \sin t$ و $z(t) = t$ مفروض است. مولفهٔ قائم شتاب حرکت در هر نقطهٔ دلخواه کدام است؟

الف) $\sqrt{۲}$ ب) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ج) ۱ د) ۰

۶۲. معادلهٔ صفحهٔ بوسانِ خم C با معادلات پارامتری

$$C : \ x = te^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = e^{۲t}$$

در نقطهٔ $(۰,۱,۱)$ کدام گزینه است؟

الف) $۲y - x + ۱ = ۰$ ب) $۲x - z + ۱ = ۰$

ج) $۲z - y + ۱ = ۰$ د) $۲z - x + ۱ = ۰$

۶۳. اگر $\mathbf{r}$ یک تابع برداری باشد که مشتق دوم آن روی $I \subseteq \mathbb{R}$ موجود است، کدام یک از گزاره های زیر همواره درست است؟

الف) $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}'') = ۲(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')$ ب) $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}') = \mathbf{r} \times \mathbf{r}''$

ج) $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'') = ۲(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'')$ د) $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{r}'')) = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}''$

۶۴. برای خم C نمودار تابع برداری $r(s) = (\sinh^{-۱} s - ۱)\overrightarrow{i} + \sqrt{۱+s^۲}\,\overrightarrow{j}$، بردار یکهٔ مماس کدام است؟

الف) $\frac{۱}{\sqrt{۱+s^۲}}\overrightarrow{i} + \frac{s}{\sqrt{۱+s^۲}}\overrightarrow{j}$ ب) $\frac{۱}{\sqrt{۱+s^۲}}\overrightarrow{i} + s\overrightarrow{j}$

ج) $s\overrightarrow{i} + \frac{۱}{\sqrt{۱+s^۲}}\overrightarrow{j}$ د) $\frac{۱}{\sqrt{۱+s^۲}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$

۶۵. برای تابع برداری $r = r(t)$ کدام گزینه همواره درست است؟

الف) $\mathbf{r}''(\mathbf{t}) \perp \mathbf{r}'(\mathbf{t})$ ب) $\mathbf{r}''(\mathbf{t}) \perp \mathbf{B}(\mathbf{t})$

ج) $\mathbf{r}'(\mathbf{t}) \times \mathbf{r}(\mathbf{t}) || \mathbf{B}(\mathbf{t})$ د) $\mathbf{r}'(\mathbf{t}) || \mathbf{N}(\mathbf{t})$

۶۶. اگر خم C نمودار تابع برداری $\mathbf{r}(\mathbf{t}) = \mathbf{t}\overrightarrow{i} + (\ln\cos\mathbf{t})\overrightarrow{j}$، $۰ \le t \le \pi/۲$ و $s(t)$ طول کمان اندازه‌گیری شده از نقطه $(۰,۰)$ تا نقطهٔ نظیر t باشد، در این صورت $s(t)$ کدام است؟

الف) $\ln|\sec t + \tan t|$ ب) $\ln|\csc t + \tan t|$

ج) $\ln|\sec t + \cot t|$ د) $\ln|\csc t + \cot t|$

۶۷. خم C به معادلهٔ $\mathbf{r}(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$ داده شده است. اگر $s(t)$ طول قوس از نقطهٔ نظیر $t = ۰$ تا نقطهٔ نظیر t روی خم باشد، $s(t)$ در کدام معادله صدق می‌کند؟

الف) $s'^۲ - s^۲ = ۲ss'$ ب) $s'^۲ + s^۲ = s + s'$

ج) $s'^۲ + s^۲ = ۲$ د) $s'^۲ - s^۲ = ۲$

۶۸. برای ماکزیمم و مینیمم انحنای خم $y = x^۲$ کدام گزینه درست است؟

الف) ماکزیمم ۲ و مینیمم صفراست

ب) ماکزیمم وجود ندارد ومینیمم صفر است

ج) ماکزیمم ۲ و مینیمم وجود ندارد

د) ماکزیمم ۱ و مینیمم $\frac{۱}{۲}$ است.

۶۹. انحنای خم C با معادلات پارامتری $C : \ x = t^۲ \ , \quad y = t^۳$ در نقطهٔ $(۱, ۱)$ برابر است با:

الف) $\frac{۱۲}{۵\sqrt{۵}}$ ب) $\frac{۸}{۱۱\sqrt{۱۱}}$ ج) $\frac{۶}{۱۳\sqrt{۱۳}}$ د) $\frac{۱۳}{۷\sqrt{۷}}$

۷۰. کدام گزاره همواره درست است؟

الف) فصل مشترک سه صفحه با بردارهای نرمال غیر واقع در یک صفحه، یک خط است.

ب) زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{r}'(t)$ و $\mathbf{r}''(t)$ مقداری ثابت و مستقل از t است.

ج) تابع طول قوس برای یک خم هموار، همواره معکوس‌پذیر است.

د) هر تابع برداری مشتق‌پذیر، بر مشتق خود عمود است.

۷۱. خم C به معادلات $x(t) = t^۲ - ۱$، $y(t) = t^۲ + t$ و $z(t) = ۱ - t^۳$ مفروض است. در کدام نقطه از این خم، صفحهٔ قائم به موازات صفحهٔ xoz است؟

الف) $(-۱, ۰, ۱)$ ب) $(۰, ۲, ۰)$ ج) $(۳, ۶, -۷)$ د) $(۰, ۰, ۲)$

۷۲. منحنی C به معادلات $x(t) = t^۲ - ۱$، $y(t) = t^۲ + t$ و $z(t) = ۱ - t^۳$ مفروض است. در کدام نقطه از این منحنی، صفحهٔ قائم بر C به موازات صفحهٔ xoz است؟

الف) $P(-۱, ۰, ۱)$ ب) $P(۰, ۲, ۰)$ ج) $P(۳, ۶, -۷)$ د) $P(۰, ۰, ۲)$

۷۳. منحنی C به معادلهٔ برداری $\mathbf{r}(t) = t\overrightarrow{i} + (t^۲ - t)\overrightarrow{j} + (t^۳ - t)\overrightarrow{k}$ مفروض است. صفحهٔ بوسان منحنی C در نقطهٔ $P(۱, ۰, ۰)$ به موازات کدامیک از صفحات زیر است؟

الف) $\pi : x - y + z = ۰$ ب) $\pi : x - ۳y + z = ۱$

ج) $\pi : x + ۲y - z = ۲$ د) $\pi : x + ۲y + ۲z = ۳$

۷۴. صفحهٔ بوسان منحنی C، به معادلهٔ برداری $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$، در نقطهٔ $P(۱,۱,۰)$ از این منحنی به موازات کدامیک از صفحات زیر است؟

الف) $x + y - z = ۰$ ب) $x + ۲y - z = ۱$

ج) $x - y - ۲z = ۲$ د) $x - y + z = -۱$

۷۵. خم C به معادلات پارامتری $x(t) = t$ ، $y(t) = \sin t$ ، $z(t) = \cos t$ مفروض است. انحنای این خم به عنوان تابعی از پارامتر t عبارتست از:

الف) $\kappa(t) = \frac{t}{۲}$ ب) $\kappa(t) = \frac{۱}{۲}$

ج) $\kappa(t) = \sqrt{۱ + t^۲}$ د) $\kappa(t) = ۱$

۷۶. فرض کنید C خم حاصل از برخورد رویه‌های $x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۱$ و $x^۲ + z^۲ = ۱$ است. اگر C' تصویر خم C بر صفحهٔ yoz باشد، آنگاه خم C' برروی کدامیک از منحنی‌های دکارتی زیر از صفحهٔ yoz قرار گرفته است.

الف) $y^۲ + z^۲ = ۱$ ب) $y^۲ - z^۲ = ۱$

ج) $y^۲ - ۲z^۲ = ۱$ د) $y^۲ - ۲z^۲ = ۰$

۷۷. انحنای منحنی C به معادلهٔ $\mathbf{r}(t) = ۲t\mathbf{i} + t^۲\mathbf{j} - \frac{۱}{۳}t^۳\mathbf{k}$ در نقطهٔ نظیر t عبارتست از

الف) $\kappa(t) = \frac{۱}{(t^۲+۱)^۲}$ ب) $\kappa(t) = \frac{t}{(t^۲+۱)^۲}$

ج) $\kappa(t) = \frac{۲}{(t^۲+۲)^۲}$ د) $\kappa(t) = \frac{t}{(t^۲+۲)^۲}$

۷۸. منحنی C به معادلهٔ $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + (e^{-t}\cos t)\mathbf{j} + (e^{-t}\sin t)\mathbf{k}$ روی کدامیک از رویه‌های زیر قرار دارد؟

الف) $z^۲ = x^۲ + y^۲$ ب) $x^۲ = z^۲ + y^۲$

ج) $y^۲ = x^۲ + z^۲$ د) $z^۲ = x^۲ - y^۲$

۷۹. خم C به معادلهٔ $\mathbf{r}(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$ داده شده است. اگر $s(t)$ طول قوس از نقطه نظیر $t = ۰$ تا نقطه نظیر t روی منحنی باشد، $s(t)$ در کدام معادله صدق می‌کند؟

الف) $s'^۲ - s^۲ = ۲ss'$ ب) $s'^۲ + s^۲ = s + s'$

ج) $s'^۲ + s^۲ = ۲$ د) $s'^۲ - s^۲ = ۲$

فصل ۳

توابع چند متغیره

۳-۱ تمرینات تشریحی

۱. نشان دهید تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ در مبدأ پیوسته نیست.

۲. نشان دهید تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^۲y}{x^۴+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ در طول هر خطی در مبدأ دارای حد است ولی در کل در $(۰,۰)$ دارای حد نیست.

۳. فرض کنید تابع حقیقی f سه بار مشتق پذیر و تابع $g(x,y,z)=f(xyz)$ باشد.
الف) مطلوب است محاسبهٔ $g_{xz}(۱,۱,۱)=\frac{\partial^۲ g}{\partial x\partial z}(۱,۱,۱)$ در صورتی که $f'(۱)=۱$ و $f''(۱)=-۱$.
ب) معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویهٔ $g(x,y,z)=k$ را در نقطهٔ $(۱,۱,۱)$ به دست آورید.

۴. تابع $f(x,y)=\begin{cases}y\cos x & y\geq ۰\\ x+y & y<۰\end{cases}$ مفروض است،
الف) ثابت کنید f در مبدأ پیوسته است.
ب) مشتق پذیری f را در مبدأ بررسی کنید.

۵. فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$$

مطلوبست $f_{xy}(۰,۰)$.

۶. مشتق جهتی تابع $f(x,y)=e^{\sin(x-y)}$ را در نقطهٔ $(۱,۱)$ و در جهت بردار $\vec{a}=۸\vec{i}-۵\vec{j}$ بیابید. حداکثر میزان افزایش تابع در $(۱,۱)$ در چه جهتی است؟

۷. تابع f با ضابطهٔ زیر مفروض است:

$$f(x)=\begin{cases} \sin x & y\leqslant x^۲ \\ \\ -y\sin x & y>x^۲ \end{cases}$$

در خصوص مشتق پذیری f در نقطهٔ $P=(۰,۰)$ بحث کنید.

۸. تابع $z=f(x,y)$ بطور ضمنی توسط معادلهٔ $\sin(x+z)+\sin(y+z)=۰$ تعریف شده است. نشان دهید که :

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-۱$$

۹. تابع f با ضابطهٔ $f(x,y)=y^۲-x^۲$ مفروض است.
الف) مطلوب است توصیف سطح نمایش f.
ب) نشان دهید که منحنی $C:\begin{cases} x(t)=\sin t \\ y(t)=\cos t \\ z(t)=\cos ۲t \end{cases}$ $۰\leq t\leq ۲\pi$ روی این سطح قرار دارد.
ج) نقطه یا نقاطی از منحنی C را تعیین کنید که مماس بر منحنی در این نقاط تماماً بر روی سطح فوق باشد.

۱۰. تابع $f(x,y)=x^۲+۲y^۲-۴y$ مفروض است،
الف) معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویهٔ مشخص شده توسط $z=f(x,y)$ در نقطه $(-۱,۱,۱)$ واقع بر آن را بنویسید.
ب) ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع f را روی ناحیهٔ $D=\{x^۲+y^۲\leq ۴\}$ به دست

آورید.
ج) اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x,y)=۳x^۳+y^۲-۹x+۴y$ را به دست آورده، با استفاده از آزمون مشتق دوم نوع آنها را معین کنید.

۱۱. تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{۱}{x}\sin(xy) & x\neq ۰\\ y & x=۰\end{cases}$ مفروض است.
الف) ثابت کنید f در مبدأ پیوسته است.
ب) مطلوبست محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$.
ج) مشتق‌پذیری f را در مبدأ بررسی کنید.

۱۲. تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x\sin(xy)}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ مفروض است.

الف) ثابت کنید f در مبدأ پیوسته است.
ب) مطلوب است تعیین مشتق جزئی f در مبدأ در جهت بردار یکهٔ $v=a\vec{i}+b\vec{j}$ $(a^۲+b^۲=۱)$.
ج) مطلوب است تعیین $\nabla f(۰,۰)\cdot v$. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
د) با استفاده از تعریف نشان دهید f در مبدأ مشتق پذیر نیست.

۱۳. فرض کنید که

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^۲y+xy^۲}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

الف) نشان دهید که تابع f در $(۰,۰)$ پیوسته است.
ب) در صورت وجود $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$ را بیابید.
ج) نشان دهید که تابع f در مبدأ مشتق پذیر نیست.

۱۴. اکسترمم های تابع $f(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲$ را با قید $۲x^۲+۳y^۲+z^۲=۱$ بیابید.

۱۵. اکسترممهای مطلق تابع $f(x,y)=\sqrt{x^۲+y^۲-۱}$ را روی ناحیهٔ D با تعریف

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ : x^۲+y^۲-۴x+۳\leqslant ۰\}$$

پیدا کنید.

۱۶. مطلوب است تعیین مقادیر اکسترمم تابع $f(x,y,z)=x^۲-۲x+y^۲-۲$ در ناحیهٔ $D=\{(x,y);x^۲+y^۲\leq ۴\}$

۱۷. ماکزیمم مقدار تابع $f(x,y,z)=x+y+z$ را با شرط $x^۲+y^۲+z^۲=۳a^۲, a>۰$ به دست آورید و با استفاده از آن نتیجه بگیرید:

$$x+y+z\leq\sqrt{۳(x^۲+y^۲+z^۲)}$$

۱۸. معادلهٔ کلیهٔ خطوطی را مشخص کنید که از نقطهٔ $P=(۲,۰,۰)$ می‌گذرند و کاملاً بر رویهٔ $۹x^۲+۴y^۲-۳۶z^۲=۳۶$ قرار می‌گیرند.

۱۹. تابع $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin(\frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}) & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ مفروض است.
الف) نشان دهید که f در $(۰,۰)$ پیوسته است.
ب) نشان دهید که f در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۲۰. تابع $f(x,y)=\begin{cases}x\sin(\frac{x^۲+y^۲}{۱+x^۲+y^۲}) & |x|<|y|\\ y & |y|\leq|x|\end{cases}$ مفروض است.
الف) ثابت کنید f در نقطهٔ $(۰,۰)$ پیوسته است.
ب) $f_x(۰,۰)$ و $f_y(۰,۰)$ را بدست آورید.
ج) آیا f در $(۰,۰)$ مشتق پذیر است؟ چرا؟

۲۱. برای ماتریس $A=\begin{pmatrix}x & y\\ y & z\end{pmatrix}$ ماکزیمم $detA$ را بر روی کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ به دست آورید.

۲۲. فرض کنید $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲\mid x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}\leq a^{\frac{۲}{۳}}\}$ ($a>۰$ ثابت). اکسترممهای مطلق تابع $f(x,y)=a^{\frac{۱}{۳}}(xy)^{\frac{۲}{۳}}$ را بر روی ناحیهٔ بسته و کراندار D بدست آورید.

۲۳. فرض کنید S رویهٔ حاصل از دوران هذلولی $x^۲-z^۲=۱$ حول محور z و $P=(۱,۱,۱)$ نقطه‌ای روی S باشد. اگر $l_۱,l_۲$ خطوط گذرنده از P با بردارهای هادی $v_۱,v_۲$ باشند، مطلوب است مقدار $v_۱.v_۲$ ($v_۱,v_۲$ یکه می‌باشند.)

۲۴. سه عدد مثبت x، y و z را چنان تعیین کنید که مجموع مربعات آنها عدد ثابت ۴ باشد و برای آنها مقدار عبارت $۲x+y+۲z$ مینیمم شود.

۲۵. فرض کنید که

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin \pi xy}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

الف) مشتقات سویی f در مبدأ در چه جهاتی موجود است؟
ب) نشان دهید که f در مبدأ مشتق پذیر نیست.
ج) معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویهٔ $z=f(x,y)$ را در نقطهٔ $P=(۱,۱,۰)$ واقع بر این رویه پیدا کنید.

۲۶. خم C به معادلهٔ $y=e^{-x^۲}$ مفروض است.
الف) بردارهای مماس یکانی و قائم بر C را در نقطهٔ $p_۰=(۰,۱)$ به دست آورید.
ب) معادلهٔ دایرهٔ بوسان خم فوق را در $p_۰$ مشخص نمائید.
ج) رویهٔ S به معادلهٔ $y=e^{-(x^۲+z^۲)}$ را رسم کنید.
د) معادلهٔ صفحهٔ مماس بر S در نقطهٔ $(۰,۱,۰)$ را به دست آورید.

۲۷. فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}۴-x^۲-y^۲ & x>۰\\ \\ ۴-۲x-۲y & x\leqslant ۰\end{cases}$$

الف) ثابت کنید f در $(۰,۰)$ پیوسته است.
ب) وجود $f_x(۰,۰)$ و $f_y(۰,۰)$ را بررسی کنید.
ج) آیا f در $(۰,۰)$ مشتق پذیر است؟
د) آیا مشتق سوئی f در $(۰,۰)$ در سوی $v=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ وجود دارد؟ چرا؟

۲۸. رویهٔ S به معادلهٔ $y=\frac{x^۲+z^۲}{۱+x^۲+z^۲}$ مفروض است.
الف) مطلوبست تعیین منحنی حاصل از برخورد رویهٔ S با صفحهٔ $y=k$ (بر روی مقادیر مختلف k بحث کنید.)
ب) ثابت کنید که S یک رویهٔ دوار بوده، محور دوران و یکی از منحنی‌های مولد آنرا تعیین نمایید.

۲۹. فرض کنید f تابعی با ضابطهٔ زیر است:

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin(\frac{۱}{x^۲+y^۲}) & x+y>۰ \\ \\ x^۲ & x+y\leqslant ۰ \end{cases}$$

الف) ثابت کنید f در مبدأ پیوسته است.
ب) مقادیر $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$ را در صورت وجود تعیین نمایید.

۳۰. تابع $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^۳+y^۳}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$ مفروض است.
الف) نشان دهید که f در مبدأ مختصات مشتق پذیر نیست.
ب) مشتق سوئی f در مبدأ مختصات و در سوی بردار یکهٔ $\overrightarrow{\nu}=\alpha\overrightarrow{i}+\beta\overrightarrow{j}$ را تعیین نمایید.($\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ثابت)
ج) بردار یکهٔ $\overrightarrow{\nu}$ را به گونه‌ای تعیین کنید که مشتق سوئی f در مبدأ و در سوی آن بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۳۱. فرض کنید $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر و z به عنوان تابعی مشتق پذیر بر حسب x و y به صورت ضمنی توسط معادلهٔ $f(\frac{xy}{x^۲+y^۲},z)=۰$ داده شده باشد. ثابت کنید که z در معادلهٔ زیر صدق می کند:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=۰.$$

۳۲. هذلولی $x^۲-z^۲=۱$ در صفحهٔ xoz مفروض است.
الف) مطلوب است معادلهٔ رویهٔ حاصل از دوران منحنی فوق حول مجور xها.
ب) برای نقطهٔ $(۱,۱,۱)$ واقع بر رویهٔ فوق نشان دهید که دقیقا دو خط راست وجود داشته که از این نقطه گذشته و کاملا بر رویهٔ فوق قرار گرفته اند.

۳۳. تابع $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x}{y}\sin y & y\neq ۰ \\ x & y=۰ \end{cases}$ مفروض است.
الف) نشان دهید که f در $(۰,۰)$ پیوسته است.
ب) مطلوب است تعیین ضابطهٔ مشتقات جزئی f در تمام نقاط صفحه.

۳۴. تابع $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^۳+y^۳}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید که f در مبدأ مشتق پذیر نیست.
ب) مشتق سوئی f را در مبدأ و در سوی بردار یکهٔ $\overrightarrow{u}$ تعیین کنید.
ج) جهتی را تعیین نمایید که با حرکت در آن جهت از مبدأ مختصات، مقدار تابع با بیشترین سرعت شروع به افزایش نماید.

۳۵. فرض کنید f تابعی با مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد به طوریکه برای هر x و y داشته باشیم $(\frac{\partial f}{\partial x})^۲ + (\frac{\partial f}{\partial y})^۲ = ۲$. اگر $g(u,v) = f(uv, \frac{۱}{۲}(u^۲ - v^۲))$ آنگاه
الف) ثابت α را به گونه‌ای بیابید که

$$\alpha\left((\frac{\partial g}{\partial u})^۲ + (\frac{\partial g}{\partial v})^۲\right) = u^۲ + v^۲.$$

ب) مطلوب است محاسبهٔ $\frac{\partial^۲ g}{\partial u \partial v}$ بر حسب مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم f.

۳۶. نقطهٔ $P_۰ = (۰, ۰, ۴)$ و دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۴$ در صفحهٔ xoy مفروضند. خطوط گذرنده بر نقاط دایرهٔ فوق و نقطهٔ $P_۰$ تشکیل یک مخروط می دهند. معادلهٔ این مخروط را به دست آورید.

۳۷. استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ و صفحهٔ $z = my$ (m یک عدد حقیقی ثابت) مفروضند.
الف) معادلات پارامتری خم C حاصل از برخورد استوانه و صفحه را بیابید.
ب) انحنای خم C را در نقطهٔ $(۱, ۰, ۰)$ تعیین کنید و m را به قسمی به دست آورید که انحنای منحنی C بیشترین مقدار را داشته باشد.

۳۸. تابع $f(x,y) = xye^{xy}$ مفروض است.
الف) با استفاده از تعریف، نشان دهید f در $(۰, ۰)$ مشتق پذیر است.
ب) اکسترمم‌های f را روی ناحیهٔ بسته و کراندار زیر به دست آورید:

$$\{(x,y) \mid x^۲ + y^۲ \leqslant ۲\}.$$

۳۹. فرض کنید f تابعی مشتق پذیر است و z تابعی مشتق پذیر از x و y که در معادلهٔ $f(cx - az, cy - bz) = ۰$ صدق می کند (a و b و c اعداد حقیقی ثابت هستند). ثابت کنید:

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c$$

۴۰. فرض کنید S رویهٔ حاصل از دوران هذلولی $y^۲ - x^۲ = ۱$ در صفحهٔ xoy حول محور yها باشد.
الف) معادلهٔ S را بیابید و آنرا رسم کنید.
ب) محدودهٔ تغییرات m را طوری بیابید که فصل مشترک S با صفحهٔ $x + my = ۱$ یک بیضی باشد.

۴۱. تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ زیر مفروض است:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y} & y \neq ۰ \\ x & y = ۰ \end{cases}$$

الف) نشان دهید تابع f در $(۰,۰)$ پیوسته است.
ب) وجود $\frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x}(۰,۰)$ را بررسی کنید.

۴۲. نشان دهید تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ با تعریف زیر در $(۰,۰)$ مشتق پذیر نیست.

$$f(x,y) = \begin{cases} x & |x| \leqslant |y| \\ -x & |x| > |y| \end{cases}$$

۴۳. فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر باشد و رابطهٔ $f(\frac{z}{x}, \frac{z}{y}) = ۰$، متغیر z را به عنوان تابعی مشتق پذیر از متغیرهای مستقل x و y معرفی کند. نشان دهید

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

۴۴. فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر باشد. نشان دهید که تمام صفحات مماس بر سطح S به معادلهٔ $z = xf(\frac{x}{y}, \frac{y}{x})$ از مبدأ مختصات عبور می کنند.

۴۵. فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ تابع زیر باشد

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۲y}{x^۲+y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

الف) مطلوب است تعیین مشتق جهتی f در نقطهٔ $(۰,۰)$ و در جهت بردار یکهٔ $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$.

ب) بردار یکهٔ $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ را طوری تعیین کنید که با حرکت در جهت $\overrightarrow{u}$، مقدار تابع f با بیشترین سرعت افزایش یابد.

۴۶. فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ تابع دو متغیرهٔ با تعریف زیر باشد:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y} & y \neq ۰ \\ ۲x & y = ۰ \end{cases}$$

الف) برای بردار یکهٔ $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$، مشتق سوئی $D_u f(۰,۰)$ را محاسبه کنید.
ب) تمام سوهای $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ را بیابید که $D_u f(۰,۰) = ۱$.

۴۷. فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ تابع مشتق پذیری باشد که مشتقات جزئی مرتبهٔ اول آن برابر با ۱ نباشد و معادلهٔ $z = f(\frac{x}{y}, z)$ ، z را به عنوان تابعی مشتق پذیر از متغیرهای مستقل x و y معرفی کند. نشان دهید

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = ۰$$

۴۸. تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x,y) = \begin{cases} x\sin(\frac{xy}{x^۲+y^۲}) & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$ مفروض است.
الف) نشان دهید که f در $(۰,۰)$ پیوسته است.
ب) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$ را بدست آورید.
ج) مشتق سوئی f در $(۰,۰)$ و در سوی بردار یکهٔ $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ را تعیین نمایید.
د) آیا f در $(۰,۰)$ مشتق پذیر است؟ چرا؟

۳-۲ تمرینات تستی

۴۹. سطح مشخص شده توسط معادلهٔ $۹x^۲ + y^۲ - ۹z^۲ - ۵۴x - ۴y - ۵۴z + ۴ = ۰$ کدامیک از رویه‌های زیر است؟

الف) مخروط
ب) بیضیگون
ج) هذلولیگون یک پارچه
د) هذلولیگون دوپارچه

۵۰. سطح درجهٔ ۲ متشکل از نقاطی که از نقطهٔ $(۰,۰,a)$ و صفحهٔ $z=a$ $(a>۰$ ثابت) به یک فاصله‌اند عبارتست از

الف) سهمیگون $x^۲+y^۲=۴az$

ب) بیضیگون $x^۲+y^۲+z^۲/a^۲=۱$

ج) مخروط $x^۲+y^۲=az^۲$

د) سهمیگون هذلولوی $x^۲-y^۲=az$

۵۱. رویهٔ مشخص شده توسط معادلهٔ $۱۶x^۲+۹y^۲-۱۶z^۲-۳۲x-۳۶y+۳۶=۰$ کدام یک از رویه‌های زیر است؟

الف) بیضیگون ب) هذلولیگون دوپارچه

ج) مخروط د) هذلولیگون یک پارچه

۵۲. رویهٔ $x^۲-۲x+۵=(z-۳)-۹(y-۲)^۲+(x-۱)^۲$ چه نوع رویه‌ای است؟

الف) دوار ب) استونه ای ج) مخروط د) سهمیگون

۵۳. فصل مشترک رویهٔ $z=\frac{y^۲}{b^۲}-\frac{x^۲}{a^۲}$ با صفحهٔ $z=bx+ay$ کدامیک از مجموعه‌های زیر است؟

الف) یک دایره ب) دو خط متقاطع ج) یک بیضی د) یک هذلولی

۵۴. تابع $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^۳-y^۳}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ مفروض است. کدامیک از گزینه های زیر درست است؟

الف) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)=\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)=۱$ ب) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)=\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)=۰$

ج) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)=۱$, $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)=-۱$ د) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)=۰$, $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)=۱$

۵۵. سطح S به معادلهٔ $x^۲+yz=۲$ مفروض است. صفحهٔ مماس بر S در نقطهٔ $(-۱,-۱,۱)$ بر کدامیک از صفحات زیر عمود است؟

الف) $x-y-z=۱$ ب) $x+y+z=۲$

ج) $-x-y+z=۳$ د) $x-y+z=۰$

۵۶. تابع $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x,y)=x^۳-۳xy$ مفروض است. از نقطهٔ $(۱,۱)$ در صفحه در چه سوئی حرکت نماییم تا مقدار تابع با بیشترین سرعت کاهش بیابد؟

الف) $\mathbf{u}=\mathbf{i}$ ب) $\mathbf{u}=\mathbf{j}$ ج) $\mathbf{u}=-\mathbf{i}$ د) $\mathbf{u}=-\mathbf{j}$

۵۷. تابع $f(x,y) = xy^۲ - x^۲y$ در کدامیک از معادلات زیر صدق می‌کند؟

الف) $\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} = ۰$ ب) $x\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} + y\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} = ۰$

ج) $y\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} - x\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} = ۰$ د) $\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} - \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} = ۰$

۵۸. فرض کنید $f(x,y) = (x^۲ + y^۲)\sin(x+y)$. کدامیک از گزینه‌ها صحیح است؟

الف) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰) = \frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰) = ۰$ ب) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰) = \frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰) = ۱$

ج) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰) = \frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰) = -۱$ د) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$ وجود ندارند.

۵۹. فرض کنید $f(x,y) = |۴ - x^۲ - y^۲|$. کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

الف) f در نقطهٔ $(۲,۰)$ مشتقپذیر است.

ب) f در نقطهٔ $(۲,۰)$ ناپیوسته است.

ج) f در نقطهٔ $(۲,۰)$ پیوسته است اما مشتقپذیر نیست.

د) مشتقات جزئی f در $(۲,۰)$ پیوسته‌اند.

۶۰. فرض کنید $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۴ + y^۴}{x^۲ + y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$. کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

الف) f در $(۰,۰)$ ناپیوسته است.

ب) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)$ وجود ندارد.

ج) f در $(۰,۰)$ پیوسته است و $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$ هر دو وجود دارند.

د) f در $(۰,۰)$ پیوسته است ولی هیچ یک از مقادیر $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$ وجود ندارند.

۶۱. تابع $f(x,y) = \frac{۱}{۱+x^۲+y^۲}$ و نقطهٔ $P = (۰,۰)$ مفرضند. کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

الف) f در P مشتقپذیر است و $df(P) = ۰$.

ب) f در P مشتقپذیر است و $df(P) = dx + dy$.

ج) f در P مشتق‌پذیر نیست ولی پیوسته است.

د) f در P مشتق‌پذیراست ولی پیوسته نیست.

۶۲. تابع $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin(\frac{۱}{x^۲+y^۲}) & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$ مفروض است. کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

الف) f در مبدأ پیوسته نیست.
ب) f در مبدأ پیوسته است ولی مستقات جزئی f در این نقطه وجود ندارند.
ج) f در مبدأ پیوسته بوده، مشتقات جزئی آن نیز در این نقطه وجود دارند ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.
د) f در مبدأ مشتقپذیر است.

۶۳. با استفاده از دیفرانسیل کل یک تابع دو متغیرهٔ مناسب، کدامیک از مقادیر زیر مناسب ترین تقریب برای $\sqrt[۳]{۱/۱+۶/۸}$ است؟

الف) $۲-\frac{۱}{۱۲۰}$ ب) $۲+\frac{۱}{۱۲۰}$ ج) $۲+\frac{۱}{۶۰}$ د) $۲-\frac{۱}{۶۰}$

۶۴. اگر $w(x,y,z)=\begin{cases} (\frac{۱-x}{z})e^{\frac{y}{z}} & z\neq ۰ \\ ۰ & z=۰ \end{cases}$ آنگاه مقدار $\frac{\partial^۲ w}{\partial x\partial y}(۱,۰,۱)$ برابر کدامیک از مقادیر زیر است؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳

۶۵. برای تابع $w=e^{xy}\ln(x+z)$ مقدار $\frac{\partial^۲ w}{\partial x\partial y}(۱,۰,۰)$ کدام است؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) $\frac{۱}{۲}$

۶۶. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی مشتقپذیر است. اگر z به عنوان تابعی بر حسب x و y توسط معادلهٔ $z=f(۲x-۵y)$ داده شده باشد، کدام گزینه درست است؟

الف) $۵\frac{\partial z}{\partial x}-۲\frac{\partial z}{\partial y}=۰$ ب) $۵\frac{\partial z}{\partial x}+۲\frac{\partial z}{\partial y}=۰$
ج) $۲\frac{\partial z}{\partial x}+۵\frac{\partial z}{\partial y}=۰$ د) $۲\frac{\partial z}{\partial x}-۵\frac{\partial z}{\partial y}=۰$

۶۷. هرگاه $z=z(x,y)$ تابعی مشتقپذیر از x و y در معادلهٔ $\phi(x^۲+z^۲,xy)=۰$ صدق کند، کدام گزینه درست است؟

الف) $xz\frac{\partial z}{\partial x}-yz\frac{\partial z}{\partial y}=-x^۲$ ب) $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=x^۲$
ج) $z\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x^۲$ د) $xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}=x^۲$

۶۸. صفحهٔ مماس بر رویهٔ S به معادلهٔ $xy^۲z^۳=۴$ در نقطهٔ $P(۱,۲,۱)$ عبارتست از

الف) $x+y+۳z=۳$ ب) $x+۳y+z=۳$

ج) $x+۳y+z=۶$ د) $x+y+۳z=۶$

۶۹. تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^۲}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ مفروض است. مشتق سوئی f در نقطهٔ $(۰,۰)$ و در سوی بردار یکه $u=\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}$ کدام است؟

الف) ۰ ب) $\alpha\beta$ ج) $\alpha+\beta$ د) $\alpha\beta^۲$

۷۰. مشتق سوئی تابع $f(x,y)=\sin(x^۲)+e^{\cos y}$ در نقطهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ در جهت بردار یکهٔ $u=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ کدام است؟

الف) $a-b$ ب) $a+b$ ج) b د) $-b$

۷۱. رویهٔ S به معادلهٔ $z=x^۲-y^۲$ مفروض است. در کدامیک از نقاط زیر، صفحهٔ مماس بر S موازی صفحهٔ $۲x-۴y-z=۰$ است؟

الف) $P(۱,۱,۰)$ ب) $P(۲,۱,۳)$ ج) $P(۱,۲,-۳)$ د) $P(-۱,-۱,۰)$

۷۲. رویهٔ S به معادلهٔ $z=x^۲-y^۲$ مفروض است. در کدامیک از نقاط زیر، صفحهٔ مماس بر S عمود بر صفحهٔ $x-۲y+۴z=۰$ است؟

الف) $P(۱,۱,۰)$ ب) $P(۰,۱,-۱)$ ج) $P(۱,۲,-۳)$ د) $P(-۱,-۱,۰)$

۷۳. کمترین فاصلهٔ بین مبدأ تا منحنی C به معادلهٔ $x^۲-yx-۴=۰$ کدام است؟

الف) ۸ ب) ۴ ج) ۲ د) ۱

۷۴. کمترین مقدار تابع $f(x,y)=x^۲-y^۲$ درون و روی دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$ برابر است با

الف) صفر ب) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ج) -۱ د) -۲

۷۵. بیشترین مقدار تابع $f(x,y)=x^۲-y^۲$ درون و روی دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$ برابر کدامیک از مقادیر زیر است؟

الف) صفر ب) $\frac{۱}{۲}$ ج) ۱ د) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۷۶. تابع $f(x,y)=x^۳-y^۳-۳xy$ و نقطهٔ $P(-۱,۱)$ مفروضند. کدامیک از گزینه های زیر درست است؟

الف) f در P یک مقدار مینیمم نسبی دارد.

ب) f در P یک مقدار مینیمم مطلق دارد.

ج) f در P یک مقدار ماکزیمم نسبی دارد.
د) f در P یک مقدار ماکزیمم مطلق دارد.

۷۷. کدامیک گزینه یک نقطهٔ زینی برای تابع $f(x,y) = x^۳ - ۴xy + ۲y^۲ - ۱$ است؟
الف) $(۰,۰)$ ب) $(۱,۱)$ ج) $(\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۳})$ د) $(-۱,-۱)$

فصل ۴

انتگرال‌های چندگانه

۴-۱ تمرینات تشریحی

۱. مطلوبست محاسبهٔ

$$\int\int_R e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dxdy$$

که در آن R ناحیهٔ محدود به خطوط $y=۰$، $x+y=۱$ و $x-y=۰$ است.

۲. انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_۰^۸ \int_{\sqrt[۳]{x}}^۲ \frac{dy\, dx}{y^۲+۱}$$

۳. فرض کنید R ناحیه واقع در ربع اول صفحهٔ xy و محدود به هذلولی‌های $xy=۱$ و $xy=۹$ و خطوط $y=x$ و $y=۴x$ باشد. مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $\int\int_R (\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy})\, dA$.

۴. مطلوبست محاسبهٔ $I=\int_۰^۲ \int_۰^{۴-x^۲} \frac{x^۳e^{۲y}}{۴-y}\, dydx$.

۵. فرض کنید R ناحیه محدود به هذلولی‌های $xy=۱$ و $xy=۹$ و $x(۱-y)=۱$ و $x(۱-y)=۳$ باشد. مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $\int\int_R x\, dA$.

۶. مطلوبست محاسبهٔ $I = \int_{۰}^{۱} \int_{\sqrt{y}}^{۱} \sqrt{۱ + x^۳}\, dxdy$.

۷. مطلوبست محاسبهٔ حجم بین کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ و استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲$.

۸. حجم ناحیهٔ محصور بین کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲az$ و مخروط $x^۲ + y^۲ = z^۲$ که شامل مرکز کره است را محاسبه کنید.

۹. معادلهٔ دو صفحهٔ موازی با صفحهٔ xoy را چنان بیابید که توسط آنها بتوان کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ را طوری به سه قطعه تقسیم نمود که مساحت هر سه قطعه یکسان باشد.

۱۰. مطلوبست محاسبهٔ انتگرال $\int\int\int_T e^{(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\, dV$ که در آن T ناحیه محدود به استوانه $x^۲ + y^۲ = ۴$ و مخروط $x^۲ + y^۲ = z^۲$ است.

۱۱. مطلوبست محاسبهٔ انتگرال $\int\int\int_T x^۲y^۲\, dV$ که در آن T ناحیه محدود به مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و صفحه $z = a$ $(a > ۰)$ است (راهنمایی: از مختصات استوانه‌ای استفاده کنید).

۱۲. مطلوبست محاسبهٔ انتگرال $\int\int\int_T \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}\, dV$ که در آن T ناحیهٔ درون کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$، بالای صفحهٔ xoy و درون مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ است.

۱۳. حجم زیر رویهٔ $z = ۵\cos\left(\frac{\pi}{۲}\sqrt{\frac{x^۲}{۴} + \frac{y^۲}{۹}}\right)$، بالای صفحهٔ $z = ۰$ و داخل استوانهٔ $\frac{x^۲}{۴} + \frac{y^۲}{۹} = ۱$ را محاسبه کنید.

۱۴. مطلوبست تعیین انتگرال $\iint_R xy\, dA$ که در آن R ناحیهٔ واقع در $\frac{۱}{۸}$ اول محدود بین خطوط $y = x$ و $y = ۳x$ و خم‌های $xy = ۱$ و $xy = ۳$ است.

۱۵. فرض کنید W ناحیهٔ درون مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و بین دو کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ و $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ است. مطلوبست محاسبهٔ انتگرال $\iiint_W \frac{dV}{(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$.

۱۶. ثابت کنید $۲\int_a^b \int_x^b f(x)f(y)\, dy\, dx = \left(\int_a^b f(x)\, dx\right)^۲$ $(۰ < a < b)$.

۱۷. مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_{۱}^{۲}\int_{۰}^{\ln x}\frac{e^{y}\sqrt{۱+e^{۲y}}}{(۲-e^{y})}\,dy\,dx$$

.

۱۸. مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin y}{y}e^{\frac{x}{y}}\,dydx$$

۱۹. مطلوبست محاسبهٔ

$$\int\int\int_{T}\frac{dxdydz}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}$$

که در آن T ناحیهٔ بالای صفحهٔ $z=۱$ و درون کرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۲z$ می باشد.

۲۰. فرض کنید D ناحیهٔ محصور توسط کرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۴$ بالای صفحهٔ xoy و خارج استوانهٔ $x^{۲}+y^{۲}=۱$ است. مطلوبست محاسبهٔ هر یک از انتگرالهای زیر

الف)$\int\int\int_{D}\frac{z}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}dxdydz$

ب) $\int\int\int_{D}\frac{z}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}dxdydz$

۲۱. مطلوبست محاسبهٔ انتگرال $\int\int_{D}v\cos(\frac{u}{v})\,dA$ که D ناحیهٔ محدود به خطوط $u=v$ ، $v=-u$ و $v=۱$ می باشد.

۲۲. مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_{۰}^{۱}\int_{x}^{۱}e^{(x^{۲}+y^{۲})}\,dydx+\int_{۱}^{\sqrt{۴}}\int_{۰}^{\sqrt{۲-y^{۲}}}e^{(x^{۲}+y^{۲})}\,dxdy$$

۲۳. فرض کنید $f:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}$ تابع با تعریف $f(x,y)=x^{۳}+y^{۳}-۳x^{۲}$ باشد.

الف) اکسترممهای مطلق تابع f روی ناحیهٔ $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{۲}\ :\ x^{۲}+y^{۲}\leqslant ۱\}$ را بیابید.

ب) نشان دهید $\int\int_{D}|f(x,y)|\,dA\leqslant ۴\pi$

۲۴. فرض کنید T ناحیهٔ محدود به داخل سهمیگون $z=x^{۲}+y^{۲}$ و خارج از مخروط $z=\sqrt{۳(x^{۲}+y^{۲})}$ باشد. حجم T را محاسبه کنید.

۲۵. فرض کنید D ناحیهٔ محدود بین منحنی های $xy = \pi$ و $y = ۰$ و $x = ۱$ و $x = ۲$ باشد. مطلوبست

$$\int\int_D x|\cos(xy)|\, dA.$$

۲۶. فرض کنید $b > ۰$ و $۰ \leqslant c < d \leqslant a$ و A مساحت بخشی از سطح کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = a^۲$ باشد که بین صفحات $z = c$ و $z = d$ قرار دارد و B مساحت بخشی از سطح استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = b^۲$ باشد که بین این صفحات قرار دارد. نشان دهید $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$.

۲۷. فرض کنید T ناحیهٔ محدود به داخل مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ خارج مخروط $z = \sqrt{۳(x^۲ + y^۲)}$ و داخل استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲y$ در یک هشتم اول فضا باشد. حدود T را بر حسب مختصات استوانه ای و کروی بنویسید.

۲۸. حجم ناحیهٔ محدود بین سطوح $x = ۵ - y^۲$ و $z = ۴y^۲$ و $x = ۰$ و $x = ۷ - z$ را بیابید.

۲۹. مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_۰^{\frac{۱}{۲}} \int_{۲y}^{۱} \frac{e^x}{x}\ \cos(\frac{\pi y}{x})\ dxdy$$

۳۰. مطلوب است حجم ناحیهٔ محدود به داخل کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ و خارج از سهمی گون $x^۲ + y^۲ = ۴(۱ - z)$.

۲-۴ تمرینات تستی

۳۱. اگر $I = \int_۰^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\, dy\, dx$ آنگاه

الف) $I = ۴$ ب) $I = \pi$ ج) $I = ۲\pi$ د) $I = ۲$

۳۲. فرض کنید R ناحیهٔ درون و روی دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۴$ و بالای خط $y = ۱$ باشد. مقدار انتگرال $\iint_R \sqrt{x^۲ + y^۲}\, dA$ برابر کدامیک از مقادیر زیر است؟

الف) $\frac{۱۶\pi}{۳} - \int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۵\pi}{۶}} \frac{۱}{\sin^۲\theta}\, d\theta$ ب) $\pi - \int_۰^{\pi} \frac{۱}{\sin^۲\theta}\, d\theta$

ج) $\pi + \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۳\pi}{۴}} \frac{۱}{\sin^۲\theta}\, d\theta$ د) $\frac{۳\pi}{۱۶} + \int_{\frac{\pi}{۳}}^{\frac{۲\pi}{۳}} \frac{۱}{\sin^۲\theta}\, d\theta$

۳۳. فرض کنید T ناحیهٔ محصور بین استوانه‌های $x^۲+y^۲=۱$ و $x^۲+y^۲=۴$ محدود شده توسط مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و صفحهٔ $z=۱$ است. مقدار انتگرال $\iiint_T \frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\,dV$ برابر کدامیک از مقادیر زیر است؟

الف) صفر ب) $\frac{\pi}{۲}$ ج) π د) ۲π

۳۴. فرض کنید T ناحیهٔ محصور بین دو کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ و $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ در نیم فضای $y\geq ۰$ است. مقدار انتگرال $\iiint_T y\,dV$ کدام است؟

الف) $\frac{۱۵\pi}{۴}$ ب) $\frac{۱۰\pi}{۴}$ ج) $\frac{۵\pi}{۴}$ د) $\frac{\pi}{۴}$

۳۵. اگر $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ \mid x^۲+y^۲\leq ۱\}$ و $f(x,y)=x^۴+۲x^۲y^۲+y^۴$ در اینصورت مقدار انتگرال $\iint_R f(x,y)\,dA$ برابر است با:

الف) $\frac{\pi}{۱۲}$ ب) $\frac{\pi}{۹}$ ج) $\frac{\pi}{۶}$ د) $\frac{\pi}{۳}$

۳۶. مقدار انتگرال $\int_۰^۱\int_{\sqrt{y}}^۱ \sqrt{۱+x^۳}\,dxdy$ برابر است با:

الف) $\sqrt{۲}$ ب) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۹}$ ج) $-\frac{\sqrt{۲}}{۹}$ د) $-\sqrt{۲}$

۳۷. مقدار انتگرال $\int_۰^۱\int_۰^{\sqrt{۱-x^۲}} e^{x^۲+y^۲}\,dy\,dx$ برابر است با:

الف) $\pi(r-۱)$ ب) $\pi(e+۱)$ ج) $\frac{\pi}{۲}(e-۱)$ د) $\frac{\pi}{۲}(e+۱)$

۳۸. مقدار انتگرال دوگانه $\iint_D ۲xy\,dA$ که در آن D دامنهٔ محدود شده توسط خطوط $y=x$، $x+y=۱$ و $y=۰$ است، کدامیک از مقادیر زیر است؟

الف) $\frac{۱}{۸}$ ب) $\frac{۱}{۱۶}$ ج) $\frac{۱}{۲۴}$ د) $\frac{۱}{۳۲}$

۳۹. مقدار عبارت $\int_۰^۱\int_y^۱ x^۲e^{xy}\,dx\,dy$ برابر است با:

الف) صفر ب) e ج) $e-\frac{۱}{۲}$ د) $\frac{e}{۲}-۱$

۴۰. مقدار انتگرال $\iint_D \sqrt{x^۲+y^۲}\,dA$ که در آن D ناحیهٔ محصور بین دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$ و خط $y=x$ در نیم صفحهٔ $y\geq x$ است، کدامیک از مقادیر زیر است؟

الف) $\frac{\pi}{۳}$ ب) $\frac{\pi}{۲}$ ج) π د) $\frac{\pi}{۴}$

۴۱. حجم محصور بین استوانه های $x^۲+y^۲=۱$ و $x^۲+y^۲=۴$ بالای صفحهٔ xoy و زیر مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ کدامیک از مقادیر زیر است؟

الف) ۶π ب) $\frac{۱۰\pi}{۳}$ ج) ۳π د) $\frac{۱۴\pi}{۳}$

۴۲. انتگرال $\iiint_W (x^۲+y^۲+z^۲)\,dV$ که در آن W ناحیهٔ بالای صفحهٔ xoy و زیر کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ است، برابر است با:

الف) $\frac{۲\pi}{۳}$ ب) $\frac{۲\pi}{۵}$ ج) $\frac{۲\pi}{۷}$ د) $\frac{۲\pi}{۹}$

۴۳. فرض کنید T ناحیهٔ محدود به صفحهٔ $x+۲y+۳z=۱$ در $\frac{۱}{۸}$ اول فضا است. مقدار انتگرال $\iiint_T e^{x+۲y+۳z}\,dV$ کدام است؟

الف) $\frac{\sqrt{e}-۱}{۳}$ ب) $\frac{e-۱}{۶}$ ج) $\frac{e+۱}{۶}$ د) $\frac{\sqrt{e}+۱}{۳}$

۴۴. حجم محصور به رویهٔ $z=۱-x-y^۲$ و صفحات مختصات در $\frac{۱}{۸}$ اول فضا کدام است؟

الف) $\frac{۲}{۲۳}$ ب) $\frac{۱}{۱۱}$ ج) $\frac{۴}{۱۵}$ د) $\frac{۷}{۵}$

۴۵. مقدار انتگرال دوگانهٔ $\iint_D (x+y)\,dA$ که در آن D ناحیهٔ محدود به خطوط $x-y=۰$، $x-y=۲$، $x+y=۰$ و $x+y=۳$ کدامیک از مقادیر زیر است؟

الف) $\frac{۳}{۲}$ ب) $\frac{۵}{۲}$ ج) $\frac{۷}{۲}$ د) $\frac{۹}{۲}$

۴۶. مقدار انتگرال $\iiint_D \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}\,dV$ که در آن D ناحیهٔ بالای مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ محدود شده توسط کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ است، برابر کدامیک از مقادیر زیر است؟

الف) $\frac{\pi^۲}{۲}$ ب) $\frac{\pi}{۲}(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ ج) $\pi(۱-\sqrt{۲})$ د) $\pi^۲\sqrt{۲}$

۴۷. مقدار انتگرال $\iiint_D \frac{۱}{۱+x^۲+y^۲}\,dV$ که در آن D حجم محصور توسط کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ است، برابر کدامیک از عبارات زیر است؟

الف) $۴\pi\int_۰^۱ \frac{\sqrt{۱-t^۲}}{۱+t^۲}\,dt$ ب) $۴\pi\int_۰^۱ \frac{t(۱-t^۲)}{۱+t^۲}\,dt$

ج) $۴\pi\int_۰^۱ \frac{t\sqrt{۱-t^۲}}{۱+t^۲}\,dt$ د) $۴\pi\int_۰^۱ \frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}\,dt$

۴۸. ناحیهٔ محدود به خم C به معادلهٔ قطبی $r=۱-\cos\theta$ خارج دایرهٔ $r=\cos\theta$ و بالای محور قطب، کدام است؟

الف) $\{(r,\theta)\mid ۰\le\theta\le\frac{\pi}{۶}, \cos\theta\le r\le ۱-\cos\theta\}$

ب) $\{(r,\theta)\mid ۰\le\theta\le\frac{\pi}{۳}, ۱-\cos\theta\le r\le\cos\theta\}$

ج) $\{(r,\theta) \mid ۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۶}, ۱ - \cos\theta \le r \le ۱\}$
د) $\{(r,\theta) \mid ۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۳}, \cos\theta \le r \le ۱ - \cos\theta\}$

۴۹. فرض کنید $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^۳ \mid ۰ \le x \le ۱, ۰ \le y \le ۱, ۰ \le z \le ۱\}$. مقدار انتگرال $\iiint_T e^{x+y+z}\, dV$ کدام است؟

الف) $e^۳ - ۱$ ب) $(e-۱)^۳$ ج) $(e+۱)^۳$ د) $e^۳ + ۱$

فصل ۵

آنالیز برداری

۵-۱ تمرینات تشریحی

۱. انتگرال خطی

$$\oint_C -xy\,dx + (y^۲ + ۱۶)\,dy$$

که در آن C نیمهٔ بالایی بیضی $۴x^۲ + y^۲ = ۱$ و پاره خط واصل بین نقاط $(\pm\frac{۱}{۲}, ۰)$ است را در نظر بگیرید.

الف) انتگرال را مستقیماً با استفاده از تعریف محاسبه کنید.
ب) انتگرال را با استفاده از قضیهٔ گرین بیابید.

۲. مطلوبست محاسبهٔ

$$\oint_C \overrightarrow{F}.dr$$

که در آن C فصل مشترک صفحهٔ $z = y$ با استوانهٔ $x^۲ - ۲x + y^۲ = ۰$ است و $\overrightarrow{F} = (xy)\overrightarrow{k}$.

۳. با استفاده از قضیهٔ گرین انتگرال $\oint_C (۳x^۲y + x^۳)dx - (y^۳ + ۳xy^۲)dy$ که در آن C دایرهٔ واحد است را حساب کنید.

۴. مطلوبست محاسبهٔ $\int_C \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dr}$ برای میدان برداری

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x^۲ - y)\overrightarrow{i} + (y^۲ - z)\overrightarrow{j} + (z^۲ - x)\overrightarrow{k}$$

که در آن C قسمتی از خم $\begin{cases} x = t \\ y = t^۲ \\ z = t^۳ \end{cases}$ برای $۰ \le t \le ۱$ است.

۵. انتگرال سطح $\int\int_S z\, d\sigma$ که در آن S قسمتی از مخروط $z^۲ = x^۲ + y^۲$ واقع در بالای صفحهٔ xoy و زیر صفحهٔ $z = ۱$ است را محاسبه کنید.

۶. میدان برداری $\overrightarrow{F}(x,y,z) = zx^۲\overrightarrow{i} + xy^۲\overrightarrow{j} + yz^۲\overrightarrow{k}$ مفروض است. با استفاده از قضیهٔ دیورژانس انتگرال $\int\int_S \overrightarrow{F}.\overrightarrow{n}\ d\sigma$ که در آن S سطح بستهٔ محدود به مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و نیم‌کرهٔ $z = \sqrt{۱ - (x^۲ + y^۲)}$ است را محاسبه کنید.

۷. میدان برداری $\overrightarrow{F}(x,y,z) = -y\overrightarrow{i} + x^۲\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ و منحنی بستهٔ C که از برخورد استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ و صفحهٔ $x + y + z = ۱$ حاصل می‌شود مفروض است. مطلوب است محاسبهٔ انتگرال خطی $I = \int_C \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dr}$
الف) از روش مستقیم.
ب) با استفاده از قضیهٔ استوکس.

۸. انتگرال $\oint_C (۳x^۲y + y^۳)dx + (x^۳ + ۳xy^۲)dy$ که در آن C قسمتی از خم $y = xe^{x-۱}$ از نقطهٔ $(۰,۰)$ به نقطهٔ $(۱,۱)$ است را حساب کنید.

۹. مطلوبست محاسبهٔ $\int_C \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dr}$ برای میدان برداری

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x^۲ - y)\overrightarrow{i} + (y^۲ - z)\overrightarrow{j} + (z^۲ - x)\overrightarrow{k}$$

که در آن C قسمتی از خم $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ برای $۰ \le t \le ۱$ است.

۱۰. انتگرال سطح $\int\int_S z^2\, d\sigma$ که در آن S قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ واقع در بالای صفحهٔ xoy و زیر صفحهٔ $z=1$ است را محاسبه کنید.

۱۱. میدان برداری $\overrightarrow{F}(x,y,z)=3x\overrightarrow{i}-y^2\overrightarrow{j}+z^2\overrightarrow{k}$ مفروض است. با استفاده از قضیهٔ دیورژانس انتگرال $\int\int_S \overrightarrow{F}.\overrightarrow{n}\, d\sigma$ که در آن S سطح بستهٔ حاصل از برخورداستوانهٔ $x^2+y^2=1$ و صفحات $z=0$ و $z=1$ است را محاسبه کنید.

۱۲. مطلوبست محاسبهٔ $\int_C \sin x\cos y\, dx+(xy+\cos x\sin y)dy$ که در آن C مرز ناحیهٔ واقع بین خط $y=x$ و منحنی $y=\sqrt{x}$ است.

۱۳. برای میدان $F(x,y,z)=2z\overrightarrow{i}+x\overrightarrow{j}+y^2\overrightarrow{k}$ و رویهٔ S که قسمتی از سهمیگون $z=4-x^2-y^2$ بالای صفحهٔ $z=1$ است، قضیهٔ استوکس را تحقیق کنید (به عبارت دیگر تساوی $\int_C \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr}=\int\int_S \overrightarrow{curlF}\cdot\overrightarrow{n}\, d\sigma$ را تحقیق کنید که در آن C فصل مشترک سهمیگون با صفحهٔ $z=1$ است.)

۱۴. فرض کنید S سطح کل پوشانندهٔ ناحیهٔ محصور توسط نیم کرهٔ $z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$، استوانهٔ $x^2+y^2=1$ و صفحهٔ $z=0$ است. اگر $F(x,y,z)=5x\overrightarrow{i}+(2-y+2x^2yz)\overrightarrow{j}+(4-2z-x^2z^2)\overrightarrow{k}$، مطلوبست تعیین مقدار $\int\int_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\, d\sigma$.

۱۵. فرض کنید S قسمتی از سهمیگون $z=2-x^2-y^2$ است که توسط استوانهٔ $x^2+y^2=1$ بریده شده است و C مرز آن پیموده شده در جهت مثبت (نسبت به نرمال خارجی سهمیگون) است. اگر $F(x,y,z)=x^2\overrightarrow{i}+x\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$ مطلوبست تعیین $\int_C \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr}$.

۱۶. فرض کنید C خم حاصل از برخورد صفحهٔ $z=y$ با کرهٔ $x^2+y^2+z^2=1$ است. اگر $F(x,y,z)=(e^x+z^2)\overrightarrow{i}+(e^y+x^2)\overrightarrow{j}+(e^z+y^2)\overrightarrow{k}$، مطلوبست محاسبهٔ $\int_C \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr}$.

۱۷. فرض کنید S قسمتی از سهمیگون $z=x^2+y^2$ زیر صفحهٔ $z=y$ بوده، $\overrightarrow{n}$ قائم یکه بر S رو به سمت خارج سهمیگون باشد. اگر $F(x,y,z)=(x+yz)\overrightarrow{i}+(y-z)\overrightarrow{j}+xy\overrightarrow{k}$ باشد، مطلوبست محاسبهٔ $\int\int_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\, d\sigma$.

۱۸. فرض کنید که S قسمتی از کرهٔ $x^۲ + y^۲ = z^۲ = ۲$ باشد که زیر صفحهٔ $z = ۱$ قرار دارد. اگر میدان برداری F به صورت

$$F(x, y, z) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

تعریف شده باشد، آنگاه مقدار $\int\int_s \overrightarrow{F}.\overrightarrow{n}d\sigma$ را، که در آن $\overrightarrow{n}$ بردار نرمال واحد بر رویهٔ S می باشد که جهتش به سمت خارج است، محاسبه نمایید.

۱۹. فرض کنید C منحنی بستهٔ حاصل تلاقی دو سهمی $y = x^۲ - ۱$ و $y = ۱ - x^۲$ است. مطلوب است محاسبهٔ انتگرال زیر:

$$\oint_C \frac{(x-y)dx + (x+y)dx}{x^۲ + y^۲}$$

۲۰. فرض کنید T ناحیه خارج استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ و داخل کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ و S رویهٔ محصور کنندهٔ ناحیهٔ T باشد.
الف) مطلوب است تعیین مساحت سطح رویهٔ S.
ب) برای میدان $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (x + yz)\overrightarrow{i} + (y + xz)\overrightarrow{j} + (z + xy)\overrightarrow{k}$ مطلوب است تعیین $\int\int_S \overrightarrow{F}.\overrightarrow{n}d\sigma$. که در آن $\overrightarrow{n}$ همه جا رو به سمت خارج سطح بستهٔ S است.

۲۱. منحنی C محل تلاقی نیم‌کرهٔ بالایی از کرهٔ به معادلهٔ $x^۲+y^۲+z^۲ = ۴z$ با استوانه به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲y$ است . اگر $\overrightarrow{F}(x, y, z) = ۲x\overrightarrow{i} + (۳y + x^۲)\overrightarrow{j} + ۴z\overrightarrow{k}$ مطلوبست محاسبهٔ $\oint_C \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dr}$.

۲۲. فرض کنید S سطح بسته متشکل از سهمیگون $z = x^۲ + y^۲$ و صفحهٔ $z = ۲y - ۲x + ۲$ بوده، $\overrightarrow{n}$ بردار قائم یکهٔ سطح همه جا رو به سمت خارج S است. مطلوبست محاسبهٔ انتگرال سطح $\int\int_S(\overrightarrow{F}.\overrightarrow{n})d\sigma$ برای میدان

$$.\overrightarrow{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

۲۳. فرض کنید T ناحیهٔ محصور به استوانه های $x^۲ + y^۲ - ۲y = ۰$، $x^۲ + y^۲ - ۴y = ۰$ و مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و صفحهٔ xoy باشد. مطلوبست محاسبهٔ
الف) حجم ناحیهٔ T.

ب) $\int\int_S \overrightarrow{F}.\overrightarrow{n}\ d\sigma$ که S رویهٔ بستهٔ محصورکنندهٔ T است و n یکهٔ نرمال قائم S رو به خارج است و $\overrightarrow{F} = [x+\sin(yz)]\overrightarrow{i} + [y+e^{xz}]\overrightarrow{j} + [z+\sin(xy)]\overrightarrow{k}$.

۲۴. فرض کنید C منحنی حاصل از تلاقی سهمی گون $z = ۱ - x^۲ - y^۲$ و صفحهٔ $z + ۲y = ۱$ باشد که جهت حرکت روی آن در جهت مثبت است (القا شده به وسیلهٔ بردار یکهٔ نرمال n رو به بالا). مطلوبست محاسبهٔ $\int_C \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dr}$ با فرض $F(x,y,z) = xz^۲\overrightarrow{i} + yz\overrightarrow{j} + x^۲\overrightarrow{k}$.

۲۵. فرض کنید S نیمکرهٔ $z = \sqrt{۱ - x^۲ - y^۲}$ باشد. مطلوب است محاسبهٔ
الف) $\int\int\int_T z^۲\ dV$ که در آن T ناحیهٔ محدود بین S و صفحهٔ $z = ۰$ است.
ب) $\int\int_S \overrightarrow{F}.\overrightarrow{n}\ d\sigma$ که در آن $\overrightarrow{n}$ قایم یکهٔ بالایی بر S است و

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (xz^۲ + y^۲)\overrightarrow{i} + yz^۲\overrightarrow{j} + z^۳\overrightarrow{k}$$

۲۶. فرض کنید S بخشی از سطح بیضیگون $۴x^۲ + ۴y^۲ + z^۲ = ۵$ باشد که در ناحیهٔ $z \geqslant ۱$ قرار دارد و $\overrightarrow{n}$ قایم یکهٔ بالایی بر سطح S باشد و $\overrightarrow{F}(x,y,z) = ۲xyz\overrightarrow{i} + (z - y^۲z)\overrightarrow{j} + z^۲\overrightarrow{k}$. مطلوبست

$$\int\int_S \overrightarrow{F}.\overrightarrow{n}\ d\sigma$$

۲۷. فرض کنید C منحنی متشکل از پاره خط واصل $(۰,۰)$ به $(۲,۲)$ و منحنی به معادلات پارامتری $x = ۲\cos t$ و $y - ۲ = ۲\sin t$ $(۰ \leqslant t \leqslant \frac{۳\pi}{۲})$ باشد. مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_C \frac{(۲-y)\ dx + x\ dy}{x^۲ + (y-۲)^۲}$$

۲۸. $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \ln(x^۲+y^۲)\overrightarrow{i} + \tan^{-۱}(\frac{y}{x})\overrightarrow{j} + xy\overrightarrow{k}$ که در آن $\int\int_S \overrightarrow{F}.\overrightarrow{n}\ d\sigma$ و S سطح در برگیرندهٔ ناحیهٔ بین کره‌های $x^۲+y^۲+z^۲ = ۲z$ و $x^۲+y^۲+z^۲ = ۴z$ و خارج از مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ می باشد و n قایم یکهٔ خارجی بر S است. مطلوب است محاسبهٔ $\int\int_S (۱ - z)\cos(\frac{x-y}{x+y})\ d\sigma$ که S بخشی از صفحهٔ $x + y + z = ۱$ است که در یک هشتم اول فضا قرار دارد.

۲-۵ تمرینات تستی

۲۹. انتگرال منحنی الخط $\oint_C (۳y - e^{\sin x})dx + (۷x + \sqrt{۱+y^۴})dy$ که در آن C دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۹$ طی شده در جهت مثبت میباشد، برابر با کدامیک از مقادیر زیر است؟

الف) ۱۲π ب) ۳۶π ج) ۵۴π د) ۲۴π

۳۰. مقدار انتگرال $\iint_S x\, d\sigma$ که در آن S قسمتی از صفحهٔ $x + y + z = ۱$ در $\frac{۱}{۸}$ اول فضا میباشد، برابر است با:

الف) ۱ ب) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ ج) -۱ د) $\sqrt{۳}$

۳۱. فرض کنید $F(x,y,z) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ و S کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ با قائم یکهٔ خارجی باشد. مقدار $\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, d\sigma$ برابر است با:

الف) ۳π ب) ۲π ج) ۴π د) ۶π

۳۲. مقدار انتگرال منحنی الخط $\int_C xy\, ds$ که در آن C قسمتی از دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ از نقطهٔ $A(۱,۰)$ به $B(-۱,۰)$ در نیم صفحهٔ $y \geq ۰$ است، برابر کدامیک از مقادیر زیر است؟

الف) صفر ب) $\frac{۱}{۲}$ ج) ۱ د) ۲

۳۳. مقدار انتگرال منحنی الخط $\int_C (x^۲ - y^۲)\, dx - ۲xy\, dy$ که در آن C قسمتی از منحنی $x^۲ - y^۲ = ۱$ از نقطهٔ $A(\sqrt{۲},۱)$ به نقطهٔ $B(-\sqrt{۲},۱)$ است برابر است با:

الف) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ب) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ج) $-\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ د) $-\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

۳۴. مقدار انتگرال $\int_C (x^۳ + ۲y)\, dx + (y^۳ + ۳x)\, dy$ که در آن C دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ است، برابر است با:

الف) صفر ب) $\frac{\pi}{۲}$ ج) ۲π د) $\frac{۲\pi}{۳}$

۳۵. مساحت قسمتی از مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ که بین استوانه‌های $x^۲ + y^۲ = ۱$ و $x^۲ + y^۲ = ۴$ قرار دارد، برابر کدامیک از مقادیر زیر است؟

الف) $۲\sqrt{۲}\pi$ ب) $\sqrt{۲}\pi$ ج) $۳\sqrt{۲}\pi$ د) $۴\sqrt{۲}\pi$

۳۶. مقدار انتگرال سطح $\iint_S x^۴ z\, d\sigma$ که در آن S قسمتی از صفحهٔ $z = ۲$ درون سهمیگون $z = x^۲ + y^۲$ است، برابر است با: (با فرض اینکه $a := \int_۰^{۲\pi} \cos^۴\theta\, d\theta$)

الف) $\frac{۸}{۳}a$ ب) $\frac{۱}{۳}a$ ج) $\frac{۲}{۳}a$ د) $\frac{۴}{۳}a$

۳۷. فرض کنید $F(x,y) = ۲y\overrightarrow{i} + ۳x\overrightarrow{j}$ و C دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x = ۰$ طی شده در جهت مثلثاتی باشد. مقدار انتگرال $\int_C \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr}$ برابر است با:

الف) $\frac{\pi}{۲}$ ب) $\frac{۳\pi}{۲}$ ج) π د) ۲π

۳۸. فرض کنید C یک خم سادهٔ بسته حاوی مبدأ در جهت مثبت باشد و $F = \frac{-۲y\overrightarrow{i}+۲x\overrightarrow{j}}{x^۲+y^۲}$. مقدار $\int_C \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr}$ کدام است؟

الف) صفر ب) π ج) ۲π د) ۴π

۳۹. مساحت قسمتی از مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ که بین استوانه‌های $x^۲ + y^۲ = ۱$ و $x^۲ + y^۲ = ۴$ قرار دارد برابر است با

الف) π ب) ۳π ج) ۶π د) ۹π

۴۰. مقدار انتگرال خط $\int_C \frac{x-y}{x^۲+y^۲}dx + \frac{x+y}{x^۲+y^۲}dy$ که در آن C مربعی است به رئوس $(۰,۱)$، $(-۱,۰)$، $(۰,-۱)$ و $(۱,۰)$ طی شده در جهت مثلثاتی، برابر است با

الف) -۲π ب) π ج) ۲π د) $-\pi$

۴۱. مقدار انتگرال $\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\, d\sigma$ که در آن S یک رویهٔ هموار بسته با بردار قائم یکانی خارجی $\mathbf{n}$ و محدود کنندهٔ ناحیه‌ای به حجم V، و $F(x,y,z) = (۳x + e^{۳y})\overrightarrow{i} + (e^{۴z} - ۴y)\overrightarrow{j} + (۵z + e^{۵y})\overrightarrow{k}$ باشد، برابر است با

الف) V ب) $۲V$ ج) $۳V$ د) $۴V$

۴۲. فرض کنید $F(x,y) = (۲xy - ۱)\overrightarrow{i} + (x^۲ + e^y)\overrightarrow{j}$. اگر C قسمتی از سهمی $y = x^۲$ از نقطهٔ $A(-۱,۱)$ به نقطهٔ $B(۱,۱)$ باشد آنگاه مقدار انتگرال $I = \int_C \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr}$ برابر است با

الف) $I = -\frac{۱}{۲}$ ب) $I = ۱$ ج) $I = -۲$ د) $I =$