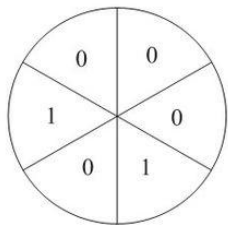


یادداشت جلسه پنجم - ناوردایی

۱. n چوپان داریم که در مجموع ۱۲۸ گوسفند دارند. در هر روز، اگر تعداد گوسفندان چوپانی بزرگتر یا مساوی نصف تعداد کل گوسفندان باشد، چوپان‌های دیگر، هر یک به اندازه‌ی تعداد گوسفندان خودشان از او گوسفند می‌دزدند. می‌دانیم ۷ روز دزدی رخ داده است، مشخص کنید در انتها هر چوپان چند گوسفند دارد؟

۲. یک اتاق $a \times b$ داریم که آنرا با تعدادی کاشی 2×2 و 1×4 فرش کرده‌ایم. یکی از کاشی‌ها شکسته است و به جای آن یک کاشی از نوع دیگر قرار می‌دهیم، آیا با کاشی‌های جدید می‌توان دوباره اتاق را فرش کرد؟

۳. در یک پارلمان هر نماینده حداکثر ۳ مخالف دارد، ثابت کنید، این نمایندگان را می‌توان در ۲ خانه قرار داد طوری که هر نماینده در خانه‌ی خود حداکثر ۱ مخالف داشته‌باشد.



۴. یک دایره را به ۶ بخش تقسیم کرده‌ایم و در جهت خلاف عقربه‌های ساعت عددهای ۰، ۰، ۰، ۱، ۰، ۱ در این بخش‌ها نوشته‌ایم. شما می‌توانید در هر مرحله به دو عدد که در ۲ بخش مجاور قرار دارند یک واحد اضافه نمایید. آیا ممکن است به حالتی برسید که تمام اعداد نوشته‌شده با هم برابر باشند؟

۵. n نقطه در یک صفحه داریم که هیچ سه‌تایی هم‌خط نیستند، یک عدد v به شما داده شده‌است، ثابت کنید خطی می‌توان رسم کرد که v تا از نقاط در یک سو و $n - v$ نقطه‌ی دیگر در سوی دیگر این خط باشند.

۶. سه توپ در یک ردیف داریم، در هر مرحله دو توپ متوالی را انتخاب کرده و جای ایندو را باهم عوض می‌کنیم، ۷۵ مرتبه این عمل را انجام می‌دهیم، آیا ممکن است ترتیب نهایی با ترتیب اولیه‌ی توپ‌ها یکسان باشد؟

۷. یک جدول 2000×2000 داریم که در هر خانه‌ی آن یک مهره قرار دارد، در هر مرحله یک مستطیل 1×3 از آن انتخاب کرده که در خانه‌ی اول و سوم آن حداقل یک مهره باشد (در هر کدام حداقل یک خانه) سپس از خانه‌ی اول و سوم هر کدام یک مهره برداشته و این دو مهره را در خانه‌ی وسط مستطیل 1×3 قرار می‌دهیم. آیا می‌توان پس از تعداد محدودی مرحله همه‌ی مهره‌ها را در یک خانه جمع کرد؟

۸. ۵ عدد صفر و ۴ عدد یک را به ترتیبی دلخواه دور یک دایره نوشته‌ایم. در هر مرحله بین هر دو عدد مساوی عدد ۰ و بین هر دو عدد نامساوی عدد ۱ را می‌نویسیم و سپس ۹ عدد قبلی را پاک می‌کنیم و ۹ عدد جدید را نگاه می‌داریم. آیا اگر این عمل را همین‌طور ادامه یابد، ممکن است به حالتی برسیم که ۹ عدد صفر دور دایره باشد؟

۹. در یک ردیف ۱۰۰۰ عدد صحیح نوشته شده است، زیر هر عدد a ، $f(a)$ یعنی تعداد دفعات تکرار a در دنباله می‌نویسیم تا دنباله ۱۰۰۰ تایی جدیدی به دست آید. به همین روش دنباله‌های سوم، چهارم و ... را از دنباله‌های قبلی به دست می‌آوریم. ثابت کنید به از چند مرحله به دو دنباله‌ی هزارتایی متوالی و مساوی می‌رسیم.

۱۰. n نقطه‌ی آبی و n نقطه‌ی قرمز در صفحه داریم به طوری که هیچ ۳ نقطه‌ای روی یک خط راست قرار ندارند. آیا می‌توان با n پاره‌خط هر نقطه‌ی آبی را به یک نقطه‌ی قرمز (و برعکس) وصل کرد طوری که این پاره‌خطها متقاطع نباشند.

۱۱. یک جدول $4 \times n$ داریم. آیا با مهره‌ی اسب و حرکتهای به شکل L می‌توان از یک خانه شروع به حرکت کرد و تمام

خانه‌های جدول فقط یک‌بار طی کرد و نهایتاً به خانه‌ی ابتدایی بازگشت؟

۱۲. در ۳ راس یک مربع ۳ مهره گذاشته‌ایم (هر راس یک مهره)، در هر مرحله، دو تا از مهره‌ها مثل A و B را انتخاب کرده و

مهره‌ای در محل قرینه‌ی A نسبتاً به B می‌گذاریم. آیا ممکن است پس از تعدادی حرکت مهره‌ای در محل راس چهارم مربع

قرار دهیم؟

۱۳. ۴ مثلث متساوی الساقین هم‌نهشت داریم، در هر مرحله با رسم ارتفاع وارد بر وتر یکی از مثلث‌ها، آنرا به دو مثلث قائم‌الزاویه که

با مثلث قبلی متشابه‌اند تبدیل می‌کنیم، آیا می‌توان پس از تعداد محدودی حرکت به جایی رسید که هر دو مثلثی با هم غیر

هم‌نهشت باشند.

۱۴. یک جدول 6×6 داریم که در آن اعداد صحیح قرار دارد، در هر مرحله می‌توان یک مربع 2×2 یا 3×3 یا 4×4 یا

5×5 یا 6×6 از اعداد جدول انتخاب کرد و همه‌ی اعداد را به‌اضافه‌ی یک کرد. آیا پس از تعدادی مرحله می‌توان به جایی

رسید که همه‌ی خانه‌های جدول بر ۳ بخش پذیر باشند؟

۱۵. یک جدول 5×5 داریم که در هر خانه‌ی آن یک لامپ است. می‌دانیم یکی از لامپ‌ها خاموش و بقیه روشن است، در هر

مرحله می‌توانیم یک مربع 2×2 یا 3×3 یا 4×4 یا 5×5 انتخاب کنیم و خاموش/روشنی لامپ‌های آن را تغییر

دهیم (لامپ‌های خاموش را روشن و لامپ‌های روشن را خاموش کنیم). به ازای چه جاهایی از لامپ‌خاموش می‌توانیم پس از

تعدادی مرحله همه‌ی لامپ‌های جدول را روشن کنیم؟