هندسه پایه دهم

۱) نقطه ای مانند O را در صفحه در نظر بگیرید. مجموعه نقاطی را مشخص کنید که فاصله شان از نقطه ی O به فاصله ۲ سانتی متر باشد. دایره ای به مرکز o و شعاع ۲ سانتی متر است

۲) خط d را در نظر بگیرید و تمام نقاطی که به فاصله ۱ سانتی متر از خط d قرار دارند دو خط موازی با آن خط به فاصله ۱ سانتی متر در دو طرف آن است

۳) مثلثی رسم کنید که اضلاع آن به ترتیب $AB = ۳$ ، $BC = ۵$، $AC = ۴$ هستند.

ابتدا مثلا پاره خط AB را رسم کرده و یکبار به مرکز A به شعاع ۴ کمان زده و یکبار هم به مرکز B و شعاع ۵ کمان میزنیم محل تلاقی دو کمان جواب مساله است.(۲ جواب) . به تعداد کمان های زده شده دقت کنید.

نکته:برای رسم هر مثلث باید جمع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر باشد(قضیه حمار). برای اینکار کافی است که دو ضلع کوچکتر از ضلع بزرگتر باشد آنگاه دو نامساوی دیگر نیز قطعا برقرار است.

نیمساز

هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یگ زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

۴) روش رسم نیمساز یک زاویه :

الف) یک کمان به اندازه دلخواه

ب) رسم پارخط AB

ج)رسم عمود منصف AB

د) عمود منصف AB از O می گذرد.

دقت: به تعداد کمان رسم شده

عمود منصف

هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط باشد از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.

۵) مراحل رسم عمود منصف یک پاره خط : ۱)رسم پاره خط ۲)کمان یکبار به مرکز A و یکبار به مرکز B و شعاع بیش از نصف AB (شعاع یکسان) ۴)محل تلاقی کمان ها را رسم کنید، عمود منصف پاره خط AB بدست می آید.

۶) مراحل رسم خط عمود بر یک خط از نقطه ای روی آن را توضیح دهید.

۷) روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه ای غیر واقع بر آن را توضیح دهید

۸) روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه ای غیر واقع بر آن را توضیح دهید.

۹) رسم متوازی الاضلاع با دو قطر

۱۰) رسم لوزی با دو قطر

استدلال استقرایی: مشاهدات و بررسی موضوعی در چند حالت، نتیجه ای کلی در آن موضوع گرفته می شود یا

استدلال استنتاجی: نتیجه گیری منطقی بر پایه ی واقعیت هایی است که درستی آنها را پذیرفته ایم

مجموع زوایه های داخلی n ضلعی برابر با $(n-۲) \times ۱۸۰$ است.(n ضلعی محدب)

مجموع اندازه های زاویه های خارجی چند ضلعی محدب برابر با ۳۶۰ است.

هر n ضلعی محدب حداکثر سه زاویه داخلی حاده ممکن است داشته باشد.

همرسی اجزای فرعی مثلث:

سه عمود منصف اضلاع هر مثلث همرس اند.

ارتفاع های (یا امتداد آن ها) در هر مثلث همرسند.

نیمساز های زاویه های داخلی هر مثلث همرسند.

محل همرسی ها:

همرسی / نوع مثلث	نیمسازها	ارتفاع	عمود منصف
حاده الزاویه			
قائم الزاویه			
منفرجه الزاویه			

مفاهیم استدلال

گزاره: یک جمله خبری است که دقیقا درست یا نادرست باشد، اگر چه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد.

گزاره ساده: یک خبر را اعلام می کند. مثال: هر زاویه داخلی مثلث متساوی الاضلاع ۶۰ درجه است.

گزاره مرکب: ترکیبی از چند گزاره ی ساده. مثال: در متوازی الاضلاع زاویه های روبه رو برابرند و زاویه های مجاور مکمل اند.

قضیه: نتایج مهم و پر کاربرد که با استدلال استنتاجی بدست می آید.

هر قضیه دو قسمت دارد قسمت اول گزاره یا گزاره هایی است که درست بودن آن ها را قبول داریم. این قسمت را فرض قضیه می نامند.

قسمت دوم گزاره هایی است که درست بودن آنها را باید از فرض نتیجه گرفت. این قسمت را حکم قضیه می نامند.

عکس قضیه: اگر در قضیه ای جای فرض و حکم را عوض کنیم. گزاره ای بدست می آید که آن را عکس قضیه می نامند.

اگر یک چهار ضلعی متوازی الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می کنند.

اگر عکس قضیه ای درست باشد. می توان آن را به شکل قضیه دو شرطی نوشت.

نماد:

اگر و تنها اگر:

مساحت های هر دو مثلث هم نهشت با هم برابرند. عکس را بنویسید و آیا دو شرطی هست یا نه؟

نامساوی های هندسی:

هر زاویه خارجی مثلث از هر زاویه داخلی غیر مجاورش بزرگتر است.

قضیه ۱: اگر دو مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبرو به ضلع بزرگتر، بزرگتر است از زاویه روبه رو به ضلع کوچکتر.

نقیض گزاره: می دانیم ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست. ارزش آن دقیقا مخالف ارزش خود گزاره است.

مثال: گزاره: مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ است

نقیض گزاره:

برهان خلف: در این روش، به جای این که به طور مستقیم از فرض به درستی حکم برسیم. فرض می کنیم حکم نادرست باشد (یعنی نقیض حکم درست باشد) و به تناقض می رسیم. تناقض ممکن است امری ناممکن یا خلاف حکمی باشد که قبلا درستی آن را ثابت کرده ایم.

با استفاده از برهان خلف ثابت کنید عمود منصف هر پاره خط یکتاست.

عکس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبرو به زاویه بزرگتر، بزرگتر است از ضلع روبه رو به زاویه کوچکتر.

قضیه ی حمار

در هر مثلث دلخواه ABC مجموع اندازه های هر دو ضلع از اندازه ی ضلع سوم بزرگتر است.

مثال نقض

نوع دیگری از استدلال است که در آن مثالی که نشان می دهد یک حکم کلی نادرست است مثال نقض گفته می شود.

مثال:

۱) همه ی اعداد صحیح مثبت اند.

نکات تکمیلی:

در هر مثلث طول هر ضلع بین مجموع و قدر مطلق تفاضل طول های دو ضلع دیگر قرار دارد.

در هر مثلث بزرگترین ضلع از $\frac{۱}{۳}$ محیط بزرگتر است.

در هر مثلث کوچکترین ضلع از $\frac{۱}{۳}$ محیط کوچکتر است.

در مثلث ABC، AM میانه ی وارد بر ضلع BC است، داریم:

$$\left|\frac{AB-AC}{۲}\right| < AM < \frac{AB+AC}{۲}$$

فصل دوم

۱- نسبت: اگر a و $b \neq ۰$ دو عدد حقیقی باشند، کسر $\frac{a}{b}$ را نسبت عدد a به b می نامند.

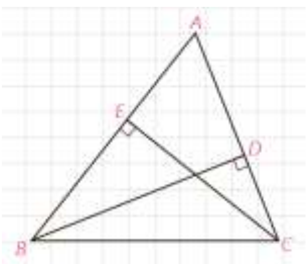
۲- تناسب: برابری دو نسبت را تناسب می گویند. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

۳- واسطه هندسی: اگر تناسبی بصورت $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ یا $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ باشد، نتیجه می شود $b^۲ = ac$، در اینصورت b را میانگین هندسی یا واسطه ی هندسی a و c می نامند.

۴- ویژگی های تناسب:

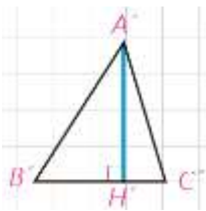
۱	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$	$\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۱۰} \Leftrightarrow ۳\times۱۰=۵\times۶$	b و d ≠ ۰	(طرفین وسطین کردن)
۲	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$	$\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰} \Rightarrow \frac{۵}{۲}=\frac{۱۰}{۴}$	a و b و c و d ≠ ۰	(معکوس کردن طرفین تناسب)
۳	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۶}{۹} \Rightarrow \frac{۹}{۳}=\frac{۶}{۲}$	a و b و c و d ≠ ۰	(تعویض جای طرفین یا وسطین)
۴	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ یا $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶} \Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰}$	b و d ≠ ۰	(ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)
۵	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ یا $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$	$\frac{۳۰}{۲۱}=\frac{۲۰}{۱۴} \Rightarrow \frac{۹}{۲۱}=\frac{۶}{۱۴}$	b و d ≠ ۰	(تفضیل نسبت در صورت یا مخرج)
۶	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$	$\frac{۴}{۶}=\frac{۸}{۱۲} \Rightarrow \frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۴}{۶}$	b و d ≠ ۰	

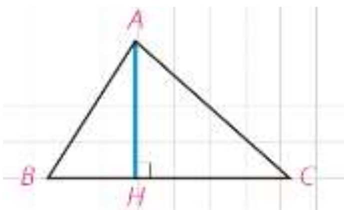
۷	$\frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=\cdots=\frac{a_n}{b_n} \Rightarrow \frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_n}{b_۱+b_۲+\cdots+b_n}$ $\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۸}{۱۲} \Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲+۴+۶+۸}{۳+۶+۹+۱۲}=\frac{۲۰}{۳۰}$	$b_۱$ و $b_۲$ و ... و $b_n \neq ۰$	(تعمیم ویژگی ۶)

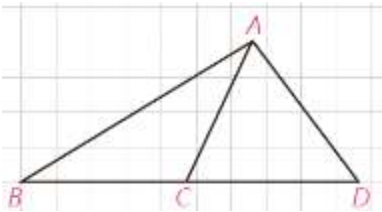


۵- در هر مثلث نسبت اندازه های هر دو ضلع، با عکس نسبت ارتفاع وارد بر آن ها برابر است.

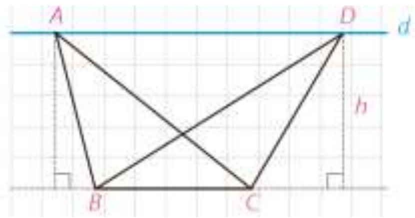
۶- هرگاه ارتفاع های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت های آن ها برابر است با اندازه ی قاعده هایی است که این ارتفاع ها بر آنها وارد شده است.





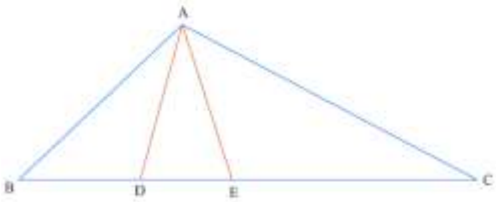


۷- اگر دو مثلث در یک راس مشترک بوده و قاعده ی مقابل به این راس آنها بر روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت های آنها برابراست.



۸- اگر دو مثلث، قاعده ی مشترکی داشته باشند و راس های روبروی این قاعده ی آنها، روی یک خط، موازی این قاعده باشند، این مثلث ها هم مساحت اند. مثلث های ABC و DBC هم مساحت اند.

تست:در شکل زیر مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت $\frac{BC}{DE}$ کدام است؟

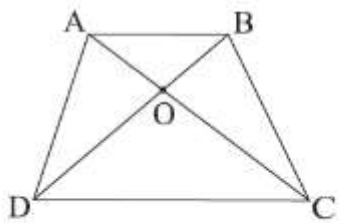


۵(۱

۵/۵ (۲

۶(۳

۶/۵ (۴

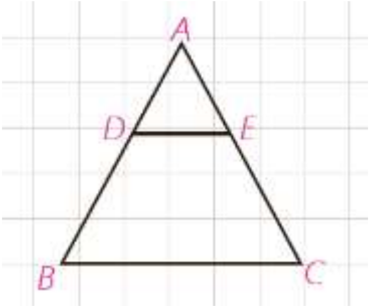


۹- در هر ذوزنقه مساحت دو مثلثی که محدود قطرها و ساق ها هستند برابرند.

۱۰- قطرهای هر ذوزنقه آن را به دو مثلث تقسیم می کند که نسبت مساحت های آن برابر نسبت قاعده های ذوزنقه است.

۱۱- میانه ی هر مثلث آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می کند.

۱۲- هر گاه در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره خط جدا می کنند که اندازه های آن تشکیل یک تناسب می دهند، به طور خلاصه، هرگاه مانند شکل مقابل داشته باشیم $DE \parallel (BC)$ باشد داریم:



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{CE}$$

۱۳- نتیجه قضیه ی تالس:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

۱۴- تعمیم قضیه تالس:

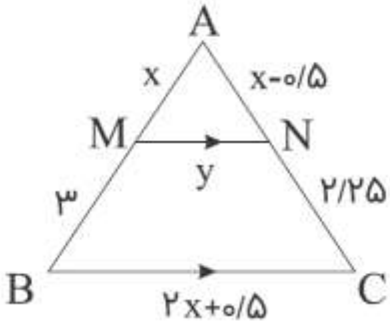
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

۱۵- عکس قضیه ی تالس:

اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آنها، چهار پاره خط با اندازه های متناظرا متناسب جدا کند، آنگاه با ضلع سوم مثلث موازی است.

فرض: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ حکم: $DE \parallel BC$

تست) در شکل زیر $MN \parallel BC$ حاصل $\frac{y}{x}$ کدام است؟



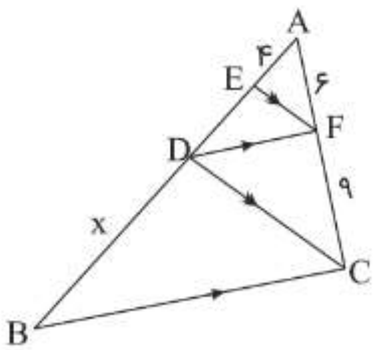
۱) ۰/۸

۲) ۰/۹

۳) $\frac{۱۰}{۹}$

۴) ۱/۲۵

تست) در شکل زیر $DC \parallel EF$ و $BC \parallel DF$ است. با توجه به اندازه های روی شکل، $BD = x$ کدام است؟



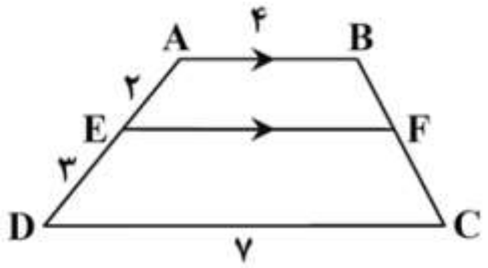
۱) ۱۸

۲) ۱۵

۳) ۱۲

۴) ۹

تست) اگر در ذوزنقه $ABCD$ داشته باشیم $EF \parallel AB$، طول EF چقدر است؟



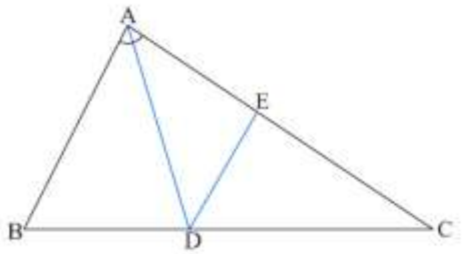
۱) ۵

۲) ۵/۲

۳) ۵/۳

۴) ۵/۴

تست) در شکل زیر $AB = ۳\ AC = ۶۰$ ۵، AD نیمساز زاویه ی A است و $DE \parallel AB$، اندازه ی EC کدام است؟



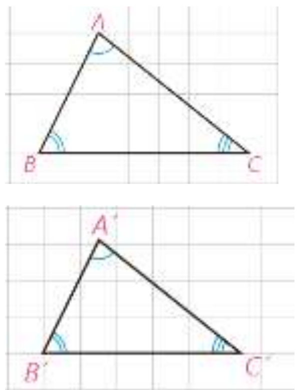
۱) ۱۲

۲) ۱۲/۵

۳) ۱۳/۵

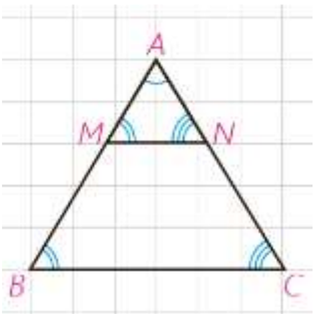
۴) ۱۵

۱۶- مثلث های متشابه: دو مثلث را متشابه گویند، هرگاه زوایای نظیر در آن ها هم اندازه و اضلاع نظیر آنها متناسب باشد.



$$\angle A = \angle A', \quad \angle B = \angle B', \quad \angle C = \angle C' \qquad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Leftrightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

۱۷- قضیه اساسی تشابه: اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دوضلع دیگر(یا امتداد آنها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آنها تشکیل می دهد که با مثلث اصلی متشابه است.



$$MN \parallel BC \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$$

۱۸- **حالت های تشابه دو مثلث:**

قضیه ۱: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\left(\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'\right)$$

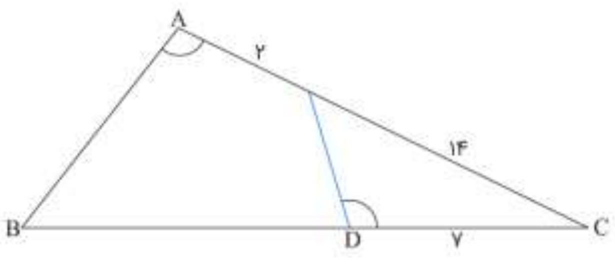
قضیه ۲: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آنها، هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\angle A = \angle A', \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

قضیهٔ ۳: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

تست) در شکل زیر $A = D$ ، طول BD چند واحد است؟



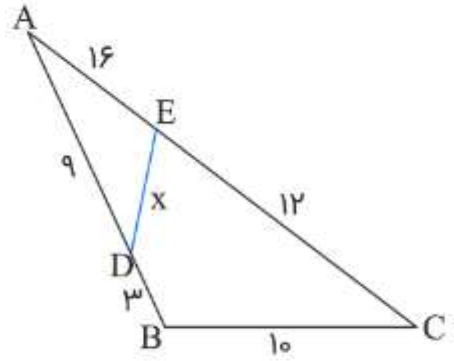
۱) ۲۲

۲) ۲۳

۳) ۲۴

۴) ۲۵

تست) در شکل زیر مقدار x را بدست آورید.



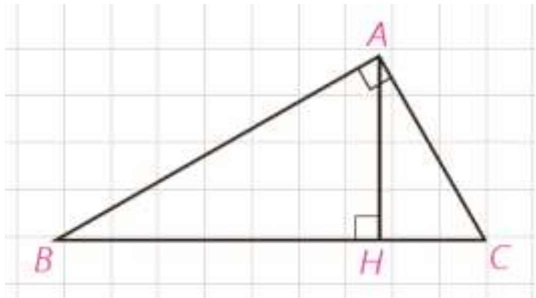
۱) $\frac{۱۰}{۳}$

۲) ۴/۵

۳) ۵

۴) $\frac{۱۴}{۳}$

۱۹- اثبات قضیه ی فیثاغورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم الزاویه



$\Delta ABH \sim \Delta ABC \quad , \quad \Delta ACH \sim \Delta ABC$

نتیجه

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC روابط مهم زیر برقرارند. این رابطه‌ها را روابط طولی می‌نامیم؛ زیرا با اندازه‌های اضلاع سروکار دارند:

۱) $AB^2=BC.BH$

۲) $AC^2=BC.CH$

۳) $AB^2+AC^2=BC^2$

۴) $AH^2=BH.CH$

۵) $AH\times BC=AB\times AC$

قضیه: هرگاه دو مثلث، متشابه باشند، آنگاه نسبت اندازه‌های هر دو جزءِ متناظر (ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و محیط‌ها) مساوی نسبت تشابه و نسبت مساحت‌های آنها مساوی توان دوم (مربع) نسبت تشابه است.

۲۰- دو چند ضلعی را متشابه گویند هرگاه:

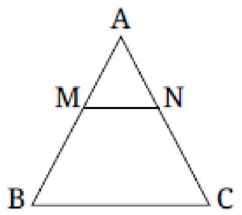
الف) زوایای داخلی آنها نظیر به نظیر برابر باشند.

ب) اضلاع آنها نظیر به نظیر متناسب باشند.

هرگاه دو چند ضلعی با نسبت تشابه k متشابه باشند، نسبت محیط های آنها، مساوی k و نسبت مساحت‌های آنها $k^۲$ است.

هر دو n ضلعی منتظم، همواره با هم متشابه‌اند.

تست) در شکل زیر مساحت ذوزنقه $MNCB$، ۱۵ برابر مساحت مثلث AMN است.نسبت $\frac{MA}{MB}$ کدام است؟



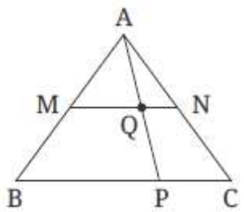
۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $\frac{۱}{۵}$

تست)در شکل مقابل $MN \parallel BC$ و $\frac{۲}{۳} = \frac{AM}{MB}$ و $\frac{۱}{۲} = \frac{PC}{PB}$ می باشد. نسبت مساحت مثلث AQN به مساحت ذوزنقه ی $MQPB$ کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۱۵}$

۲) $\frac{۲}{۲۱}$

۳) $\frac{۳}{۲۱}$

۴) $\frac{۱}{۱۰}$

فصل سوم

چند ضلعی: شکل های بسته ای را که از اجتماع پاره خط های متوالی تشکیل شده است، چند ضلعی می نامند.

تعریف: nضلعی شکلی است شامل n $(n \geq ۳)$ پاره‌خط متوالی که:

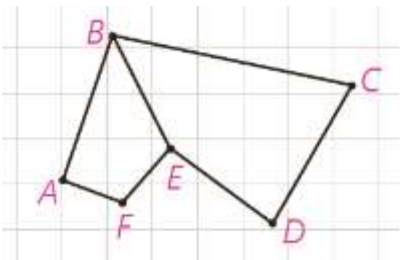
۱) هر پاره‌خط، دقیقاً دو پاره‌خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند.

۲) هر دو پاره‌خط که در یک انتها مشترک‌اند، روی یک خط نباشند.

ضلع: هر یک از این n پاره خط یک ضلع n ضلعی نامیده می شود.

راس: نقطه ی مشترک هر دو ضلع مجاور راس n ضلعی می نامیم.

دو زاویه ی مجاور: هر دو زاویه ی n ضلعی که در یک ضلع مشترک اند، دو زاویه ی مجاور n ضلعی می نامیم.



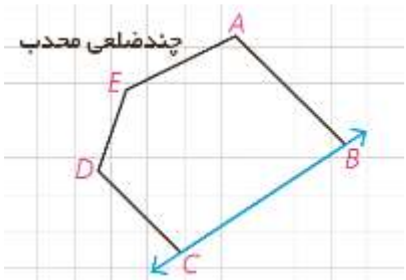
چند ضلعی های محدب و غیر محدب

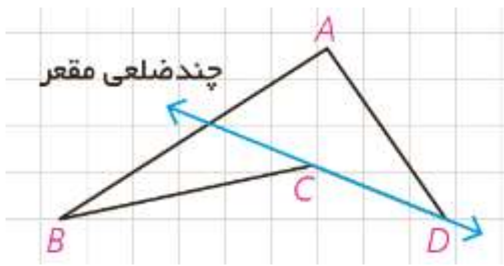
n ضلعی محدب است اگر :

۱. با در نظر گرفتن خط شامل هر ضلع بقیه نقاط چند ضلعی در یک طرف آن خط واقع شوند.

۲. دو نقطه دلخواه را در چند ضلعی مشخص کنیم پاره خط تمامی در چند ضلعی قرار داشته باشد.

۳. تمامی زوایای آن کمتر از ۱۸۰ باشد.





قطر: در هر n ضلعی، هر پاره خط که در انتهای آن دو راس غیر مجاور باشند، قطر می نامند.

تعداد قطر های n ضلعی با فرمول زیر بدست می آید.

در هر n ضلعی تعداد قطرها $\frac{n(n-3)}{......}$ است.

اگر به یک n ضلعی محدب یک ضلع اضافه کنیم (بطوریکه که محدب بماند) به قطر های آن چند قطر اضافه می شود

نکته:

تست: از سه راس مجاور یک ۱۰ ضلعی محدب، مجموعا چند قطر می گذرد؟

۱) ۲۱

۲) ۲۰

۳) ۱۹

۴) ۱۸

یادآوری: مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ است. می توانیم با توجه به این نکته نشان دهیم مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی $(n-2)\times 180$

مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی ۳۶۰ درجه است.

زاویه ی حاده n ضلعی: هر n ضلعی حداکثر می تواند ۳ زاویه ی داخلی داشته باشد، اگر ۴ زاویه ی حاده داخلی داشته باشد مجموع زوایای خارجی بیش از ۳۶۰ می شود

چند ضلعی های منتظم:

هر چند ضلعی که همه ی اضلاعش با هم برابر بوده و همه زاویه هایش نیز با هم مساوی باشد منتظم است.

اندازه هر زاویه ی داخلی n ضلعی منتظم : $\frac{(n-2)\times 180}{n}$

اندازه هر زاویه ی خارجی n ضلعی منتظم: $\frac{360}{n}$

متوازی الاضلاع: چهار ضلعی ای است که، هر دو ضلع مقابل آن موازی باشند.

قضیه۱: در هر متوازی الاضلاع هر دو ضلع مقابل هم اندازه اند.

عکس قضیه ۱: اگر در یک چهار ضلعی، ضلع های مقابل دو به دو هم اندازه باشند، چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.

قضیه ۲: در متوازی الاضلاع هر دو زاویه ی مجاور مکمل اند.

عکس قضیه۲: هر چهارضلعی که هر دو زاویه ی مجاور آن مکمل باشند، متوازی الاضلاع است.

قضیه۳: در هر متوازی الاضلاع، هر دو زاویه ی مقابل هم اندازه اند.

عکس قضیه۳: اگر در یک چهار ضلعی هر دو زاویه ی مقابل هم اندازه باشند، چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.

قضیه۴: در هر متوازی الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند.

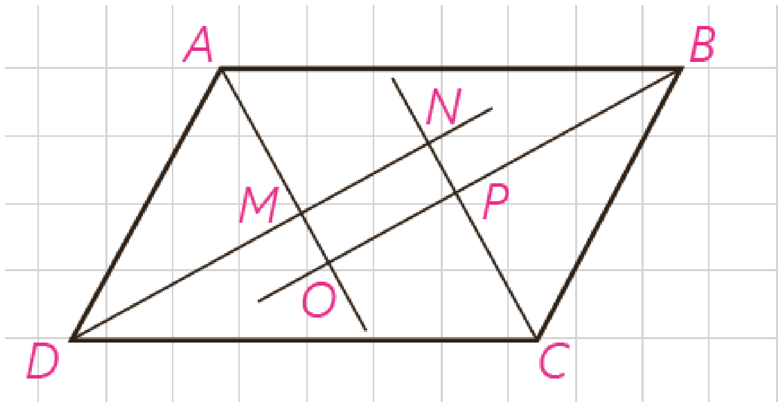
عکس قضیه ۴: هر چهار ضلعی که قطر های آن منصف یکدیگر باشند، متوازی الاضلاع است.

- هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن هم اندازه و موازی باشند، متوازی الاضلاع است.

نکته: با رسم هر قطر، متوازی الاضلاع به دو مثلث هم نهشت تقسیم می شود.

نکته: دو قطر متوازی الاضلاع، آن را به ۴ مثلث هم مساحت تقسیم می کند.

قضیه: از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی الاضلاع، چهارضلعی $MNPQ$ پدید می آید که این چهارضلعی مستطیل است.



یک متوازی الاضلاع به طول ضلع a و b و زاویه حاده θ را در نظر بگیرید.

طول اضلاع مستطیل:

مساحت مستطیل:

مستطیل: چهار ضلعی است که همه زاویه های آن قائمه باشند.

مستطیل متوازی الاضلاعی است که یک زاویه قائمه داشته باشد

قضیه: در مستطیل قطرها با هم برابرند.

عکس قضیه: اگر دو قطر یک چهارضلعی هم اندازه باشند آیا چهارضلعی مستطیل است؟

قضیه: از برخورد نیمسازهای داخلی یک مستطیل به طول اضلاع a و b مربع پدید می آید.

طول ضلع مربع:

مساحت مربع:

لوزی: چهارضلعی است که هر چهار ضلع آن هم اندازه باشند.

لوزی متوازی الاضلاعی است که دو ضلع مجاور آن هم اندازه باشند.

لوزی متوازی الاضلاعی است که قطرهای آن بر هم عمود باشد.

لوزی متوازی الاضلاعی که در آن لااقل یک قطر روی نیمساز یک زاویه آن باشد، لوزی است.

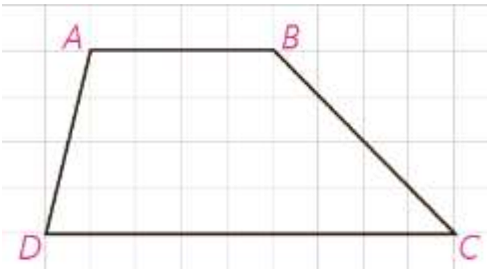
قضیه: لوزی قطرها عمود منصف یکدیگرند و قطرها روی نیمساز زاویه ها می باشند.

مربع: چهارضلعی است که هر چهارضلع آن هم اندازه و حداقل یک زاویه ی آن قائمه باشد.

مربع مستطیلی است که اضلاع آن با هم برابرند.

مربع لوزی است که زاویه های آن با هم برابر هستند.

ذوزنقه: چهارضلعی است که فقط دو ضلع آن موازی باشند.



ذوزنقه قائم الزاویه: هر گاه در یک ذوزنقه یک ساق بر یکی از قاعده ها عمود باشد، مسلما بر قاعده ی دیگر نیز عمود است و در این صورت ذوزنقه را قائم الزاویه می نامند.

قضیه: در هر ذوزنقه متساوی الساقین زاویه های مجاور به یک قاعده هم اندازه اند.

عکس قضیه: اگر در یک ذوزنقه دو زاویه ی مجاور به یک قاعده هم اندازه باشند، ذوزنقه متساوی الساقین است.

قضیه: در هر ذوزنقه متساوی الساقین قطرها اندازه های مساوی دارند.

عکس قضیه: اگر در یک ذوزنقه قطرهای با هم برابر باشند ذوزنقه متساوی الساقین است.

مثلث قائم الزاویه:

قضیه: در هر مثلث قائم الزاویه اندازه ی میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.

عکس قضیه: اگر در مثلثی اندازه ی میانه ی وارد بر یک ضلع، نصف اندازه ی آن ضلع باشد، آن مثلث قائم الزاویه است.

نکته: در مثلث قائم الزاویه ABC اندازه ی زاویه B ۱۵ درجه باشد اندازه ی ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ اندازه ی وتر است.

ویژگی های مثلث قائم الزاویه:

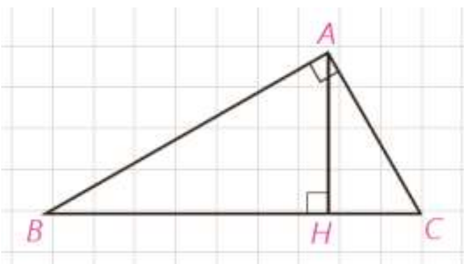
نتیجه

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC روابط مهم زیر برقرارند. این رابطه‌ها را روابط طولی می‌نامیم؛ زیرا با اندازه‌های اضلاع سروکار دارند:

۱) $AB^{۲}=BC.BH$　　۲) $AC^{۲}=BC.CH$

۳) $AB^{۲}+AC^{۲}=BC^{۲}$　　۴) $AH^{۲}=BH.CH$

۵) $AH\times BC=AB\times AC$



نکته: زاویه ی بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر، قدر مطلق تفاضل دو زاویه ی حاده است.

نکته: در هر مثلث زاویه ی بین ارتفاع و نیمساز برابر است با :

قضیه:ثابت کنید اگر وسط های ضلع های هر چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم متوازی الاضلاع پدید می آید.

مساحت مربع: $s = a^۲$

مساحت مستطیل: $s = a \times b$

مساحت متوازی الاضلاع: $S_{ABCD} = AH \times CD$

مساحت متوازی الاضلاع: $S_{ABCD} = AB \times BC \times \sin\alpha$

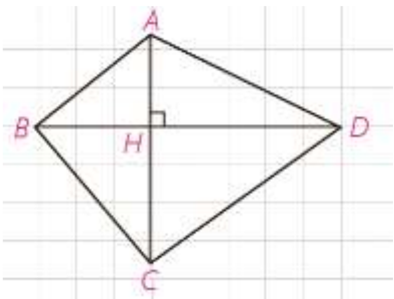
مساحت لوزی: $S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} AC \times BD$

مساحت ذوزنقه: $S = \frac{(a+b)\times h}{۲}$

مساحت چهارضلعی در حالت کلی: $S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} \times AC \times BD \times \sin\alpha$

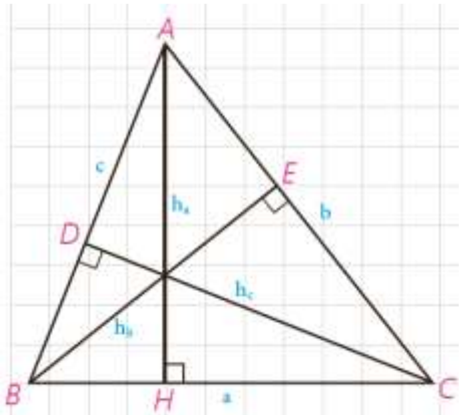
قضیه:مساحت چهارضلعی محدبی که قطر های آن بر هم عمودند برابر است

$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} AC \times BD$



مساحت مثلث:

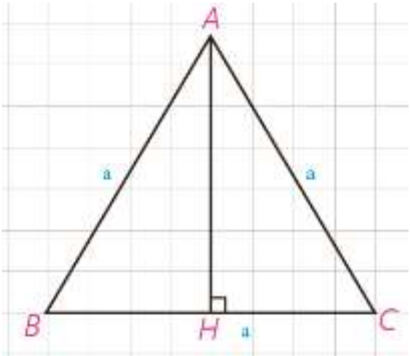
مساحت مثلث برابراست با



مساحت مثلث متساوی الاضلاع:

نکته:

ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع:



کاربردهایی از مساحت:

ویژگی ۱. در دو مثلث اگر اندازهٔ قاعده‌ها برابر باشند، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت اندازهٔ ارتفاع‌های متناظر این قاعده‌هاست.

$$\frac{S}{S'}=\frac{h}{h'}$$

ویژگی ۲. در دو مثلث که اندازهٔ دو ارتفاع برابر باشد، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت اندازه‌های قاعده‌های متناظر این دو ارتفاع است.

قضیه: ثابت کنید یک میانه در هر مثلث آن را به دو مثلث با مساحت های برابر تقسیم می کند

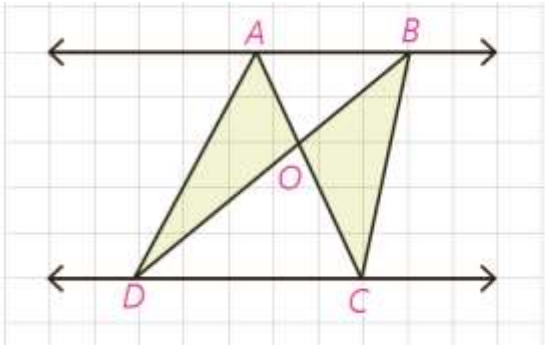
قضیه: اگر وسط های سه ضلع هر مثلث را به هم متصل کنیم، چهارمثلث هم نهشت و در نتیجه با مساحت های برابر پدید می آید.

ویژگی میانه ها

سه میانهٔ هر مثلث در نقطه‌ای درون آن مثلث همرس‌اند؛ به طوری که فاصلهٔ این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{1}{3}$ اندازهٔ میانه نظیر این ضلع است، و فاصله‌اش تا هر رأس $\frac{2}{3}$ اندازهٔ میانه نظیر آن رأس است.

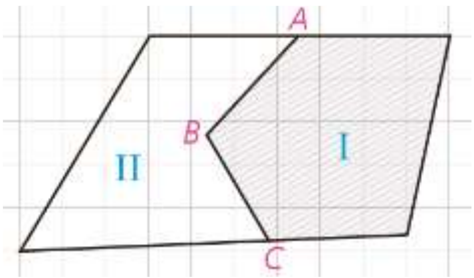
قضیه: با رسم سه میانه ی مثلث، آن را به ۶ مثلث هم مساحت تقسیم می کنند.

ویژگی مساحت در ذوزنقه:



یک مسئله

در شکل دو مزرعهٔ I و II متعلق به دو کشاورز است. این دو کشاورز برای استفاده از ماشین‌های کشاورزی می‌خواهند مرز مشترک ABC بین دو زمین خود را به یک پاره‌خط مستقیم تبدیل کنند به‌طوری که مساحت‌های زمین‌های آنها تغییر نکند. چگونه شما می‌توانید این کار را برای آنها انجام دهید؟

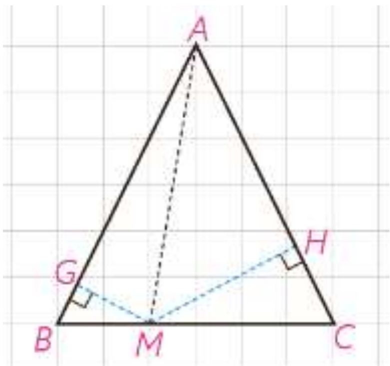


شش ضلعی منتظم: هر ۶ ضلعی منتظم با اندازه ی ضلع a را می توان به ۶ مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a تقسیم کرد و در این صورت مساحت آن برابراست با:

هشت ضلعی منتظم: هر ۸ ضلعی منتظم را می توان در مربع محاط کرد

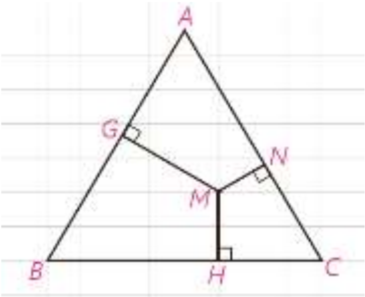
اگر اندازه ضلعی های ۸ ضلعی a باشد آنگاه:

قضیه: مجموع فاصله ی هر نقطه دلخواه روی قاعده ی مثلث متساوی الساقین تا دو ساق با ارتفاع وارد بر ساق برابراست.



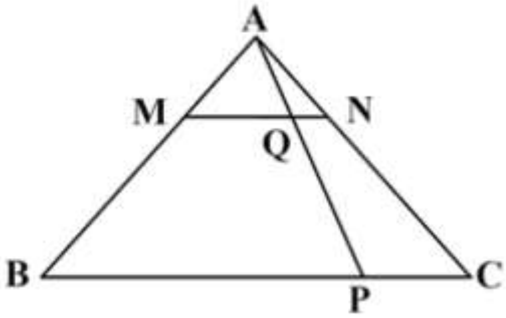
قضیه: تفاضل فاصله هر نقطه اختیاری روی امتداد قاعده مثلث متساوی الساقین تا دو ساق نیز با ارتفاع وارد بر ساق برابراست.

قضیه: مجموع فاصله های هر نقطه اختیاری درون مثلث متساوی الاضلاع تا سه ضلع مثلث با ارتفاع مثلث برابراست.



میانه ها و نسبت مساحت رنگی:

تست۲۲: در مثلث ABC، پاره خط MN موازی BC است. اگر $\frac{AN}{AC}=\frac{۱}{۳}$ و $\frac{PC}{BC}=\frac{۱}{۴}$ ، مساحت مثلث AQN چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



۱) $\frac{۱}{۱۲}$

۲) $\frac{۱}{۳۶}$

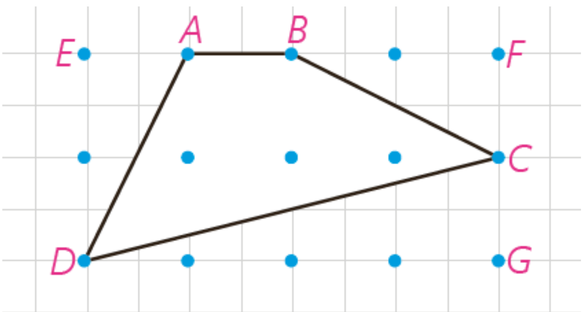
۳) $\frac{۱}{۱۸}$

۴) $\frac{۱}{۹}$

نقاط شبکه ای و مساحت

مطابق شکل نقطه ها روی خط های افقی و عمودی واقع اند. به طوری که فاصله ی هر دو نقطه متوالی روی یک خط افقی(عمودی) برابر واحد است. چنین نقاطی را نقاط شبکه ای . چند ضلعی هایی مانند $ABCD$ را که تمام راس های آنها روی نقاط شبکه ای واقع اند، چند ضلعی های شبکه ای می نامند.

نقاط شبکه ای روی راس ها و ضلع های چند ضلعی را **نقاط مرزی** و نقاط شبکه ای درون چند ضلعی ها را **نقاط درونی شبکه ای** برای چند ضلعی شبکه ای می نامند.



تعداد نقاط مرزی: b

تعداد نقاط درونی شبکه ای: i

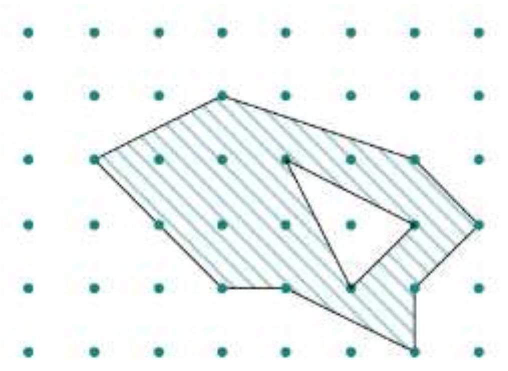
تعداد نقاط مرزی و درونی شبکه ای را بنویسید و مساحت $ABCD$ را بدست آورید.(راهنمایی: با استنفاده از مساحت مستطیل و مثلث قائم الزاویه)

نکته: یک چند ضلعی شبکه ای حداقل .... نقطه مرزی می تواند داشته باشد.

به کمک فرمول پیک که با استفاده از نقاط شبکه ای می باشد می توانیم **مساحت شکل های نامنظم هندسی** را به طوری **تقریبی** پیدا کنیم.

$$s = \frac{b}{۲} - ۱ + i$$

تست: با توجه به مساحت چند ضلعی های شبکه ای، مساحت ناحیه سایه زده شده در شکل زیر کدام است؟



۱) ۱۰

۲) ۱۱

۳) ۱۰/۵

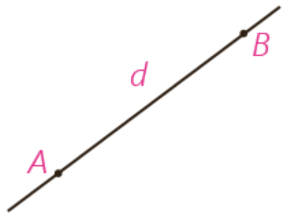
۴) ۱۱/۵

فصل چهارم

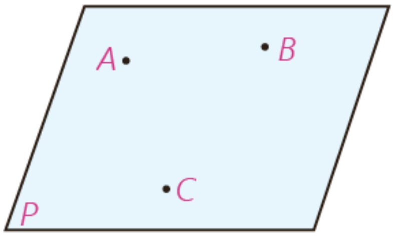
نقطه: اثر قلم بر روی کاغذ و بعد ندارد.

خط راست از بی شمار نقطه تشکیل شده است که از هر دو طرف نامحدود است و ضخامتی ندارد.

صفحه: سطحی است که از هر طرف ادامه دارد و ضخامت ندارد.



خط AB یا BA، یا خط d



صفحهٔ ABC، BAC، . . . یا صفحهٔ P

حالت های مختلف دو خط در صفحه و فضا:

۱. اگر دو خط در یک نقطه مشترک باشند، دو خط متقاطع می گوییم.

۲. اگر دو خط نقطه اشتراکی نداشته باشند و صفحه ای وجود داشته باشد که شامل هر دوی آن ها باشد آن دو خط را **موازی** می نامیم.

۳. اگر دو خط نقطه اشتراکی نداشته باشند و هیچ صفحه ای وجود نداشته باشد شامل هر دوی آن ها باشد دو خط را **متنافر** می نامیم.

نکات سری۱

۱. از هر دو نقطه ی متمایز در صفحه فقط یک خط می گذرد و برای اینکه یک خط در فضا مشخص باشد باید لااقل دو نقطه از آن داشته باشیم.

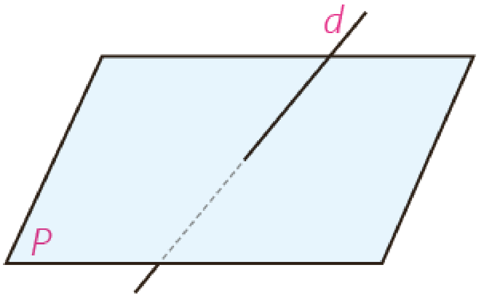
۲. سه نقطه ی غیر واقع بر یک خط، دقیقا یک صفحه را مشخص می کند که معمولا برای نمایش آن بصورت زیر عمل می کنیم.

۳. دو خط که همه نقاطشان مشترک باشد، دو خط **منطبق** نامیده می شود و در واقع یک خط است و بی شمار صفحه از آن می گذرد. پس دو خط **غیر منطبق** در فضا یا **موازی** یا **متقاطع** یا **متنافرند**.

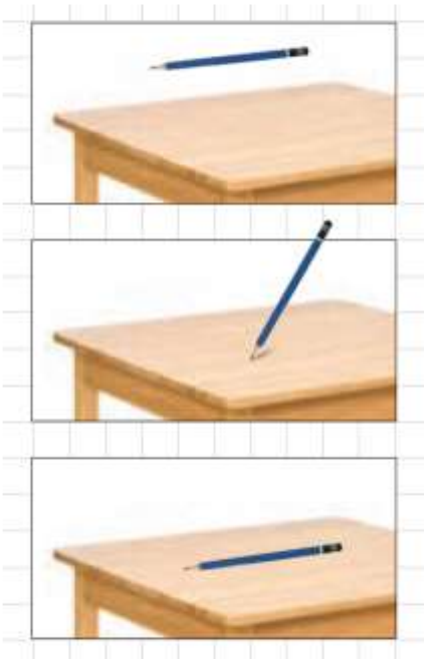
الف) در صفحه دو خط موازی با یک خط نسبت به هم چه حالتی دارند؟ در فضا چطور؟

ب) در صفحه دو خط عمود بر یک خط چه حالتی دارند؟ در فضا چطور؟

خط d با صفحه ی P متقاطع است. خط های موجود در صفحه ی P نسبت به خط d چه وضعیت هایی می توانند داشته باشند؟



مشخص کردن صفحه در فضا:



۱. از یک خط و یک نقطه خارج آن، دقیقا یک صفحه می گذرد.

۲. از دو خط متقاطع دقیقا یک صفحه و از دو خط موازی دقیقا یک صفحه می گذرد.

۳. از سه نقطه غیر واقع بر یک خط نیز دقیقا یک صفحه می گذرد.

حالت های مختلف خط و صفحه:

۱. اگر خط و صفحه با هم اشتراکی نداشته باشند، نسبت به هم **موازی** هستند.

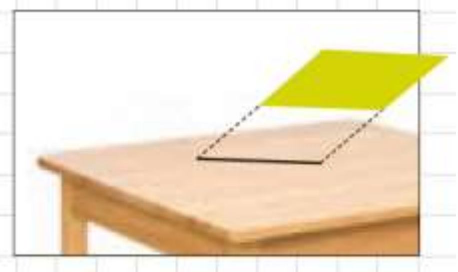
۲. اگر خط و صفحه در یک نقطه مشترک باشند، نسبت به هم **متقاطع** هستند.

۳. اگر خط و صفحه بی شمار نقطه اشتراک داشته باشند خط بر صفحه **واقع** است.

حالت های مختلف دو صفحه:

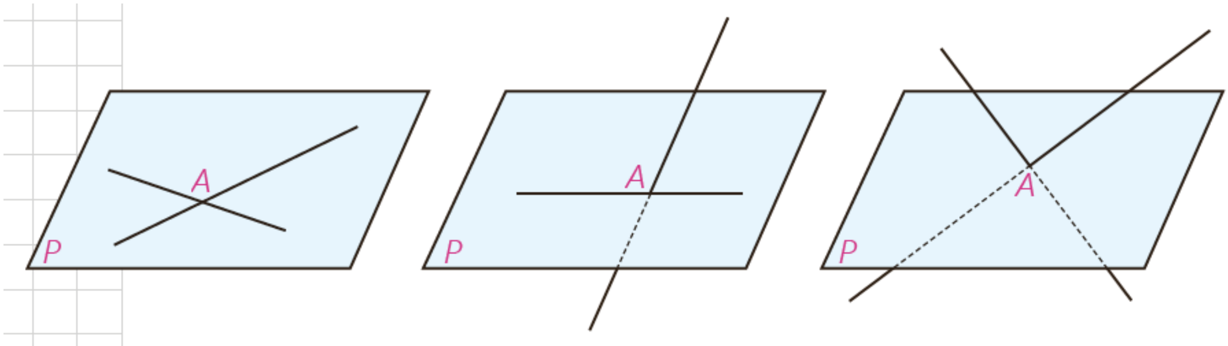
۱. اگر دو صفحه با هم نقطه اشتراکی نداشته باشند، نسبت به هم **موازی** هستند.

۲. اگر دو ضفحه در یک خط راست مشترک باشند، نسبت به هم **متقاطع** هستند.



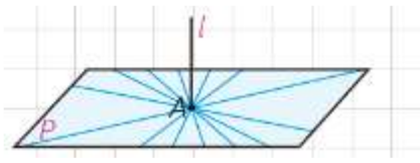
خط راستی که اشتراک دو صفحه متقاطع است، **فصل مشترک** آن دو صفحه نامیده می شود.

دو خط در نقطه ی A متقاطع اند و صفحه ی P شامل نقطه ی A است. با توجه به شکل های زیر حالت های مختلف خطوط متقاطع و صفحه ی P را بررسی کنید.

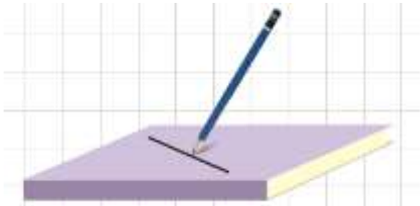


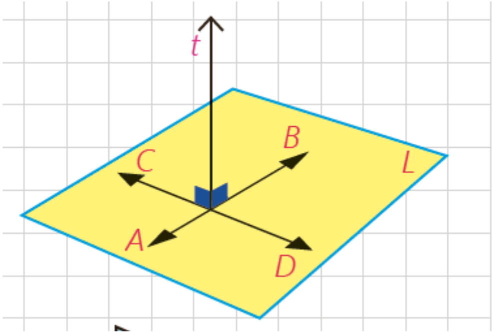
تعامد:

تعریف: فرض کنید خط l در نقطهٔ A صفحهٔ P را قطع می‌کند. خط l بر صفحهٔ P عمود است؛ هرگاه برتمام خط‌های صفحهٔ P که از نقطهٔ A می‌گذرند، عمود باشد.



نکته : اگر خطی بر یکی از خطوط صفحه ای عمود باشد لزوما بر آن صفحه عمود نیست.

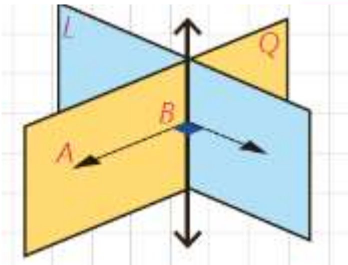




می‌توان نشان داد که:

اگر خطی بر دو خط متقاطع از صفحه‌ای، در محل تقاطع عمود باشد، بر آن صفحه عمود است.

تعریف: دو صفحه بر هم عمودند؛ هر گاه هر کدام شامل خطی باشد که بر دیگری عمود است.



نکات:

۱. دو خط عمود بر یک صفحه با هم ....

۲. دو صفحه عمود بر یک صفحه با هم ....

۳. دو صفحه عمود بر یک خط با هم ....

۴. اگر خطی بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد، بر صفحه دیگر نیز .... است.

۵. دو صفحه عمود بر یک صفحه با هم چه حالتی دارند؟

۶. اگر دو صفحه متقاطع بر صفحه ای عمود باشند، فصل مشترک آنها نیز بر آن صفحه عمود است.

۷. از هر نقطه غیر واقع بر یک صفحه، فقط یک خط عمود بر آن صفحه رسم کرد.

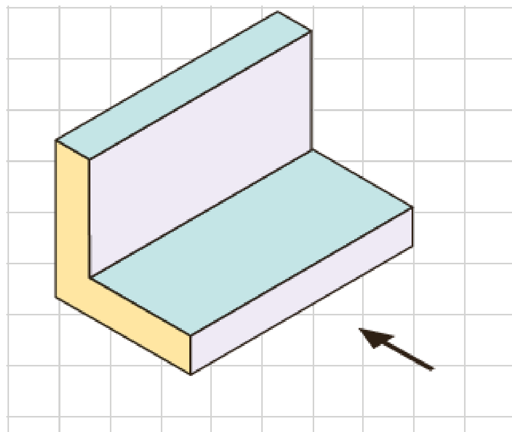
۸. در صورت غیر واقع بودن خط بر صفحه:

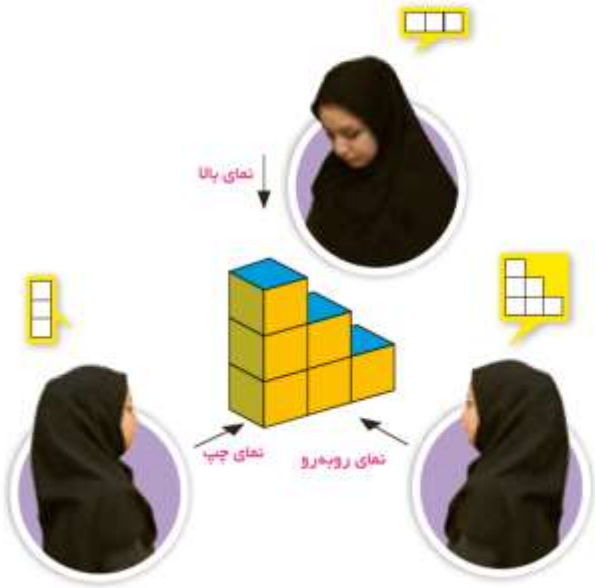
الف) اگر خط بر صفحه عمود باشد، بی شمار صفحه از آن میگذرد که بر صفحه عمود هستند.

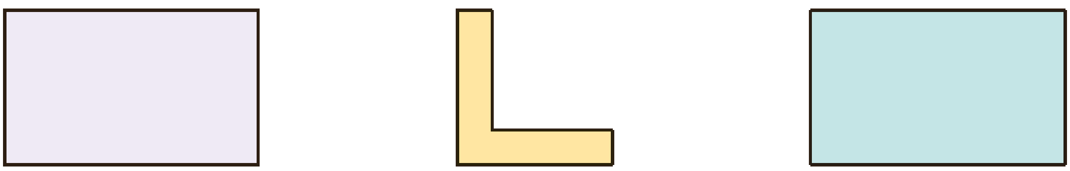
ب) اگر خط بر صفحه عمود نباشد، دقیقا یک صفحه از آن می گذرد که بر صفحه عمود است.

در تفکر تجسمی از عبارات و جملات و شیوه های زبانی برای تفکر استفاده نمی شود. بلکه این تصاویر هستند که در ذهن ما نقش می بندند و به ما کمک می کنند درباره ی موضوع مورد نظر فکر کنیم.

ترسیم تصویر یک جسم از نماد های مختلف:



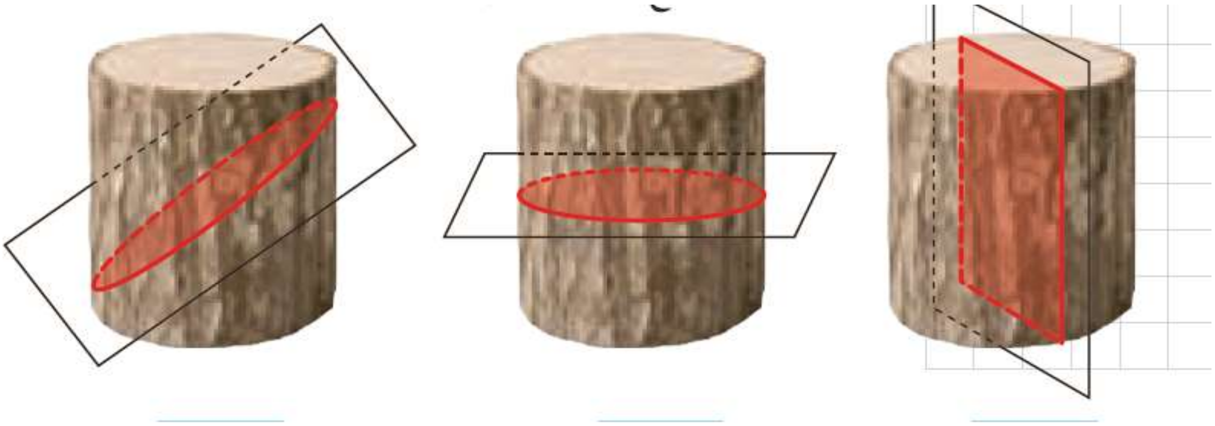




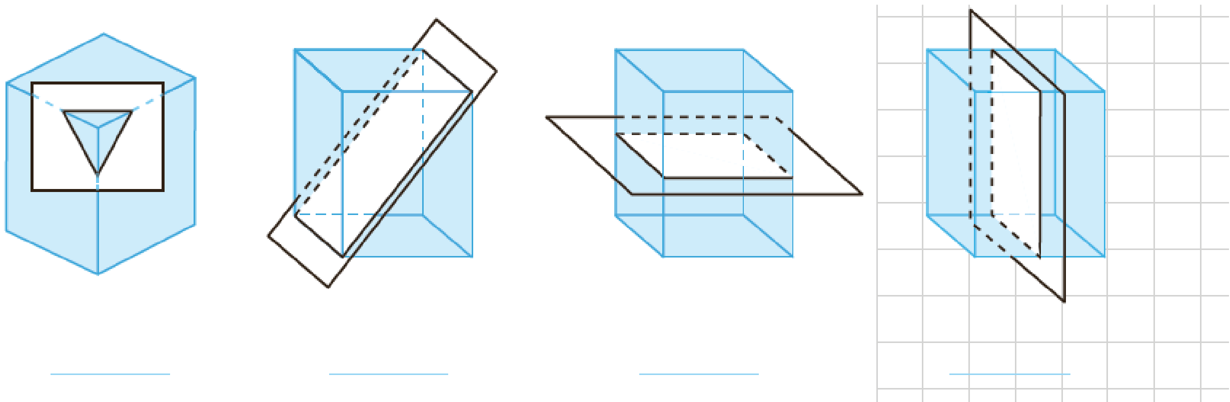
نمای بالا　　　نمای چپ　　　نمای روبه‌رو

سطح مقطع: شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می شود، سطح مقطع آن نامیده می شود.

- سطح مقطع استوانه در برخورد با صفحه های افقی، عمودی و صفحه ی مایلی که از قاعده ی استوانه عبور نکند به چه شکل است؟

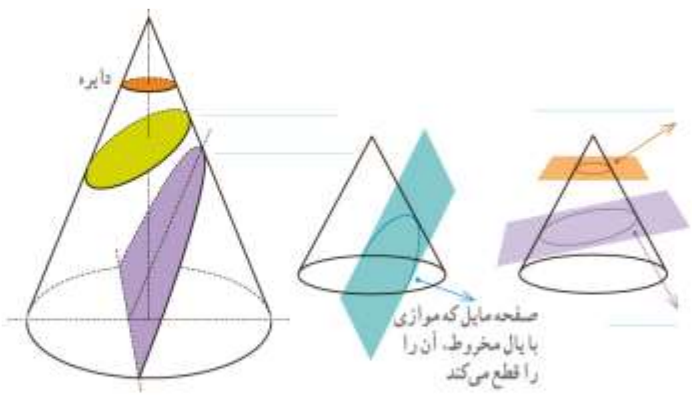


سطح مقطع یک مکعب مستطیل با صفحه های قائم، افقی و مایل به صورت زیر است:

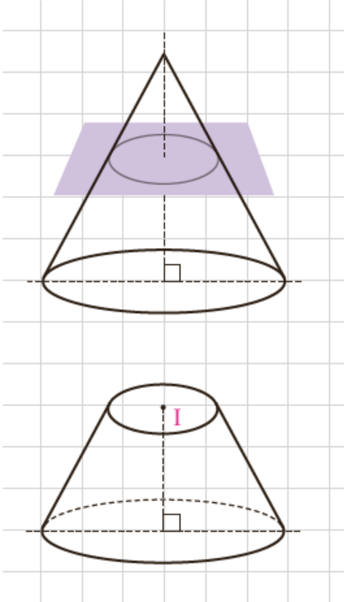


مقطع یک مخروط قائم با یک صفحه ی افقی، .... و سطح مقطع آن با صفحه ی مایلی که از قاعده عبور نکند، ....

است. همچنان سطح مقطع آن با صفحه مایلی که موازی با یال مخروط باشد، یک .... است.



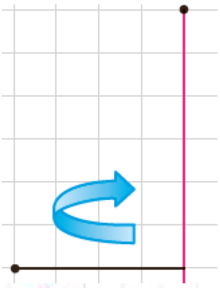
اگر مخروط را با صفحه ای موازی قاعده ی آن برخورد دهیم. آن را به دو بخش تقسیم می کند که بخش بالایی یک مخروط است و به بخش زیرین مخروط ناقص گویند.



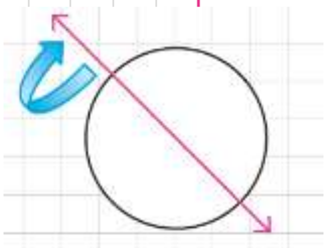
اگر صفحه ای به شکل عمودی مخروط ناقص را قطع کند و آن را به دو نیمه مساوی تقسیم کند، سطح مقطع حاصل چیست؟

از دوران دادن شکل های متفاوت هندسی، حول یک محور می توان جسم های هندسی مختلفی را تصور کرد.

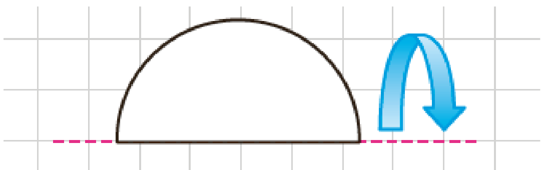
فرض کنید دو پاره خط بر هم عمودند و یکی را حول دیگری دوران داده ایم. چه شکل هندسی ساخته می شود؟



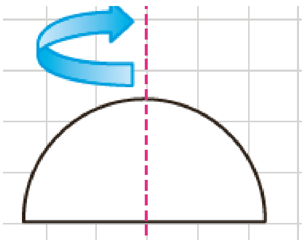
دایره ای به شعاع r را حول یکی از قطرهای آن دوران داده ایم. شکل حاصل چیست؟



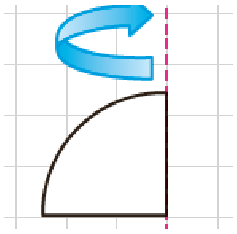
یک نیم دایره را حول قطر دوران می دهیم. شکل حاصل چه خواهد بود؟



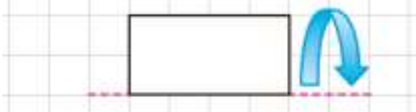
اگر همین نیم دایره را حول شعاع عمود بر قطر داده شده دوران دهیم، چه شکلی ساخته می شود؟



اگر ربع یک دایره را حول شعاع مشخص شده دوران دهیم، شکل حاصل چه خواهد بود؟



دو پاره خط موازی را در نظر بگیرید اگر یکی از خطوط را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی ای ساخته می شود؟



اگر یک مستطیل را حول طول یا عرض آن دوران دهیم، چطور؟

اگر مستطیل را مطابق شکل، حول محور داده شده دوران دهیم، شکل حاصل چه خواهد بود؟