به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

امتحان پایان‌ترم ریاضی عمومی ۱

۰۱۵ − ۲۲

نیمسال اوّل ۹۲−۹۱

تاریخ امتحان: ۹۱/۱۰/۱۳
مدّت امتحان: ۳ ساعت

- این امتحان شامل ۵ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در کتابچهٔ امتحانی بنویسید و در هر برگهٔ کتابچه فقط و فقط به یک سؤال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسهٔ امتحان ممنوع است.
- در طول جلسهٔ امتحان به هیچ سؤالی پاسخ داده نمی‌شود.

سؤال ۱. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\displaystyle\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$ (ب) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2(x^2+1)}\,dx$ (ج) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx \quad (n\in\mathbb{N})$

سؤال ۲. طول قوس منحنی $y=e^x$ را از نقطهٔ $(\ln\sqrt{3},\sqrt{3})$ تا نقطهٔ $(\ln\sqrt{8},\sqrt{8})$ محاسبه کنید.

سؤال ۳. همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}$ (ب) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^n+e^{-n}}{e^{2n}-1}\right)^n$

سؤال ۴. نشان دهید $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ و سپس همگرایی یا واگرایی سری $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{(1+\frac{1}{n})}}$ را بررسی کنید.

سؤال ۵. هر یک از توابع f و g با ضابطه‌های زیر را به یک سری تیلور حول $a=0$ بسط دهید و در هر حالت شعاع همگرایی سری را محاسبه کنید. با استفاده از سری‌های به‌دست آمده، مشتق دهم f و g را در صفر به دست آورید.

(الف) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+16}$ (ب) $g(x)=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

توزیع نمره. سؤال ۱: ۱۰+۱۰+۱۰ نمره، سؤال ۲: ۱۰ نمره، سؤال ۳: ۱۰+۱۰ نمره، سؤال ۴: ۱۰+۱۰ نمره، سؤال ۵: ۱۰+۱۰ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره

سؤال ۱ (الف)

$$\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{4-(1+x)^2}}\,dx$$

$$\begin{cases} 1+x = 2\sin\theta \\ dx = 2\cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$= \int \frac{4\sin^2\theta}{2\cos\theta}\, 2\cos\theta\, d\theta$$

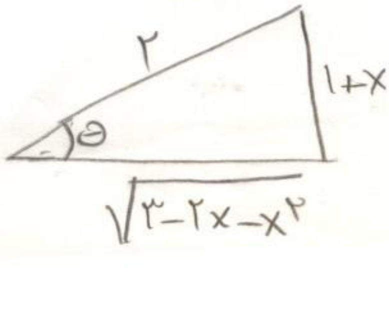
$$= \int 4\sin^2\theta\, d\theta$$

$$= \int 2(1-\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= 2\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + C$$

$$= 2\left[\theta - \sin\theta\cos\theta\right] + C$$

$$= 2\left[\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) - \left(\frac{1+x}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{2}\right)\right] + C$$



سؤال ۱ (ب)

$$\frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$= \frac{Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)x^2}{x^2(x^2+1)}$$

$$= \frac{(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + B}{\text{مخرج کسر}}$$

$$\begin{cases} A+C = 1 \\ B+D = 2 \\ A = 1 \\ B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ D = 1 \\ C = 0 \end{cases}$$

$$\int \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+1} \right\} dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{x} + \tan^{-1}(x) + C_1$$

سؤال ۱ (ب)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x \, \underbrace{\cos x \, dx}_{d(\sin x)}$$

$$= \left[\cos^{2n-1} x \, \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)(2n-1)(-\sin x)\left(\cos^{2n-2} x\right) dx$$

$$= 0 + (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, \cos^{2n-2} x \, dx$$

$$= (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x) \cos^{2n-2} dx$$

$$= (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^{2n-2} x - \cos^{2n} x\right) dx$$

$$\Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \, dx = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} x \, dx$$

$$\Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \, dx = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right) \cdots \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

سوال ۲

$$\frac{dy}{dx} = e^{x}$$

$$L = \int_{\ln\sqrt{۳}}^{\ln\sqrt{۸}} \sqrt{1+e^{۲x}}\, dx$$

$$\begin{cases} u = \sqrt{1+e^{۲x}} \\ u^{۲} = 1+e^{۲x} \\ ۲u\,du = ۲e^{۲x}\,dx \\ dx = \dfrac{u}{e^{۲x}}\,du \\ \quad = \dfrac{u}{u^{۲}-1}\,du \end{cases}$$

$$= \int_{۲}^{۳} \frac{u^{۲}}{u^{۲}-1}\, du$$

$$= \int_{۲}^{۳} \left[1 + \frac{1}{u^{۲}-1}\right] du$$

$$= \int_{۲}^{۳} \left[1 + \frac{\frac{1}{۲}}{u-1} - \frac{\frac{1}{۲}}{u+1}\right]$$

$$= \left[u + \frac{1}{۲} \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_{۲}^{۳}$$

$$= 1 + \frac{1}{۲}\ln\left|\frac{۲}{۴}\right| - \frac{1}{۲}\ln\left|\frac{1}{۳}\right| = 1 + \frac{1}{۲}\ln\left(\frac{۳}{۲}\right)$$

سوال ۳ قسمت (الف)

$$a_n = \frac{n!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}$$

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{\dfrac{(n+1)!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)(2n+1)}}{\dfrac{n!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}}$$

$$= \lim \frac{n+1}{2n+1}$$

$$= \frac{1}{2} < 1$$

بنا به آزمون نسبت سری مورد نظر همگرا است.

سوال ۳ قسمت (ب)

$$a_n = \left(\frac{e^{n} + e^{-n}}{e^{2n} - 1}\right)^n$$

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \frac{e^{n} + e^{-n}}{e^{2n} - 1}$$

ضرب صورت و مخرج کسر در e^{-2n}

$$= \lim \frac{e^{-n} + e^{-3n}}{1 - e^{-2n}}$$

$$= \frac{0 + 0}{1 - 0} = 0 < 1$$

بنابر آزمون ریشه همگرااست

راه دوم به جای ضرب کردن صورت و مخرج کسر در عامل e^{-2n} می‌تواند از هوپیتال استفاده کند:

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{e^{n} - e^{-n}}{2e^{2n}}$$

$$= \lim \frac{1}{2}\left(e^{-n} - e^{-3n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(0 - 0)$$

سوال ۴ تست اول

راه اول

$$y = \ln(\sqrt[n]{n}) = \frac{\ln(n)}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} y = \lim \frac{\frac{1}{n}}{1} =$$ (هوپیتال)

$$= \frac{0}{1} = 0$$

$$\Longrightarrow \lim \sqrt[n]{n} = \lim \exp(y) = e^{0} = 1$$

راه دوم قرار می‌دهیم $h_n = \sqrt[n]{n} - 1$. آنگاه $0 < h_n$ ،

$$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n \Longrightarrow n = (1+h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \cdots$$

$$> \frac{n(n-1)}{2} h_n^2$$

$$\frac{n(n-1)}{2} h_n^2 < n \Longrightarrow 0 < h_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

اما چون حد عبارت سمت راست صفر است، پس $h_n \to 0$ ،

معادلاً $\sqrt[n]{n} \to 1$.

قسمت دوم سری مورد نظر با سری $\sum \frac{1}{n}$ هم‌رفتار است چراکه

$$\lim \frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1} = 1$$

پس $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ هم واگرا است.

راه دوم چون $\lim \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = 1$، پس برای nهای بزرگ داریم $\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} > \frac{1}{2}$ لذا $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} > \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}$

پس از آزمون مقایسه، سری $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ واگرا است.

سؤال ۵
قسمت (الف)

$$f(x) = \frac{x}{16} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x^2}{16}\right)}$$

$$= \frac{x}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{16}\right)^n$$

$$= \frac{x}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{16^n} x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{16^{n+1}} x^{2n+1}$$

برای برقراری تساوی‌ها باید فرض شود $\left|\frac{x^2}{16}\right|<1$ معادلاً $|x|<4$. پس $R=4$

$$f^{(10)}(0) = 10! \times (\text{ضریب جمله } x^{10}) = (10!)\times(0) = 0 \quad \Big\} \ (2)$$

مت (ب)

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\,x^{n}$$

با مشتق‌گیری:

$$\frac{1}{(2-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}\,x^{n-1}$$

طرفین را در x^3 ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x^3}{(2-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}\,x^{n+2}$$

برار برقراری تساوی‌های بالا باید فرض کنیم که $\left|\frac{x}{2}\right|<1$

عادلاً $|x|<2$.

$$g^{(10)}(0) = 10! \times (\text{ضریب جمله } x^{10}) = 10! \times \frac{8}{2^9}$$