

فهرست مطالب

فصل اول عددهای صحیح و گویا.....	۱
فصل دوم حساب اعداد طبیعی.....	۱۵
فصل سوم چند ضلعی‌ها.....	۳۰
فصل چهارم چپر و معادله.....	۴۶
فصل پنجم بردار و مختصات.....	۶۲
فصل ششم فیثاقورس و مثلث.....	۸۰
فصل هفتم توان و جذر.....	۹۵
فصل هشتم آمار و احتمال.....	۱۱۴
فصل نهم دایره‌ها.....	۱۳۷
پاسخ‌نامه تشریحی.....	۱۹۳



درسنامه فصل اول



اعداد صحیح



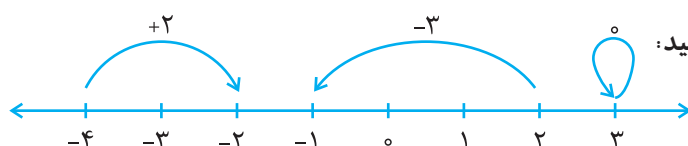
با مجموعه‌ی اعداد صحیح در سال گذشته آشنا شده‌اید. این مجموعه را می‌توان به سه دسته تقسیم نمود: اعداد مثبت (بزرگتر از صفر)، عدد صفر و عددهای منفی (اعداد کوچکتر از صفر)، مجموعه‌ی اعداد صحیح را با علامت $\mathbb{Z}$ نمایش می‌دهند. که شامل بی‌شمار عضو است.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

نکته ۱ عدد حرکت روی محور



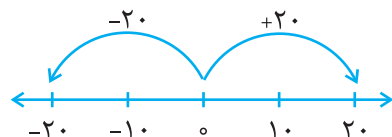
برای مشخص کردن عدد صحیح مربوط به هر حرکت روی محور، ابتدا با توجه به جهت حرکت علامت آن را مشخص می‌کنیم. (حرکت به سمت راست علامت مثبت و حرکت به سمت چپ علامت منفی). سپس با شمارش واحدهای محور، عدد مربوط به حرکت را مشخص می‌کنیم.



مثال ۱ عدد مربوط به هر حرکت را بنویسید:



قرینه‌ی عدد صحیح: اگر به اندازه‌ی فاصله‌ی صفر تا هر عدد روی محور از صفر در جهت خلاف آن حرکت کنیم قرینه‌ی عدد موردنظر به دست خواهد آمد.



$$-20 = \text{قرینه‌ی } +20$$

قرینه را با علامت (-) نمایش می‌دهند. قرینه‌ی هر عدد صحیح را می‌توان با تغییر علامت آن به دست آورد.

$$-(+8) = -8 \quad \text{و} \quad -(-15) = +15 = 15$$

مثال ۲



نکته ۲ قرینه‌ی عدد صفر برابر صفر و قرینه‌ی قرینه‌ی هر عدد مساوی خودش می‌باشد.



$$-(-(-3)) = -3, \quad -(-(+3)) = +3, \quad -0 = 0$$

مثال ۳



جمع و تفریق اعداد صحیح: برای محاسبه حاصل جمع و یا تفریق عددهای صحیح ابتدا مختصر نویسی (ساده نویسی - تعیین علامت) می کنیم. به این صورت که پراترها را حذف کرده، سپس اگر عددی بیشتر از یک علامت داشت علامت های آن را در هم ضرب می کنیم تا به یک علامت تبدیل شود. آن گاه به یکی از دو حالت زیر برخورد می کنیم:

۱ عددها هم علامت باشند: در این حالت یکی از علامت ها را نوشته، سپس عددها را با هم جمع می کنیم.

$$(-3) + (-7) = -3 - 7 = -10 \quad \text{و} \quad (+8) - (-6) = +8 + 6 = +14$$



۲ عددها هم علامت نباشند: در این حالت علامت عددی که بدون در نظر گرفتن علامت بزرگتر است را نوشته سپس عددها را از هم کم می کنیم.

$$(-6) + (+10) = -6 + 10 = +4$$

$$12 - (+13) = +12 - 13 = -1$$



اگر تعداد عددها بیش از دو تا بود، می توان عددهای مثبت را با هم و منفی را با هم جمع کرده و سپس حاصل نهایی را به دست آورد.

$$-4 + (+6) - (+3) + 7 = -4 + 6 - 3 + 7 = -7 + 13 = +6$$



ضرب و تقسیم عددهای صحیح: برای بدست آوردن حاصل ضرب یا تقسیم دو عدد صحیح، ابتدا علامت ها را در هم ضرب کرده، سپس عددها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم می کنیم.

$$(-3) \times (+8) = -24 \quad (-42) \div (-6) = +7$$



محاسبات ترکیبی

۱ اگر عددها دسته بندی شده باشند طبق دسته بندی ها عمل می کنیم و اگر دسته بندی ها هم داخل هم باشند از کوچک ترین (داخلی ترین) دسته بندی کار را شروع می کنیم.

$$\begin{aligned} [(-9) - (+11)] \div [(-4) \times (-1)] &= (-20) \div (+4) = -5 \\ 14 + (9 - (3 + (2 \times (10 - 4)))) &= 14 + (9 - (3 + (2 \times 6))) = 14 + (9 - (3 + 12)) \\ &= 14 + (9 - 15) = 14 - 6 = 8 \end{aligned}$$



۲ اگر عددها دسته بندی نشده باشند طبق اولویت علامت ها عمل می کنیم. ابتدا ضرب و تقسیم سپس جمع و تفریق ها را انجام می دهیم. اگر علامت ها پشت سر هم قرار گیرند محاسبه را از چپ به راست انجام می دهیم.



$$\underbrace{20 \div 4}_5 + 8 - \underbrace{4 \times 3}_{-12} - 3 = 5 + 8 - 12 - 3 = -2$$

اعداد گویا



هر عددی را که بتوان به صورت یک کسر نوشت، به طوری که صورت و مخرج آن عدد صحیح بوده و مخرج آن صفر نباشد را «عدد گویا» می‌نامند.
بنابراین عددهای طبیعی، حسابی، صحیح، کسری، اعشاری، مخلوط، و رادیکال‌هایی که عدد زیر رادیکال آن‌ها مجذور کامل باشد یک عدد گویا می‌باشند.



$$13 = \frac{13}{1}, \quad 0 = \frac{0}{1}, \quad -0.36 = -\frac{36}{100}, \quad \sqrt{25} = 5 = \frac{5}{1}$$

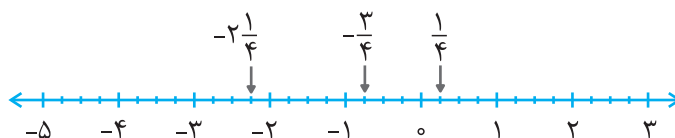
۳ نکته اگر مخرج کسری صفر باشد، کسر را «تعریف نشده» می‌نامند.
تعریف نشده $\rightarrow \frac{6}{0}$



نمایش اعداد گویا روی محور: برای نمایش هر عدد گویا روی محور طبق مراحل زیر عمل می‌کنیم:

- (الف) واحدهای محور را به تعداد عدد مخرج کسر تقسیم می‌کنیم.
- (ب) با توجه به علامت عدد، جهت حرکت را مشخص می‌کنیم. علامت (+) حرکت به سمت راست و علامت (-) حرکت به سمت چپ است.
- (پ) به تعداد عدد صورت کسر از صفر، واحدهای تقسیم شده را شمارش می‌کنیم.

مثال ۱۱ عددهای مقابل را روی محور نمایش دهید.
 $-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -2\frac{1}{4}$



تساوی کسر ها: اگر صورت و مخرج هر کسر را در عددی غیر از صفر ضرب کنیم، یا بر عددی غیر از صفر تقسیم کنیم، کسر حاصل با کسر اول مساوی می‌باشد.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

$\xrightarrow{\times 2}$ $\xrightarrow{\times 3}$ $\xrightarrow{\times 4}$



در تساوی دو کسر اگر یکی از عددها مجهول بود به کمک تساوی کسر ها می‌توان مقدار مجهول را به دست آورد.

$$\frac{3}{7} = \frac{x}{28} \Rightarrow x = 3 \times 4 = 12, \quad \frac{x}{10} = \frac{10}{4} \Rightarrow x = \frac{10 \times 10}{4} = 25$$

$\xrightarrow{\times 4}$



نکته ۴ برای این که یک کسر را تا حد ممکن ساده کنیم باید صورت و مخرج آن را به «ب.م.م» صورت و مخرج تقسیم کنیم.

نکته ۵ برای به دست آوردن ب.م.م ابتدا دو عدد را به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم، سپس حاصل ضرب عامل‌های مشترک دو عدد با توان کم‌تر را حساب می‌کنیم.

مثال ۱۴ کسر مقابل را تا حد ممکن ساده کنید:

$$-\frac{56}{210} = ? \quad 56 = 2^3 \times 7, \quad 210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$(56, 210) = 2 \times 7 = 14 \rightarrow -\frac{56 \div 14}{210 \div 14} = -\frac{4}{15}$$

نکته ۶ در نگارش عددهای گویا، جای علامت تأثیری در مقدار کسر ندارد. یعنی علامت کسر را می‌توان کنار کسر، در صورت و یا در مخرج کسر قرار داد.

$$-\frac{3}{7} = \frac{-3}{7} = \frac{3}{-7}$$

مقایسه عددهای گویا

$$\frac{3}{7} > \frac{3}{10}$$

۱ در عددهای مثبت با صورت مساوی، هر چه مخرج بزرگ‌تر، باشد کسر کوچک‌تر است.

$$-\frac{3}{7} < -\frac{3}{10}$$

۲ در عددهای منفی با صورت مساوی، هر چه مخرج بزرگ‌تر باشد، کسر بزرگ‌تر است.

$$\frac{5}{9} > \frac{2}{9}$$

۳ در عددهای مثبت با مخرج مساوی، هر چه صورت بزرگ‌تر باشد، کسر بزرگ‌تر است.

$$-\frac{5}{9} < -\frac{2}{9}$$

۴ در عددهای منفی با مخرج مساوی، هر چه صورت بزرگ‌تر باشد، کسر کوچک‌تر است.

برای مقایسه دو کسر بهتر است ابتدا آن‌ها را هم مخرج کنیم.

مثال ۱۵ کسرهای زیر را مقایسه کنید:

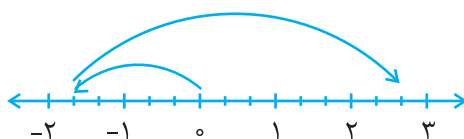
$$\frac{2}{3} \square \frac{1}{4}$$

$$\frac{8}{12} \square \frac{3}{12} \Rightarrow \frac{2}{3} > \frac{1}{4}$$

ابتدا کسرهای را هم مخرج می‌کنیم تا مقایسه ساده‌تر شود.

جمع و تفریق عددهای گویا

جمع متناظر با حرکت روی محور: ابتدا با توجه به جهت حرکت‌ها، علامت آن‌ها را مشخص کرده، سپس با شمارش واحدها عدد حرکت را بدست می‌آوریم. در پایان نقطه‌ای انتها حاصل جمع حرکت‌ها می‌باشد.



مثال ۱۶ جمع متناظر با محور مقابل را بنویسید:

$$\left(-\frac{5}{3}\right) + \left(+\frac{13}{3}\right) = +\frac{8}{3}$$

تبدیل تفریق به جمع: برای تبدیل هر تفریق به جمع کافی است عدد اول را با قرینه‌ی عدد دوم جمع کنیم:

مثال ۱۷ عبارت زیر را به جمع تبدیل کنید:



$$\frac{3}{4} - (-\frac{1}{5}) = \frac{3}{4} + (+\frac{1}{5}) = \frac{3}{4} + \frac{1}{5}$$

جمع و تفریق عددهای گویا

۱ **مخرج‌ها مساوی باشند:** ابتدا علامت کسر را به صورت انتقال می‌دهیم و سپس حاصل صورت‌ها را به دست آورده و یکی از مخرج‌ها را می‌نویسیم:



مثال ۱۸

$$(-\frac{3}{4}) + (+\frac{8}{4}) = \frac{-3}{4} + \frac{+8}{4} = \frac{-3 + (+8)}{4} = \frac{5}{4}$$

۲ **مخرج‌ها مساوی نباشند:** در این حالت ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم. برای این کار از (ک.م.م) مخرج‌ها استفاده می‌کنیم؛ عدد بزرگتر را در اعداد طبیعی ضرب می‌کنیم. هر کجا حاصل ضرب بر عدد کوچک‌تر بخش پذیر شد آن عدد کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد (ک.م.م) می‌باشد.



مثال ۱۹

$$\frac{5}{8} - (-\frac{1}{6}) = \frac{5}{8} + \frac{1}{6} = \frac{15 + 4}{24} = \frac{19}{24}$$

ضرب و تقسیم عددهای گویا

۱ **ضرب عددهای گویا:** در ضرب عددهای گویا ابتدا علامت‌ها را در هم ضرب می‌کنیم، سپس صورت‌ها را در هم و مخرج‌ها را در هم ضرب می‌کنیم. بهتر است قبل از انجام ضرب، ابتدا عددها را تا حد ممکن ساده کرده و سپس ضرب کنیم.

$$(-\frac{\cancel{2}}{\cancel{24}^2}) \times (-\frac{\cancel{3}}{\cancel{27}^3}) = +\frac{1}{6}$$

۲ **معکوس عدد گویا:** در هر عدد گویا اگر جای صورت و مخرج را عوض کنیم معکوس آن به دست می‌آید؛

۱ در معکوس کردن علامت عدد تغییر نمی‌کند.

۲ صفر معکوس ندارد چون کسری که مخرج آن صفر باشد «تعریف نشده» است.

۳ عددهای مخلوط را ابتدا به کسر تبدیل کرده و سپس معکوس می‌کنیم:



مثال ۲۰

$$-\frac{4}{9} \xrightarrow{\text{معکوس}} -\frac{9}{4}, \quad 0\frac{36}{36} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{100}{36}, \quad -2\frac{2}{7} \xrightarrow{\text{معکوس}} -\frac{7}{16}$$

۱ **تقسیم عددهای گویا:** در تقسیم عددهای گویا ابتدا علامت‌ها را در هم ضرب کرده و سپس عدد اولی را در معکوس عدد دوم ضرب می‌کنیم:



مثال ۲۱

$$\frac{7}{4} \div (-\frac{5}{2}) = \frac{7}{4} \times (-\frac{\cancel{2}}{\cancel{5}^2}) = -\frac{7}{10}$$

نکته ۷ حاصل ضرب هر عدد در معکوشش مساوی یک می باشد.



$$\left(-\frac{5}{7}\right) \times \left(-\frac{7}{5}\right) = +1$$

مثال ۲۲

نکته ۸ حاصل تقسیم هر عدد بر معکوشش مساوی توان دوم آن عدد می باشد.



$$\frac{8}{3} \div \frac{3}{8} = \frac{8}{3} \times \frac{8}{3} = \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{9}$$

مثال ۲۳

محاسبه‌ی عبارت‌های ترکیبی: در عبارت‌های ترکیبی ابتدا حاصل دسته‌بندی‌ها (پرانتز- کروشه) را به دست آورده، سپس با توجه به علامت بین، حاصل کل را محاسبه می‌کنیم:

مثال ۲۴ حاصل عبارت زیر را حساب کنید:



$$\begin{aligned} \left[\left(-\frac{3}{5}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right) \right] \div \left(1 - \frac{3}{10}\right) &= \left(\frac{-12+5}{20}\right) \div \left(\frac{10-3}{10}\right) = -\frac{7}{20} \div \frac{7}{10} \\ &= -\frac{\cancel{7}^1}{\cancel{20}^2} \times \frac{\cancel{10}^1}{\cancel{7}_1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

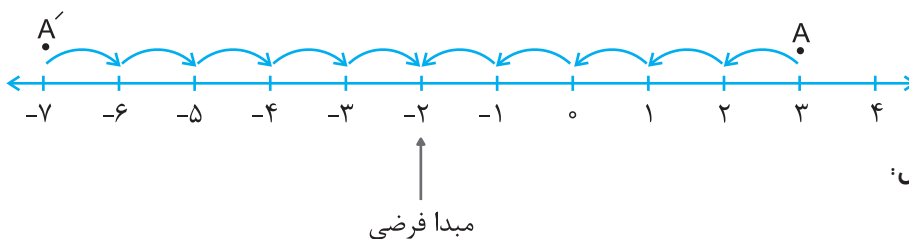
آموزش نکات تکمیلی عددی صبیح و کویا



نکته ۹ قرینه‌ی عدد صحیح a نسبت به عدد صحیح b روی محور اعداد صحیح نقطه‌ی $2b - a$ می باشد.



مثال ۲۵ قرینه‌ی نقطه‌ی ۳ نسبت به نقطه‌ی -۲ کدام نقطه است؟



پاسخ:

روش اول: به کمک شکل:



$$2 \times (-2) - 3 = -4 - 3 = -7$$

روش دوم: به کمک رابطه:



نکته ۱۰ با داشتن مجموع و اختلاف (تفاضل) دو عدد می‌توان به کمک رابطه‌های صفحه بعد آن دو عدد را پیدا کرد.



$$\text{اختلاف دو عدد} + \text{مجموع دو عدد} = \frac{\text{عدد بزرگتر} - \text{عدد کوچکتر}}{2}$$

$$\text{اختلاف دو عدد} - \text{مجموع دو عدد} = \frac{\text{عدد بزرگتر} - \text{عدد کوچکتر}}{2}$$

مثال ۲۶ میانگین دو عدد صحیح ۳۶- و اختلاف آن‌ها ۱۲ می‌باشد. آن دو عدد کدام‌اند؟



$$\text{مجموع دو عدد} = -72 = (-36) \times 2$$



$$\text{عدد بزرگتر} = \frac{(-72) + 12}{2} = \frac{-60}{2} = -30$$

$$\text{عدد کوچکتر} = \frac{(-72) - (+12)}{2} = \frac{-84}{2} = -42$$

ترتیب یا اولویت انجام عملیات در محاسبات عددی به صورت زیر است.



۱۴ جمع و تفریق

۱۳ ضرب و تقسیم

۱۲ توان

۱۱ گروه و پرانتز

مثال ۲۷ حاصل عبارت زیر را بدست آورید.



$$9 - 9 \times (4 - 6)^4 = 9 - 9 \times (-2)^4 = 9 - 9 \times (+16) = 9 - 144 = -135$$

توجه هرگاه ضرب و تقسیم و یا جمع و تفریق کنار هم قرار گیرند از سمت چپ محاسبات را انجام می‌دهیم.

نکته ۱۲ به گروهی از اعداد صحیح که بین هر دو عدد متوالی آن یک فاصله‌ی ثابت یا منظم باشد یک سری عددی می‌گوییم که با رابطه‌های زیر می‌توان مجموع آن‌ها را به دست آورد.



$$1 + \frac{\text{عدد اول} - \text{عدد آخر}}{\text{فاصله دو عدد متوالی}} = \text{تعداد اعداد سری}$$

$$\text{میانگین اعداد سری} = \frac{\text{عدد اول} + \text{عدد آخر}}{2}$$

$$\text{میانگین اعداد} \times \text{تعداد اعداد} = \text{مجموع یک سری}$$

مثال ۲۸ حاصل عبارات زیر را به دست آورید.



$$200 - \dots - 20 - 15 - 10 - (الف) \quad 9 - 12 + 11 - 14 + \dots + 125 - 128 = (ب)$$

پاسخ (الف) ابتدا علامت منفی را برای اعداد در نظر نمی‌گیریم و در آخر برای جواب علامت منفی قرار می‌دهیم:



$$\text{میانگین} = \frac{200 + 10}{2} = \frac{210}{2} = 105 \quad \text{و} \quad 39 = \frac{190}{5} + 1 = \frac{200 - 10}{5} + 1 = \text{تعداد}$$

$$\text{مجموع} = 105 \times 39 = 4095$$

$$(ب) \underbrace{9 - 12}_{-3} + \underbrace{11 - 14}_{-3} + \dots + \underbrace{125 - 128}_{-3} =$$

پاسخ (ب) تعداد اعداد منفی و مثبت در این دنباله با هم برابرند و مجموع هر دو عدد متوالی مثبت و منفی برابر -3 می‌باشد. پس کافی است بدانیم چند عدد مثبت یا منفی داریم، در آن صورت تعداد -3 ها معلوم خواهد شد.



$$\text{تعداد} = \frac{125 - 9}{2} + 1 = \frac{116}{2} + 1 = 58 + 1 = 59$$

$$\text{مجموع دنباله} = 59 \times (-3) = -177$$

نکته ۱۲ با توجه به روابط گفته شده در بالا برای به دست آوردن مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا عدد دلخواه n از رابطه‌ی زیر هم می‌توان استفاده نمود. (این رابطه به نام دستور «گاوس» معروف است)



$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$A = 1 + 2 + 3 + \dots + 150 =$$

مثال ۲۹ حاصل عبارت مقابل را بدست آورید.



$$A = \frac{150 \times (150 + 1)}{2} = 75 \times 151 = 11325$$

پیدا کردن کسری بین دو کسر با توجه به این که دو عدد هر قدر به هم نزدیک باشند باز هم بی‌شمار عدد گویا بین آن‌ها می‌توان پیدا کرد، اکنون به چند روش برای یافتن یک یا چند کسر مابین دو کسر، اشاره می‌کنیم:

۱ هم مخرج کردن با توجه به مخرج‌های داده شده و با در نظر گرفتن «ک.م.م» مخرج‌ها، کسرهای داده شده را هم مخرج می‌کنیم. و در صورتی که پس از این کار صورت‌ها دو عدد متوالی شدند صورت و مخرج کسرهای به دست آمده را در عدد مناسبی ضرب می‌کنیم تا بین آن‌ها کسر موردنظر پیدا شود.

مثال ۳۰ بین $\frac{3}{4}$ و $\frac{4}{5}$ سه کسر پیدا کنید:



$$[4, 5] = 20 \rightarrow \frac{4}{5} = \frac{16}{20}, \frac{3}{4} = \frac{15}{20}$$

پاسخ: ملاحظه می‌کنید که ۱۵ و ۱۶ دو عدد متوالی هستند چون می‌خواهیم بین $\frac{3}{4}$ و $\frac{4}{5}$ سه کسر



داشته باشیم صورت و مخرج $\frac{15}{20}$ و $\frac{16}{20}$ را در $(3+1)$ یعنی ۴ ضرب می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{15 \times 4}{20 \times 4} = \frac{60}{80} \\ \frac{16 \times 4}{20 \times 4} = \frac{64}{80} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{60}{80} < \frac{61}{80} < \frac{62}{80} < \frac{63}{80} < \frac{64}{80}$$

P میانگین گرفتن بین دو کسر: یعنی دو کسر را جمع کرده و حاصل را بر ۲ تقسیم کنیم.



مثال ۳۱ بین $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{4}$ دو کسر پیدا کنید:



پاسخ:



$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12} \qquad \frac{17}{12} \div 2 = \frac{17}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{24}$$

حالا برای یافتن دومین کسر بین $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{4}$ کافی است $\frac{17}{24}$ را با $\frac{2}{3}$ یا $\frac{3}{4}$ در نظر بگیریم و میانگین آنها را حساب کنیم.

$$\frac{17}{24} + \frac{3}{4} = \frac{17+18}{24} = \frac{35}{24} \qquad \frac{35}{24} \div 2 = \frac{35}{24} \times \frac{1}{2} = \frac{35}{48}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{17}{24} < \frac{35}{48} < \frac{3}{4}$$

۳ جمع کردن صورت‌ها با هم و مخرج‌ها با هم: به طور کلی اگر a و b و c و d چهار عدد صحیح دلخواه باشند ($b \neq 0, d \neq 0$) در این صورت داریم:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

مثال ۳۲ بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ یک کسر پیدا کنید:



کسر مسلسل: کسرهای مسلسل یا چند طبقه‌ای کسرهای هستند که در صورت یا مخرج آنها به طور متوالی چند کسر دیگر به صورت طبقاتی قرار گرفته‌اند. برای حل این نوع کسرها از آخرین کسری که در صورت یا در مخرج قرار گرفته است شروع به حل می‌کنیم:

$$1 + \frac{2}{-1 + \frac{3}{5}} =$$

مثال ۳۳ حاصل عبارت مقابل را به ساده‌ترین صورت بنویسید:



$$1 + \frac{2}{-1 + \frac{3}{5}} = 1 + \frac{2}{-\frac{1}{1} + \frac{3}{5}} = 1 + \frac{2}{\frac{-5+3}{5}} = \frac{1}{1} + \frac{\frac{2}{1}}{\frac{-2}{5}} = \frac{1}{1} - \frac{10}{2} = 1 - 5 = -4$$



کسر تلسکوپی: نوع اول: در این نوع کسرها عدد صورت کسر با اختلاف دو عدد مخرج برابر است.

$$c > b, a = c - b \Rightarrow \frac{a}{b \times c} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$$

$$A = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$$

مثال ۳۴ حاصل عبارت مقابل را بدست آورید:



$$A = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right)$$

پاسخ:



$$A = \frac{1}{1} - \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_0 - \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_0 + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{1} - \frac{1}{100} = \frac{100}{100} - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

نوع دوم: در این کسرها عدد صورت با مجموع عددهایی که در مخرج در هم ضرب شده‌اند برابر است. که می‌توان آن‌ها را به صورت زیر از هم جدا کرد.

$$a, b \neq 0$$

$$\frac{a+b}{a \times b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

مثال ۳۵ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.



$$B = \frac{3}{1 \times 2} - \frac{5}{2 \times 3} + \frac{7}{3 \times 4} - \frac{9}{4 \times 5} + \dots + \frac{59}{29 \times 30}$$



$$B = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{29} + \frac{1}{30}\right)$$

$$B = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{29} + \frac{1}{30} = \frac{1}{1} + \frac{1}{30} = \frac{30}{30} + \frac{1}{30} = \frac{31}{30}$$

مثال ۳۶ حاصل عبارت مقابل را به دست آورید:



$$\frac{1}{13 \times 15} + \frac{1}{15 \times 17} + \frac{1}{17 \times 19} + \dots + \frac{1}{65 \times 67} = ?$$

پاسخ: اگر صورت کسرهای مقابل عدد ۲ بودند، کسرها تلسکوپی می‌شدند، بنابراین لازم است همه‌ی کسرها را ۲ برابر کنیم و در آخر برای رسیدن به جواب اصلی حاصل را بر ۲ تقسیم کنیم.



$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{13 \times 15} + \frac{2}{15 \times 17} + \frac{2}{17 \times 19} + \dots + \frac{2}{65 \times 67} \right) &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{17} \right. \\ &\left. + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \dots + \frac{1}{65} - \frac{1}{67} \right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{67} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{54}{871} = \frac{27}{871} \end{aligned}$$

نکته ۱۴ اگر x درصد از عددی کم کرده باشیم برای این که آن را به مقدار اولیه بازگردانیم باید.



$$\frac{100 \times x}{100 - x} \text{ درصد به آن اضافه کنیم.}$$

مثال ۳۷ از قیمت کالایی ۲۰٪ کم کرده‌ایم، اگر بخواهیم آن را به قیمت اولیه بازگردانیم چند درصد



به قیمت جدید باید اضافه شود؟

$$x\% = 20\% \Rightarrow \frac{100 \times 20}{100 - 20} = \frac{2000}{80} = 25$$

۲۵٪ باید اضافه شود

نکته ۱۵ اگر x درصد به عددی اضافه شود برای این که آن را به مقدار قبلی بازگردانیم باید:



$$\frac{100 \times x}{100 + x} \text{ درصد از آن کم کنیم:}$$

مثال ۳۸ به طول زمان یک کلاس درس ۳٪ اضافه شده است. برای این که آن را به زمان قبلی خود بازگردانیم چند درصد از زمان فعلی باید کم کنیم؟ 

$$\frac{100 \times 30}{100 + 30} = \frac{3000}{130} \approx 23\%$$

پاسخ: 

نکته ۱۶ اگر روی یک کالا چند تخفیف متوالی داده شده باشد برای به دست آوردن تخفیف کلی کافی است که درصد پرداختی‌های هر مرحله را در مرحله‌ی دیگر ضرب کنیم و حاصل را از ۱۰۰٪ کم کنیم. 

مثال ۳۹ قیمت یک کالا ۱۴۰۰۰ تومان است. اگر یک بار ۱۰٪ تخفیف روی کالا داده شده و بار دیگر ۲۰٪ تخفیف روی قیمت جدید داده شده باشد، قیمت فعلی آن چه قدر است؟ 

$$\begin{cases} 100\% - 10\% = 90\% \\ 100\% - 20\% = 80\% \end{cases} \Rightarrow \frac{80}{100} \times \frac{90}{100} = \frac{72}{100} \Rightarrow 72\% \text{ قیمت پرداختی}$$

$$100\% - 72\% = 28\% \text{ تخفیف کلی} \quad 14000 \times \frac{72}{100} = 10080 \text{ تومان}$$

نکته ۱۷ اگر یک کار توسط نفر اول در a ساعت و توسط نفر دوم در b ساعت و توسط نفر سوم در c ساعت و توسط ... انجام شود در صورتی که همه با هم این کار را انجام دهند این کار در n ساعت انجام خواهد شد که مقدار n از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است. 

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots$$

مثال ۴۰ علی کاری را در ۴ ساعت، محمدحسین همان کار را در ۶ ساعت و رضا همان کار را در ۸ ساعت انجام می‌دهند. در صورتی که هر سه نفر با هم شروع به کار کنند. آن کار را در چند ساعت تمام می‌کنند؟ 

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{8 + 4 + 3}{24} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{5}{8} \Rightarrow n = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5} \text{ ساعت} = 96 \text{ دقیقه}$$

نکته ۱۸ اگر v_1 لیتر اسید a_1 درصد را با v_2 لیتر اسید a_2 درصد، ترکیب کنیم. درصد مخلوط حاصل از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید: 

$$\frac{a_1 v_1 + a_2 v_2}{v_1 + v_2}$$

مثال ۴۱ اگر ۳۰ لیتر الکل ۴۰٪ را با ۲۰ لیتر الکل ۶۰٪ مخلوط کنیم، الکل چند درصد حاصل شود؟ 

$$\frac{30 \times 40 + 20 \times 60}{30 + 20} = \frac{1200 + 1200}{50} = \frac{2400}{50} = 48\%$$

آزمون شماره ۱



۱- حاصل کدام گزینه به صفر نزدیک تر است؟

(۱) $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \div \frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{5} \div \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

۲- حاصل عبارت $۳^۲ - ۴^۲ + ۵^۲ - ۶^۲$ برابر است با:

(۱) -۱۸ (۲) -۵۴ (۳) +۱۸ (۴) +۵۴

۳- حاصل ضرب $(۲۰۱۵ - ۱۳۹۵)(۲۰۱۴ - ۱۳۹۵) \dots (۲ - ۱۳۹۵)(۱ - ۱۳۹۵)$ برابر کدام گزینه است؟

(۱) صفر (۲) -۱ (۳) $-۱۳۹۴ \times \dots \times ۶۲۲$ (۴) $۱ \times ۲ \times \dots \times ۲۰۱۵$

۴- حاصل $\frac{۹۹}{۱۰۰} \times \frac{۹۸}{۹۹} \times \dots \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲}$ برابر است با:

(۱) $۹/۸۵$ (۲) $۰/۰۵$ (۳) $۰/۰۱$ (۴) $۴/۲۵$

۵- معکوس کسر $\frac{x \times x}{x + x}$ برابر با کدام گزینه است؟

(۱) ۱ (۲) $2x$ (۳) $\frac{1}{x}$ (۴) $\frac{2}{x}$

۶- عدد گویای مساوی با $۰/۱۸$ کدام است؟

(۱) $\frac{۱۹۷}{۱۱۰۰}$ (۲) $\frac{۱۹۸}{۱۱۰۰}$ (۳) $\frac{۱۹۹}{۱۱۰۰}$ (۴) $\frac{۲۰۰}{۱۱۰۰}$

$$-۴ - \frac{۲ - ۲\frac{1}{3}}{-۲ + ۲\frac{1}{3}} = ?$$

۷- حاصل عبارت مقابل کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴) -۲

۸- عدد $۳\frac{۲}{۵}$ چند برابر معکوشش است؟

(۱) $\frac{-۲۸۹}{۲۵}$ (۲) $\frac{۲۵}{۲۸۹}$ (۳) $\frac{۲۸۹}{۲۵}$ (۴) $\frac{-۲۵}{۲۸۹}$

۹- کدام کسر از همه کوچک تر است؟

(۱) $\frac{۶۶}{۷۷}$ (۲) $\frac{۵۵۵}{۶۶۶}$ (۳) $\frac{۵۵۵۵}{۴۴۴۴}$ (۴) $\frac{۴۴۴۴۴}{۳۳۳۳۳}$

۱۰- حاصل عبارت $(\frac{1}{7} + \frac{3}{11} + \frac{6}{21}) - (-\frac{6}{7} + \frac{14}{11} - \frac{36}{21})$ برابر است با:

(۱) +۴ (۲) +۲ (۳) -۳ (۴) صفر

$$[-\frac{5}{6} - (-\frac{3}{4})] \times \square = \frac{1}{8}$$

۱۱- در عبارت روبه‌رو به جای مربع چه عددی قرار دهیم تا تساوی درست باشد؟

- (۱) $-\frac{6}{5}$ (۲) $2\frac{1}{3}$ (۳) $+7\frac{1}{2}$ (۴) $-1\frac{1}{5}$

۱۲- کدام عدد گویا است؟

- (۱) $\sqrt{2^4 + 9}$ (۲) $\sqrt{3^2 - 1}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۴) $\frac{4}{\sqrt{9} - 3}$

۱۳- قرینه‌ی معکوس حاصل $(5 \div \frac{5}{4}) + (-2 \div \frac{1}{5}) - (1 \div \frac{1}{3})$ کدام است؟

- (۱) ۱۷ (۲) $\frac{1}{17}$ (۳) $-\frac{1}{17}$ (۴) -۱۷

$$\frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{5}{9}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}$$

۱۴- از کسرهای مقابل، چند تا مختوم هستند؟

- (۱) هیچ (۲) یکی (۳) دو تا (۴) ۵ تا

۱۵- حاصل عبارت $(\frac{48}{20 \times 28}) - (\frac{33}{13 \times 20}) + (\frac{20}{7 \times 13}) - (\frac{9}{2 \times 7})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{20}{28}$ (۲) $\frac{1}{14}$ (۳) $\frac{13}{28}$ (۴) $\frac{15}{28}$

۱۶- در جدول زیر، مجموع هر سه خانه‌ی متوالی برابر با ۵ است، عدد خانه‌ی دوم از سمت چپ کدام است؟

-۱۱					+۹
-----	--	--	--	--	----

- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) ۷ (۴) -۷

۱۷- حاصل جمع کدام سه عدد با حاصل ضربشان برابر نیست؟

- (۱) ۱، ۲ و ۳ (۲) ۱، ۲ و -۳ (۳) ۳، -۳ و ۰ (۴) -۱، -۲ و -۳

۱۸- کوچک‌ترین عدد طبیعی که اگر آن را بر $\frac{85}{187}$ تقسیم کنیم حاصل یک عدد صحیح شود چیست؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۹- حاصل عبارت $1 + \frac{99}{100} + \dots + \frac{2}{100} + \frac{1}{100}$ برابر است با:

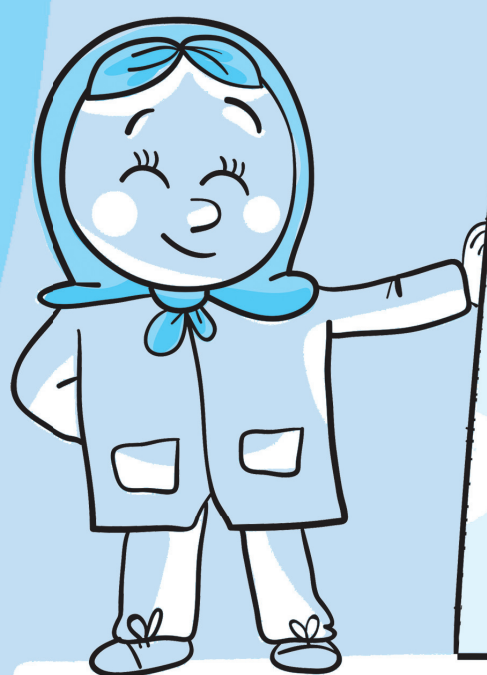
- (۱) ۵۰ (۲) $50\frac{5}{5}$ (۳) ۵۰۵ (۴) ۵۰۵۰

$$\frac{3}{4} \text{ و } \frac{34}{5}, \frac{34}{35}, \frac{41}{50}$$

(۴) چهارتا

۲۰- از بین اعداد زیر چند تا در رابطه‌ی $\frac{2}{5} < x < \frac{4}{7}$ صدق می‌کند؟

- (۱) یکی (۲) دو تا (۳) سه تا



فصل دوم
حساب اعداد طبیعی



درسنامه فصل دوم



اعداد طبیعی



در سال گذشته با اعداد طبیعی آشنا شدید. به طور کلی اعداد طبیعی به سه دسته تقسیم می‌شوند:

۱ اعداد اول ۲ اعداد مرکب ۳ عدد ۱

اعداد اول: هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ که هیچ شمارنده‌ی طبیعی به جزء ۱ و خودش نداشته باشد. یا به عبارتی دیگر اعدادی که فقط دو شمارنده طبیعی دارند، عدد اول نامیده می‌شود.

تعریف دیگر اعداد اول: هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، که نتوان آن را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک نوشت.

اعداد مرکب: هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، که بتوان آن را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ نوشت، اعداد مرکب می‌نامند. برای مثال ۳۰ مرکب است زیرا: $30 = 6 \times 5$
اعداد مرکب اعدادی هستند که بیش از دو شمارنده دارند.

تک‌تایی



۱. مجموع دو عدد مرکب می‌تواند عددی اول یا مرکب باشد. **مانند:** اول $17 = 8 + 9$ و مرکب $30 = 24 + 6$
۲. مجموع دو عدد اول می‌تواند عددی اول یا مرکب باشد. **مانند:** اول $5 = 2 + 3$ و مرکب $20 = 13 + 7$
۳. حاصل ضرب دو عدد اول همیشه عددی مرکب است. **مانند:** مرکب $15 = 3 \times 5$
۴. حاصل ضرب دو عدد مرکب همیشه عددی مرکب است. **مانند:** مرکب $48 = 6 \times 8$
۵. تنها اعداد اول متوالی ۲ و ۳ هستند.
۶. هرگاه مجموع یا اختلاف دو عدد اول، عددی فرد باشد، یکی از اعداد ۲ می‌باشد. مثلاً اگر مجموع دو عدد اول ۳۱ باشد آن دو عدد ۲ و ۲۹ هستند. (چون ۳۱ فرد است پس یکی از اعداد اول ۲ خواهد بود)
۷. هرگاه حاصل ضرب دو عدد اول عددی زوج باشد، یکی از اعداد ۲ می‌باشد. مثلاً اگر ضرب دو عدد اول ۲۶ باشد آن دو عدد ۲ و ۱۳ هستند.
۸. هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک، حداقل دو شمارنده طبیعی دارد.
۹. هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک، حداقل یک شمارنده اول دارد.

مثال ۱ آیا ۵- نیز اول است؟



پاسخ: خیر. زیرا بحث اعداد اول و مرکب فقط در اعداد طبیعی مطرح است.



تشخیص اول یا مرکب بودن یک عدد طبیعی:

برای بررسی اول بودن یک عدد، ابتدا تمام اعداد اولی را که مربع آن‌ها کوچک‌تر یا مساوی عدد موردنظر است، فهرست می‌کنیم. اگر عدد موردنظر بر هیچ کدام از آن‌ها بخشپذیر نباشد اول است؛ در غیر این صورت آن را عدد مرکب می‌نامیم.

مثال ۲ عددی کوچک‌تر از ۲۰۰ و بزرگ‌تر از ۱۵۰ می‌باشد. برای تشخیص اول یا مرکب بودن این عدد حداکثر چند تقسیم باید انجام دهیم.



پاسخ: چون عدد بین ۱۵۰ و ۲۰۰ می‌باشد باید بخش‌پذیری آن را بر اعداد اولی که مربع آن‌ها کوچک‌تر از ۲۰۰ باشد بررسی کنیم. یعنی بر اعداد ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ و ۱۳ یعنی حداکثر ۶ تقسیم باید انجام دهیم.



نکته ۲ همان طور که در پایه هفتم آموختیم:



$$\begin{aligned} \bullet \text{ زوج} &= \text{فرد} + \text{فرد} & \bullet \text{زوج} &= \text{زوج} + \text{زوج} \\ \bullet \text{فرد} &= \text{زوج} + \text{فرد} & \bullet \text{زوج} &= \text{زوج} \times \text{زوج} \\ \bullet \text{فرد} &= \text{فرد} \times \text{فرد} & \bullet \text{زوج} &= \text{فرد} \times \text{زوج} \end{aligned}$$

نکته ۳ یکی از روش‌های تشخیص اول یا مرکب بودن یک عدد، تشخیص زوج بودن آن عدد و نیز تعیین رقم یکان آن می‌باشد.



مثال ۳ عدد $3 + 1425 \times 15 + 2017 \times 97$ اول است یا مرکب؟



پاسخ: حاصل عددی مرکب است. چون حاصل ضرب چند عدد فرد، همیشه عددی فرد است. و وقتی با ۳ که عددی فرد است جمع شود، حاصل زوج می‌شود و در نتیجه بر ۲ بخش‌پذیر است و مرکب می‌باشد.



مثال ۴ عدد $1395^{2016} + 1393^{2014} + 1394^{2015}$ اول است یا مرکب؟



پاسخ: حاصل عددی مرکب است. رقم یکان ۱۳۹۵ عدد ۵ می‌باشد که فرد است و به هر توانی هم برسد حاصل عددی فرد خواهد شد. رقم یکان ۱۳۹۳ عدد ۳ می‌باشد که فرد است و به هر توانی هم برسد حاصل عددی فرد خواهد شد. و رقم یکان ۱۳۹۴ عدد ۴ می‌باشد که زوج است و به هر توانی هم برسد حاصل عددی زوج خواهد شد. پس داریم:



$$\begin{array}{ccccccc} 1395^{2016} & + & 1393^{2014} & + & 1394^{2015} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{فرد} & + & \text{فرد} & + & \text{زوج} = \text{زوج} \end{array}$$

عدد مرکب است $\Rightarrow$ عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ زوج = زوج + فرد + فرد

توجه: در برخی موارد با تشخیص زوج یا فرد بودن حاصل یک عبارت نمی‌توان اول یا مرکب بودن آن عدد را تشخیص داد. که در این موارد می‌توان از تعیین رقم یکان آن عدد برای تشخیص اول یا مرکب بودن استفاده کرد.

مثال ۵: عدد $2^{10} \cdot 3 - 3$ اول است یا مرکب؟

پاسخ: چون $2^{10} \cdot 3$ عددی زوج و ۳ عددی فرد است تفاضل آنها عددی فرد خواهد بود. پس نمی‌توان تشخیص داد اول است یا مرکب.

حالا رقم یکان عدد حاصل را حساب می‌کنیم. برای پیدا کردن رقم یکان عدد تواندار ابتدا توان عدد را بر ۴ تقسیم کرده و باقی مانده را بدست می‌آوریم. سپس یکان پایه را به توان باقی مانده می‌رسانیم. حاصل همان رقم یکان عدد تواندار خواهد بود.

توجه: اگر باقی مانده صفر شد، یکان پایه را به توان ۴ می‌رسانیم)

رقم یکان عدد $2^{10} \cdot 3$ برابر ۸ می‌باشد. زیرا

پس رقم یکان $2^{10} \cdot 3 - 3$ برابر ۵ می‌باشد. یعنی بر ۵ بخش پذیر است، پس مرکب است.

$$\begin{array}{r} 103 \overline{) 4} \\ 100 \overline{) 25} \end{array}$$

$$\boxed{3} \longrightarrow 2^{\boxed{3}} = 8$$

مضرب‌های طبیعی یک عدد

همان طور که در سال هفتم خواندیم مضرب‌های طبیعی یک عدد که به اختصار مضرب‌های آن عدد گفته می‌شود، از ضرب آن عدد در اعداد طبیعی ... و ۳ و ۲ و ۱ بدست می‌آید.

... و ۲۴ و ۲۰ و ۱۶ و ۱۲ و ۸ و ۴ = مضرب‌های ۴ ... و ۳۶ و ۳۰ و ۲۴ و ۱۸ و ۱۲ و ۶ = مضرب‌های ۶

تک ۴

۱ تمام مضرب‌های طبیعی یک عدد مرکب، مرکب هستند. به طور مثال عدد ۴ عددی مرکب است. همه‌ی مضرب‌های ۴ نیز اعدادی مرکب هستند.

... و ۲۴ و ۲۰ و ۱۶ و ۱۲ و ۸ و ۴ : مضرب‌های ۴

مرکب

۲ همه‌ی مضرب‌های طبیعی یک عدد اول، مرکب‌اند بجز خود عدد. به طور مثال: عدد ۳ عددی اول است. مضرب‌های آن بجز ۳ همگی مرکب‌اند.

... و ۱۸ و ۱۵ و ۱۲ و ۹ و ۶ و ۳ : مضرب‌های ۳

اول

مرکب

مثال ۶: سی و هفتمین مضرب مشترک دو عدد ۶ و ۸ چقدر است؟

پاسخ: ابتدا کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد را پیدا می‌کنیم سپس با ضرب کردن آن در ۲ و ۳ و ۴ و ... می‌توان سایر مضرب‌های مشترک آن دو عدد را پیدا کرد.

$$\left. \begin{array}{l} 6 \text{ مضرب‌های } 6 = 6, 12, 18, \boxed{24}, 30, \dots \\ 8 \text{ مضرب‌های } 8 = 8, 16, \boxed{24}, 32, 40, \dots \end{array} \right\} \Rightarrow [6, 8] = 24$$

$$24 = 1 \times 24 = 24 \text{ اولین مضرب مشترک}$$

$$888 = 37 \times 24 = 888 \text{ سی و هفتمین مضرب مشترک} \Rightarrow \dots = 2 \times 24 = 48 \text{ دومین مضرب مشترک}$$

$$72 = 3 \times 24 = 72 \text{ سومین مضرب مشترک}$$

دو عدد متباین (نسبت به هم اول)

دو عدد a و b را نسبت به هم اول گویند هرگاه ب.م.م (بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها) یک باشد. یعنی $(a, b) = 1$ وقتی دو عدد نسبت به هم اول هستند سه حالت داریم:

مانند: $(3, 7) = 1$

هر دو عددی اول باشند.

مانند: $(3, 4) = 1$

یکی از اعداد اول و دیگری مرکب باشد.

مانند: $(27, 16) = 1$

هر دو عدد مرکب باشند.

نکته ۵



مانند: $(13, 73) = 1$

دو عدد اول همیشه نسبت به هم اول اند.

مانند: $(24, 25) = 1$

دو عدد طبیعی متوالی همیشه نسبت به هم اول اند.

اگر عدد طبیعی a بر عدد طبیعی b بخش پذیر باشد، ب.م.م آنها b (عدد کوچک تر) و کم آنها a (عدد بزرگتر) خواهد بود. مثلاً ۲۴ بر ۶ بخش پذیر است پس $(24, 6) = 6$ و $[24, 6] = 24$

اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، کمم آنها برابر است با حاصل ضرب دو عدد. مانند: $[4, 9] = 4 \times 9 = 36$

$$(6, \square) = 1$$

مثال ۷ برای تساوی روبرو ۴ عدد مختلف بنویسید.



پاسخ: عامل های اول ۶ عبارتند از: ۲ و ۳ پس در جای خالی باید از عددهایی استفاده کنیم که عامل های ۲ و ۳ نداشته باشند. مانند: ۵ و ۷ و ۲۵ و ۱۱ و ۱۳ و ...



$$(20, \square) = 1$$

مثال ۸ برای تساوی روبرو ۴ عدد مرکب بنویسید.



پاسخ: ۲۰ دارای عامل های اول ۲ و ۵ می باشد. باید از اعدادی استفاده کنیم که عامل هایی به غیر از ۲ و ۵ نداشته باشند. مانند: $3 \times 3 = 9$ و $7 \times 7 = 49$ و $3 \times 7 = 21$ و $7 \times 11 = 77$



تجزیه یک عدد به عامل های اوله برای تجزیه یک عدد دو روش وجود دارد ۱- درختی ۲- خطی

تجزیه درختی



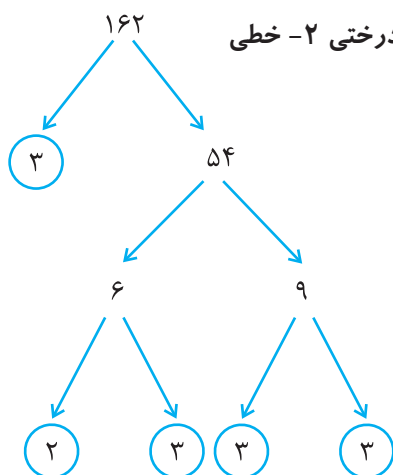
مثال ۹ عدد ۱۶۲ را تجزیه کنید.



پاسخ:



$$\rightarrow 162 = 3^4 \times 2$$



تجزیه قطی

مثال ۱۰ عدد ۳۰۰ را تجزیه کنید.

پاسخ:

$$\begin{array}{r|l} 300 & 3 \\ 100 & 5 \\ 20 & 5 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 300 = 5^2 \times 2^2 \times 3$$

کاربردهای تجزیه

۱ تعیین ب م م و ک م م

پیدا کردن ب م م با استفاده از تجزیه بعد از تجزیه اعداد و نوشتن آنها به صورت حاصل ضرب عوامل اول تواندار، پایه‌های مشترک با کمترین توان را انتخاب و در هم ضرب می‌کنیم.

مثال ۱۱ ب م م دو عدد ۱۶۸ و ۱۴۰ را بدست آورید.

پاسخ: پایه‌های مشترک ۲ و ۷ هستند و کمترین توان آنها به ترتیب ۲ و ۱ است.

$$\begin{array}{r|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 140 & 2 \\ 70 & 7 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 140 = 2^2 \times 7 \times 5 \\ 168 = 2^3 \times 7 \times 3 \end{array} \rightarrow (140, 168) = 2^2 \times 7 = 28$$

پیدا کردن ک م م با استفاده از تجزیه بعد از تجزیه اعداد و نوشتن آنها به صورت حاصل ضرب عوامل اول تواندار، همه‌ی پایه‌ها با بیشترین توان آنها را در هم ضرب می‌کنیم. یعنی ک م م برابر است با: حاصل ضرب پایه‌های مشترک و غیرمشترک با بیشترین توان

مثال ۱۲ ک م م دو عدد ۳۰۰ و ۴۰ را بدست آورید.

پاسخ: پایه‌ها ۲ و ۳ و ۵ هستند که بیشترین توان آنها به ترتیب ۳ و ۱ و ۲ می‌باشد.

$$\begin{array}{r|l} 300 & 3 \\ 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 300 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \\ 40 = 2^3 \times 5 \end{array} \rightarrow [300, 40] = 2^3 \times 3 \times 5^2 = 600$$

توجه اگر بعد از تجزیه اعداد، عامل مشترکی وجود نداشته باشد، دو عدد نسبت به هم اول خواهند بود یعنی ب م م دو عدد برابر ۱ می‌شود.

مثال ۱۳ ب م م دو عدد ۲۷ و ۲۰ را بدست آورید.

پاسخ: چون عامل مشترکی وجود ندارد پس نسبت به هم اول هستند.



$$\left. \begin{array}{l} 27 = 3^3 \\ 20 = 2^2 \times 5 \end{array} \right\} \Rightarrow (27, 20) = 1$$

۲ پیدا کردن شمارنده‌های اول یک عدد

با استفاده از تجزیه می‌توان شمارنده‌های اول آن عدد را پیدا کرد.

$$\begin{array}{r|l} 300 & 3 \\ 100 & 5 \\ 20 & 5 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 300 = 5^2 \times 2^2 \times 3$$

مثال ۱۲ شمارنده‌های اول ۳۰۰ چه اعدادی هستند؟



پاسخ: شمارنده‌های اول ۳۰۰: اعداد ۳ و ۲ و ۵ می‌باشند.



۳ پیدا کردن تعداد شمارنده‌های طبیعی یک عدد

یکی دیگر از کاربردهای تجزیه پیدا کردن تعداد شمارنده‌های طبیعی یک عدد است.

برای این کار ابتدا عدد موردنظر را تجزیه کرده و آن را به صورت تواندار می‌نویسیم. سپس به عدد توان‌های هر کدام یک واحد اضافه کرده و در هم ضرب می‌کنیم.

به طور کلی اگر عدد A بعد از تجزیه به صورت $A = a^m \times b^n \times c^p \times \dots$ باشد (a و b و c اعدادی اول‌اند) تعداد شمارنده‌های آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$A \text{ تعداد شمارنده‌های } A = (m+1) \times (n+1) \times (p+1) \dots$$

$$\begin{array}{r|l} 1200 & 2 \\ 600 & 2 \\ 300 & 3 \\ 100 & 5 \\ 20 & 5 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 1200 = 5^2 \times 2^4 \times 3^1 \rightarrow 1200 \text{ تعداد شمارنده‌های طبیعی } = (2+1) \times (4+1) \times (1+1) = 30$$

مثال ۱۵ عدد ۱۲۰۰ چند شمارنده طبیعی دارد.



توجه



برای پیدا کردن تعداد شمارنده‌های مرکب یک عدد کافی است از تعداد کل شمارنده‌های آن عدد، شمارنده‌های اول و عدد یک را کم کنیم یعنی:

$$1 - \text{تعداد شمارنده‌های اول} - \text{تعداد کل شمارنده‌ها} = \text{تعداد شمارنده‌های مرکب}$$

توجه چون عدد ۱ نه اول است و نه مرکب.





تعداد شمارنده‌های طبیعی اعداد مربع کامل، فرد می‌باشد.
مانند: عدد ۴ که مربع کامل است و ۳ شمارنده دارد. یا مثلاً ۱۶ مربع کامل است و ۵ شمارنده دارد.

مثال ۱۶ با توجه به مثال ۱۵ تعداد شمارنده‌های مرکب عدد ۱۲۰۰ چند تا است؟



پاسخ: چون عدد ۱۲۰۰ دارای ۳۰ شمارنده طبیعی است که از این تعداد، ۳ تا اول هستند (۲ و ۳ و ۵) و عدد ۱ را هم کم می‌کنیم. پس ۲۶ تا شمارنده مرکب دارد.



$$۲۶ = ۳۰ - ۳ - ۱ = \text{تعداد شمارنده‌های مرکب}$$

۱۴ پیدا کردن تعداد شمارنده‌های زوج و فرد یک عدد

برای پیدا کردن تعداد شمارنده‌های فرد یک عدد کافی است بعد از تجزیه به عامل‌های اول، عامل ۲ را حذف کنیم و تعداد شمارنده‌ها را حساب کنیم. طبیعی است اگر عددی عامل ۲ نداشته باشد همه‌ی شمارنده‌های آن فرد خواهد بود.
برای پیدا کردن تعداد شمارنده‌های زوج یک عدد هم از تعداد کل شمارنده‌ها، تعداد شمارنده‌های فرد را کم می‌کنیم

$$\text{تعداد شمارنده‌های زوج} = \text{تعداد شمارنده‌های فرد} - \text{تعداد کل شمارنده‌ها}$$

مثال ۱۷ تعداد شمارنده‌های فرد و زوج عدد ۱۲۰۰ را بدست آورید.



$$۱۲۰۰ = ۵^2 \times ۲^4 \times ۳ \rightarrow ۱۲۰۰ \text{ تعداد شمارنده‌های طبیعی} = (۲+۱)(۴+۱)(۱+۱) = ۳۰$$

$$۱۲۰۰ \text{ تعداد شمارنده‌های فرد} = (۲+۱)(۱+۱) = ۶$$

$$۱۲۰۰ \text{ تعداد شمارنده‌های زوج} = ۳۰ - ۶ = ۲۴$$

پاسخ:



۵ محاسبه مجموع شمارنده‌های طبیعی یک عدد

برای محاسبه مجموع شمارنده‌های عدد A از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

$$A = a^m \times b^n \times c^p \times \dots \xrightarrow{\text{مجموع شمارنده‌ها}} \frac{a^{m+1}-1}{a-1} \times \frac{b^{n+1}-1}{b-1} \times \frac{c^{p+1}-1}{c-1} \times \dots$$

مثال ۱۸ مجموع شمارنده‌های عدد ۲۰۰ چقدر است؟



$$۲۰۰ = ۲^3 \times ۵^2 \xrightarrow{\text{مجموع شمارنده‌های}} \frac{۲^{3+1}-1}{۲-1} \times \frac{۵^{2+1}-1}{۵-1} = \frac{۱۵}{۱} \times \frac{۱۲۴}{۴} = ۴۶۵$$

پاسخ:



۶ محاسبه حاصلضرب شمارنده‌های طبیعی یک عدد

$$A^{\frac{t}{2}} = \text{حاصلضرب شمارنده‌های A} \quad (t = \text{تعداد شمارنده‌های طبیعی})$$

مثال ۱۹ حاصلضرب شمارنده‌های عدد ۱۲۰ چقدر است؟



پاسخ: ابتدا تعداد شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲۰ را بدست می‌آوریم.

$$۱۲۰ = ۲^3 \times ۳ \times ۵ \xrightarrow[\text{طبیعی}]{\text{تعداد شمارنده‌های}} (۳+۱)(۱+۱)(۱+۱) = ۱۶$$



$$120^8 = 120^{\frac{16}{2}} = \text{حاصلضرب شمارنده‌های } 120$$

نکته ۸



اگر تجزیه عدد طبیعی A به حاصلضرب عوامل اول به صورت $A = a^m \times b^n \times c^p \times \dots$ باشد آنگاه، تعداد اعداد کوچک‌تر از A که نسبت به A اول باشند از رابطه زیر بدست می‌آید: (رابطه اوایلر)

$$\phi(A) = A \left(1 - \frac{1}{a}\right) \times \left(1 - \frac{1}{b}\right) \times \left(1 - \frac{1}{c}\right) \times \dots$$

مثال ۲۰ تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۶۰ که نسبت به ۶۰ اول هستند چقدر است؟



$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

پاسخ: با استفاده از نکته ۸ داریم:

شمارنده‌های اول ۶۰: اعداد ۲ و ۳ و ۵ می‌باشند.



$$\phi(60) = 60 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 60 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 16$$

نکته ۹



اگر p عددی اول باشد در این صورت تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از p که نسبت به p اول باشند برابر است با:

$$p-1$$

$$\phi(p) = p-1$$

مثال ۲۱ تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۳۱ که نسبت به ۳۱ اول هستند چقدر است؟



پاسخ: چون ۳۱ اول است پس تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۳۱ که نسبت به ۳۱ اول باشند برابر است با:

$$\phi(31) = 31-1 = 30$$



روش غربال اراتستن برای پیدا کردن اعداد اول



یکی دیگر از روش‌های پیدا کردن اعداد اول، استفاده از روش غربال است. در این روش اعدادی که اول نیستند (اعداد مرکب و عدد ۱) را خط می‌زنیم تا اعداد اول را مشخص کنیم.

مثال ۲۲ به روش غربال اعداد اول از ۱ تا ۴۰ را پیدا کنید.



پاسخ: اولین مرحله: ابتدا عدد ۱ را خط می‌زنیم چون اول نیست.

دومین مرحله: عدد بعدی عدد ۲ است که اول می‌باشد. حال به جز ۲ تمام مضرب‌های مرکب

آن را خط می‌زنیم. (۴ و ۶ و ۸ و ... و ۴۰)

مضرب‌های ۲ را با علامت / خط می‌زنیم.



۱/	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰

سومین مرحله: عدد بعدی عدد ۳ است که اول می‌باشد. به جزء ۳ تمام مضرب‌های مرکب آن را خط می‌زنیم. (۶ و ۹ و ۱۲ و ۱۵ و ... و ۳۹) دقت کنید بعضی از مضرب‌های ۳، در مرحله حذف مضرب‌های ۲ خط خورده‌اند. (۶ و ۱۲ و ۱۸ و ... و ۳۶) اولین عددی که مرحله حذف مضرب‌های ۳ برای اولین بار خط می‌خورد مربع ۳ یعنی ۹ می‌باشد.

مضرب‌های ۳ را با علامت ۱ خط می‌زنیم.

۱/	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰

چهارمین مرحله: عدد بعدی ۵ است که اول می‌باشد. به جزء ۵ تمام مضرب‌های مرکب آن را خط می‌زنیم (۱۰ و ۱۵ و ۲۰ و ۲۵ و ... و ۴۰) برخی از مضرب‌های ۵ در مرحله حذف مضرب‌های ۲ و ۳ خط خورده‌اند. اولین عددی که در مرحله حذف مضرب‌های ۵ برای اولین بار خط می‌خورد مربع ۵ یعنی ۲۵ می‌باشد.

• مضرب‌های ۵ را با علامت - خط می‌زنیم.

۱/	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰

توجه: چون مربع عدد اول بعدی یعنی ۷ مساوی ۴۹ می‌شود که بزرگ‌تر از آخرین عدد (۴۰) می‌باشد پس کار خط زدن به اتمام رسیده و اعداد باقی مانده اول هستند.



تکات روش غربال



۱ اولین عددی که خط می‌خورد ۱ می‌باشد.

۲ در مرحله حذف مضرب‌های هر عدد اول، اولین عددی که خط می‌خورد مربع آن عدد می‌باشد.

مثال ۲۲: در روش غربال برای پیدا کردن اعداد اول ۱ تا ۱۰۰، در مرحله حذف مضرب‌های ۷، اولین عددی که خط می‌زنیم چه عددی است؟



پاسخ: همان طور که گفتیم اولین عددی که خط می‌خورد مربع آن عدد می‌باشد پس ۴۹ خواهد بود.



خط زدن مضرب‌های یک عدد اول را تا جایی ادامه می‌دهیم که مربع آن عدد اول کوچک‌تر از عدد آخر

باشد.

مثال ۲۴ در روش غربال برای پیدا کردن اعداد اول ۱ تا ۱۰۰، مضرب‌های کدام اعداد اول را خط می‌زنیم؟



پاسخ: با توجه به اینکه مربع اعداد اول ۲ و ۳ و ۵ و ۷ به ترتیب ۴ و ۹ و ۲۵ و ۴۹ است و کوچک‌تر از ۱۰۰ می‌باشند ولی مربع عدد ۱۱ مساوی ۱۲۱ که بزرگ‌تر از ۱۰۰ است، پس خط زدن را تا مضرب‌های ۷ ادامه می‌دهیم.



مثال ۲۵ در روش غربال برای پیدا کردن اعداد اول ۱ تا ۱۰۰، در مرحله حذف مضرب‌های ۷، تمام اعدادی که برای اولین بار خط می‌خورند را بنویسید.



$$7 \times 7 = 49$$

$$7 \times 11 = 77$$

$$7 \times 13 = 91$$

پاسخ:



در روش غربال مضرب‌های اعداد اول ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ... را به ترتیب خط می‌زنیم. بنابراین مضارب مرکب عدد ۲ زودتر از همه و سپس مضرب‌های مرکب ۳ و به این ترتیب مضرب‌های مرکب ۵ و ۷ و ... خط می‌خورند.



مثال ۲۶ در روش غربال ۱ تا ۱۰۰ کدام یک از اعداد زیر دیرتر از بقیه خط می‌خورد؟



۹۵ (۴)

۹۱ (۳)

۹۸ (۲)

۹۹ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی (۳) صحیح است.



ترتیب خط خوردن به این شرح است:

۹۱ (مضرب ۷)

۹۵ (مضرب ۵)

۹۹ (مضرب ۳)

۹۸ (مضرب ۲)

در روش غربال هر عدد مرکب به تعداد شمارنده‌های اولش خط می‌خورد.



مثال ۲۷ در روش غربال ۱ تا ۵۰۰ عدد ۴۲۰ چند بار خط می‌خورد؟



پاسخ: ابتدا عدد ۴۲۰ را تجزیه می‌کنیم.

شمارنده‌های اول آن عبارتند از: ۲ و ۳ و ۵ و ۷. پس ۴ بار خط می‌خورد.



$$\begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 3 \\ 70 & 7 \\ 10 & 5 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

آزمون فصل دوم (آزمون شماره ۲)



۱- کدام عدد اول برابر 3^4 می باشد؟

- (۱) ۴۱ (۲) ۴۳ (۳) ۴۷ (۴) ۵۳

۲- چند عدد اول کوچک تر از $\sqrt{97}$ وجود دارد؟

- (۱) ۷ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۵

۳- چند درصد اعداد طبیعی بین ۲۹ و ۵۰ اول اند؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۲۰ (۳) ۳۰ (۴) ۳۵

۴- ک.م.م دو عدد اول ۳۰۱ می باشد. مربع مجموع آنها چقدر است؟

- (۱) ۲۵۰۰ (۲) ۱۲۵۰ (۳) ۹۰۰ (۴) ۳۶۰۰

۵- پنج برابر مجموع دو عدد اول ۴۹۵ می باشد. عدد بزرگ تر کدام است؟

- (۱) ۹۹ (۲) ۷۹ (۳) ۹۷ (۴) ۸۹

۶- در تساوی $1 = (\square \text{ و } 30)$ کدام عدد را در جای خالی نمی توان قرار داد؟

- (۱) ۲۴۳ (۲) ۷۷ (۳) ۹۱ (۴) ۱۲۱

۷- کدام یک از اعداد زیر اول است؟ (تیزهوشان خوزستان و فارس ۹۳-۹۲)

- (۱) $3^4 - 3^3$ (۲) $7^{11} \times 3^5$ (۳) $1^5 + 2^2 + 3^5$ (۴) 125^{60}

۸- مجموع مجزورات دو عدد اول ۱۷۳ است. مجذور مجموع آنها چقدر است؟ (ورودی نمونه دولتی ۸۸)

- (۱) ۲۸۹ (۲) ۲۲۵ (۳) ۱۶۹ (۴) ۴۴۱

۹- تفاضل دو عدد اول ۱۱ می باشد. تفاضل مربعات آنها کدام است؟ (ورودی نمونه و تیزهوشان گلستان ۹۳)

- (۱) ۱۶۵ (۲) ۱۱۷ (۳) ۲۸۵ (۴) ۳۵۲

۱۰- ک م م دو عدد $A = 2^a \times 3$ و $B = 2 \times 3^b$ مساوی ۷۲ می باشد. a و b به ترتیب چقدر هستند؟

- (۱) ۳ و ۲ (۲) ۳ و ۳ (۳) ۲ و ۴ (۴) ۳ و ۲

۱۱- اگر x عددی اول باشد، x^x چند شمارنده ی مرکب دارد؟

- (۱) $x-1$ (۲) x (۳) $x+1$ (۴) $x-2$

۱۲- عددی دارای ۷ شمارنده است. مربع این عدد چند شمارنده دارد؟

- (۱) ۴۹ (۲) ۳۶ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵

۱۳- عدد $5^{13} - 3$ عددی است

- (۱) اول (۲) مرکب (۳) اول و فرد (۴) مرکب و فرد

۱۴- عدد ۲۳ را ۲۲ بار در خودش ضرب کرده‌ایم، حاصل چند شمارنده دارد؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۵۰۶ (۳) ۲۲ (۴) ۲۳

۱۵- عددی طبیعی از ۳۰۰ کوچک‌تر و از ۱۰۰ بزرگ‌تر است. برای فهمیدن اول یا مرکب بودن این عدد حداکثر چند تقسیم باید انجام دهیم؟ (پیشرفت تحصیلی تیزهوشان ۹۴)

- (۱) ۳۰۰ تا (۲) ۲۰۰ تا (۳) ۷ تا (۴) ۳ تا

۱۶- اگر تعداد اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰۰۰ برابر n باشد کدامیک از عبارت‌های زیر نشان دهنده‌ی تعداد اعداد مرکب کوچک‌تر از ۱۰۰۰ است؟ (ورودی نمونه و تیزهوشان چهارمحال بختیاری ۹۱-۹۲)

- (۱) $999 - n$ (۲) $998 - n$ (۳) $1001 - n$ (۴) $1000 - n$

۱۷- چند عدد طبیعی می‌توان به جای x قرار داد تا عبارت $\frac{x+1}{x}$ یک عدد اول باشد؟ (تیزهوشان کردستان ۹۱)

- (۱) بی‌شمار (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۸- عددی دارای ۱۷ شمارنده طبیعی است. این عدد حتماً

- (۱) فرد است (۲) مربع کامل (۳) مکعب کامل (۴) یک شمارنده اول دارد

۱۹- در روش غربال اعداد ۱ تا ۵۰۰۰ کدام یک از اعداد زیر دیرتر خط می‌خورد؟

- (۱) ۴۹۴۹ (۲) ۴۱۴۱ (۳) ۴۶۲۵ (۴) ۳۸۰۱

۲۰- چند تا از جملات زیر صحیح می‌باشد؟ (آزمون پیشرفت تحصیلی ۹۴)

- تمام اعداد طبیعی شمارنده اول دارند.
- حاصل ضرب هر دو عدد طبیعی حتماً مرکب است.
- هیچ عدد اولی بر ۱۱ بخش‌پذیر نیست.
- هیچ عدد طبیعی پیدا نمی‌شود که صد شمارنده اول داشته باشد.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

آزمون شماره ۳



۱- حاصل عبارت $5 - 4[3 - 2(1 - 2)^4 + 3] \times 4 - 5$ برابر است با:

- (۱) -۴ (۲) -۶۴ (۳) -۱۲۸ (۴) ۳۲

۲- قرینه‌ی معکوس $[-(-(-2\frac{-3}{-5}))]$ کدام گزینه است؟

- (۱) $-\frac{13}{5}$ (۲) $\frac{5}{13}$ (۳) $\frac{13}{5}$ (۴) $-\frac{5}{13}$

۳- اگر $A = 1 - 2 - 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 - \dots + 1393 - 1394 - 1395$ ، آن گاه مقدار A برابر است با:

- (۱) صفر (۲) -۱۳۹۶ (۳) -۱۳۹۵ (۴) -۲۷۸۹

۴- a, b, c, d و e اعداد صحیح متفاوتی هستند و می‌دانیم $(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)(e-e) = 45$ در این صورت $a+b+c+d+e$ برابر است با:

- (۱) ۲۵ (۲) ۳۶ (۳) ۲۹ (۴) ۳۰

۵- حاصل ضرب ۴ عدد صحیح مثبت از حاصل جمع آن‌ها کوچک‌تر است. اگر مجموع سه عدد ۲۸ باشد، عدد چهارمی کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۶- معکوس $\frac{a}{-\frac{a}{b}}$ کدام گزینه است؟

- (۱) $-\frac{1}{b}$ (۲) $\frac{1}{b}$ (۳) $-b$ (۴) $-\frac{b}{a^2}$

۷- مجموع دو عدد ۱۰ و حاصل ضرب همان دو عدد ۲۰ می‌باشد، مجموع معکوس‌های دو عدد برابر است با:

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۸- $\frac{1}{2}$ عددی از خود آن عدد بزرگ‌تر است. کدام گزینه قطعاً معرف آن عدد است؟

- (۱) عدد مثبت است (۲) عدد اعشاری است (۳) عدد منفی است (۴) عدد طبیعی است

۹- حاصل ضرب سه عدد گویا برابر -۴۵ است. اگر دو تای آن‌ها $-\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$ باشند، عدد سوم کدام گزینه است؟

- (۱) -۶ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) ۶ (۴) $-\frac{1}{6}$

۱۰- کسر تحویل ناپذیر $\frac{a}{b}$ ، برابر کسر $\frac{462}{594}$ است، $a+b$ برابر است با:

- (۱) ۱۷ (۲) ۱۶ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۱۱- عددی دارای ۱۳ شمارنده است. مکعب این عدد چند شمارنده دارد؟

- (۱) ۳۷ (۲) ۲۵ (۳) ۱۶۹ (۴) ۴۰

۱۲- از چهار برابر مجموع دو عدد اول سه واحد کم کردیم حاصل ۴۱۷ شده است. مجموع ارقام عدد بزرگ‌تر چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۳- چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۷۱ وجود دارد که نسبت به ۷۱ اول باشد؟

- (۱) ۷۰ (۲) ۴۸ (۳) ۲۰ (۴) ۳۰

۱۴- چند عدد ۲ رقمی وجود دارد که تعداد شمارنده‌های آن فرد باشد؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۵- چند عدد ۳ رقمی وجود دارد که تعداد شمارنده‌های آن‌ها فرد باشد؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۲۲ (۳) ۲۳ (۴) ۲۴

۱۶- چند عدد کوچک‌تر از ۱۰۰ وجود دارد که تعداد شمارنده‌های آن‌ها زوج باشد؟

- (۱) ۹۰ (۲) ۸۸ (۳) ۹۲ (۴) ۸۹

۱۷- کدام یک از اعداد زیر اول است؟ (پیشرفت تحصیلی آذربایجان شرقی ۹۱)

- (۱) ۱۲۷۱۲۷ (۲) $\frac{۱۰۲^۸ - ۱۰۲^۷}{۱۰۲^۷}$ (۳) ۱۲۳۴۳۲۱ (۴) $\frac{(۲^۶ - ۲^۳) \times \sqrt{۴}}{۲}$

۱۸- در روش غربال اراتستن برای پیدا کردن اعداد اول از ۱ تا ۵۰۰، آخرین عددی که خط می‌خورد کدام است؟

- (۱) ۴۹۳ (۲) ۳۶۱ (۳) ۴۳۷ (۴) ۴۸۱

۱۹- در ۱۰ عدد طبیعی متوالی حداکثر چند عدد اول وجود دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

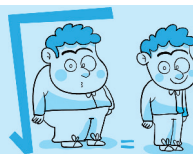
۲۰- در بین اعداد ۴۱، $۱۷^{۲۰}$ ، $(۱۳^{۱۷} + ۱۹^{۱۷})$ ، -۳ ، $\sqrt{۴۹}$ ، ۱، $\frac{۱۴}{۲}$ و ۱۲۳۱۲۳، چند عدد اول وجود دارد؟

(ورودی تیزهوشان البرز - ۹۱)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵



پاسفنامه آزمون شماره ۱



(۱) گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$\text{الف)} \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{12} = \frac{12+5}{60} = \frac{17}{60}$$

$$\text{ب)} \quad \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{15} - \frac{1}{4} = \frac{4-15}{60} = -\frac{11}{60}$$

$$\text{ج)} \quad \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \times \frac{4}{1} = \frac{1}{5} - \frac{4}{3} = \frac{3-20}{15} = -\frac{17}{15}$$

$$= \frac{3-20}{15} = -\frac{17}{15} = \frac{-17 \times 4}{15 \times 4} = -\frac{68}{60}$$

$$\text{د)} \quad \frac{1}{5} \div \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5} \times \frac{3}{1} - \frac{1}{4} = \frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{12-5}{20} = \frac{7}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{12-5}{20} = \frac{7}{20} = \frac{+7 \times 3}{20 \times 3} = \frac{21}{60}$$

با توجه به جواب‌های به دست آمده، $-\frac{11}{60}$ به صفر نزدیک‌تر است.

(۲) گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 = \overbrace{9-16}^{-7} + \overbrace{25-36}^{-11} = -7-11 = -18$$

(۳) گزینه‌ی (۱) صحیح است.

حاصل یکی از پرانتزها یعنی $(1395-1395)$ صفر است. ضرب صفر در هر عبارتی هم صفر می‌شود. بنابراین حاصل کل عبارت برابر صفر است.

(۴) گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$\frac{1}{\cancel{x}} \times \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \times \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \times \dots \times \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \times \frac{\cancel{x}}{100} = \frac{1}{100} = 0.01$$

(۵) گزینه‌ی (۴) صحیح است.

$$\frac{x \times x}{x + x} = \frac{x \times \cancel{x}}{2 \times \cancel{x}} = \frac{x}{2} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{2}{x}$$

(۶) گزینه‌ی (۲) صحیح است.

با ساده کردن کسرها، گزینه (۲) جواب صحیح است.

$$\frac{198}{1100} = \frac{198 \div 11}{1100 \div 11} = \frac{18}{100} = 0.18$$

(۷) گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$-4 - \frac{2 - \frac{7}{3}}{-2 + \frac{7}{3}} = -4 - \frac{\frac{6-7}{3}}{\frac{-6+7}{3}} = -4 - \frac{\frac{-1}{3}}{\frac{1}{3}} = -4 - \underbrace{(-1)}_{+1} = -3$$

(۸) گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$-3 \frac{2}{5} = \frac{-17}{5} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{-5}{17}$$

$$\Rightarrow \frac{-17}{5} \div \frac{-5}{17} = +(\frac{17}{5} \times \frac{17}{5}) = \frac{289}{25}$$

(۹) گزینه‌ی (۲) صحیح است.

ابتدا کسرهای داده شده را ساده، سپس هم مخرج می‌کنیم.

$$\frac{66 \div 11}{77 \div 11} = \frac{6}{7} \times \frac{12}{12} = \frac{72}{84} \quad \text{گزینه‌ی (۱)}$$

$$\frac{555}{666} = \frac{555 \div 111}{666 \div 111} = \frac{5}{6} \times \frac{14}{14} = \frac{70}{84} \quad \text{گزینه‌ی (۲)}$$

$$\frac{5555}{4444} = \frac{5555 \div 1111}{4444 \div 1111} = \frac{5}{4} \times \frac{21}{21} = \frac{105}{84} \quad \text{گزینه‌ی (۳)}$$

$$\frac{44444}{33333} = \frac{44444 \div 11111}{33333 \div 11111} = \frac{4}{3} \times \frac{28}{28} = \frac{112}{84} \quad \text{گزینه‌ی (۴)}$$

$$\Rightarrow \frac{555}{666} < \frac{66}{77} < \frac{5555}{4444} < \frac{44444}{33333}$$

(۱۰) گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$\frac{1}{7} + \frac{3}{11} + \frac{6}{21} + \frac{6}{7} - \frac{14}{11} + \frac{36}{21}$$

$$= \frac{1}{7} + \frac{6}{7} + \frac{3}{11} - \frac{14}{11} + \frac{36}{21} + \frac{6}{21}$$

$$= \frac{7}{7} - \frac{11}{11} + \frac{42}{21} = \underbrace{1-1}_{0} + 2 = 2$$

(۱۱) گزینه‌ی (۴) صحیح است.

$$[-\frac{5}{6} - (-\frac{3}{4})] \times \square = \frac{1}{8}$$

با توجه به اینکه مجموع هر سه خانه متوالی برابر است با ۵، داریم:

$$b + x + y = x + y + 9 \Rightarrow b = 9$$

$$\Rightarrow -11 + a + 9 = 5 \Rightarrow a = 5 + 11 - 9$$

$$\Rightarrow a = 7$$

(۱۷) گزینه‌ی (۷) صحیح است.

با امتحان کردن گزینه‌ها داریم:

$$(۱) \text{ گزینه } \Rightarrow 1 \times 2 \times 3 = 1 + 2 + 3 \Rightarrow 6 = 6 \checkmark$$

$$(۲) \text{ گزینه } \Rightarrow 1 \times 2 \times -3 = 1 + 2 + (-3) \Rightarrow -6 = 0 \times$$

$$(۳) \text{ گزینه } \Rightarrow 0 \times -3 \times 3 = 0 + (-3) + 3 \Rightarrow 0 = 0 \checkmark$$

$$(۴) \text{ گزینه } \Rightarrow -1 \times -2 \times -3 = -1 - 2 - 3 \Rightarrow -6 = -6 \checkmark$$

(۱۸) گزینه‌ی (۴) صحیح است.

$$x \div \frac{185}{187} = x \times \frac{187}{185} = x \times \frac{\cancel{17} \times 11}{\cancel{17} \times 5} = x \times \frac{11}{5}$$

کوچکترین عدد طبیعی برای اینکه $x \times \frac{11}{5}$ عددی صحیح شود به ازای $x = 5$ خواهد بود

$$\cancel{5} \times \frac{11}{\cancel{5}} = 11$$

(۱۹) گزینه‌ی (۷) صحیح است.

$$\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \dots + \frac{99}{100} + \overset{100}{\uparrow} 1 = \Rightarrow \frac{1+2+3+\dots+99+100}{100} =$$

صورت کسر با توجه به نکته زیر محاسبه می‌شود:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{100 \times 101}{2} = \frac{\cancel{100} \times 101}{\cancel{2}} = 5050$$

(۲۰) گزینه‌ی (۷) صحیح است.

ابتدا کسرهای داده شده در رابطه را با تقسیم صورت بر مخرج به حالت اعشاری تبدیل می‌کنیم

$$\frac{2}{5} < x < \frac{4}{5} \Rightarrow 0.4 < x < 0.8$$

از بین اعداد داده شده ۰/۴۱ و ۰/۵۰ در رابطه داده شده

$$\Rightarrow \left(-\frac{5}{6} + \frac{3}{4}\right) \times \square = \left(\frac{-10+9}{12}\right) \times \square = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{12} \times \square = \frac{1}{8} \Rightarrow \square = \frac{1}{8} \div \frac{-1}{12}$$

$$\Rightarrow \square = \frac{1}{8} \times -\frac{12}{1} = \frac{1}{\cancel{2}} \times -\frac{\cancel{12}^3}{1} = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \square = -1.5$$

(۲۱) گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$\sqrt{2^4 + 9} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

سایر گزینه‌ها را نمی‌توان به صورت کسری که صورت و مخرج آن عدد صحیح باشد نمایش داد.

(۲۲) گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$\left(1 \div \frac{1}{3}\right) - \left(-2 \div \frac{1}{5}\right) + \left(5 \div \frac{5}{4}\right) =$$

$$\Rightarrow (1 \times 3) - (-2 \times 5) + (\cancel{5} \times \frac{4}{\cancel{5}}) =$$

$$\Rightarrow 3 - \underbrace{-10}_{+10} = 3 - (-10) = 3 + 10 = 13$$

$$\Rightarrow 17 \xrightarrow{\text{سوکع م}} \frac{1}{17} \xrightarrow{\text{عکس م}} \frac{1}{17} \Rightarrow -\frac{1}{17}$$

(۲۳) گزینه‌ی (۷) صحیح است.

فقط کسر $\frac{3}{8}$ نمایش اعشاری مختوم دارد زیرا مخرج آن فقط دارای عامل اول ۲ است.

(۲۴) گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$\left(\frac{9}{2 \times 7}\right) - \left(\frac{20}{7 \times 13}\right) + \left(\frac{33}{13 \times 20}\right) - \left(\frac{48}{20 \times 28}\right) =$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{7} - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{13}\right) + \frac{1}{13} + \frac{1}{20} - \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{28}\right) =$$

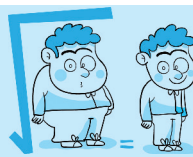
$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{\cancel{1}}{\cancel{7}} - \frac{\cancel{1}}{\cancel{7}} - \frac{\cancel{1}}{\cancel{13}} + \frac{\cancel{1}}{\cancel{13}} + \frac{\cancel{1}}{\cancel{20}} - \frac{\cancel{1}}{\cancel{20}} - \frac{1}{28} =$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{28} = \frac{14-1}{28} = \frac{13}{28}$$

(۲۵) گزینه‌ی (۳) صحیح است.

-۱۱	a	b	x	y	+۹
-----	---	---	---	---	----

پاسفنامه آزمون شماره ۲



صدق می کند.

(۱) گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$\frac{81}{64} \times \frac{64}{64} = 81 = 3^4$$

(۲) گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$\sqrt{97} = 9.8$$

جذر تقریبی ۹۷ برابر ۹/۸ می شود که تعداد اعداد اول کوچکتر از ۹/۸، ۴ تا می باشد: ۲ و ۳ و ۵ و ۷

(۳) گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۲۰ عدد بین ۲۹ و ۵۰ وجود دارد که از این تعداد ۵ تا اول هستند: ۳۱ و ۳۷ و ۴۱ و ۴۳ و ۴۷ پس داریم:

$$\frac{5}{20} = \frac{25}{100} = 25\%$$

(۴) گزینه‌ی (۱) صحیح است.

می دانیم که دو عدد اول برابر است با حاصل ضرب آنها. با تجزیه عدد ۳۰۱ داریم:

$$43 \times 7 = 301 \rightarrow (43 + 7)^2 = 50^2 = 2500$$

(۵) گزینه‌ی (۳) صحیح است.

اگر مجموع دو عدد اول، عددی فرد باشد حتماً یکی از آنها ۲ است

$$5(x+y) = 495 \rightarrow (x+y) = \frac{495}{5} = 99 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=97 \end{cases}$$

(۶) گزینه‌ی (۱) صحیح است.

عدد ۳۰ را تجزیه می کنیم.
چون می خواهیم این عدد نسبت به ۳۰ اول باشد پس باید اعدادی باشند که شمارنده اول آنها ۲ و ۳ و ۵ نباشد.
همه اعداد نسبت به ۳۰ اول اند. به جز ۲۴۳ چون:

$$\left. \begin{aligned} 30 &= 2 \times 3 \times 5 \\ 243 &= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (30, 243) = 3$$

(۷) گزینه‌ی (۳) صحیح است.

گزینه (۱) مرکب است $\rightarrow 3^4 - 3^3 = 81 - 27 = 54$
گزینه (۲) هم عددی مرکب است. چون از حاصلضرب دو عدد طبیعی بزرگتر از یک درست شده است.

گزینه (۴) هم مرکب است این عدد دارای ۱۸۱ شمارنده می باشد.

$$125^6 = (5^3)^6 \rightarrow 180 + 1 = 181$$

گزینه (۳) عددی اول است.
 $2^5 + 2^2 + 1^5 = 32 + 4 + 1 = 37$

(۸) گزینه‌ی (۲) صحیح است.

هرگاه مجموع مجذورات دو عدد اول، عددی فرد بیاید حتماً یکی از اعداد ۲ خواهد بود.

$$x^2 + y^2 = 173 \xrightarrow{y=2} x^2 + 4 = 173$$

$$\Rightarrow x^2 = 173 - 4 = 169 \Rightarrow x = \sqrt{169} = 13 \Rightarrow (13+2)^2 = 225$$

(۹) گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$x - y = 11 \Rightarrow \begin{cases} x=13 \\ y=2 \end{cases} \rightarrow 13^2 - 2^2 = 169 - 4 = 165$$

(۱۰) گزینه‌ی (۴) صحیح است.

ابتدا عدد ۷۲ را تجزیه می کنیم

$$[2^a \times 3, 3^b \times 2] = 72 \rightarrow 2^a \times 3^b = 2^3 \times 3^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$$

(۱۱) گزینه‌ی (۱) صحیح است.

اگر x عددی اول باشد آنگاه عدد x^b به تعداد $b+1$ شمارنده دارد.

$x+1$ تعداد شمارنده های x^x برابر است با:
از این تعداد باید عدد یک و خود x را که اول است کم کنیم تا شمارنده های مرکب آن بدست بیاید.

$$x+1-2 = x-1$$

(۱۲) گزینه‌ی (۳) صحیح است.

چون عدد دارای ۷ شمارنده است به صورت x^6 می باشد.
(x عددی اول است)

که به جای x فقط می‌توان شماره‌های ۱ را قرار داد تا حاصل عدد طبیعی شود. پس به جای x فقط می‌توان عدد ۱ را قرار داد که در این صورت حاصل ۲ می‌شود و عدد اول بدست می‌آید.

۱۸) گزینه‌ی (۲) صحیح است.

با توجه این نکته که: اگر a عددی اول باشد آنگاه عدد a^b به تعداد $b+1$ شماره‌دهنده دارد داریم:
 $a^{16} = \text{عدد}$

پس عدد مورد نظر a^{16} است. که این عدد مربع کامل است. (اعدادی مربع کامل‌اند که پس از تجزیه به عامل‌های اول دارای توان زوج باشند) و اعداد مربع کامل دارای تعداد شماره‌دهنده‌های فرد هستند.

۱۹) گزینه‌ی (۲) صحیح است.

در روش غربال به ترتیب مضرب‌های اعداد اول ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ و ... خط می‌خورند.
۴۹۴۹ مضرب ۷ و ۴۱۴۱ مضرب ۴۱ و ۴۶۲۵ مضرب ۵ و ۳۸۰۱ مضرب ۳ می‌باشند. بنابراین به ترتیب اعداد ۳۸۰۱ و ۴۶۲۵ و ۴۹۴۹ و دیرتر از همه ۴۱۴۱ خط می‌خورند.

۲۰) گزینه‌ی (۴) صحیح است.

هیچ کدام از جملات صحیح نمی‌باشد:
• تمام اعداد طبیعی شماره‌دهنده اول ندارند. مانند ۱
• حاصل ضرب هر دو عدد طبیعی را نمی‌توان گفت حتما مرکب است. مانند: $1 \times 5 = 5$
• عدد ۱۱ اول است و بر خودش بخش پذیر است.
• عددی وجود دارد که ۱۰۰ شماره‌دهنده اول داشته باشد.
• ۱۰۰ عدد اول را در هم ضرب کنیم عدد حاصل دارای ۱۰۰ شماره‌دهنده اول خواهد بود.

مربع x^6 برابر x^{12} است و تعداد شماره‌دهنده‌های آن برابر است با:
 $12 + 1 = 13$

۳) گزینه‌ی (۲) صحیح است.

عدد 5^{13} و ۳ هر دو عددی فرد هستند که اگر از هم کم کنیم عددی زوج به دست می‌آید. پس بر ۲ بخش پذیر خواهد بود. در نتیجه عددی مرکب است.

توجه کنید که در عدد 5^{13} چون عدد ۵ عددی فرد است، به هر توانی هم که برسد حاصل عددی فرد خواهد بود.

۴) گزینه‌ی (۴) صحیح است.

اگر عدد ۲۳ را ۲۲ بار در خودش ضرب کنیم می‌توان آن را به صورت تواندار نوشت:

$$23 = 22 + 1 \rightarrow \text{تعداد شماره‌دهنده‌ها} \quad 23^{22} = \underbrace{23 \times 23 \times \dots \times 23}_{22 \text{ مرتبه}}$$

۵) گزینه‌ی (۳) صحیح است.

تقسیم را تا عدد اولی که مربع آن کوچکتر از ۳۰۰ می‌باشد ادامه می‌دهیم

۲	۳	۵	۷	۱۱	۱۳	۱۷	۱۹	
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	...
۴	۹	۲۵	۴۹	۱۲۱	۱۶۹	۲۸۹	۳۶۱	

پس تا تقسیم بر ۱۷ ادامه می‌دهیم. پس حداکثر ۷ تقسیم انجام می‌دهیم.

۱۶) گزینه‌ی (۲) صحیح است.

تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰۰ برابر ۹۹۹ عدد می‌باشد. که از این تعداد n عدد اول و ۱ عدد هم نه اول و نه مرکب است. پس تعداد اعداد مرکب برابر است با:

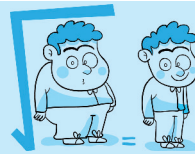
$$999 - n - 1 = 998 - n$$

۱۷) گزینه‌ی (۴) صحیح است.

با ساده کردن عبارت $\frac{x+1}{x}$ داریم:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \xrightarrow{x=1} 1 + \frac{1}{1} = 2$$

پاسفنامه آزمون شماره ۳



(۶) گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$\frac{\frac{a}{\frac{1}{a}}}{\frac{1}{b}} = \frac{a}{1} \div \left(-\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{1} \times -\frac{b}{a} = -\frac{ab}{a} = -b$$

$$\Rightarrow -b \xrightarrow{\text{معکوس}} -\frac{1}{b}$$

(۷) گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$a + b = 10, ab = 20, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = ?$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

(۸) گزینه‌ی (۳) صحیح است.

در حالتی که عدد منفی باشد، $\frac{1}{2}$ آن از خود عدد

بزرگتر خواهد شد $-4 \xrightarrow{\text{نصف}} -2 \rightarrow -2 > -4$

(۹) گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$-2\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{3} = -\frac{9}{4} \times \frac{10}{3} = -\frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{15}{2} \times \square = -45 \Rightarrow \square = (-45) \div \left(-\frac{15}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \square = -\cancel{45}^3 \times -\frac{2}{\cancel{15}} = 6 \rightarrow \text{عدد سوم}$$

(۱۰) گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$\text{برای تبدیل کسر } \frac{a}{b} = \frac{462}{594} \text{ به حالت تحویل ناپذیر}$$

(ساده نشدنی) کافی است صورت و مخرج آن را بر

ب.م.م صورت مخرج تقسیم کنیم بنابراین داریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{462}{594} \Rightarrow (462, 594) = 66$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{462 \div 66}{594 \div 66} = \frac{7}{9} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{7}{9} \Rightarrow a = 7, b = 9$$

$$\Rightarrow a + b = 16$$

(۱) گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$5 - 4[3 - 2(1 - 2)^4 + 3] \times 4 - 5 =$$

$$\Rightarrow 5 - 4 \times [3 - 2(1) + 3] \times 4 - 5 =$$

$$\Rightarrow 5 - 4 \times [3 - 2 + 3] \times 4 - 5 =$$

$$\Rightarrow 5 - 4 \times 4 \times 4 - 5 = \cancel{5} - 64 - \cancel{5} = -64$$

(۲) گزینه‌ی (۴) صحیح است.

تعداد منفی‌ها ۶ تا (زوج) می‌باشد پس حاصل $+2\frac{3}{5}$ است بنابراین داریم:

$$2\frac{3}{5} = \frac{13}{5} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{5}{13} \xrightarrow{\text{قرینه}} -\frac{5}{13}$$

(۳) گزینه‌ی (۲) صحیح است.

چون مجموع هر ۴ عدد متوالی برابر صفر است پس داریم:

$$1395 = (4 \times 348) + 3$$

پس حاصل جمع عبارت برابر است با:

$$1393 - 1394 - 1395 = -1396$$

(۴) گزینه‌ی (۱) صحیح است.

اگر عدد ۴۵ را به شکل حاصل ضرب ۵ عدد صحیح متفاوت بنویسیم داریم:

$$45 = (3)(1)(5)(-1)(-3)$$

که به این ترتیب مقادیر a, b, c, d و e اعداد ۳، ۵، ۱، ۷ و ۹ خواهند شد بنابراین داریم:

$$9 + 7 + 1 + 5 + 3 = 25$$

(۵) گزینه‌ی (۱) صحیح است.

در حالتی که اعداد را ۱، ۱، ۱ و ۲۶ در نظر بگیریم حاصل ضربشان از حاصل جمعشان کوچک‌تر خواهد شد، در حالت‌های دیگری حاصل ضربشان از حاصل جمعشان بزرگتر خواهد شد.

باشد $90 = 99 - 9$ تا هستند.

(۱۷) گزینه‌ی (۲) صحیح است.

اعداد 127127 و 1234321 بر 11 بخش پذیر هستند.
گزینه ۴ مرکب است:

$$\frac{(2^6 - 2^3) \times \sqrt{4}}{2} = \frac{(64 - 8) \times 2}{2} = 56$$

گزینه ۲ اول است

$$\frac{102^8 - 102^7}{102^7} = \frac{102^8}{102^7} - \frac{102^7}{102^7} = 102 - 1 = 101$$

(۱۸) گزینه‌ی (۳) صحیح است.

آخرین عدد اولی که مضرب‌های آن را خط می‌زنیم
۱۹ است چون مربع آن ۳۶۱ می‌شود و از ۵۰۰
کوچکتر است. در مرحله حذف مضرب‌های ۱۹ این
اعداد خط می‌خورند:

$$19 \times 19 = 361$$

$$19 \times 23 = \boxed{437}$$

$$19 \times 29 = 551$$

پس آخرین عددی که خط می‌خورد ۴۳۷ می‌باشد.

(۱۹) گزینه‌ی (۳) صحیح است.

چون تنها اعداد اول متوالی ۲ و ۳ هستند پس بیشترین
تعداد عدد اول در بین اعداد ۲ تا ۱۱ می‌باشد که ۵
تای آن اول هستند.
۱۱ و ۱۰ و ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲

(۲۰) گزینه‌ی (۱) صحیح است.

اعداد اول عبارتند از ۴۱ و ۷
توجه کنید که $\sqrt{49}$ و $\frac{14}{2}$ هر دو ۷ می‌شوند و یکبار
حساب می‌کنیم.

• عدد 17^2 که دارای ۲۱ شمارنده است پس مرکب است.

• عدد $(13^{17} + 19^{17})$ عددی زوج بر ۲ بخش پذیر است.
پس مرکب است.

• اگر یک عدد سه رقمی را دو بار متوالی بنویسیم
حاصل بر ۷ و ۱۱ و ۱۳ بخش پذیر می‌شود. پس
عدد ۱۲۳۱۲۳ مرکب است.

• عدد ۳- هم که عددی طبیعی نیست.

• عدد ۱ هم نه اول است، نه مرکب.

(۱) گزینه‌ی (۱) صحیح است.

اگر a عددی اول باشد آنگاه عدد a^b به تعداد $b+1$
شمارنده دارد پس چون عدد دارای ۱۳ شمارنده است
به صورت x^{12} می‌باشد
تعداد $x^{12} \xrightarrow{\text{مکعب}} (x^{12})^3 = x^{36} \xrightarrow{\text{شمارنده‌ها}} 36+1=37$

(۲) گزینه‌ی (۲) صحیح است.

اگر مجموع دو عدد اول را x در نظر بگیریم داریم:

$$4x - 3 = 417 \Rightarrow 4x = 420 \Rightarrow x = \frac{420}{4} = 105$$

چون مجموع دو عدد اول عددی فرد بدست آمد
پس یکی از آنها ۲ و دیگری ۱۰۳ می‌باشد که
مجموع رقم‌های عدد بزرگتر ۴ می‌باشد.

(۳) گزینه‌ی (۱) صحیح است.

اگر p عددی اول باشد. تعداد اعداد کوچکتر از p که
نسبت به p اول هستند برابر است با $p-1$ یعنی:
 $\phi(p) = p-1 \Rightarrow \phi(71) = 71-1 = 70$

(۴) گزینه‌ی (۲) صحیح است.

اعدادی که تعداد شمارنده‌های آنها فرد باشد مربع
کامل هستند. پس تعداد اعداد مربع کامل ۲ رقمی
را حساب می‌کنیم. این اعداد عبارتند از:
۸۱ و ۶۴ و ۴۹ و ۳۶ و ۲۵ و ۱۶ که شش تا هستند

(۵) گزینه‌ی (۲) صحیح است.

اعدادی که تعداد شمارنده‌های آنها فرد باشد مربع
کامل هستند پس تعداد اعداد مربع کامل ۳ رقمی
را حساب می‌کنیم:

10^2	11^2	12^2	13^2	...	30^2	31^2
↓	↓	↓	↓	...	↓	↓
۱۰۰	۱۲۱	۱۴۴	۱۶۹		۹۰۰	۹۶۱

که تعداد آنها برابر است با
 $\frac{31-10}{1} + 1 = 22$

(۶) گزینه‌ی (۱) صحیح است.

اعداد مربع کامل کوچکتر از ۱۰۰ که تعداد
شمارنده‌های آنها فرد است عبارتند از: ۱ و ۴ و ۹
و ۱۶ و ۲۵ و ۳۶ و ۴۹ و ۶۴ و ۸۱ که تعداد آنها ۹ تا
است پس اعدادی که تعداد شمارنده‌های آن زوج