نمی‌گردید. در حقیقت این مقدار یک عدد انتظاری (حدی) می‌باشد. در این مثال ما یک متغیر تصادفی X داریم که برابر مبلغ جریمه شخص در یک ماه بر حسب هزار تومان است و تابع احتمال آن به صورت زیر می‌باشد

x	۰	۱	۲	۳
$f_X(x)$	۰/۴۰	۰/۳۰	۰/۲۰	۰/۱۰

عدد زیر را که در حقیقت میانگین وزنی مبلغ جریمه می‌باشد امید ریاضی X یا میانگین X و یا مقدار مورد انتظار X می‌نامند و آنرا با نمادهای $E(X)$ یا μ یا μ_X نمایش می‌دهند.

$$\mu=E(X)=(۰\times ۰/۴۰)+(۱\times ۰/۳۰)+(۲\times ۰/۲۰)+(۳\times ۰/۱۰)=۱$$
$$=\sum_{x=۰}^{۳} x f_X(x)$$

اگر متغیر تصادفی X پیوسته باشد امید ریاضی آن با تبدیل مجموع به انتگرال در فرمول بالا محاسبه می‌گردد.

تعریف ۱.۴ فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال یا چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد. امید ریاضی X یا میانگین X به صورت زیر تعریف می‌شود

اگر X گسسته باشد	$E(X)=\sum_x x f_X(x)$
اگر X پیوسته باشد	$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$

(۱.۴)

در صورتی که مجموع یا انتگرال فوق همگرا نباشد گوئیم امید ریاضی X وجود ندارد.

مثال ۲.۱.۴ فرض کنید بخواهیم ۳ نفر را از بین ۵ مهندس و ۳ تکنسین انتخاب کنیم. امید ریاضی تعداد مهندسین انتخابی در بین این ۳ نفر را به دست آورید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد مهندسین انتخابی در بین ۳ نفر انتخاب شده باشد آنگاه $S_X=\{۰,۱,۲,۳\}$ که تابع احتمال آن به صورت زیر به دست می‌آید

$$f_X(x)=P(X=x)=\frac{\binom{۵}{x}\binom{۳}{۳-x}}{\binom{۸}{۳}} \qquad x=۰,۱,۲,۳$$

و یا

x	۰	۱	۲	۳
$f_X(x)$	$\frac{۱}{۵۶}$	$\frac{۱۵}{۵۶}$	$\frac{۳۰}{۵۶}$	$\frac{۱۰}{۵۶}$

بنابراین

$$\mu=E(X)=\sum_{x=۰}^{۳} x f_X(x)=(۰\times\frac{۱}{۵۶})+(۱\times\frac{۱۵}{۵۶})+(۲\times\frac{۳۰}{۵۶})+(۳\times\frac{۱۰}{۵۶})=\frac{۱۰۵}{۵۶}\approx ۱/۹$$

یعنی اگر بخواهیم ۳ نفر را از این گروه انتخاب کنیم به طور متوسط انتظار داریم که ۱/۹ آنها مهندس باشند. (توجه کنید که امید ریاضی X ممکن است مقداری باشد که با مجموعهٔ مقادیر X متفاوت است).

مثال ۳.۱.۴ فرض کنید متغیر تصادفی X نشانگر طول عمر نوعی لاستیک بر حسب سال باشد که دارای تابع چگالی احتمال زیر است

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}e^{-\frac{۱}{۲}x} & x>۰\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

متوسط طول عمر این نوع لاستیک را پیدا کنید.

حل متوسط طول عمر این نوع لاستیک E(X) می‌باشد بنابراین

$$\mu=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx=\int_{۰}^{+\infty} x(\frac{۱}{۲}e^{-\frac{۱}{۲}x})dx=(-x-۲)e^{-\frac{۱}{۲}x}\Big|_{۰}^{+\infty}=۰-(-۲)=۲$$

پس انتظار داریم که این نوع لاستیک به طور متوسط ۲ سال کار کند.

۲.۴ امید ریاضی تابعی از یک یا چند متغیر تصادفی

در بعضی از مسائل نیاز به محاسبهٔ امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی X مانند g(X) داریم. به عنوان مثال g(X) می‌تواند $X^۲$ یا $۲X+۳$ یا... باشد. برای محاسبهٔ امید ریاضی g(X) از قضیهٔ زیر استفاده می‌کنیم.

قضیهٔ ۱.۴ فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال یا تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد. امید ریاضی تابع g(X) به صورت زیر به دست می‌آید

$$E[g(X)]=\sum_x g(X)f_X(x) \qquad \text{اگر } X \text{ گسسته باشد}$$

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(X)f_X(x)\,dx \qquad \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد} \tag{۲.۴}$$

مثال ۱.۲.۴ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد

x	-1	0	1	2
$f_X(x)$	0.1	0.1	0.5	0.3

امید ریاضی تابع $g(X)=(X-1)^2$ را به دست آورید.

حل X یک متغیر تصادفی گسسته است. بنابراین از رابطهٔ (۲.۴) داریم که

$$E[(X-1)^2]=\sum_{x=-1}^{2}(x-1)^2 f_X(x)$$
$$=(-1-1)^2(0.1)+(0-1)^2(0.1)+(1-1)^2(0.5)+(2-1)^2(0.3)=0.8$$

مثال ۲.۲.۴ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{16}\sqrt{x} & 0<x<4\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

امید ریاضی $Y=5X-4$ را به دست آورید.

حل X یک متغیر تصادفی پیوسته است، بنابراین

$$E(5X-4)=\int_0^4(5x-4)\frac{3}{16}\sqrt{x}\,dx=\frac{3}{16}\left[2\sqrt{x^5}-\frac{8}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^4=\frac{3}{16}\left[64-\frac{64}{3}\right]=8$$

با توجه به قضیهٔ ۱.۴ می‌توان مفهوم امید ریاضی را به تابعی از دو متغیر تصادفی به صورت زیر تعمیم داد.

تعریف ۲.۴ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال یا تابع چگالی احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y)$ باشند. امید ریاضی تابع $g(X,Y)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E[g(X,Y)]=\sum_x\sum_y g(X,Y)f_{X,Y}(x,y) \qquad \text{اگر } X \text{ و } Y \text{ گسسته باشند}$$

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(X,Y)f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{اگر } X \text{ و } Y \text{ پیوسته باشند} \tag{۳.۴}$$

تعریف فوق را می‌توان به سادگی برای امید ریاضی تابعی از چند متغیر تصادفی تعمیم داد.

مثال ۳.۲.۴ جعبه‌ای شامل ۲ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. ابتدا یک مهره از این جعبه انتخاب می‌کنیم و متغیر تصادفی X را برابر تعداد مهره‌های سفید در این یک مهره انتخاب شده در نظر می‌گیریم. سپس از مابقی مهره‌های جعبه دو مهرهٔ دیگر بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم و متغیر تصادفی Y را برابر تعداد مهره‌های سفید مشاهده شده در این دو مهره انتخابی در نظر می‌گیریم. تابع احتمال توأم X و Y را به دست آورید و $E(X^2Y)$ را محاسبه کنید.

حل در اینجا $S_X=\{0,1\}$ و $S_Y=\{0,1,2\}$ و همچنین داریم که

$$f_{X,Y}(0,0)=P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0\mid X=0)$$
$$=\frac{3}{5}\times\frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}=\frac{3}{30}=0.1$$

$$f_{X,Y}(1,0)=P(X=1,Y=0)=P(X=1)P(Y=0\mid X=1)$$
$$=\frac{2}{5}\times\frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}}=\frac{6}{30}=0.2$$

با انجام محاسبات مشابه، جدول توزیع احتمالات توأم X و Y به صورت زیر به دست می‌آید

y \ x	0	1	$f_Y(y)$
0	0.1	0.2	0.3
1	0.4	0.2	0.6
2	0.1	0	0.1
$f_X(x)$	0.6	0.4	

بنابراین

$$E(X^2Y)=\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{2}x^2y\,f_{X,Y}(x,y)$$
$$=(0)(0.1)+(0)(0.4)+(0)(0.1)+(0)(0.2)+(1)(0.2)+(2)(0)=0.2$$

مثال ۴.۲.۴ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{16y}{x^3} & x>2\,,\ 0<y<1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

امید ریاضی $g(X,Y)=\frac{X+1}{Y}$ را محاسبه کنید.

حل

$$E\left(\frac{X+1}{Y}\right)=\int_{2}^{+\infty}\int_{0}^{1}\left(\frac{x+1}{y}\right)\left(\frac{16y}{x^{3}}\right)dy\,dx=16\int_{2}^{+\infty}\frac{x+1}{x^{3}}\left[\int_{0}^{1}dy\right]dx$$

$$=16\int_{2}^{+\infty}\left(\frac{1}{x^{2}}+\frac{1}{x^{3}}\right)dx=16\left[\frac{-1}{x}-\frac{1}{2x^{2}}\right]_{2}^{+\infty}=16\left[(0)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)\right]=10$$

توجه کنید اگر در تعریف ۲.۴ قرار دهیم $g(X,Y)=X$ و یا $g(X,Y)=Y$ آنگاه امید ریاضی X یا Y را می‌توان توسط تابع احتمال یا تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت زیر محاسبه کرد

اگر X و Y گسسته باشند

$$E(X)=\sum_{x}\sum_{y}xf_{X,Y}(x,y)\;,\;E(Y)=\sum_{x}\sum_{y}yf_{X,Y}(x,y)\qquad(4.4)$$

اگر X و Y پیوسته باشند

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf_{X,Y}(x,y)dxdy$$

مثال ۵.۲.۴ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{y}e^{-y} & 0<x<y<+\infty\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

آیا می‌توان E(X) را توسط تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X محاسبه کرد؟ E(X) را با استفاده از رابطهٔ (۴.۴) محاسبه کنید.

حل با توجه به اینکه

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)dy=\int_{x}^{+\infty}\frac{1}{y}e^{-y}dy$$

و انتگرال فوق قابل محاسبه نیست پس نمی‌توان $f_X(x)$ را به دست آورده و از روی آن E(X) را محاسبه کرد. اما با توجه به رابطهٔ (۴.۴) داریم که

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{X,Y}(x,y)dxdy=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{y}\frac{x}{y}e^{-y}dxdy$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{y}e^{-y}\left[\frac{1}{2}x^{2}\right]_{0}^{y}dy=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}ye^{-y}dy=\frac{1}{2}\left[(-y-1)e^{-y}\right]_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\left[(0)-(-1)\right]=\frac{1}{2}$$

۳.۴ قوانین امید ریاضی

در این بخش قضیه‌هایی را برای ساده کردن محاسبهٔ امید ریاضی تابعی از یک یا چند متغیر تصادفی می‌آوریم. اثبات این قضایا بسیار ساده می‌باشد و بعضی از آنها را در حالت پیوسته ثابت می‌کنیم و مابقی را به خواننده واگذار می‌کنیم.

قضیهٔ ۲.۴ اگر g(X) و h(X) توابعی از متغیر تصادفی X باشند که امید ریاضی آنها موجود است و a و b اعداد ثابتی باشند آنگاه

$$E[ag(X)+bh(X)]=aE[g(X)]+bE[h(X)]$$

اثبات

$$E[ag(X)+bh(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}[ag(x)+bh(x)]f_X(x)dx$$

$$=a\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f_X(x)dx+b\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)f_X(x)dx$$

$$=aE[g(X)]+bE[h(X)]$$

نتیجهٔ ۱.۴ اگر a و b اعداد ثابتی باشند آنگاه

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

مثال ۱.۳.۴ مثال ۱.۲.۴ را با استفاده از قضیهٔ ۲.۴ حل کنید.

حل در مثال ۱.۲.۴ تابع احتمال X عبارت بود از

x	-1	0	1	2
$f_X(x)$	$0/1$	$0/1$	$0/5$	$0/3$

بنابراین

$$E(X)=(-1)(0/1)+(0)(0/1)+(1)(0/5)+(2)(0/3)=1$$

$$E(X^{2})=(-1)^{2}(0/1)+(0)^{2}(0/1)+(1)^{2}(0/5)+(2)^{2}(0/3)=1/8$$

و در نتیجه از قضیه ۲.۴ داریم که

$$E[(X-1)^{2}]=E[X^{2}-2X+1]=E(X^{2})-2E(X)+1=1/8-2(1)+1=0/8$$

مثال ۲.۳.۴ مثال ۲.۲.۴ را با استفاده از نتیجهٔ ۱.۴ حل کنید.

حل در مثال ۴.۲.۲ تابع چگالی احتمال X عبارت بود از

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{16}\sqrt{x} & 0<x<4\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

بنابراین

$$E(X)=\int_0^4 x\left(\frac{3}{16}\sqrt{x}\right)dx=\frac{3}{16}\times\frac{2}{5}\sqrt{x^5}\,\Big|_0^4=\frac{12}{5}$$

و در نتیجه از نتیجهٔ ۱.۴ داریم که

$$E(5X-4)=5E(X)-4=5\left(\frac{12}{5}\right)-4=8$$

قضیهٔ ۳.۴ اگر g(X,Y) و h(X,Y) توابعی از متغیرهای تصادفی X و Y باشند که امید ریاضی آنها موجود است و a و b اعداد ثابتی باشند آنگاه

$$E[ag(X,Y)+bh(X,Y)]=aE[g(X,Y)]+bE[h(X,Y)]$$

نتیجهٔ ۲.۴ اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند آنگاه

$$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$$

همانطور که در نتیجهٔ ۲.۴ ملاحظه شد، امید مجموع یا تفاضل دو متغیر تصادفی برابر مجموع یا تفاضل امیدهای آنها می‌باشد. اما در حالت کلی امید حاصلضرب دو متغیر تصادفی برابر حاصلضرب امیدهای آنها نیست و تنها در حالتی که دو متغیر تصادفی از یکدیگر مستقل باشند این رابطه برقرار است. به قضیهٔ زیر توجه کنید.

قضیهٔ ۴.۴ اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند آنگاه

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

اثبات چون X و Y متغیرهای تصادفی مستقل هستند بنابراین برای هر X و Y داریم که

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}E(XY)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_{X,Y}(x,y)\,dxdy\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_X(x)f_Y(y)\,dxdy\\&=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\,dx\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\,dy\right]=E(X)E(Y)\end{aligned}$$

مثال ۳.۳.۴ در مثال ۴.۲.۴ نشان دهید که رابطهٔ $E(XY)=E(X)E(Y)$ برقرار است.

حل در مثال ۴.۲.۴ تابع چگالی احتمال توأم X و Y عبارت بود از

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{16y}{x^3} & x>2\ ,\ 0<y<1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

بنابراین

$$f_X(x)=\int_0^1\frac{16y}{x^3}dy=\frac{8y^2}{x^3}\,\Big|_0^1=\frac{8}{x^3}\qquad x>2$$

$$f_Y(y)=\int_2^{+\infty}\frac{16y}{x^3}dx=\frac{-8y}{x^2}\,\Big|_2^{+\infty}=2y\qquad 0<y<1$$

در نتیجه برای هر x و y داریم که $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ یعنی X و Y از یکدیگر مستقل هستند و طبق قضیهٔ ۴.۴ داریم که $E(XY)=E(X)E(Y)$. در ضمن با انجام محاسبات ساده دیده می‌شود که $E(XY)=\frac{8}{3}$ و $E(X)=4$ و $E(Y)=\frac{2}{3}$ که صحت رابطهٔ مذکور را نشان می‌دهد.

توجه کنید که عکس قضیهٔ ۴.۴ در حالت کلی برقرار نیست. یعنی برای دو متغیر تصادفی X و Y می‌توانیم رابطهٔ $E(XY)=E(X)E(Y)$ را داشته باشیم اما این دو متغیر از یکدیگر مستقل نباشند. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴.۳.۴ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع احتمال توأم زیر باشند. نشان دهید که X و Y از یکدیگر مستقل نیستند اما رابطهٔ $E(XY)=E(X)E(Y)$ برقرار است.

y \ x	-1	0	1	$f_Y(y)$
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$f_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	

حل با توجه به اینکه $f_{X,Y}(-1,-1)=0\neq\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=f_X(-1)f_Y(-1)$ پس X و Y ... و $E(XY)=(-1)(-1)(0)+\dots+(1)(1)(0)$ ...

$E(X)=E(Y)=-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}=0$ پس $E(XY)=E(X)E(Y)$.

قوانین امید ریاضی را به سادگی می‌توان به چند متغیر تصادفی تعمیم داد. مثلاً اگر X_1، X_2، ... و X_n، n متغیر تصادفی باشند و a_1، a_2، ... و a_n اعداد ثابتی باشند آنگاه

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

و اگر این n متغیر تصادفی از یکدیگر مستقل باشند آنگاه

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)=\prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

۴.۴ امیدهای ریاضی خاص

در این بخش امیدهای ریاضی توابعی از متغیرهای تصادفی که مفهومی خاص را دارند بررسی می‌کنیم

گشتاورهای یک متغیر تصادفی در قضیهٔ ۱.۴ اگر قرار دهیم $g(X)=X^r$ که در آن r یک عدد صحیح نامنفی است. آنگاه امید ریاضی این تابع را rامین گشتاور حول مبدأ متغیر تصادفی X گویند و آن را با نماد μ'_r نمایش می‌دهند، یعنی

$$\boxed{\text{گشتاور rام X حول مبدأ} \qquad \mu'_r=E(X^r)} \qquad (5.4)$$

توجه کنید که $\mu'_0=1$ و $\mu'_1=E(X)=\mu$ که همان امید ریاضی X و یا میانگین X است. اگر در قضیهٔ ۱.۴ قرار دهیم $g(X)=(X-\mu)^r$ آنگاه امید ریاضی این تابع را گشتاور مرتبهٔ rام X حول میانگین و یا گشتاور مرکزی X گویند و آن را با نماد μ_r نمایش می‌دهند یعنی

$$\boxed{\text{گشتاور مرکزی مرتبهٔ rام X} \qquad \mu_r=E[(X-\mu)^r]} \qquad (6.4)$$

توجه کنید که $\mu_0=1$ و $\mu_1=0$ می‌باشد.

واریانس گشتاور مرکزی مرتبهٔ دوم X را واریانس X گویند و با نمادهای σ^2 یا σ_X^2 یا $Var(X)$ نمایش می‌دهند، یعنی

$$\boxed{\text{واریانس X} \qquad \sigma^2=\sigma_X^2=Var(X)=E[(X-\mu)^2]} \qquad (7.4)$$

واریانس یک متغیر تصادفی، میزان پراکندگی توزیع متغیر تصادفی نسبت به میانگین آن را

می‌سنجد. هر چه واریانس بزرگتر باشد، میزان پراکندگی توزیع متغیر تصادفی نسبت به میانگین بیشتر می‌باشد و هر چه واریانس کوچکتر باشد این میزان کمتر است. جذر واریانس یعنی σ را انحراف معیار گویند. با استفاده از قوانین امید ریاضی می‌توان فرم ساده‌تری برای محاسبهٔ واریانس به دست آورد که آن را در قضیهٔ زیر می‌آوریم.

قضیهٔ ۵.۴ واریانس یک متغیر تصادفی X با میانگین μ به صورت زیر به دست می‌آید

$$\boxed{Var(X)=E[(X-\mu)^2]=E(X^2)-[E(X)]^2} \qquad (8.4)$$

مثال ۱.۴.۴ در مثال ۲.۱.۴ واریانس متغیر تصادفی X را به دست آورید.

حل در مثال ۲.۱.۴ دیدیم که $\mu=E(X)=\frac{105}{56}$ و

x	0	1	2	3
$f_X(x)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

بنابراین

$$E(X^2)=\sum_{x=0}^{3} x^2 f_X(x)=(0^2)\left(\frac{1}{56}\right)+(1^2)\left(\frac{15}{56}\right)+(2^2)\left(\frac{30}{56}\right)+(3^2)\left(\frac{10}{56}\right)=\frac{225}{56}$$

و در نتیجه

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{225}{56}-\left(\frac{105}{56}\right)^2=\frac{1575}{3136}=0/502$$

مثال ۲.۴.۴ میانگین و واریانس متغیر تصادفی X که دارای تابع چگالی احتمال زیر است را پیدا کنید

$$f_X(x)=\begin{cases}4xe^{-2x} & x>0\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

حل به وسیلهٔ انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء داریم که

$$\mu=E(X)=\int_0^{+\infty} x(4xe^{-2x})dx=\left[(-2x^2-2x-1)e^{-2x}\right]_0^{+\infty}=(0)-(-1)=1$$

$$E(X^2)=\int_0^{+\infty} x^2(4xe^{-2x})dx=\left[\left(-2x^3-3x^2-3x-\frac{3}{2}\right)e^{-2x}\right]_0^{+\infty}=(0)-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

بنابراین

$$\sigma^2=Var(X)=\frac{3}{2}-(1)^2=\frac{1}{2}$$

کوواریانس در تعریف ۲.۴ اگر قرار دهیم $g(X,Y)=(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ آنگاه امید ریاضی این تابع را کوواریانس X و Y گویند و آن را با نمادهای σ_{XY} و یا $COV(X,Y)$ نمایش می‌دهند، یعنی

(۹.۴) کوواریانس $\boxed{\sigma_{XY}=COV(X,Y)=E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]}$

* کوواریانس X و Y رابطهٔ دو متغیر تصادفی X و Y را نشان می‌دهد. اگر X و Y هم جهت باشند (یعنی هر دو با هم افزایش و یا هر دو با هم کاهش یابند) آنگاه کوواریانس X و Y مثبت است و اگر X و Y در خلاف جهت هم باشند آنگاه کوواریانس X و Y منفی است. با استفاده از قوانین امید ریاضی می‌توان فرم ساده‌تری برای محاسبه کوواریانس به دست آورد که آن را در قضیهٔ زیر می‌آوریم.

قضیهٔ ۶.۴ کوواریانس دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر به دست می‌آید

(۱۰.۴) $$\boxed{COV(X,Y)=E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]=E(XY)-E(X)E(Y)}$$

نتیجهٔ ۳.۴ با استفاده از قضیهٔ ۴.۴ و قضیهٔ ۶.۴، اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند آنگاه $COV(X,Y)=۰$، ولی عکس این مطلب برقرار نیست، یعنی اگر $COV(X,Y)=۰$ آنگاه دلیلی ندارد که X و Y متغیرهای تصادفی مستقل باشند (مثال ۴.۳.۴ را ملاحظه کنید).

مثال ۳.۴.۴ در مثال ۳.۲.۴ کوواریانس متغیرهای تصادفی X و Y را به دست آورید.

حل در مثال ۳.۲.۴ جدول توزیع احتمالات توأم X و Y به صورت زیر به دست آمد

y \ x	۰	۱	$f_Y(y)$
۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳
۱	۰/۴	۰/۲	۰/۶
۲	۰/۱	۰	۰/۱
$f_X(x)$	۰/۶	۰/۴	

بنابراین

$$E(X)=(۰)(۰/۶)+(۱)(۰/۴)=۰/۴$$
$$E(Y)=(۰)(۰/۳)+(۱)(۰/۶)+(۲)(۰/۱)=۰/۸$$
$$E(XY)=۰+۰+۰+۰+۰+۰/۲+۰=۰/۲$$

در نتیجه

$$COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=(۰/۲)-(۰/۸)(۰/۴)=-۰/۱۲$$

چون کوواریانس منفی است پس X و Y در خلاف جهت یکدیگر حرکت می‌کنند. یعنی اگر در انتخاب مهرهٔ اول تعداد سفید به یک مهره افزایش یابد آنگاه در انتخاب ۲ مهره بعدی تعداد مهره‌های سفید انتخابی کاهش می‌یابد.

خواص واریانس و کوواریانس با استفاده از قوانین امید ریاضی به سادگی می‌توان خواص زیر را

برای واریانس و کوواریانس نتیجه گرفت که اثبات آنها را به خواننده واگذار می‌کنیم. فرض کنید a، b و c اعداد ثابت و X و Y متغیرهای تصادفی باشند، در این صورت

الف- $Var(c)=۰\ ,\quad Var(aX+b)=a^{۲}Var(X)$

ب- $COV(X,X)=Var(X)$

ج- $COV(X,Y)=COV(Y,X)$

د- $COV(X,c)=۰$

هـ- $COV(aX+b,cY+d)=acCOV(X,Y)$

و- $Var(aX+bY+c)=a^{۲}Var(X)+b^{۲}Var(Y)+۲abCOV(X,Y)$

ز- اگر X و Y مستقل باشند آنگاه

$$Var(aX+bY+c)=a^{۲}Var(X)+b^{۲}Var(Y)$$

ح- اگر $X_۱$ و $X_۲$ دو متغیر تصادفی باشند آنگاه

$$COV(aX_۱+bX_۲,Y)=aCOV(X_۱,Y)+bCOV(X_۲,Y)$$

خاصیت (هـ) می‌گوید که اگر مبدأ اندازه‌گیری X و Y را تغییر دهیم، کوواریانس آنها تغییر نمی‌کند ولی اگر واحد اندازه‌گیری X و Y را تغییر دهیم، کوواریانس آنها تغییر می‌کند.

مثال ۴.۴.۴ در مثال ۳.۴.۴، $Var(۲X-۳Y+۴)$ را محاسبه کنید.

حل با استفاده از جدول توزیع احتمالات توأم در مثال ۳.۴.۴ داریم که $COV(X,Y)=-۰/۱۲$

و همچنین $E(X)=E(X^{۲})=۰/۴ \Rightarrow Var(X)=۰/۴-(۰/۴)^{۲}=۰/۲۴$

$$E(Y)=۰/۸,\ E(Y^{۲})=۱ \Rightarrow Var(Y)=۱-(۰/۸)^{۲}=۰/۳۶$$

بنابراین

$$Var(۲X-۳Y+۴)=۴Var(X)+۹Var(Y)-۱۲COV(X,Y)$$
$$=۴(۰/۲۴)+۹(۰/۳۶)-۱۲(-۰/۱۲)=۵/۶۴$$

ضریب همبستگی در خاصیت (هـ) کوواریانس مشاهده کردیم که کوواریانس بستگی به واحد اندازه‌گیری X و Y دارد. برای اینکه معیاری برای سنجش میزان رابطه دو متغیر تصادفی X و Y پیدا کنیم که به واحد اندازه‌گیری X و Y بستگی نداشته باشد، کوواریانس بین متغیرهای $\frac{X}{\sigma_X}$ و $\frac{Y}{\sigma_Y}$ را محاسبه می‌کنیم که σ_X,σ_Y به ترتیب انحراف معیارهای X و Y هستند، یعنی

$$COV(\frac{X}{\sigma_X},\frac{Y}{\sigma_Y})=\frac{COV(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{COV(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

این معیار را ضریب همبستگی متغیرهای تصادفی X و Y می‌نامند و آن را با نمادهای ρ یا $\rho(X,Y)$ نمایش می‌دهند. بنابراین

ضریب همبستگی X و Y

$$\rho=\rho(X,Y)=\frac{COV(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} \qquad (۱۱.۴)$$

* ضریب همبستگی دو متغیر X و Y میزان رابطهٔ خطی دو متغیر تصادفی X و Y را می‌سنجد. با استفاده از قوانین امید ریاضی و خواص واریانس و کوواریانس می‌توان خواص زیر را برای ضریب همبستگی اثبات کرد که اثبات آنها را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. فرض کنید a و b اعداد ثابت و X و Y دو متغیر تصادفی باشند، در این صورت

الف- $\rho(aX+b,cY+d)=\rho(X,Y)$ $\qquad \frac{cov(ax+b,cy+d)}{\delta_{ax+b}\,\delta_{cy+d}}=\frac{ac\,cov}{a\delta_x c\delta_y}$

ب- همواره داریم که $-۱\le\rho\le۱$

ج- اگر $Y=aX+b$ و $a>۰$ آنگاه $\rho>۰$

د- اگر $Y=aX+b$ و $a<۰$ آنگاه $\rho<۰$

هـ- اگر X و Y مستقل باشند آنگاه $\rho=۰$ ← عکس آن برقرار نیست!

خاصیت (الف) می‌گوید که ضریب همبستگی X و Y به مبدأ و واحد اندازه‌گیری X و Y بستگی ندارد. توجه کنید که اگر $\rho=۰$ باشد آنگاه دلیلی ندارد که X و Y از یکدیگر مستقل باشند (نتیجهٔ ۳.۴ را ملاحظه کنید). در این حالت یعنی حالتی که $\rho=۰$ باشد، متغیرهای تصادفی X و Y را ناهمبسته گویند.

مثال ۵.۴.۴ در مثال ۳.۴.۴ ضریب همبستگی X و Y را به دست آورید.

حل در مثال ۴.۲.۴ مشاهده کردیم که

$$Var(X)=۰/۲۴\ ,\quad Var(Y)=۰/۳۶\ ,\quad COV(X,Y)=-۰/۱۲$$

بنابراین

$$\rho=\frac{COV(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=\frac{-۰/۱۲}{\sqrt{(۰/۲۴)(۰/۳۶)}}=\frac{-۱}{\sqrt{۶}}=-۰/۴۰۸$$

یعنی X و Y دارای رابطه در خلاف جهت یکدیگر هستند ولی این رابطه خیلی شدید نیست.

مثال ۶.۴.۴ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند. ضریب همبستگی X و Y را محاسبه کنید.

احتمال توأم پیوسته

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}e^{-y} & ۰<x<y<+\infty\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

حل برای محاسبهٔ ضریب همبستگی X و Y ابتدا توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X و Y را به دست می‌آوریم:

$$f_X(x)=\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=\left[-e^{-y}\right]_x^{+\infty}=e^{-x}\qquad x>۰$$

$$f_Y(y)=\int_۰^{y}e^{-y}dx=e^{-y}[x]_۰^{y}=ye^{-y}\qquad y>۰$$

به وسیلهٔ انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌توان نشان داد که برای هر عدد صحیح نامنفی n داریم که $\int_۰^{+\infty}x^ne^{-x}dx=n!$ بنابراین

$$E(X)=\int_۰^{+\infty}xe^{-x}dx=۱!=۱\ ,\quad E(X^۲)=\int_۰^{+\infty}x^۲e^{-x}dx=۲!=۲$$

و در نتیجه $Var(X)=۲-(۱)^۲=۱$. همچنین

$$E(Y)=\int_۰^{+\infty}y^۲e^{-y}dy=۲!=۲\ ,\quad E(Y^۲)=\int_۰^{+\infty}y^۳e^{-y}dy=۳!=۶$$

و در نتیجه $Var(Y)=۶-(۲)^۲=۲$. همچنین

$$E(XY)=\int_۰^{+\infty}\int_۰^{y}xye^{-y}dxdy=\int_۰^{+\infty}ye^{-y}\left[\frac{۱}{۲}x^۲\right]_۰^{y}dy$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_۰^{+\infty}y^۳e^{-y}dy=\frac{۳!}{۲}=۳$$

و در نتیجه $COV(X,Y)=۳-(۱)(۲)=۱$. بنابراین

$$\rho=\frac{COV(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=\frac{۱}{\sqrt{(۱)(۲)}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=۰/۷۰۷$$

۵.۴ امید ریاضی و واریانس شرطی

همانند تعریف امید ریاضی و تعریف واریانس، می‌توان امید ریاضی شرطی و واریانس شرطی را تعریف کرد. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی باشند. امید ریاضی شرطی X^r به شرط $Y=y$

$$E(X^r \mid Y=y) = \begin{cases} \sum_x x^r f_{X\mid Y}(x\mid y) & \text{اگر X و Y گسسته باشند} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_{X\mid Y}(x\mid y)\,dx & \text{اگر X و Y پیوسته باشند} \end{cases} \qquad (۱۲.۴)$$

به همین ترتیب امید ریاضی Y^r به شرط X=x به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E(Y^r \mid X=x) = \begin{cases} \sum_y y^r f_{Y\mid X}(y\mid x) & \text{اگر X و Y گسسته باشند} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y^r f_{Y\mid X}(y\mid x)\,dy & \text{اگر X و Y پیوسته باشند} \end{cases} \qquad (۱۳.۴)$$

واریانس شرطی X به شرط Y=y به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} Var(X\mid Y=y) &= E\left\{ \left[X-E(X\mid Y=y)\right]^2 \mid Y=y \right\} \\ &= E(X^2\mid Y=y)-\left[E(X\mid Y=y)\right]^2 \end{aligned} \qquad (۱۴.۴)$$

به همین ترتیب واریانس شرطی Y به شرط X=x به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} Var(Y\mid X=x) &= E\left\{ \left[Y-E(Y\mid X=x)\right]^2 \mid X=x \right\} \\ &= E(Y^2\mid X=x)-\left[E(Y\mid X=x)\right]^2 \end{aligned} \qquad (۱۵.۴)$$

مثال ۱.۵.۴ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع احتمال توأم زیر باشند. $E(X^2\mid Y=3)$ را محاسبه کنید.

y \ x	۲	۳	۴	$f_Y(y)$
۲	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	۰	$\frac{2}{8}$
۳	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$
۴	۰	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
$f_X(x)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	

حل تابع احتمال شرطی X به شرط Y=۳ به صورت ...

x	۲	۳	۴
$f_{X\mid Y}(x\mid 3)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

بنابراین

$$E(X^2\mid Y=3)=\sum_{x=2}^{4} x^2 f_{X\mid Y}(x\mid 3)=(2^2)(\tfrac{1}{4})+(3^2)(\tfrac{2}{4})+(4^2)(\tfrac{1}{4})=\frac{38}{4}=9.5$$

مثال ۲.۵.۴ در مثال ۶.۴.۴، $Var(X\mid Y=y)$ را محاسبه کنید.

حل در مثال ۶.۴.۴ داشتیم که

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & 0<x<y<+\infty \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases} \quad , \quad f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y} & y>0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

بنابراین

$$f_{X\mid Y}(x\mid y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{e^{-y}}{ye^{-y}}=\frac{1}{y} \qquad 0<x<y<+\infty$$

در نتیجه

$$E(X\mid Y=y)=\int_0^y x(\tfrac{1}{y})dx=\frac{1}{y}\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^y=\frac{y}{2}$$

$$E(X^2\mid Y=y)=\int_0^y x^2(\tfrac{1}{y})dx=\frac{1}{y}\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^y=\frac{y^2}{3}$$

و بنابراین

$$Var(X\mid Y=y)=\frac{y^2}{3}-(\frac{y}{2})^2=\frac{1}{12}y^2 \qquad y>0$$

۶.۴ مسائل حل شده

مثال ۱.۶.۴ از جعبه‌ای محتوی ۸ لامپ که ۲ تای آنها سوخته است ۳ لامپ را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر X نشان دهندهٔ تعداد لامپهای سوخته باشد، امید ریاضی X را به دست آورید.

حل تابع احتمال X به صورت زیر به دست می‌آید

$$f_X(x)=P(X=x)=\frac{\binom{2}{x}\binom{6}{3-x}}{\binom{8}{3}} \quad , \quad x=0,1,2$$

بنابراین

x	۰	۱	۲
$f_X(x)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

$E(X)=\sum^{2} xf$ ...