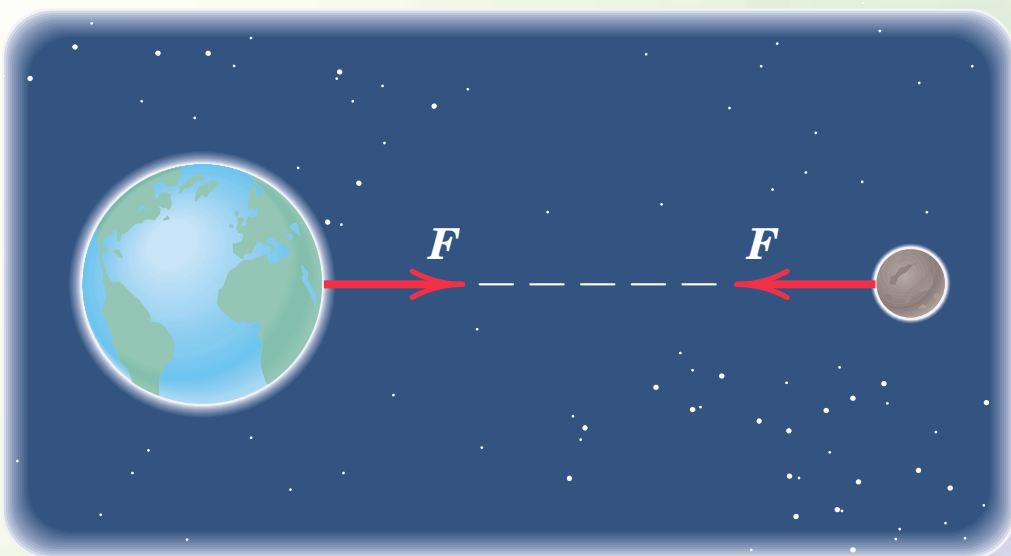


فصل اول

مقدمه و مفاهیم عمومی



هدف‌های رفتاری

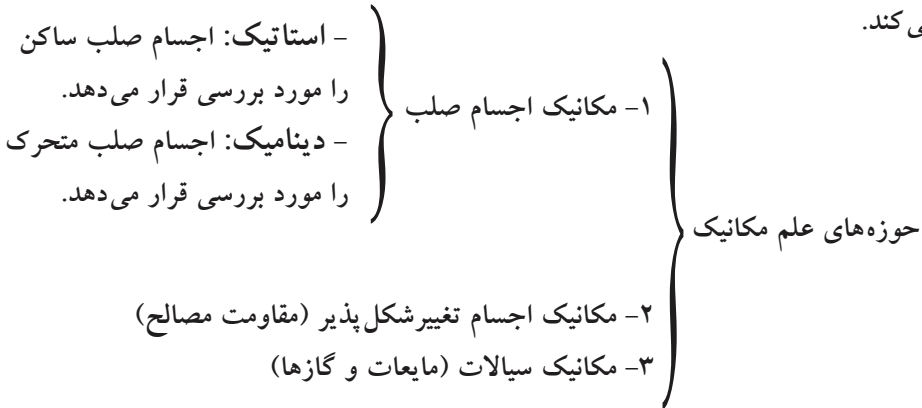
پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

- ۱- علم مکانیک را تعریف نماید.
- ۲- حوزه‌های علم مکانیک را بشناسد.
- ۳- مفاهیم اصلی در علم مکانیک را بشناسد و تعریف نماید.
- ۴- فرضیات علم مکانیک را توضیح دهد.
- ۵- قوانین نیوتن را تعریف کند.
- ۶- کاربرد پیشنندهای واحدهای اندازه‌گیری را بداند.

مقدمه:

۱-۱ تعریف علم مکانیک:

علم مکانیک علمی است که شرایط سکون و حرکت اجسام تحت تاثیر نیرو را بررسی می‌کند.



در این کتاب از حوزه‌های فوق، در بخش اول با مکانیک اجسام صلب ساکن (استاتیک) و در بخش دوم تا حدودی با مکانیک اجسام تغییرشکل پذیر (مقاومت مصالح) آشنا می‌شویم.

تاریخ مهندسی (مطالعه آزاد)

محمد کرجی از نوایغ مهندسی ایران در بیش از هزار سال پیش بوده است. کرجی در کتاب «استخراج آب‌های زیرزمینی» به‌وضوح از کرویت زمین و قوه جاذبه و قوانین تعادل و حرکت، که برخی از آن‌ها چندین قرن بعد توسط دانشمندان اروپایی مطرح شد سخن می‌گوید.

۲-۱ مفاهیم اصلی در علم مکانیک:

مفاهیم اصلی و مورد استفاده در علم مکانیک و معرفی یکاهای اندازه‌گیری آن‌ها در سامانه بین‌المللی یکاها (SI) به شرح زیر می‌باشد.

۱-۲-۱ فضا (Space):

ناحیه هندسی است که رویدادهای فیزیکی در آن رخ می‌دهد. موقعیت هر نقطه در فضا را مکان می‌نامیم که نسبت به یک نقطه مرجع تعیین می‌شود و واحد اندازه‌گیری آن در سامانه SI، متر (m) می‌باشد.

۲-۲-۱ زمان (Time):

فاصله بین وقوع دو رویداد فیزیکی زمان نام دارد و واحد اندازه‌گیری آن ثانیه (s) می‌باشد.

۳-۲-۱ جرم (Mass):

هر چیزی که فضا را اشغال نماید ماده نام دارد و جسم ماده‌ای است که به وسیله یک سطح بسته محدود شده است. مقدار ماده تشکیل دهنده هر جسم را جرم آن جسم می‌نامیم و واحد اندازه‌گیری آن کیلوگرم (kg) است.

۴-۲-۱ نیرو (Force):

تأثیر یک جسم بر جسم دیگر را نیرو می‌نامیم و واحد اندازه‌گیری آن نیوتن (N) است.

۳-۱ فرضیات

در علم مکانیک به منظور ساده‌تر شدن حل مسائل، فرضیاتی به شرح زیر در نظر گرفته می‌شود.

۱) جسم صلب (Rigid Body):

جسمی است که در اثر اعمال نیرو تغییر شکل ندهد.

۲) نقطه مادی (Particle):

جسمی است که از ابعاد آن صرف‌نظر می‌شود؛ به عنوان مثال می‌توان کره زمین را در فضا به صورت یک نقطه مادی در نظر گرفت.

۴-۱ قوانین نیوتن:

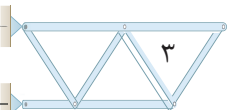
مکانیک اجسام صلب بر اساس قوانین نیوتن به شرح زیر استوار است:

۱-۴-۱ قانون اول نیوتن:

هرگاه مجموع نیروهای وارد بر یک جسم صفر باشد:

اگر جسم ساکن باشد تا ابد ساکن باقی می‌ماند.

اگر در حال حرکت باشد به حرکت یکنواخت و مستقیم‌الخط خود ادامه می‌دهد.



۱-۴-۲- قانون دوم نیوتن:

هرگاه مجموع نیروهای وارد بر یک جسم صفر نباشد، آن جسم شتابی متناسب با مجموع نیروها و در راستای آن می‌گیرد. قانون دوم نیوتن با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$F = m.a \quad (۱-۱)$$

در این رابطه:

F مجموع نیروهای وارد بر جسم بر حسب N

m جرم جسم بر حسب kg

a شتاب ایجاد شده در جسم بر حسب $\frac{m}{s^2}$ می‌باشد.

یک مورد خاص و بسیار مهم این قانون وزن اجسام است که به صورت زیر تعریف

می‌شود:

تعریف وزن (Weight):

وزن نیرویی است که از طرف زمین به اجسام وارد می‌شود و با رابطه (۱-۲) بیان می‌گردد که شباهت زیادی با رابطه $F=m.a$ دارد.

$$w = m.g \quad (۲-۱)$$

w : وزن جسم بر حسب نیوتن

m : جرم جسم بر حسب kg

g : شتاب جاذبه زمین معادل $(g = 9.81 \approx 10 \frac{m}{s^2})$ می‌باشد.

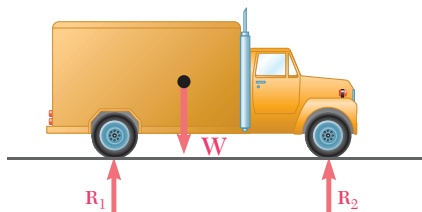
تذکر:

واحد دیگر وزن، کیلوگرم نیرو (kgf) می‌باشد که معادل ۱۰ نیوتن است یعنی:

$$1 kgf \approx 10 N$$

۱-۴-۳- قانون سوم نیوتن:

هر عملی را عکس‌العملی است مساوی با آن و در جهت خلاف آن.



شکل ۱-۱

یادآوری:

در این کتاب از سامانه بین‌المللی واحدهای اندازه‌گیری (SI) استفاده می‌کنیم که در اکثر کشورها نیز پذیرفته شده است.

واحدهای اندازه‌گیری کمیت‌ها در کتاب محاسبات فنی ساختمان بیان گردیده و در این جا به منظور تکمیل آن پیشنوندهای واحدهای اندازه‌گیری را یادآوری می‌نمائیم و مزیت استفاده از این پیشنوندها این است که از نوشتن اعداد خیلی بزرگ و خیلی کوچک اجتناب می‌شود. به عنوان مثال می‌توان 247500 N را به صورت $247/5 \text{ kN}$ و یا $0/00546 \text{ m}$ را به شکل $5/46 \text{ mm}$ نوشت.

تذکر:

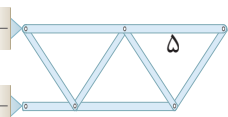
بین پیشوند و واحد اندازه‌گیری مورد نظر از هیچ علامتی استفاده نمی‌شود اما بین دو واحد اندازه‌گیری مختلف هر علامتی نظیر $\times$ و $/$ می‌تواند وجود داشته باشد به طور مثال:
 N.m یعنی نیوتن متر و nm یعنی نانومتر که معادل (10^{-9} m) می‌باشد.

مثال: $7/5 \times 10^{-5} \text{ MN}$ چند نیوتن است؟

$$7/5 \times 10^{-5} \times 10^6 = 75 \text{ N}$$

جدول (۱-۱) پیشنوندهای آحاد اندازه‌گیری

شکل توانی	مقدار عددی	علامت اختصاری	نام پیشوند
10^{-12}	$0/0000000001$	p	پیکو
10^{-9}	$0/00000001$	n	نانو
10^{-6}	$0/000001$	μ	میکرو
10^{-3}	$0/001$	m	میلی
10^3	1,000	K	کیلو
10^6	1,000,000	M	مگا
10^9	1,000,000,000	G	گیگا
10^{12}	1,000,000,000,000	T	ترا



۱- اصطلاحات زیر را تعریف کنید:

علم مکانیک - استاتیک - دینامیک - جسم صلب - نقطه مادی

۲- علم مکانیک به چند حوزه تقسیم می‌شود؛ نام ببرید.

۳- مفاهیم اصلی در علم مکانیک را نام برده و هر یک را توضیح دهید.

۴- قوانین نیوتن را نام برده و هر یک را توضیح دهید.

۵- جرم جسمی 60 kg است. وزن آن را بر حسب N و kgf محاسبه کنید.

۶- به واحدهای خواسته شده تبدیل کنید:

الف) $1/5 \text{ kN} = ? \text{ N}$

ب) $\text{kN.cm} = ? \text{ N.m}$

ج) $12 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = ? \text{ M} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

د) $25 \text{ MN.m} = ? \text{ N.cm}$

ه) $2 \mu\text{N.Mm} = ? \text{ N.m}$

و) $1 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} = ? \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

ز) $18 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} = ? \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

تاریخ مهندسی (مطالعه آزاد)

اخوان‌الصفاء گروهی از متفکران و فیلسوفان بودند که در سال ۳۷۳ هجری در بصره به صورت انجمنی مخفی گرد آمدند. نام افراد این انجمن تماماً مشخص نیست ولی بعضی از افراد این گروه، ایرانی بوده‌اند: ابوسلیمان محمد بن مشیر بستی مقدسی و ابوالحسن علی بن هارون زنجانی و محمد بن احمد نهرجوری از جمله ایرانیان اخوان‌الصفاء بوده‌اند.

گزیده‌ای از نظرات اخوان‌الصفاء دربارهٔ پدیدارهای طبیعی که در بخشی از رسائل آن‌ها موسوم به «حدود و رسوم» آمده است تعاریف بنیادی استاتیک و مقاومت مصالح است که در زیر نقل گردیده‌اند.

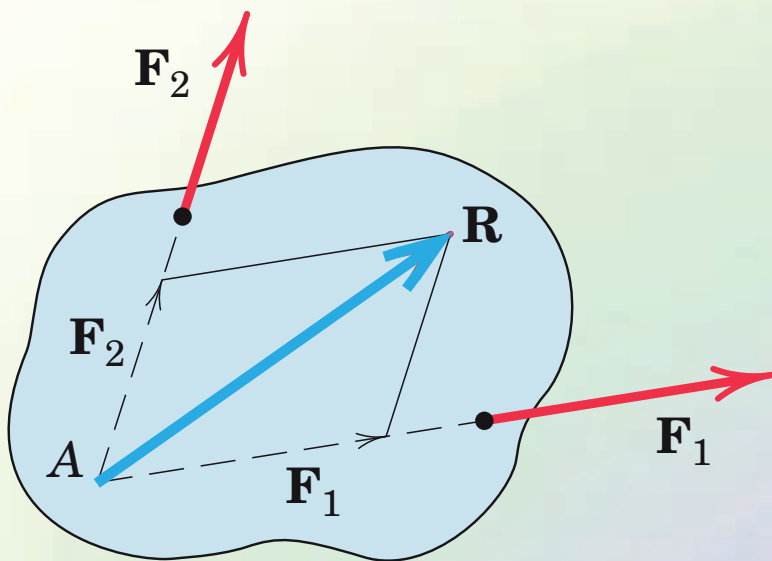
مکان: هر موضوعی که شیء متمکن را در بر گیرد، و آن نهایات جسم است.

زمان: شماره حرکت‌های سپهر، و تکرار شب و روز است.

جسم: هر چیزی که طول و عرض و عمق داشته باشد.

فصل دوم

بُردارها



هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

- ۱- کمیت‌های فیزیکی را بشناسد.
- ۲- انواع بردارها را تعریف نماید.
- ۳- جمع و تفریق بردارها را به روش ترسیمی انجام دهد.
- ۴- یک بردار را به مؤلفه‌های آن تجزیه نماید.
- ۵- نمایش برداری بردارها را بدانند.
- ۶- مقدار بردار را با استفاده از مؤلفه‌های متعامد آن محاسبه نماید.

۱-۲ کمیت‌های فیزیکی

۱-۱-۲- کمیت‌های عددی یا اسکالر

کمیت‌هایی هستند که فقط دارای اندازه یا مقدار می‌باشند؛ مانند جرم، زمان، طول و کار و انرژی.

۲-۱-۲- کمیت‌های برداری

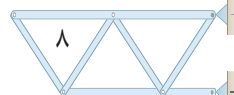
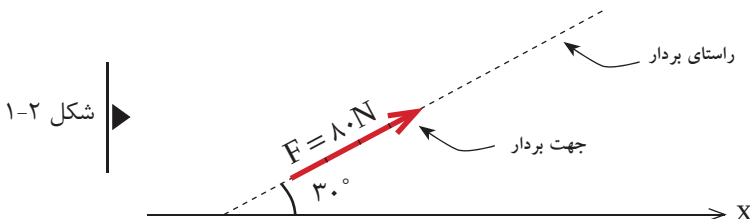
کمیت‌هایی هستند که علاوه بر مقدار دارای جهت و راستا نیز می‌باشند. مانند: بردارهای نیرو، گشتاور، سرعت، شتاب و جابجایی.

۲-۲ بردارها (Vector)

هر بردار به صورت یک پیکان با طولی متناسب با مقدار آن ترسیم می‌شود به عنوان مثال در شکل (۱-۲)، بردار نیروی ($\vec{F}$) با مقدار 80 N و با زاویه 30° نسبت به محور x و در جهت و راستای نشان داده شده ترسیم شده است.

نکته:

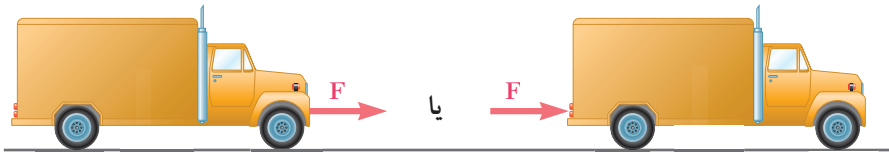
زاویه امتداد هر بردار، با یک امتداد مبنا که معمولاً امتدادهای x یا y است، مشخص می‌شود.



۳-۲ انواع بردارها

۳-۲-۱ بردار لغزان

برداری است که اگر در راستای خود جابه‌جا شود، اثر آن بر جسم تغییر ننماید. همانند نیروی F در شکل (۳-۲)



شکل ۳-۲

۳-۲-۲ بردار ثابت

برداری است که مکان معینی را در فضا اشغال می‌کند و نمی‌توان آن را جابه‌جا نمود. یعنی با جابه‌جا کردن آن، اثر آن بر جسم تغییر می‌نماید. مثلاً ضربه‌ای که به سر انسان وارد می‌شود با ضربه‌ای که با همان مقدار و همان جهت به پای او وارد می‌آید متفاوت است.

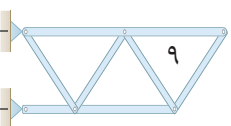
۳-۳-۲ بردارهای هم‌سنگ

دو بردار مساوی، موازی و هم‌جهت را بردارهای هم‌سنگ می‌نامیم. در شکل (۳-۲) بردارهای $\vec{F}$ و $\vec{P}$ هم‌سنگ‌اند.



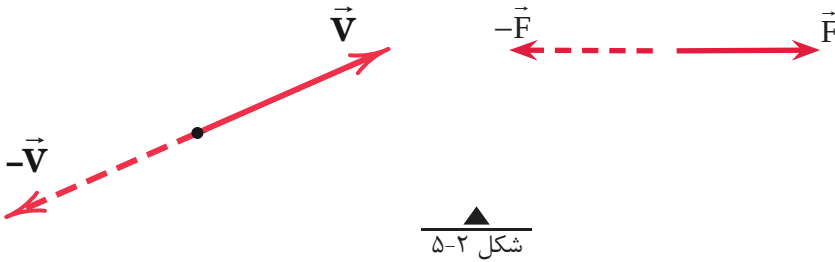
۳-۳-۴ بردارهای زوج

دو بردار مساوی، موازی و مختلف‌الجهت را بردارهای زوج می‌نامیم. در شکل (۴-۲) بردارهای $\vec{F}$ و $\vec{P}$ زوج‌اند.



۵-۳-۲ بردارهای مخالف

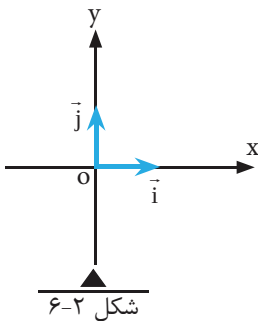
دو بردار مساوی، هم‌راستا و مختلف‌الجهت را بردارهای مخالف گویند. شکل (۵-۲)



۶-۳-۲ بردار یکه (واحد)

بردار یکه که مقدار (اندازه) آن برابر واحد است را بردار یکه یا واحد می‌نامیم.

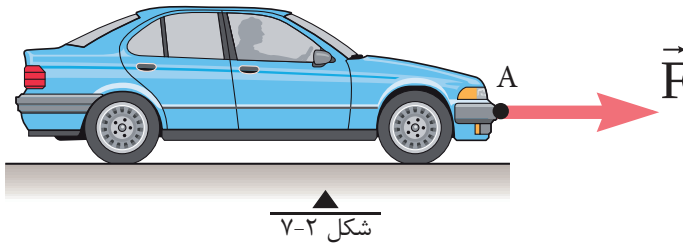
بردار واحد روی محور x ها را با $\vec{i}$ و روی محور y ها را با $\vec{j}$ نمایش می‌دهند. شکل (۶-۲)



۷-۳-۲ بردار نیرو

بردار یکه است که علاوه بر مقدار، جهت و راستا دارای نقطه اثر نیز می‌باشد. در شکل (۷-۲) نقطه A ، نقطه اثر بردار نیروی $\vec{F}$ می‌باشد.

و واحد اندازه‌گیری نیرو، نیوتن (N) است و مطابق قانون دوم نیوتن به صورت زیر تعریف می‌شود:



تعریف نیوتن با استفاده از قانون دوم نیوتن

یک نیوتن مقدار نیرویی است که اگر به جرم یک کیلوگرم وارد شود، در آن شتابی معادل یک متر بر مجذور ثانیه و در جهت اعمال نیرو ایجاد نماید.

$$F = m.a$$

$$1N = 1kg \times 1 \frac{m}{s^2}$$

۴-۲ جمع و تفریق بردارها

عملیات جمع و تفریق کمیت‌های برداری با جمع و تفریق کمیت‌های عددی (اسکالر) متفاوت است. یعنی نمی‌توان مقادیر عددی دو یا چند بردار، به‌غیر از بردارهای هم‌راستا، و موازی را با یکدیگر جمع و یا تفریق نمود. در این کتاب برای نشان دادن یک بردار مانند $\vec{V}$ از علامت $(\rightarrow)$ در بالای آن استفاده می‌شود و برای نشان دادن مقدار (اندازه) آن بردار علامت $(\rightarrow)$ بالای آن برداشته می‌شود.

$\vec{V}$: بردار V
اندازه یا مقدار بردار V :

۱-۴-۲ روش‌های جمع و تفریق بردارها

جمع و تفریق بردارها به دو روش ۱- ترسیمی ۲- محاسباتی انجام می‌شود که در این فصل با روش ترسیمی و در فصل بعد با روش‌های محاسباتی آشنا خواهید شد.

۱-۴-۲-۱ روش ترسیمی

در این روش با استفاده از وسایل ترسیم و مقیاس مناسب جمع و تفریق بردارها انجام می‌شود. روش‌های ترسیمی جمع و تفریق بردارها شامل سه روش زیر می‌باشد:

الف) روش مثلث

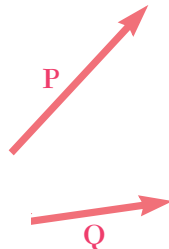
ب) روش متوازی‌الاضلاع

ج) روش چندضلعی

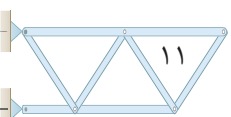
لازم به ذکر است که روش‌های مثلث و متوازی‌الاضلاع برای مجموع یا تفاضل دو بردار و روش چندضلعی برای مجموع یا تفاضل بیش از دو بردار مناسب می‌باشند.

الف) روش مثلث

دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ مطابق شکل (۸-۲) مفروض است. برای به‌دست آوردن مجموع آن‌ها یعنی $\vec{P} + \vec{Q}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:



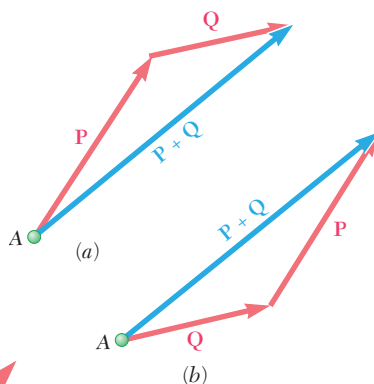
شکل ۸-۲



- (۱) از نقطه دلخواه مانند A هم سنگ یکی از بردارها ترسیم می شود
- (۲) از انتهای بردار اول هم سنگ دوم ترسیم می شود
- (۳) برداری که از ابتدای بردار اول به انتهای بردار دوم وصل می شود مجموع دو بردار خواهد بود که مقدار آن به وسیله خط کش مقیاس اندازه گیری می شود: شکل (۹-۲)

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

(۱-۲)



شکل ۹-۲

ب) روش متوازی الاضلاع

دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ مطابق شکل (۱۰-۲)

مفروض است و مجموع آنها یعنی $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$ مدنظر می باشد. طبق قانون متوازی الاضلاع به شرح

زیر عمل می نماییم: شکل (۱۱-۲)

(۱) از نقطه دلخواه مانند O هم سنگ بردارهای $\vec{P}$ و

$\vec{Q}$ را ترسیم می نماییم

(۲) از انتهای بردار $\vec{P}$ به موازات بردار $\vec{Q}$ خطی

ترسیم می شود (خط d_1)

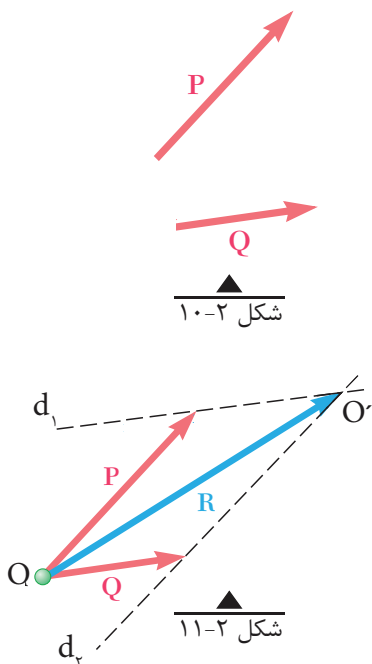
(۳) از انتهای بردار $\vec{Q}$ به موازات بردار $\vec{P}$ خطی

ترسیم می شود (خط d_2) تا خط d_1 را در نقطه

O' قطع نماید.

(۴) برداری که از O به O' ترسیم می شود همان مجموع دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ یعنی $\vec{R}$ خواهد

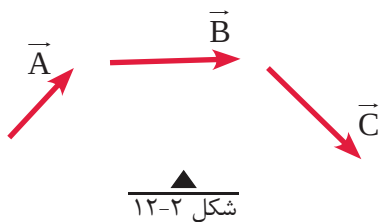
بود که مقدار آن به وسیله خط کش مقیاس برداشت می شود.



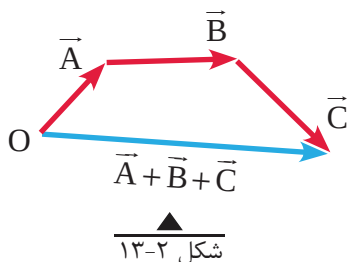
شکل ۱۰-۲

شکل ۱۱-۲

ج) روش چندضلعی



در این روش به منظور ترسیم مجموع چند بردار مانند شکل (۱۲-۲) از یک نقطه دلخواه مانند O هم‌سنگ بردار اول را رسم می‌کنیم و از انتهای بردار رسم شده هم‌سنگ بردار دوم ترسیم می‌شود. این روند تا ترسیم تمامی بردارها ادامه می‌یابد؛ برداری که از ابتدای بردار اول به انتهای بردار آخر رسم می‌شود، مجموع بردارها خواهد بود. شکل (۱۳-۲)



نکته (۱)

هر گاه انتهای آخرین بردار بر ابتدای بردار اول منطبق گردد (یک چندضلعی بسته تشکیل شود)، مجموع بردارها صفر خواهد بود.

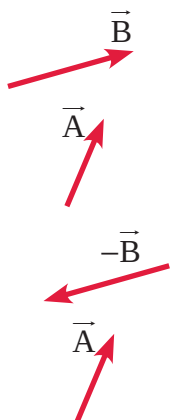
نکته (۲)

در حالتی که بردارها موازی یا هم‌راستا باشند، برای جمع و تفریق آن‌ها کافی است با در نظر گرفتن جهت بردارها، آن‌ها را روی یک محور ترسیم نمود.

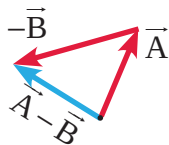
تذکر:

عملیات تفریق دو یا چند بردار به روش‌های فوق با استفاده از تعریف بردار مخالف مطابق شکل (۱۴-۲) امکان‌پذیر است. یعنی:

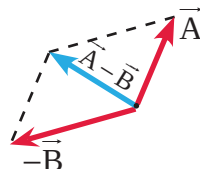
$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \quad (۲-۲)$$



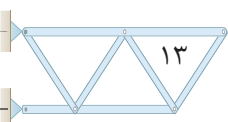
شکل ۱۴-۲



تفاضل بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ به روش مثلث

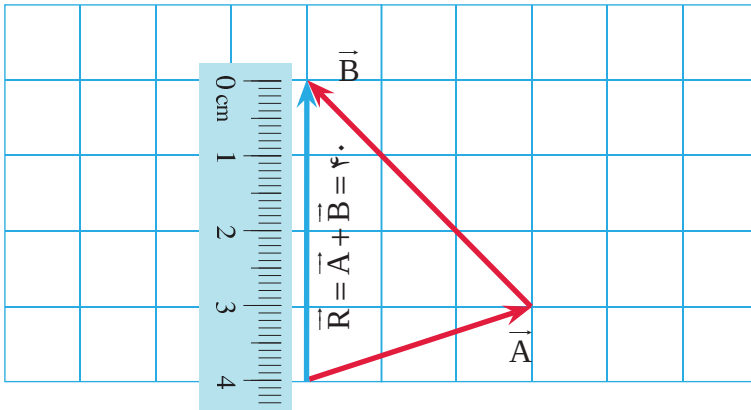
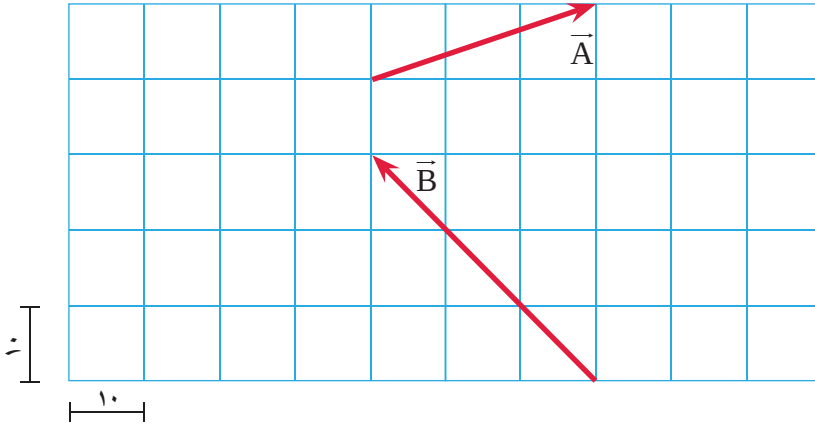


تفاضل بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ به روش متوازی‌الاضلاع

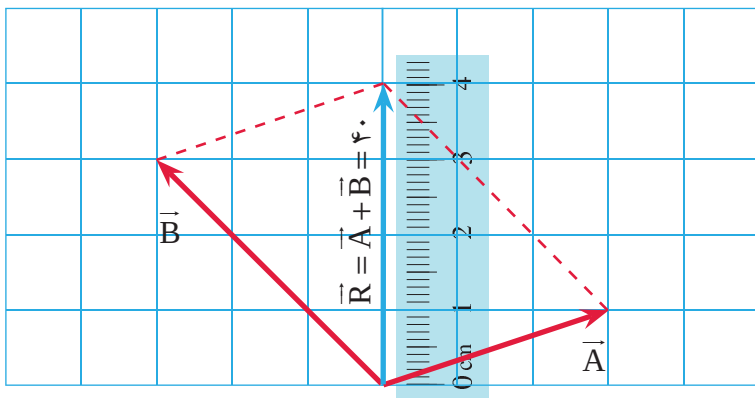


مثال ۱

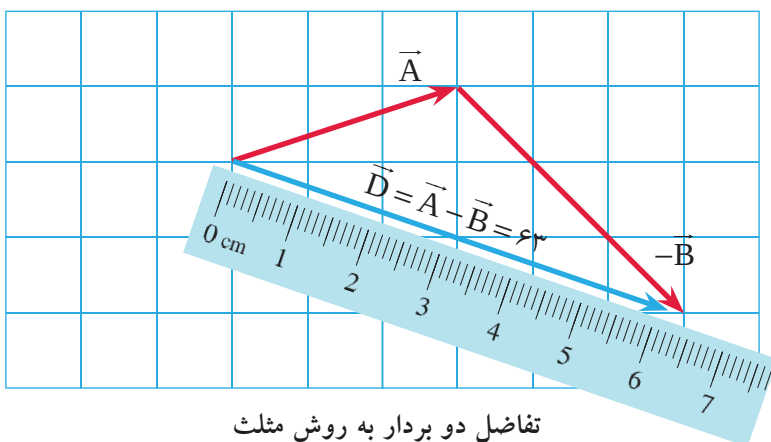
در شکل زیر بردارهای $\vec{A} + \vec{B}$ و $\vec{A} - \vec{B}$ را به روش‌های ترسیمی مثلث و متوازی‌الاضلاع نشان داده و اندازه تقریبی آن‌ها را با خط‌کش مقیاس برداشت نمایید.
(ابعاد شبکه برابر ۱۰ واحد است)



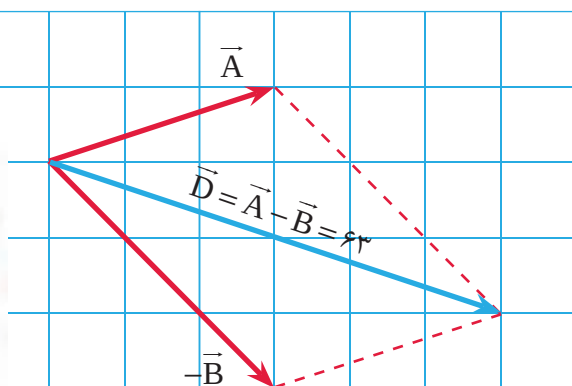
مجموع دو بردار به روش مثلث



مجموع دو بردار به روش متوازی الاضلاع

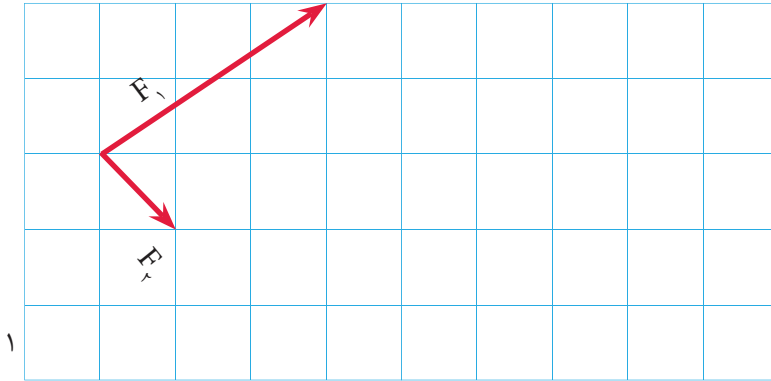


تفاضل دو بردار به روش مثلث

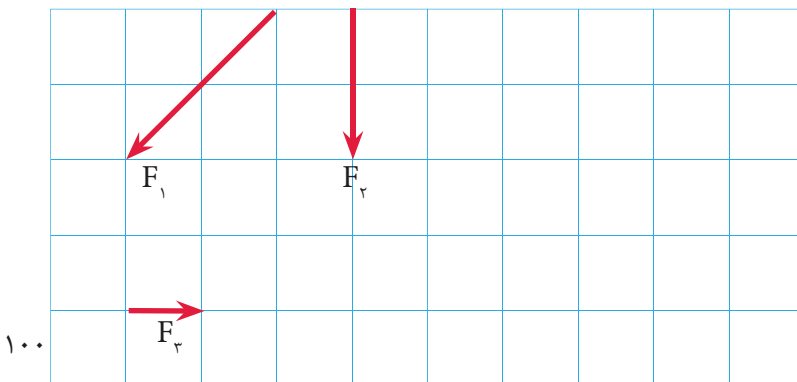


تفاضل دو بردار به روش متوازی الاضلاع

- ۱- کمیت‌های فیزیکی را نام برده و هر یک را تعریف کنید و مثال بزنید.
- ۲- از کمیت‌های زیر کدام یک اسکالر و کدام یک برداری می‌باشند؟
شتاب - وزن - سطح - حجم - جابه‌جایی
- ۳- انواع بردارها را نام برده و هر کدام را تعریف کنید.
- ۴- در هر شکل جمع بردارهای داده شده را به روش ترسیمی نشان دهید و اندازه و زاویه بردار برآیند (مجموع آن‌ها) با امتداد افق را با استفاده از خط کش و نقاله اندازه‌گیری نمایید.

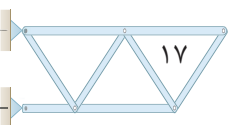
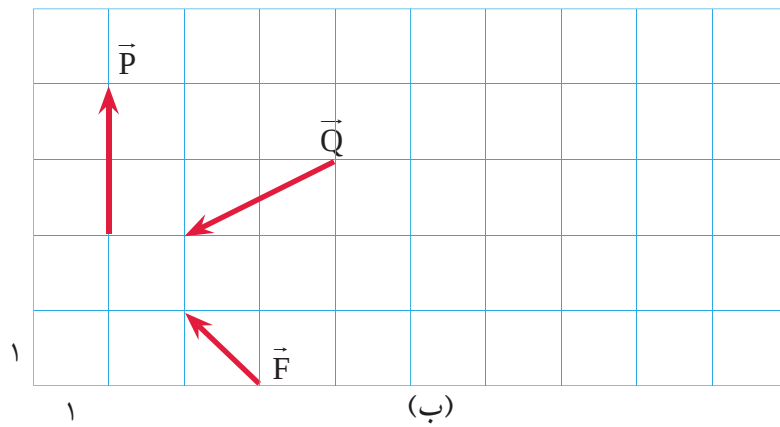
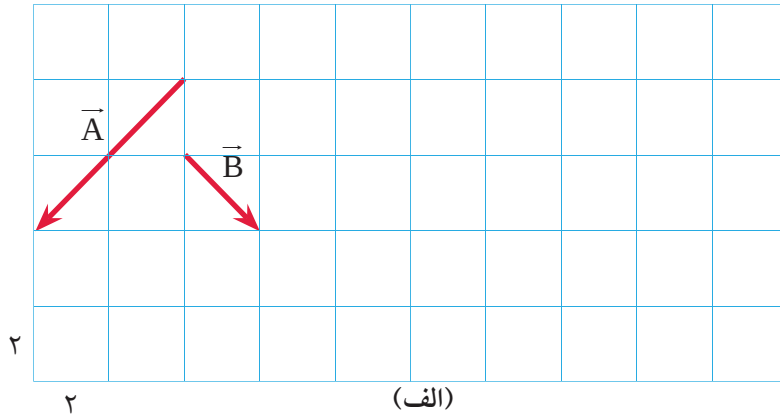


(الف)



(ب)

۵- در شکل‌های زیر حاصل عبارات $\vec{A}-\vec{B}$ و $\vec{F}-\vec{P}+\vec{Q}$ را به روش ترسیمی تعیین کنید.



۵-۲ تجزیه یک بردار به مؤلفه‌های آن به روش ترسیمی

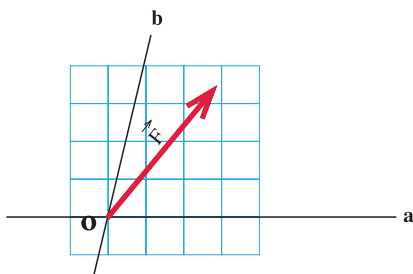
همان‌گونه که در قسمت قبل دیدیم دو بردار با امتداد و مقادیر مشخص را می‌توان با استفاده از روش‌های مثلث یا متوازی‌الاضلاع با یکدیگر جمع نمود و مجموع آن‌ها را به‌دست آورد؛ که این بردار مجموع را برآیند دو بردار اولیه نیز می‌نامند. حال چنان‌چه دو امتداد دلخواه در صفحه داشته باشیم و برداری به نام $\vec{F}$ نیز داده شده باشد می‌توان آن را بر روی دو امتداد مورد نظر به شرح ذیل تجزیه نمود که عکس عمل جمع دو بردار می‌باشد. شکل‌های (۲-۱۵) و (۲-۱۶)

(۱) از انتهای بردار $\vec{F}$ دو خط به موازات محورهای a و b ترسیم نموده (خطوط a' و b') تا آن‌ها را در نقاط O_1 و O_2 قطع نماید.

(۲) بردار $\overline{OO_1}$ مؤلفه $\vec{F}$ روی امتداد a خواهد بود که با $\vec{F}_a$ نشان داده می‌شود.

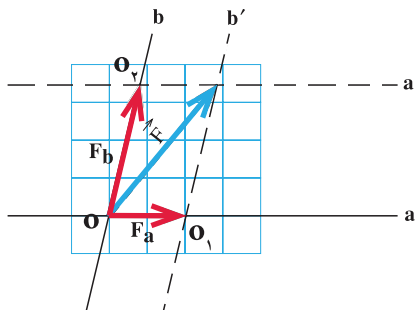
(۳) بردار $\overline{OO_2}$ مؤلفه $\vec{F}$ روی امتداد b خواهد بود که با نماد $\vec{F}_b$ نشان داده می‌شود.

روش فوق، روش کلی برای تجزیه یک بردار است. حالت خاصی از آن تجزیه یک بردار روی دو محور متعامد (عمود بر هم) است که کاربرد زیادی در حل مسائل ایستایی دارد.



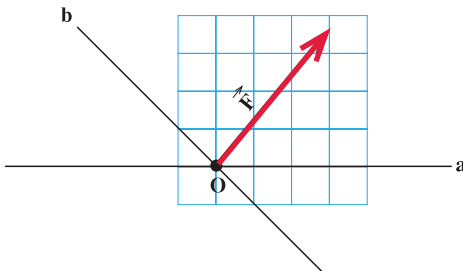
شکل ۱۵-۲

شکل ۱۶-۲

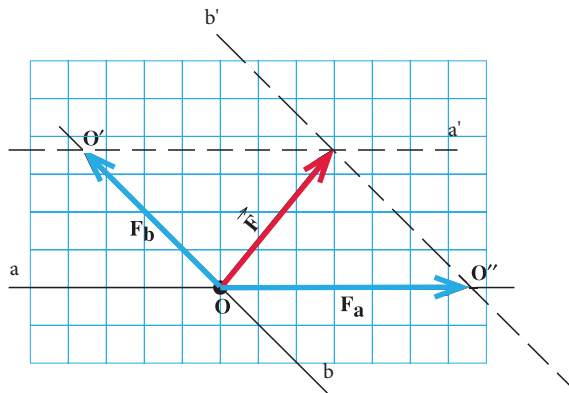


مثال ۲

در شکل روبه‌رو بردار F را روی امتدادهای a و b تجزیه کنید.

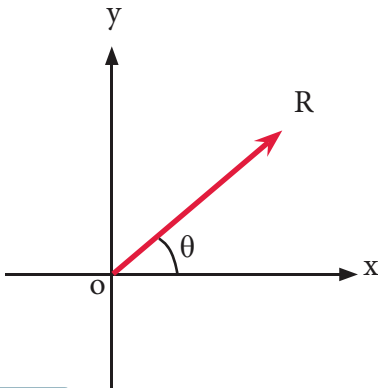


حل:

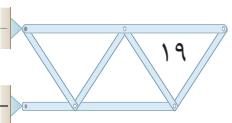


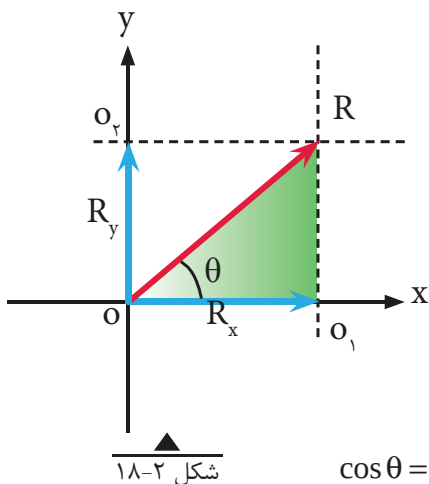
۶-۲ تجزیه یک بردار به مؤلفه‌های متعامد آن در دستگاه مختصات دکارتی

مطابق شکل (۱۷-۲) بردار $\vec{R}$ با زاویه θ نسبت به محور x مفروض است. می‌خواهیم آن را روی محورهای متعامد x و y تجزیه نماییم. چنانچه مطابق مراحل سه‌گانه در بخش (۵-۲) عمل کنیم، به شکل (۱۸-۲) خواهیم رسید.



شکل ۱۶-۲





اندازه یا مقدار مؤلفه‌های R_x و R_y با استفاده از روابط مثلثاتی در مثلث رنگ شده شکل (۲-۱۸) به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

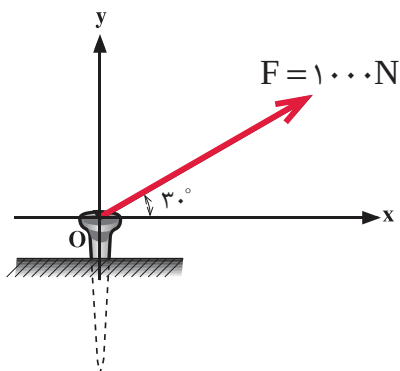
$$\cos \theta = \frac{R_x}{R} \Rightarrow$$

$$R_x = R \cdot \cos \theta$$

(۳-۲)

$$\sin \theta = \frac{R_y}{R} \Rightarrow$$

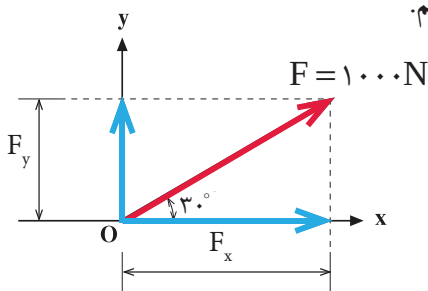
$$R_y = R \cdot \sin \theta$$



مثال ۳

نیروی F مطابق شکل بر میخی وارد می‌شود. مطلوب است تجزیه این نیرو روی محورهای x و y و محاسبه مقادیر مؤلفه‌ها.
حل:

نیروی F را به مؤلفه‌های متعامد تجزیه می‌کنیم.

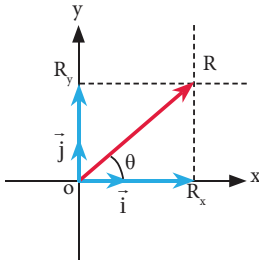


$$F_x = F \cos \theta = 1000 \times \cos 30^\circ \Rightarrow F_x = 866.02 \text{ N}$$

$$F_y = F \sin \theta = 1000 \times \sin 30^\circ \Rightarrow F_y = 500 \text{ N}$$

۲-۶-۱- نمایش برداری یک بردار در دستگاه مختصات دکارتی

در دستگاه مختصات دکارتی محوره‌های ox و oy بر یکدیگر عمود بوده و بردارهای واحد (یکه) روی آن‌ها به ترتیب با $\vec{i}$ و $\vec{j}$ نمایش داده می‌شوند و برداری مانند بردار $\vec{R}$ مطابق شکل (۲-۱۹) در این دستگاه با رابطه زیر تعریف می‌شود:



$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} \quad (۲-۴)$$

که در رابطه فوق R_x مؤلفه $\vec{R}$ روی محور x و R_y مؤلفه $\vec{R}$ روی محور y می‌باشد.

شکل ۲-۱۹

مثال ۴

فرم برداری بردار F در شکل (مثال ۳) را بنویسید.

حل:

فرم برداری بردار $\vec{F}$ به صورت $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$ می‌باشد.

با توجه به نتایج مثال ۳ داریم:

$$F_x = ۸۶۶ / ۰.۲ \text{ N}$$

$$F_y = ۵۰۰ \text{ N}$$

بنابراین:

$$\vec{F} = ۸۶۶ / ۰.۲ \vec{i} + ۵۰۰ \vec{j}$$

۲-۷- تعیین اندازه یک بردار با استفاده از مؤلفه‌های متعامد آن

همان‌طور که یک بردار را می‌توان به دو مؤلفه روی امتدادهای مختلف تجزیه کرد می‌توان به کمک مؤلفه‌های یک بردار، اندازه بردار و زاویه آن را به کمک رابطه فیثاغورث و نسبت‌های مثلثاتی تعیین کرد.

هر گاه برداری مانند $\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$ داشته باشیم، می‌توان اندازه R و زاویه آن را با امتداد x به صورت زیر تعیین نمود:



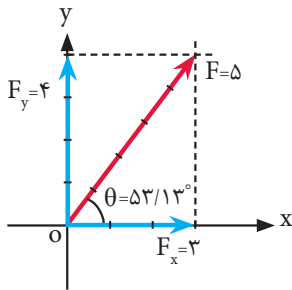
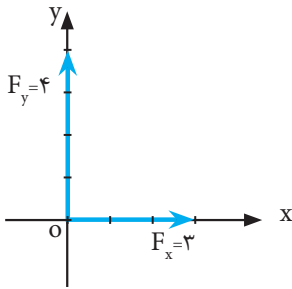
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (۲-۵)$$

مقدار (اندازه) بردار R

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right| \quad (۲-۶)$$

زاویه بردار R نسبت به محور x ها

مثال ۵



بردار $\vec{F} = (3\vec{i} + 4\vec{j})$ را ترسیم نموده، مقدار و زاویه آن را با محور x ها به دست آورید.

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F = \sqrt{3^2 + 4^2} \Rightarrow \boxed{F = 5}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{F_y}{F_x} \right| \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left| \frac{4}{3} \right| \Rightarrow \boxed{\theta = 53/13^\circ}$$

خلاصه فصل

- کمیت‌های فیزیکی به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند:
- الف- کمیت‌های اسکالر (عددی) ب- کمیت‌های برداری
- بردارهای یک‌ه (واحد) روی محورهای x و y در دستگاه مختصات دکارتی به ترتیب با $\vec{i}$ و $\vec{j}$ نمایش داده می‌شوند.
- جمع و تفریق کمیت‌های برداری با جمع و تفریق کمیت‌های عددی متفاوت می‌باشد.
- جمع و تفریق دو یا چند بردار به صورت ترسیمی با روش‌های مثلث و متوازی‌الاضلاع و چندضلعی، انجام می‌شود.
- هر بردار را می‌توان روی دو محور دلخواه به مؤلفه‌های آن تجزیه نمود.
- مؤلفه‌های متعامد یک بردار در صفحه مختصات دکارتی با روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$R_x = R \cdot \cos \theta$$

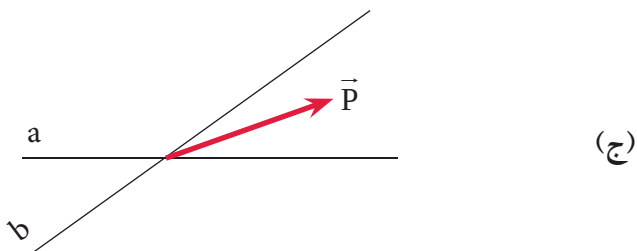
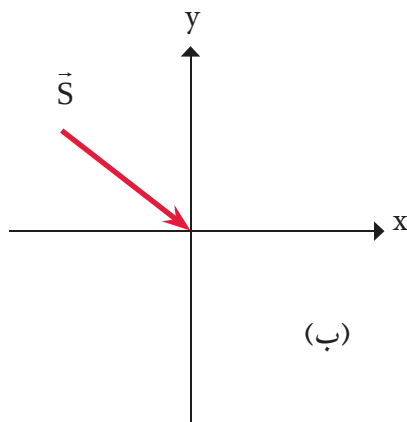
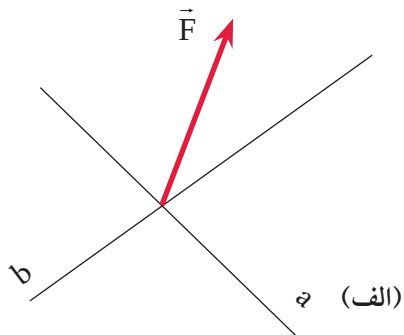
$$R_y = R \cdot \sin \theta$$

- فرم برداری یک بردار با استفاده از مؤلفه‌های متعامد آن در صفحه مختصات دکارتی عبارت است از:
$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$$
- برای جمع و تفریق بردارهای هم‌راستا و یا موازی کافی است اندازه آن‌ها را با یکدیگر به صورت جبری جمع و یا تفریق نمود.
- اندازه برداری مانند $\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$ و زاویه آن با محور x ها از روابط زیر تعیین می‌شوند:

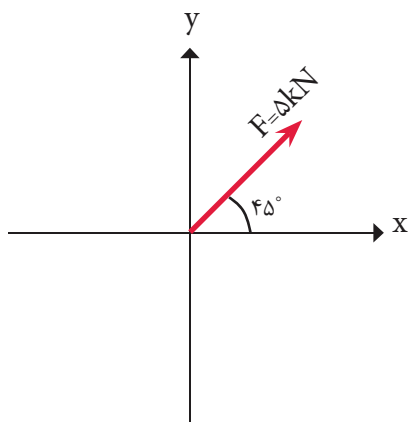
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \text{اندازه بردار } R$$

$$\theta = \tan^{-1} \left| \left(\frac{R_y}{R_x} \right) \right| \quad \text{زاویه بردار } R \text{ با محور } x$$

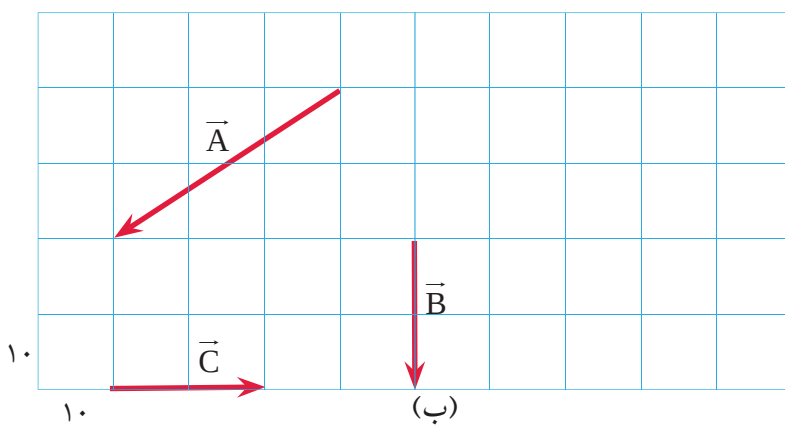
۱- بردارهای زیر را به روش ترسیمی روی محورهای داده شده تجزیه کنید.

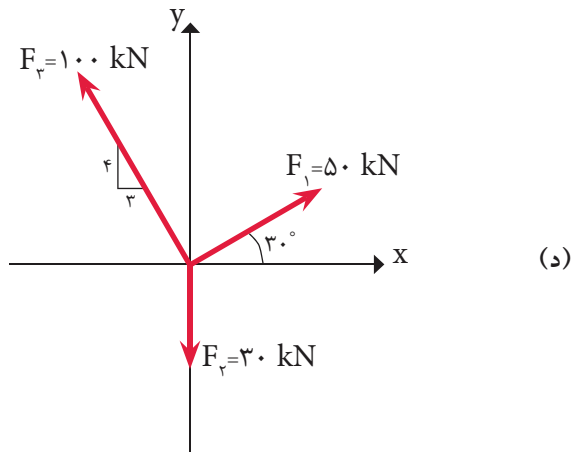
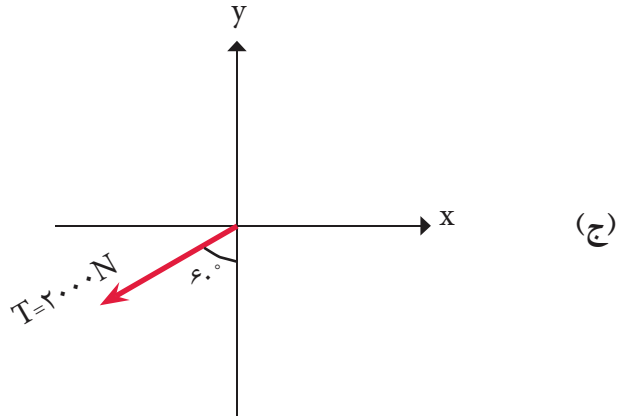


۲- بردارهای زیر را به مؤلفه‌های متعامد آن تجزیه نمائید و فرم برداری آن‌ها را بنویسید.



(الف)

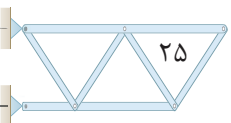




۳- بردارهای زیر را ترسیم نموده و اندازه و زاویه هر یک را نسبت به محور x و y تعیین کنید.

الف) $\vec{F} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$ ب) $\vec{P} = -5\vec{i}$

ج) $\vec{T} = 3/5\vec{j}$ د) $\vec{Q} = -3\vec{i} - 3\vec{j}$



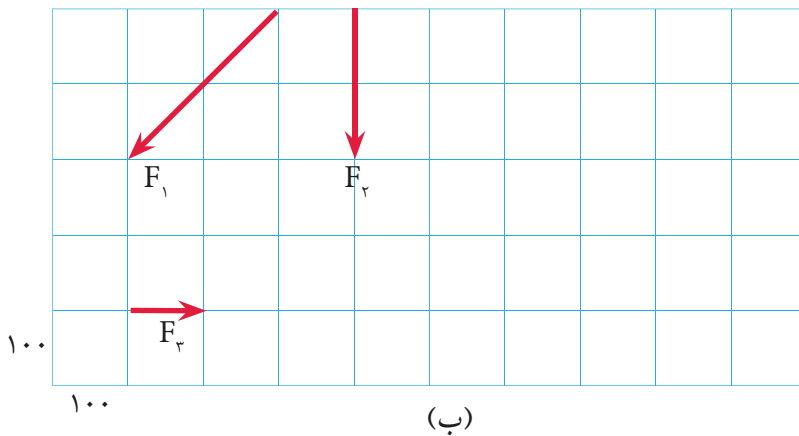
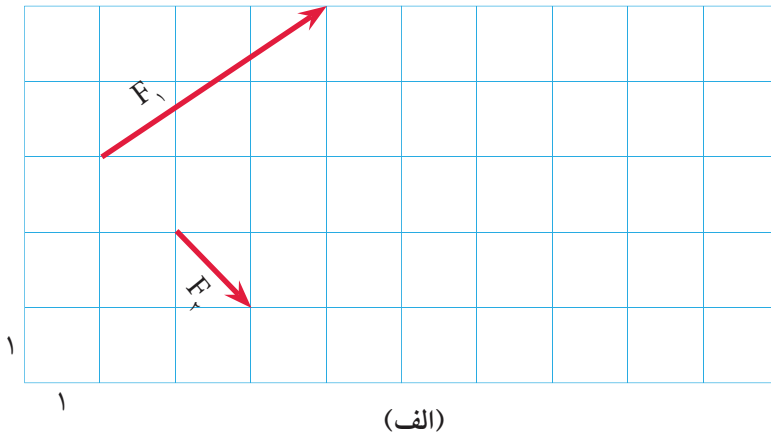
۴- در شکل‌های زیر مطلوب است:

الف) فرم برداری هر بردار.

ب) اندازه هر یک را به صورت ترسیمی (با خط‌کش) به دست آورید.

ج) اندازه هر یک را به صورت محاسباتی به دست آورید.

د) اندازه‌های محاسباتی و ترسیمی هر بردار را با هم مقایسه کنید.

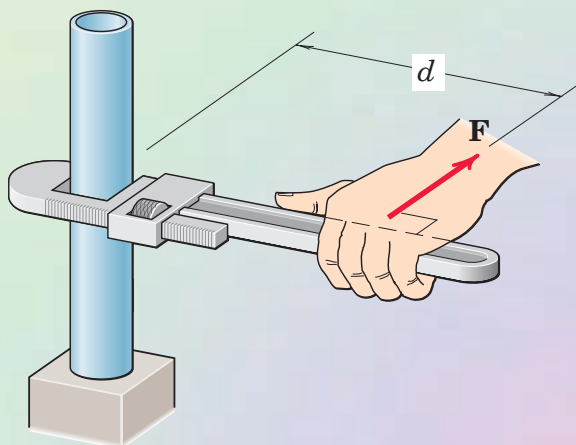
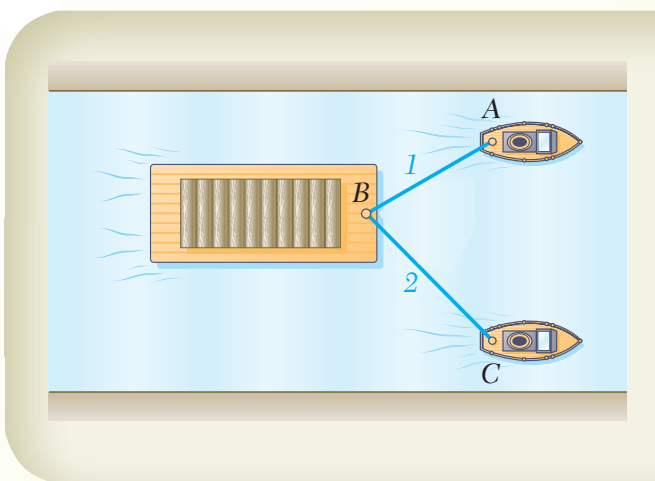


فصل

سوم

نیرو و

سامانه‌های نیروی



هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

- ۱- انواع نیروها را بشناسد.
- ۲- مقدار و امتداد برآیند نیروهای وارد بر یک نقطهٔ مادی را محاسبه کند.
- ۳- گشتاور یا لنگر را تعریف نماید و مقدار آن را نسبت به یک نقطه محاسبه نموده و جهت آن را تشخیص دهد.
- ۴- قضیه وارینون را تعریف کند و برای محاسبهٔ گشتاور آن را به کار گیرد.
- ۵- زوج نیرو را تعریف نماید و خصوصیات آن را بشناسد.
- ۶- گشتاور زوج نیرو را محاسبه کند.

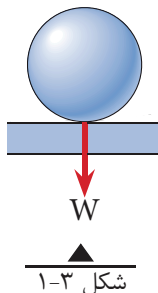
نیرو

نیرو کمیتی است برداری که می‌تواند باعث ایجاد حرکت، تغییر شکل یا چرخش در اجسام گردد.

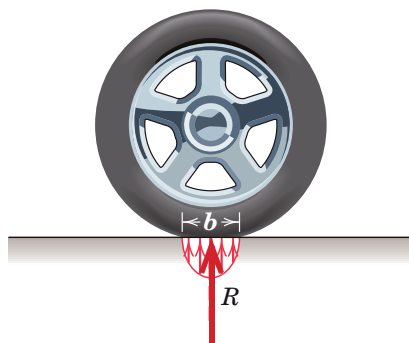
۱-۳ انواع نیرو

۱-۱-۳ نیروهای خارجی

نیروهایی هستند که از محیط اطراف و در خارج از وجود جسم به آن وارد می‌شوند. مکانیک اجسام صلب (استاتیک) فقط به نیروهای خارجی توجه دارد؛ مانند: وزن گوی در شکل (۱-۳) که به کف وارد می‌شود.

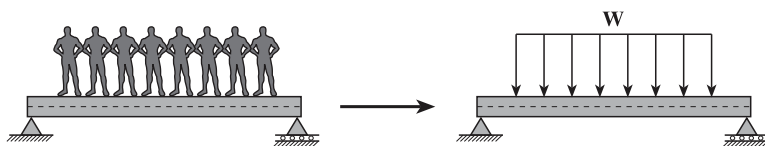


الف) نیروهای متمرکز: اگر نیرو به طول کوچکی از جسم وارد گردد آنرا نیروی متمرکز می‌نامند. شکل (۲-۳)



شکل ۲-۳

ب) نیروهای گسترده: اگر نیرو در طول قابل توجهی از جسم پخش گردد آنرا نیروی گسترده گویند. شکل (۳-۳)



شکل ۳-۳

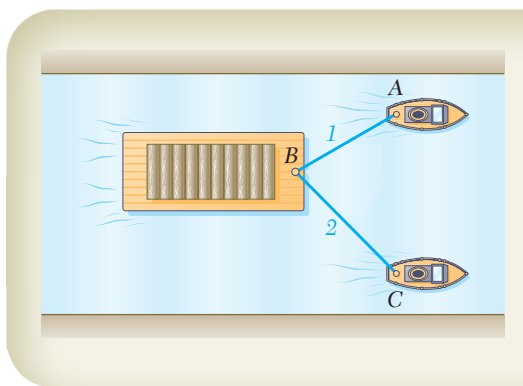
۲-۱-۳- نیروهای داخلی

نیروهایی هستند که در داخل جسم و بین ذرات تشکیل دهنده آن ایجاد می‌شوند؛ مانند نیرویی که شخص هنگام اجرای بارفیکس در دستان خود احساس می‌کند؛ در مکانیک اجسام تغییر شکل پذیر (مقاومت مصالح) به نیروهای داخلی توجه می‌شود.

۲-۳ برآیند سامانه‌های نیرویی وارد بر نقطه مادی به روش محاسباتی

منظور از برآیند دو یا چند نیرو عبارت است از جمع برداری آن نیروها، بنابراین بردار برآیند به تنهایی اثر همه نیروهای وارد به جسم را دارد.

به عنوان مثال در شکل (۴-۳) شناور B در مسیری به حرکت در می‌آید که در واقع امتداد بردار برآیند دو نیروی وارده از طرف قایق‌های A و C خواهد بود. این بدان معناست که می‌توان به جای دو نیروی مذکور نیروی برآیند آن‌ها را در امتداد مسیر حرکت شناور قرار داده و آن‌را به حرکت درآورد.

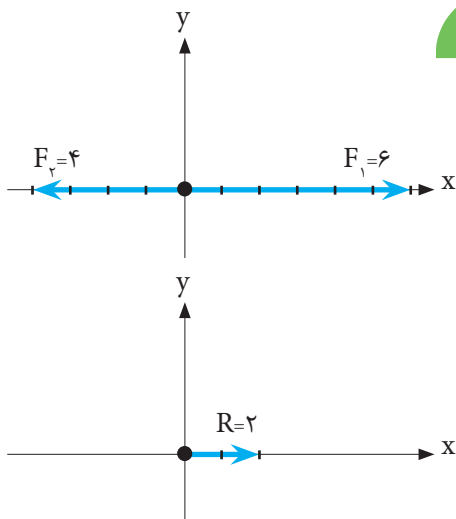


شکل ۴-۳

۳-۲-۱- برآیند نیروهای هم‌راستا و موازی

برای محاسبه برآیند نیروهای هم‌راستا کافی است مقادیر آن‌ها را با یکدیگر جمع جبری نماییم.

مثال ۱



$$\text{دو نیروی } F_1 = 6\vec{i} \text{ و } F_2 = -4\vec{i}$$

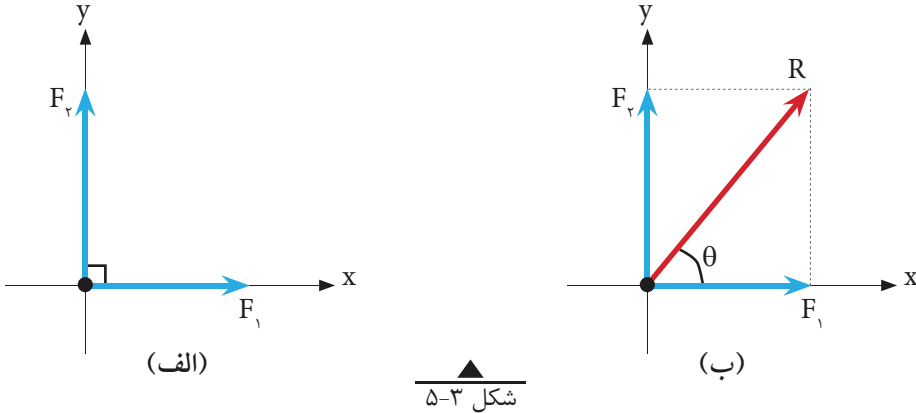
را روی محور مختصات ترسیم نموده و برآیند آن‌ها را محاسبه و ترسیم نمایید.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{R} = 6\vec{i} - 4\vec{i} \Rightarrow \vec{R} = 2\vec{i}$$

۲-۲-۳- برآیند دو نیروی متعامد

برای محاسبه مقدار برآیند دو نیروی متعامد مطابق شکل (۳-۵-الف) با استفاده از رابطه فیثاغورث و شکل (۳-۵-ب) داریم:



$$R^2 = F_x^2 + F_y^2 \Rightarrow R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

و برای محاسبه زاویه برآیند با F_x می‌توان از رابطه تانژانت استفاده نمود:

$$\tan \theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right)$$

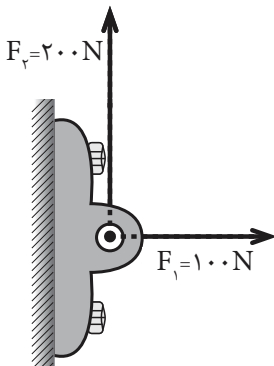
مثال ۲

در شکل زیر مطلوب است:

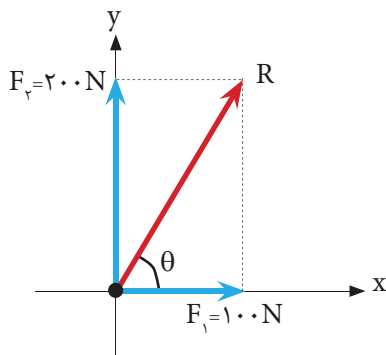
الف) ترسیم برآیند (R)

ب) تعیین مقدار برآیند

ج) تعیین زاویه برآیند با افق یا امتداد F_x



الف)

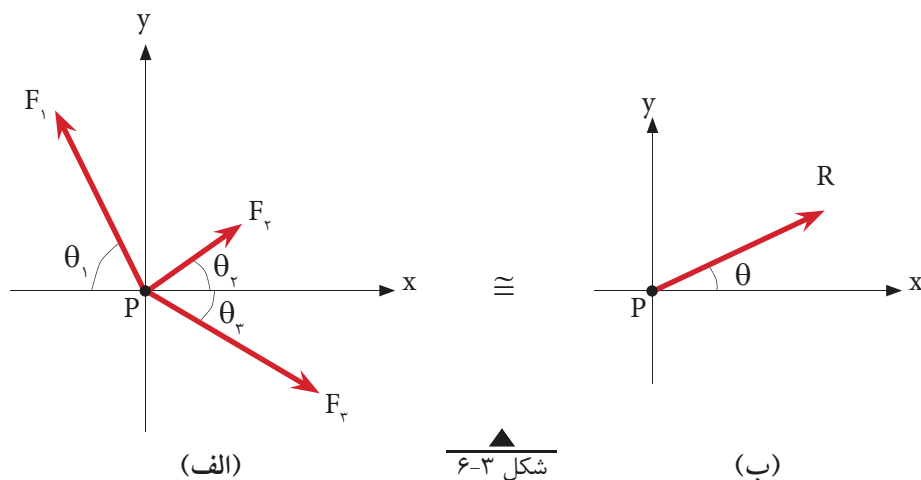


ب) $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{100^2 + 200^2} = \sqrt{50000} \Rightarrow R = 223.61 \text{ N}$

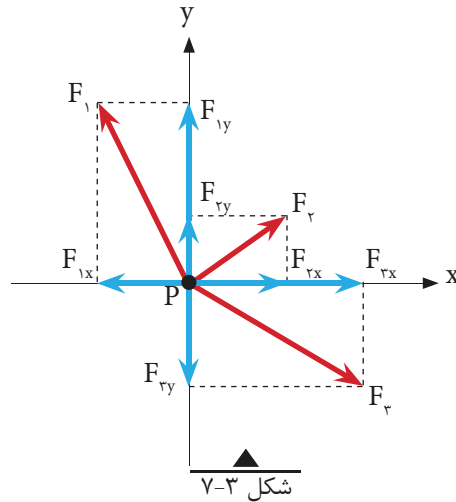
ج) $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_2}{F_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{200}{100}\right) \Rightarrow \theta = 63.43^\circ$

۳-۲-۳- محاسبه برآیند سامانه چندنیروی وارد به نقطه مادی

هر گاه بر یک نقطه مادی مانند P مطابق شکل (۳-۶-الف) نیروهای F_1 و F_2 و F_3 وارد شود، به کمک تجزیه به شرح زیر می توان اندازه برآیند این نیروها (R) و راستای برآیند با محور x یعنی (θ) را تعیین نمود. شکل (۳-۶-ب)



گام اول: تجزیه هر یک از نیروها روی محورهای x و y : شکل (۷-۳)



گام دوم: نمایش برداری تمامی نیروها بر حسب بردارهای یک $\vec{i}$ و $\vec{j}$:

گام سوم: محاسبه جمع جبری نیروهای هم‌راستا روی محورهای x و y

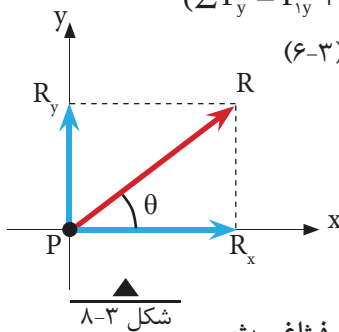
$$R_x = \sum F_x, \quad R_y = \sum F_y \quad (۵-۳)$$

$\sum F_x$: مجموع مؤلفه‌های هم‌راستا با محور x ($\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$)

$\sum F_y$: مجموع مؤلفه‌های هم‌راستا با محور y ($\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$)

گام چهارم: نمایش برداری بردار برآیند (R) مطابق رابطه (۶-۳)

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} \quad (۶-۳)$$



گام پنجم: نمایش ترسیمی بردار برآیند

مطابق شکل (۸-۳)

گام ششم: محاسبه اندازه (مقدار) برآیند با استفاده از رابطه فیثاغورث

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (۷-۳)$$

گام هفتم: محاسبه زاویه برآیند با امتداد محور x ها (θ)

با استفاده از رابطه تانژانت و با توجه به شکل ترسیم شده

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right| \quad (۸-۳) \quad \text{در گام پنجم}$$



مثال ۳

دو نیرو مطابق شکل توسط دو کابل بر یک سنگ معدنی وارد می‌شود. مطلوب است:

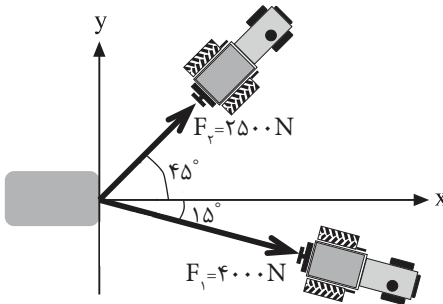
الف) نمایش برداری برآیند

ب) نمایش ترسیمی بردار برآیند

ج) محاسبه اندازه بردار برآیند

د) محاسبه زاویه برآیند با افق

ه) ترسیم مسیر جابه‌جایی سنگ

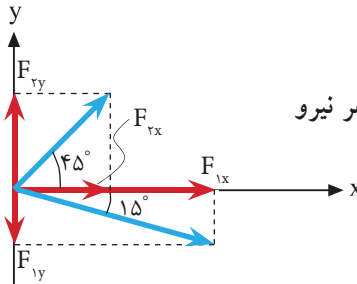


حل:

الف)

گام اول:

- تجزیه نیروها با توجه به اندازه و زاویه هر نیرو



$$\begin{cases} F_{1x} = F_1 \cos \theta_1 = 4000 \times \cos 15^\circ \Rightarrow F_{1x} = 3863/70 \text{ N} \\ F_{1y} = F_1 \sin \theta_1 = 4000 \times \sin 15^\circ \Rightarrow F_{1y} = 1035/28 \text{ N} \end{cases}$$

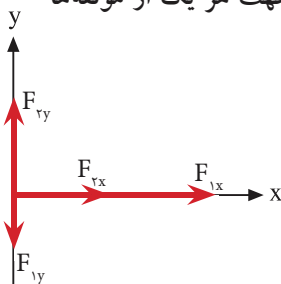
مؤلفه‌های F_1

$$\begin{cases} F_{2x} = F_2 \cos \theta_2 = 2500 \times \cos 45^\circ \Rightarrow F_{2x} = 1767/77 \text{ N} \\ F_{2y} = F_2 \sin \theta_2 = 2500 \times \sin 45^\circ \Rightarrow F_{2y} = 1767/77 \text{ N} \end{cases}$$

مؤلفه‌های F_2

گام دوم:

- فرم برداری هر بردار با توجه به شکل مقابل و جهت هر یک از مؤلفه‌ها



$$\vec{F}_1 = 3863/70 \vec{i} - 1035/28 \vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = 1767/77 \vec{i} + 1767/77 \vec{j}$$

گام سوم:

- تعیین مجموع نیروهای هم‌راستا با محورهای x و y (ΣF_x و ΣF_y)

$$R_x = \Sigma F_x = 1767/77 + 3863/70 \Rightarrow R_x = 5631/47 \text{ N}$$

$$R_y = \Sigma F_y = 1767/77 - 1035/28 \Rightarrow R_y = 732/49 \text{ N}$$

گام چهارم:

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$$

- نمایش برداری بردار برآیند

$$\boxed{\vec{R} = 5631/47 \vec{i} + 732/49 \vec{j}}$$

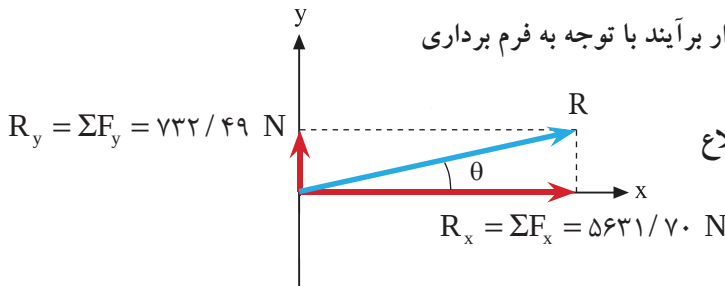
(ب)

گام پنجم:

- نمایش ترسیمی بردار برآیند با توجه به فرم برداری

بردار برآیند

و روش متوازی‌الاضلاع



(ج)

گام ششم:

- محاسبه اندازه بردار برآیند به کمک رابطه (۷-۳)

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \Rightarrow R = \sqrt{5631/47^2 + 732/49^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 5678/91 \text{ N}}$$

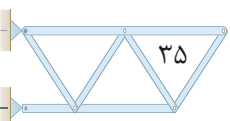
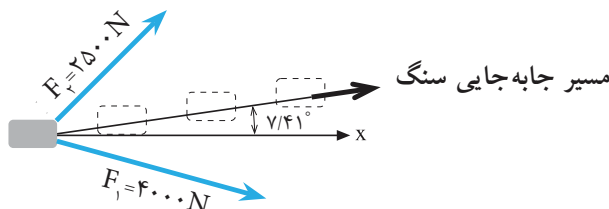
(د)

گام هفتم:

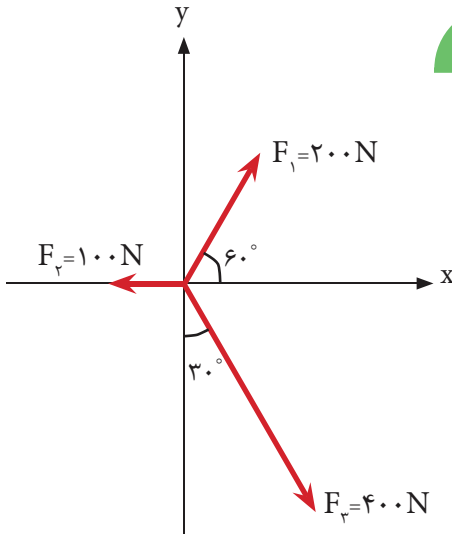
- محاسبه زاویه بردار برآیند با محور x ها به کمک رابطه (۸-۳)

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right| \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left| \frac{732/49}{5631/47} \right| \Rightarrow \boxed{\theta = 7/41^\circ}$$

(ه) مسیر جابه‌جایی سنگ در راستای بردار برآیند مطابق شکل زیر خواهد بود.



مثال ۴



در شکل روبه‌رو مطلوب است:

الف - محاسبه مقدار برآیند نیروها

ب - محاسبه زاویه برآیند با افق

ج - ترسیم بردار برآیند

د - نمایش برداری بردار برآیند

حل:

الف) تجزیه هر یک از نیروها با توجه به روابط $F_x = F \cos \theta$ و $F_y = F \sin \theta$ و زاویه هر نیرو

با محور x ها:

$$\vec{F}_1 = 200 \cdot \cos 60^\circ \vec{i} + 200 \cdot \sin 60^\circ \vec{j} = 100 \vec{i} + 173/2 \vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = -100 \vec{i}$$

$$\vec{F}_3 = 400 \cdot \cos 60^\circ \vec{i} - 400 \cdot \sin 60^\circ \vec{j} = 200 \vec{i} - 346/4 \vec{j}$$

$$R_x = \sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

$$R_x = \sum F_x = 100 - 100 + 200 \Rightarrow R_x = 200 \text{ N}$$

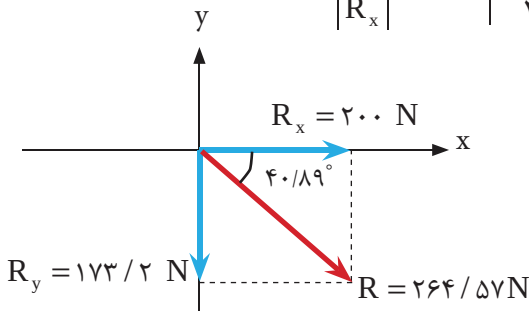
$$R_y = \sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$

$$R_y = \sum F_y = 173/2 + 0 - 346/4 \Rightarrow R_y = -173/2 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{200^2 + (-173/2)^2} \Rightarrow \boxed{R = 264/57 \text{ N}}$$

(ب)

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{-173/2}{200} \right| \Rightarrow \boxed{\theta = 40/89^\circ}$$



(ج)

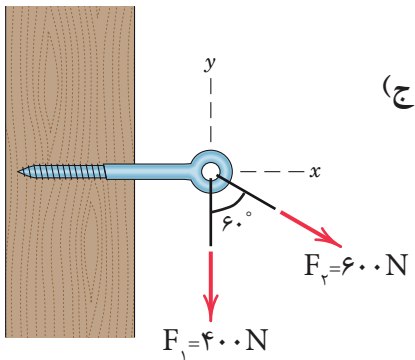
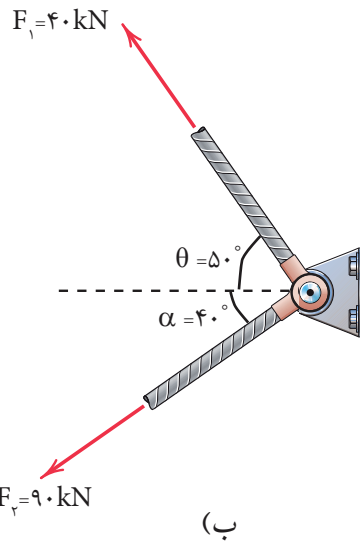
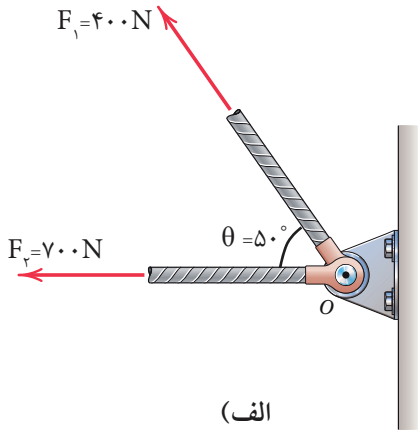
$$\vec{R} = 200 \vec{i} - 173/2 \vec{j} \quad (\text{د})$$

۱- در شکل های زیر مطلوب است:

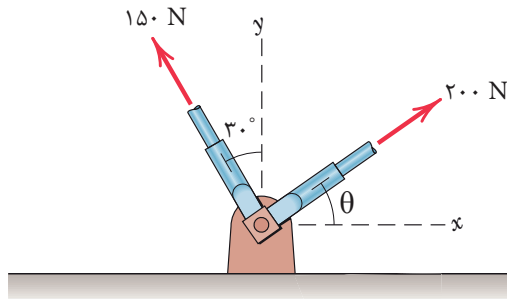
الف) محاسبه مقدار برآیند دو نیرو

ب) محاسبه زاویه برآیند با F_1

ج) محاسبه زاویه برآیند با امتداد افق



۲- در شکل زیر مقدار زاویه θ را چنان تعیین نمایید که برآیند دو نیرو بر محور y ها منطبق گردد. سپس در این حالت مقدار برآیند را محاسبه کنید.



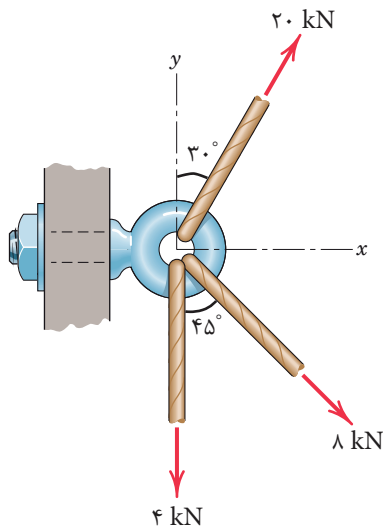
۳- در شکل روبه‌رو مطلوب است:

الف) محاسبه مقدار برآیند نیروها

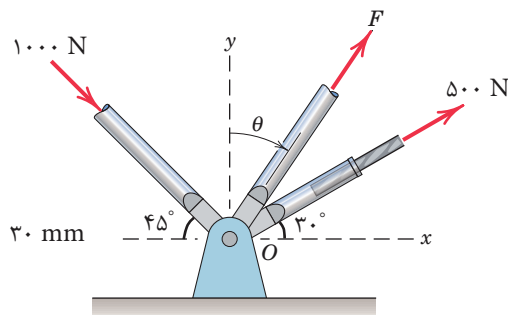
ب) محاسبه زاویه برآیند با افق

ج) ترسیم بردار برآیند

د) نمایش برداری بردار برآیند



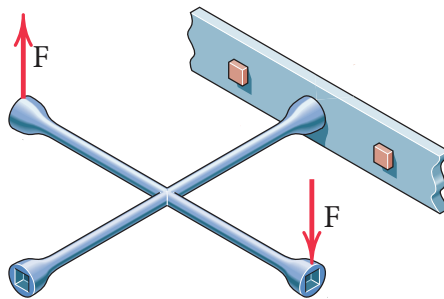
۴- در شکل زیر نیروی F و زاویه θ را طوری تعیین نمایید که برآیند نیروها روی محور افق و مقدار آن برابر 1500 N در جهت مثبت باشد.



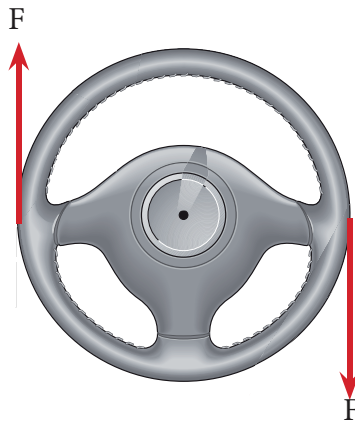
۳-۳ گشتاور، لنگر (مُمان)

یکی از اثرات نیرو بر اجسام تمایل به ایجاد چرخش در آن‌ها می‌باشد که به این پدیده گشتاور گفته می‌شود.

مطابق شکل‌های (۹-۳) و (۱۰-۳) نیرو باعث چرخش در اجسام می‌گردد.



شکل ۹-۳



شکل ۱۰-۳

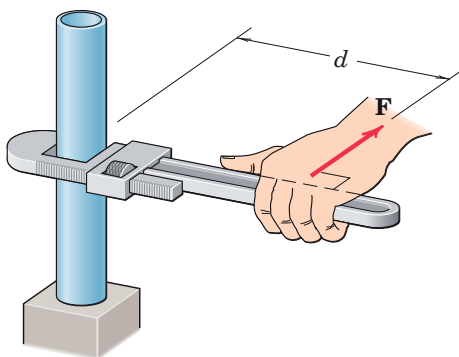
مقدار گشتاور حول یک محور عبارت است از حاصل ضرب نیرو (F) در کوتاه‌ترین فاصله نیرو یا امتداد آن تا محور مورد نظر (d). گشتاور را با M نمایش می‌دهند و رابطه آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$M = F \cdot d \quad (۹-۳)$$

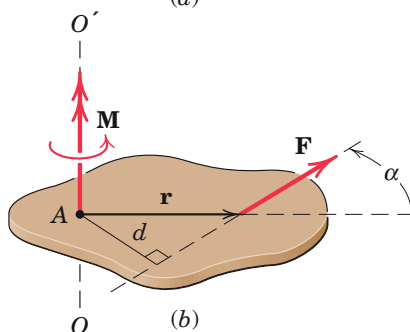
با توجه به شکل (۱۲-۳) نیروی F حول محور OO' ایجاد گشتاور می‌نماید. در این شکل d کوتاه‌ترین فاصله امتداد نیروی F تا محور OO' می‌باشد که بازوی لنگر نیز خوانده می‌شود بنابراین خواهیم داشت:

$$M_{OO'} = F \cdot d$$

(۱۰-۳)



(a)



(b)

شکل ۱۱-۳

گشتاور نیز کمیتی برداری است که آن را با نماد $\uparrow$ نمایش می‌دهند و جهت آن مطابق ضرب بردارها خواهد بود که در مقاطع بالاتر با آن آشنا خواهید شد.

در این کتاب به دلیل بررسی نیروها در صفحه، گشتاور حول نقطه در نظر گرفته می‌شود لذا جهت چرخش آن در جهت عقربه ساعت $\curvearrowright$ و یا خلاف عقربه ساعت $\curvearrowleft$ خواهد بود. بنابراین با توجه به شکل (۱۱-۳-b) گشتاور نیروی F حول نقطه A واقع بر محور OO' به صورت رابطه (۱۱-۳) خواهد بود.

$$M_A = F \cdot d$$

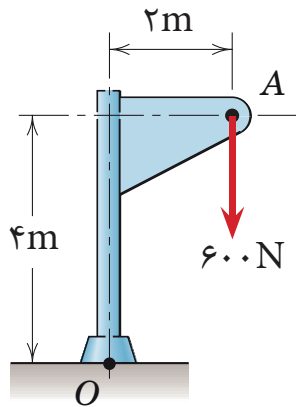
(۱۱-۳)

قرارداد:

در این کتاب جهت چرخش عقربه‌های ساعت مثبت فرض می‌شود.

مثال ۵

گشتاور نیروی F حول نقطه O را محاسبه و جهت چرخش آن را بنویسید.



حل:

$$F = 600 \text{ N}$$

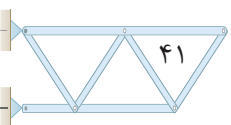
$$d = 2 \text{ m}$$

$$M_o = F \cdot d \Rightarrow M_o = 600 \times 2 \Rightarrow M_o = 1200 \text{ N.m} \quad \text{ساعت گرد}$$

گشتاور چند نیرو ۴-۳

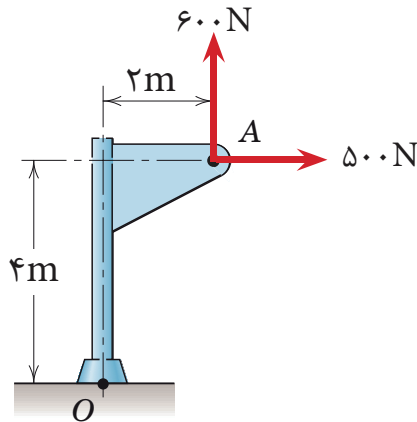
اگر به یک جسم چند نیرو اعمال شود گشتاور آن‌ها نسبت به یک نقطه برابر است با مجموع جبری گشتاور هر نیرو نسبت به آن نقطه یعنی:

$$M_o = \sum_{i=1}^n F_i d_i = F_1 d_1 + F_2 d_2 + \dots + F_n d_n \quad (12-3)$$



مثال ۶

در شکل زیر گشتاور نیروهای نشان داده شده را حول نقطه O محاسبه کنید و جهت آن را بنویسید.



حل:

$$F_1 = 500 \text{ N}$$

$$d_1 = 4 \text{ m}$$

$$F_2 = 600 \text{ N}$$

$$d_2 = 2 \text{ m}$$

$$M_o = F_1 d_1 + F_2 d_2$$

$$M_o = 500 \times 4 - 600 \times 2$$

$$M_o = +800 \text{ N.m} \quad \text{ساعت گرد}$$

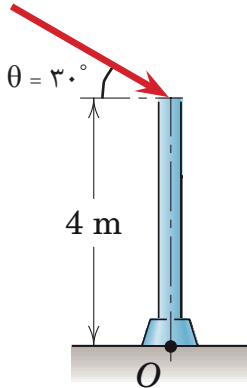
۵-۳ قضیه وارینون

گشتاور برآیند چند نیرو حول یک نقطه معین برابر است با مجموع گشتاورهای آنها حول همان نقطه و یا گشتاور یک نیرو حول هر نقطه برابر است با مجموع گشتاورهای مؤلفه‌های آن نیرو حول همان نقطه.

کاربرد این قضیه در مثال ۷ نشان داده شده است.

مثال ۷

$$F = 600 \text{ N}$$



گشتاور نیروی F را در شکل زیر به دو روش

حساب کنید:

الف) با استفاده از تعریف گشتاور

ب) به کمک قضیه وارینون

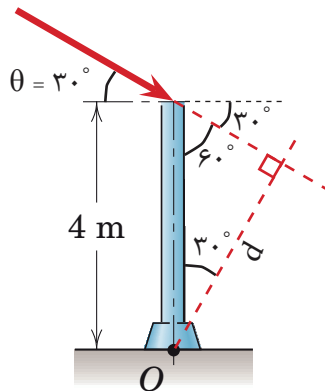
حل:

الف) با استفاده از تعریف:

ابتدا با استفاده از روابط مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه بازوی لنگر یعنی (d) را محاسبه

می‌نماییم؛ داریم:

$$F = 600 \text{ N}$$



$$\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

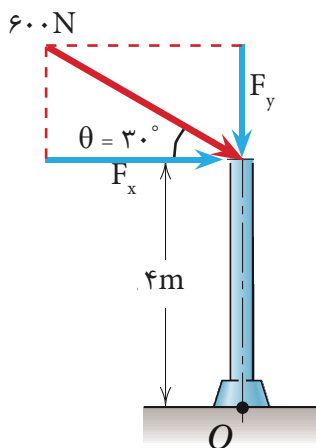
$$\cos 30^\circ = \frac{d}{4} \Rightarrow d = 4 \times \cos 30^\circ \Rightarrow d = 3.46 \text{ m}$$

$$M_o = F \cdot d \Rightarrow M_o = 600 \times 3.46 \Rightarrow \boxed{M_o = 2078.4 \text{ N.m}}$$

ب) با استفاده از قضیه وارینون
در این روش ابتدا نیروی F را به دو مؤلفه متعامد تجزیه نموده و گشتاور آن‌ها را نسبت به
نقطه O محاسبه و با یکدیگر جمع می‌نمائیم.

$$F_x = F \cdot \cos \theta \Rightarrow F_x = 600 \times \cos 30^\circ \Rightarrow F_x = 519.61 \text{ N}$$

$$F_y = F \cdot \sin \theta \Rightarrow F_y = 600 \times \sin 30^\circ \Rightarrow F_y = 300 \text{ N}$$



با توجه به شکل بازوی لنگر F_x برابر ۴ متر و چون امتداد مؤلفه F_y از نقطه O می‌گذرد،
بازوی لنگر آن صفر است.
خواهیم داشت:

$$M_o = \sum_{i=1}^n F_i d_i \Rightarrow M_o = F_x d_x + F_y d_y$$

$$M_o = F_x \times 4 + F_y \times 0 = 519.61 \times 4$$

$$\boxed{M_o = 2078.44 \text{ N.m}} \quad \curvearrowright$$

نکته:

هرگاه امتداد یک نیرو از نقطه‌ای عبور نماید گشتاور آن نیرو نسبت به همان نقطه
برابر صفر است.

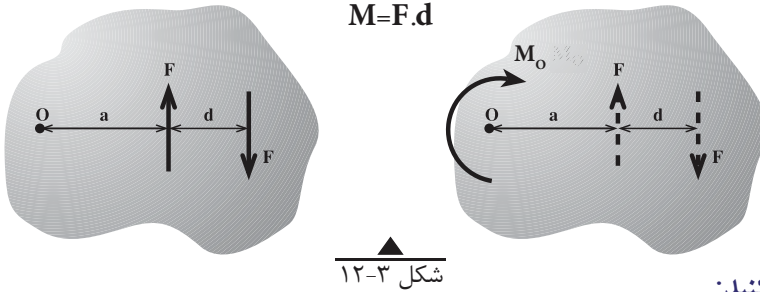
۶-۳ زوج نیرو:

به دو نیروی مساوی - موازی و مختلف‌الجهت زوج نیرو گفته می‌شود.

۱-۶-۳ خصوصیات زوج نیرو:

- ۱- برآیند زوج نیرو صفر است؛
- ۲- در اجسام ایجاد گشتاور (چرخش) می‌نماید؛
- ۳- گشتاور زوج نیرو نسبت به هر نقطه دلخواه مقداری ثابت و برابر است با حاصل ضرب اندازه یک نیرو در فاصله بین آن‌ها. شکل (۱۲-۳)

$$M = F \cdot d$$



تحقیق کنید:

چگونه می‌توان به کمک گشتاورگیری نسبت به یک نقطه دلخواه مانند O در شکل (۱۲-۳) خصوصیت سوم زوج نیرو را اثبات کرد.

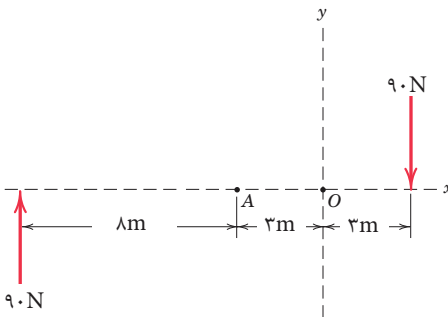
مثال ۸

در شکل روبه‌رو مطلوب است محاسبه گشتاور دو نیروی ۹۰ نیوتنی:

(الف) حول نقطه A

(ب) حول نقطه O

(ج) با استفاده از خاصیت زوج نیرو



حل:

(الف) $M_A = 90 \times 8 + 90 \times 6 = 1260 \text{ N.m}$

(ب) $M_O = 90 \times 11 + 90 \times 3 = 1260 \text{ N.m}$

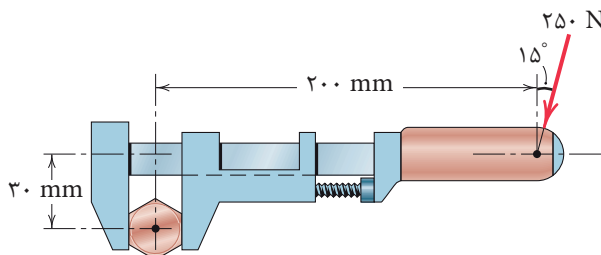
(ج) $M = F \cdot d = 90 \times 14 = 1260 \text{ N.m}$



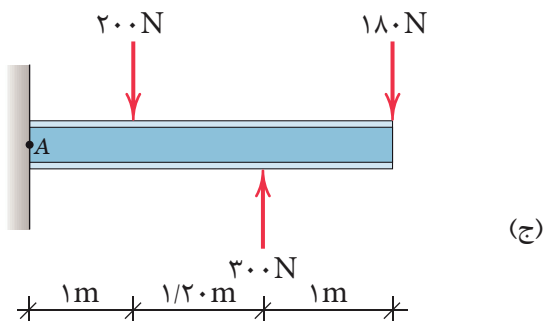
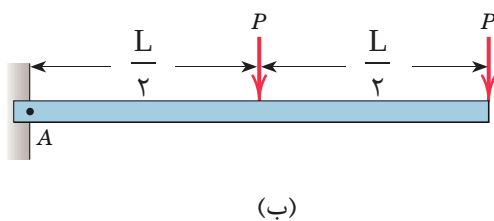
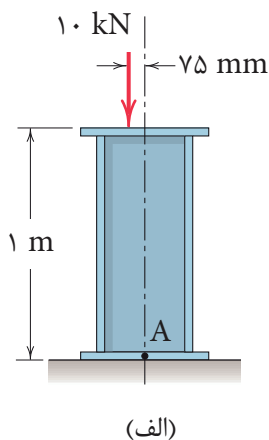
خلاصه فصل

- نیرو کمیتی است برداری که باعث حرکت، تغییر شکل و یا چرخش اجسام می‌گردد.
- انواع نیرو عبارتند از: نیروهای خارجی، نیروهای داخلی.
- منظور از برآیند دو یا چند نیرو عبارت است از نیرویی که به تنهایی اثر همه نیروها را در خود داشته باشد.
- برای تعیین برآیند چند نیرو از روش تجزیه به مؤلفه‌های متعامد استفاده می‌شود و مقدار برآیند از رابطه $R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}$
- و زاویه برآیند با محور x ها از رابطه $\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right|$ به دست می‌آید.
- گشتاور یک نیرو نسبت به یک محور عبارت است از حاصل ضرب نیرو (F) در کوتاه‌ترین فاصله نیرو تا آن محور (d). و از رابطه $M = F.d$ به دست می‌آید.
- قضیه وارینون: گشتاور برآیند چند نیرو حول یک نقطه معین برابر است با مجموع گشتاورهای آن‌ها حول همان نقطه.
- به دو نیروی مساوی، موازی و مختلف‌الجهت زوج نیرو گفته می‌شود.
- گشتاور زوج نیرو برابر است با حاصل ضرب یکی از نیروها در فاصله بین آن‌ها.

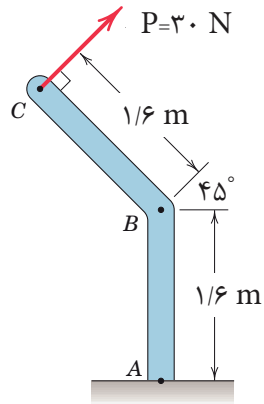
۱- در شکل زیر گشتاور نیروی ۲۵۰ نیوتنی را حول مرکز پیچ محاسبه نموده و جهت گشتاور را تعیین نمایید.



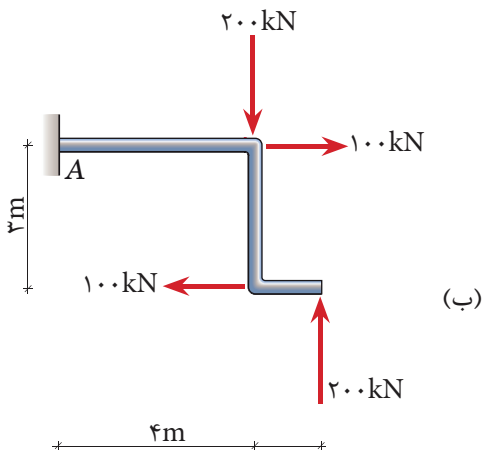
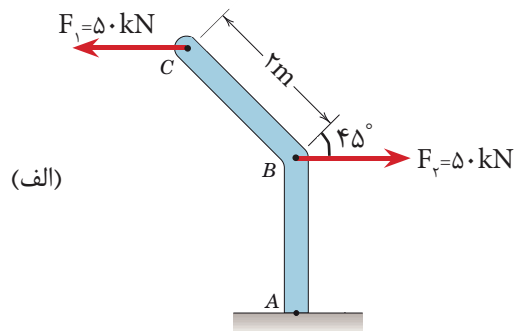
۲- در شکل‌های زیر گشتاور نیرو را حول نقطه A محاسبه نمایید.



۳- گشتاور نیروی P حول نقطه A و B را به دست آورید.



۴- در شکل های زیر مطلوب است محاسبه M_A .



فصل چهارم

تعادل



پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

- ۱- مفهوم تعادل را توضیح دهد.
- ۲- شرط تعادل نقطه‌ی مادی را بیان کند.
- ۳- پیکر آزاد ذره‌ی مادی را ترسیم کند.
- ۴- شرط تعادل نقطه‌ی مادی را در مسائل به کار گیرد.
- ۵- شروط لازم برای تعادل جسم صلب را توضیح دهد.
- ۶- انواع تکیه‌گاه‌ها را بشناسد.
- ۷- پیکر آزاد اجسام تحت تأثیر نیروهای مختلف را ترسیم کند.
- ۸- عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را در اجسام محاسبه کند.

۴-۱ تعادل

مفهوم تعادل آن‌است که ذره یا جسم مادی هیچ‌گونه حرکت و یا چرخشی نداشته باشد.

به منظور بررسی تعادل اجسام، آن‌ها را به دو حالت در نظر می‌گیریم.

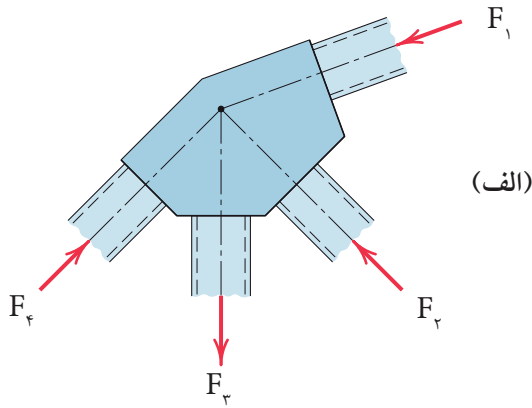
۱- نقطه مادی

۲- جسم صلب

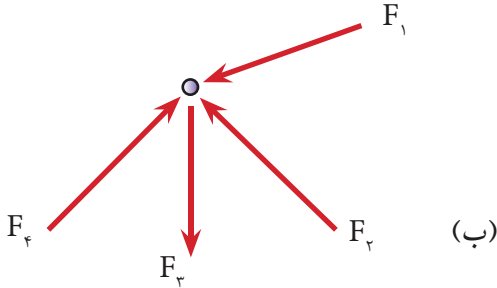
۱-۱-۴- تعادل نقطه مادی

با توجه به تعریف نقطه مادی در فصل اول، نیروهای وارد به جسم در یک نقطه متقارب خواهند بود و شرط تعادل در این حالت آن است که برآیند نیروهای وارده صفر باشد یعنی:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (۱-۴)$$



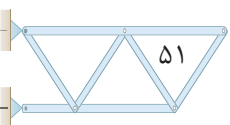
در شکل (۱-۴- الف) چنانچه از ابعاد قطعات اتصال صرف نظر شود، وضعیت نیروها به صورت شکل (۱-۴- ب) خواهند بود.



شکل ۱-۴

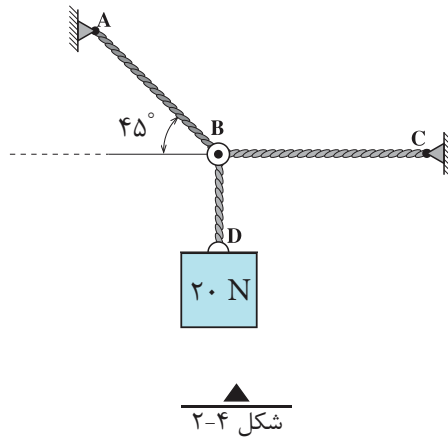
در صفحه مختصات دکارتی رابطه (۱-۴) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = 0 \\ \sum \vec{F}_y = 0 \end{cases} \quad (۲-۴)$$

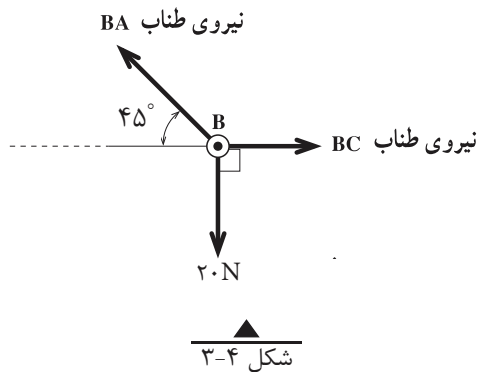


۴-۱-۱-۲- پیکر آزاد جسم

به منظور بررسی تعادل اجسام، لازم است ابتدا جسم را از محیط اطراف خود جدا نموده و نیروهای وارد بر آن را در راستاهای موجود نمایش دهیم که به این عمل، ترسیم پیکر آزاد جسم^۱ گفته می شود.



در شکل (۲-۴) وزنه 20 N توسط سه رشته کابل AB و BC و BD نگهداری شده است. چون کابل ها فقط نیروی کششی را تحمل می نمایند بنابراین نیروهای وارد به نقطه B به صورت کششی بوده و پیکر آزاد آن مطابق شکل (۳-۴) خواهد بود.



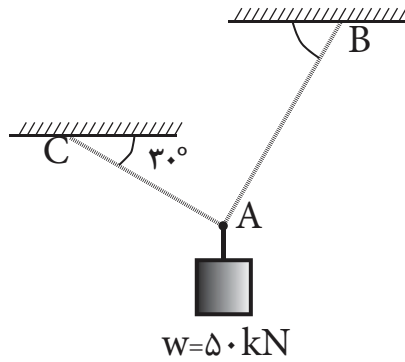
نکته:

در حل مسائل تعادل نقطه مادی، ابتدا پیکر آزاد آن را ترسیم نموده و سپس به کمک معادلات تعادل (۲-۴) مجهولات مسئله را محاسبه می نمائیم.

^۱ - FBD (Free Body Diagram)

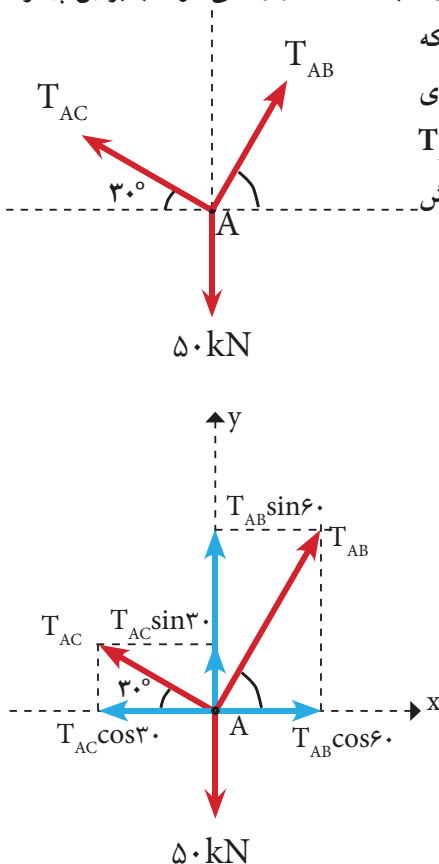
مثال ۱

کشش کابل‌های AB و AC را در سامانه در حال تعادل زیر به دست آورید.

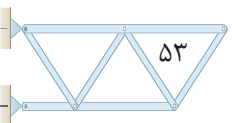


حل:

گام اول) با توجه به این موضوع که تمامی نیروها به نقطه A وارد می‌شوند بنابراین پیکر آزاد نقطه مادی A ترسیم می‌گردد. می‌دانیم که کابل‌ها همیشه رفتار کششی دارند بنابراین نیروی کابل‌های AB و AC را به ترتیب با T_{AB} و T_{AC} به صورت کششی و زوایای هر کدام را نمایش می‌دهیم.



گام دوم) تعیین محورهای مختصات x و y روی نقطه A و تجزیه نیروها در این دستگاه مختصات



گام سوم) تشکیل معادلات تعادل (۴-۲) و حل آن‌ها تا رسیدن به خواسته‌های مسئله

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow T_{AB} \cos 60^\circ - T_{AC} \cos 30^\circ = 0 \quad \text{رابطه I}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AB} \sin 60^\circ + T_{AC} \sin 30^\circ - 50 = 0 \quad \text{رابطه II}$$

چون حل هر یک از معادلات فوق با وجود دو مجهول امکان‌پذیر نیست بنابراین آن‌ها را در یک دستگاه دو معادله دو مجهولی قرار داده که با استفاده از روش‌های مختلف قابل حل است.

در این جا از معادله اول یکی از مجهولات را بر حسب دیگری محاسبه و در معادله دوم قرار می‌دهیم تا یکی از مجهولات حذف شود:

$$\text{رابطه III} \quad T_{AB} = \frac{T_{AC} \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} \Rightarrow T_{AB} = 1/\sqrt{3} T_{AC} \Rightarrow \text{از رابطه I نتیجه می‌شود}$$

مقدار T_{AB} را در رابطه II قرار داده خواهیم داشت:

$$1/\sqrt{3} T_{AC} \times \sin 60^\circ + T_{AC} \sin 30^\circ - 50 = 0 \Rightarrow 2 T_{AC} - 50 = 0$$

$$T_{AC} = \frac{50}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{AC} = 25 \text{ kN}}$$

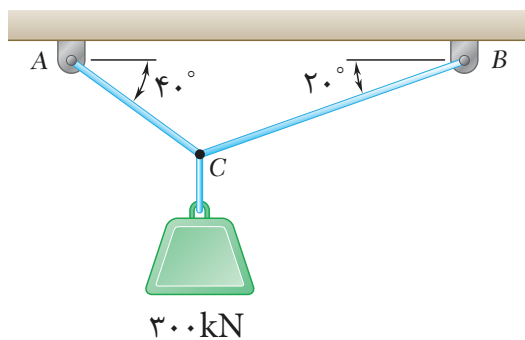
حال مقدار T_{AC} را در رابطه III قرار می‌دهیم:

$$\text{از رابطه III} \Rightarrow T_{AB} = 1/\sqrt{3} \times 25$$

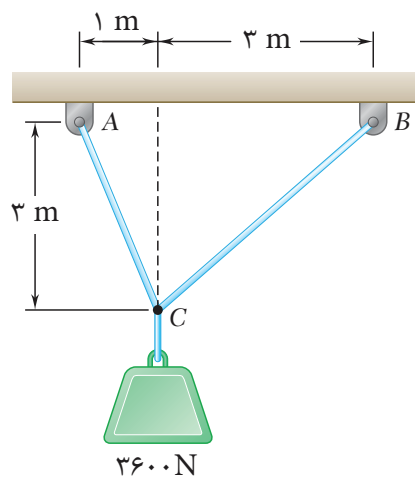
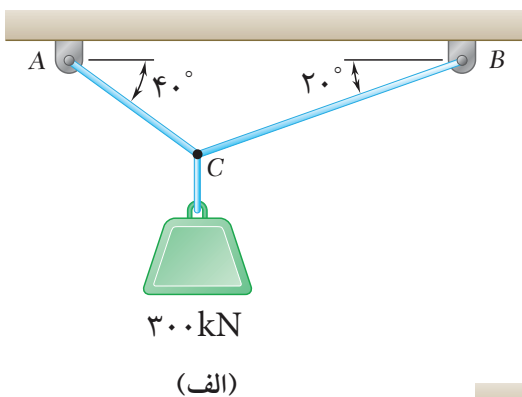
$$\Rightarrow \boxed{T_{AB} = 43/25 \text{ kN}}$$



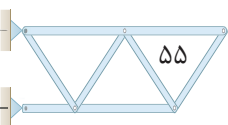
۱- پیکر آزاد شکل زیر را رسم نمائید.



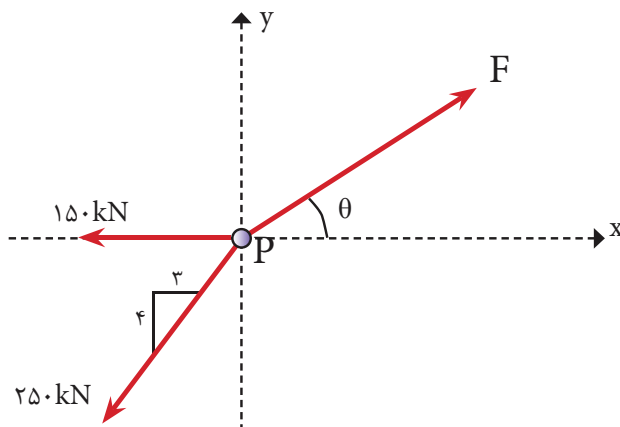
۲- کشش کابل‌ها را در شکل‌های زیر به دست آورید.



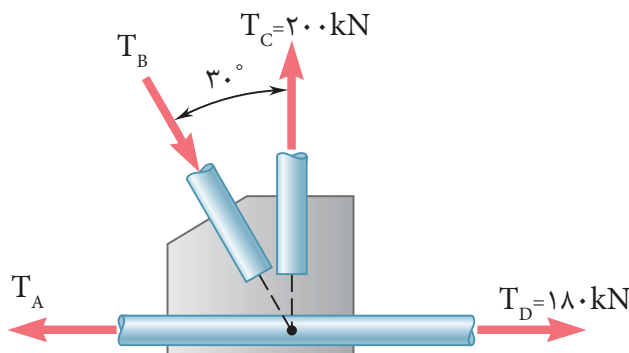
(ب)



۳- مقدار نیروی F و زاویه θ را طوری تعیین کنید که ذره مادی P در حال تعادل باشد.



۴- مقدار T_A و T_B را طوری تعیین کنید که تعادل در اتصال شکل زیر برقرار باشد.



۴-۱-۲- تعادل جسم صلب

در قسمت قبل بنا به فرض، اجسام را به عنوان یک نقطه مادی در نظر گرفتیم. در حالی که چنین فرضی همیشه امکان پذیر نخواهد بود و نمی توان از ابعاد جسم صرف نظر نمود بنابراین در این حالت نیروها در یک نقطه متقارب نخواهند بود و علاوه بر حرکت، امکان دَوَران (گشتاور) جسم تحت تأثیر نیروهای وارده نیز وجود دارد. لذا شرط تعادل در مورد اجسام صلب به صورت زیر خواهد بود:

- ۱- برای این که جسم در راستای محور x جابه جایی نداشته باشد باید: $\Sigma F_x = 0$
- ۲- برای این که جسم در راستای محور y جابه جایی نداشته باشد باید: $\Sigma F_y = 0$
- ۳- برای این که جسم چرخش نداشته باشد باید: $\Sigma M = 0$

(۴-۳)

۲-۴ انواع تکیه گاه ها و عکس العمل های آن ها

برای بررسی تعادل اجسام صلب، همانند نقاط مادی باید ابتدا پیکر آزاد آن ها را ترسیم نمود. برای این منظور، باید جسم را از محیط اطراف آن جدا نمائیم و چون اجسام بر روی تکیه گاه هایی قرار دارند که با توجه به نوع آن ها مانع از حرکت (جابجایی) و یا چرخش جسم می گردند، لازم است ابتدا تکیه گاه ها و عکس العمل های آن ها را معرفی نمائیم.

تعریف عکس العمل تکیه گاهی

منظور از عکس العمل تکیه گاهی اجسام، واکنشی است که تکیه گاه در جهت حفظ تعادل آن ها از خود نشان می دهد و مانع از حرکت و یا دوران جسم مورد نظر می شود.

۴-۲-۱- انواع تکیه گاه ها

الف) تکیه گاه غلطکی (یک مجهولی)

عبارت است از تکیه گاهی که تنها یک عکس العمل آن هم عمود بر سطح اتکای خود دارد؛ همانند چرخ اتومبیل روی سطح بدون اصطکاک. (ردیف ۱ جدول ۴-۱)

ب) تکیه گاه مفصلی (دو مجهولی)

به تکیه گاهی گفته می شود که دارای دو عکس العمل می باشد؛ یکی مماس بر سطح اتکا و دیگری عمود بر آن خواهد بود. (ردیف ۲ جدول ۴-۱)

ج) تکیه گاه گیردار (سه مجهولی)

تکیه گاهی است که دارای سه عکس العمل به شرح زیر

می باشد: (ردیف ۳ جدول ۴-۱)

۱- مماس بر سطح تکیه گاه

۲- عمود بر سطح تکیه گاه

۳- عکس العمل دورانی

د) تکیه گاه میله ای

منظور از میله عضوی کوتاه است که در دو انتهای خود به صورت لولا یا مفصل متصل شده باشد. عکس العمل تکیه گاه میله ای در راستای میله و به صورت کششی یا فشاری خواهد بود.

(ردیف ۴ جدول ۴-۱)

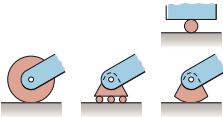
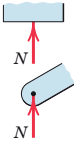
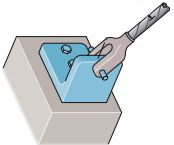
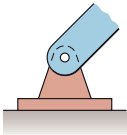
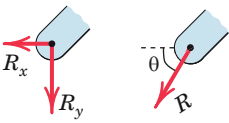
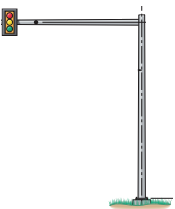
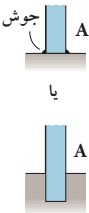
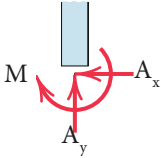
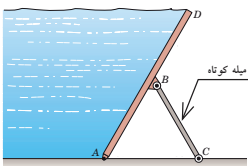
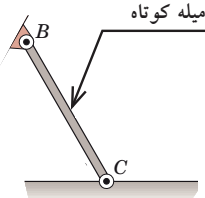
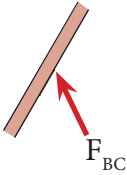
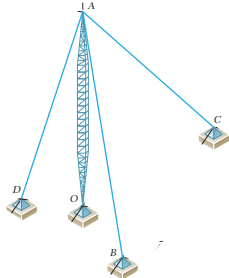
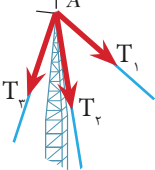
ه) تکیه گاه کابلی:

هر گاه جسم توسط کابل به تکیه گاه متصل شود، عکس العمل کابل به صورت کششی

و در راستای آن خواهد بود. (ردیف ۵ جدول ۴-۱)



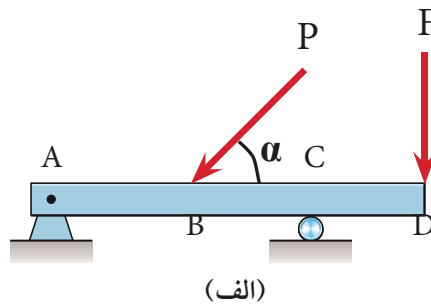
جدول (۱-۴) انواع تکیه گاه

ردیف	نوع تکیه گاه	شکل واقعی	شکل شماتیک	عکس العمل های تکیه گاهی
۱	غاطشی			
۲	مفصلی			
۳	گیردار			
۴	میله ای			
۵	کابلی			

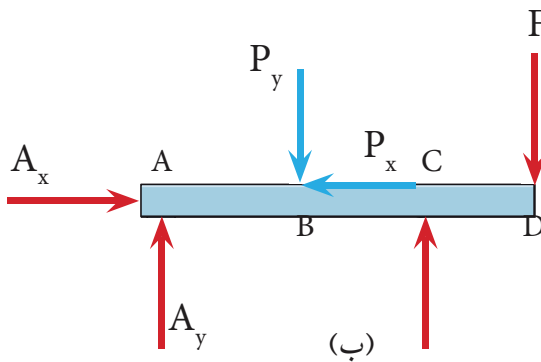
همان طور که گفته شد شرط تعادل اجسام صلب بر آورده شدن معادلات (۳-۴) می باشد و برای نیل به این هدف به صورت زیر عمل می نمایم.

گام اول - ترسیم پیکر آزاد جسم

ابتدا جسم را از تکیه گاه ها جدا نموده و با توجه به نوع تکیه گاه، عکس العمل های مربوطه را در محل تکیه گاه و در جهت دلخواه قرار می دهیم. به عنوان مثال پیکر آزاد تیر شکل (۴-۴-الف) به صورت شکل (۴-۴-ب) خواهد بود.



شکل ۴-۴



گام دوم - تجزیه نیروها

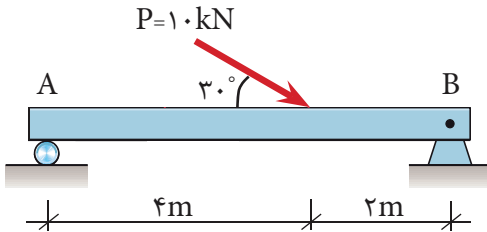
همه نیروهای مورب را روی پیکر آزاد در صورت وجود به مؤلفه های آن تجزیه می نمایم. به عنوان مثال در شکل (۴-۴-ب) نیروی P به دو مؤلفه متعامد تجزیه شده است.

گام سوم - تشکیل معادلات و حل آنها

با تشکیل معادلات تعادل و حل آنها مجهولات مسئله (عکس العمل ها) تعیین می شوند.

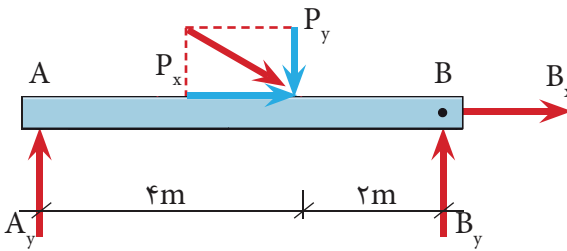
مثال ۲

عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تیر زیر را به دست آورید



گام اول:

ترسیم پیکر آزاد جسم



گام دوم:

تجزیه نیروی P

$$P_x = P \cos \theta = 10 \times \cos 30^\circ = 8.66 \text{ kN}$$

$$P_y = P \sin \theta = 10 \times \sin 30^\circ = 5 \text{ kN}$$

گام سوم: تشکیل معادلات تعادل و حل آنها

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow B_x + P_x = 0 \Rightarrow B_x + 8.66 = 0 \Rightarrow \boxed{B_x = -8.66 \text{ kN}}$$

لازم به توضیح است که علامت منفی در جواب فوق به این معنی است که جهت صحیح

عکس العمل B_x در پیکر آزاد تیر به سمت چپ می‌باشد

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - P_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = P_y \Rightarrow A_y + B_y = 5 \text{ kN} \quad \text{رابطه I}$$

معادله فوق دارای دو مجهول بوده و قابل حل نمی‌باشد لذا از شرط سوم یعنی $\sum M = 0$

استفاده می‌کنیم و در این معادله بهتر است گشتاور نسبت به نقطه‌ای محاسبه شود که

بیشترین مجهولات تکیه‌گاهی در آن نقطه متمرکز است (یعنی نقطه B)

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow A_y \times 6 - P_y \times 2 = 0 \Rightarrow A_y \times 6 - 5 \times 2 = 0 \Rightarrow 6A_y = 10$$

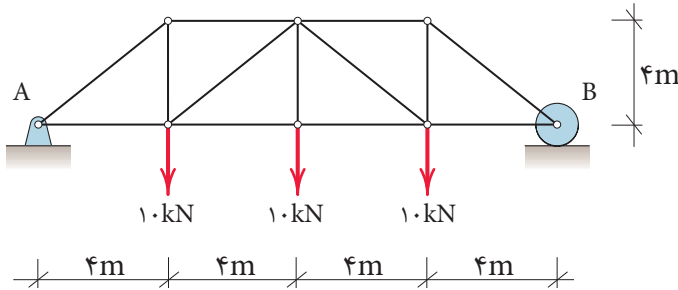
$$A_y = \frac{10}{6} \Rightarrow \boxed{A_y = 1.67 \text{ kN}}$$

حال با قرار دادن مقدار A_y در رابطه I خواهیم داشت:

$$A_y + B_y = 5 \Rightarrow 1.67 + B_y = 5 \Rightarrow B_y = 5 - 1.67 \Rightarrow \boxed{B_y = 3.33 \text{ kN}}$$

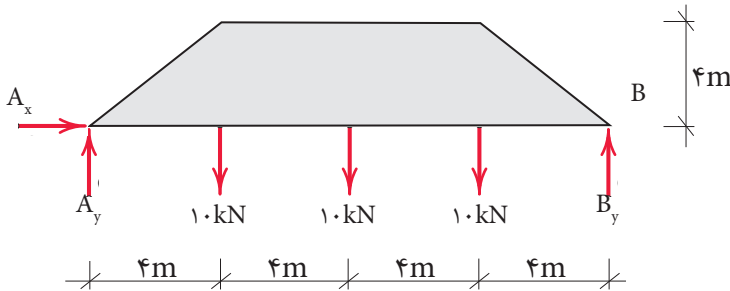
مثال ۳

عکس العمل های تکیه گاهی را در خرابای شکل زیر به دست آورید.



گام (۱)

ترسیم پیکر آزاد



گام (۲)

تشکیل معادلات تعادل:

با توجه به اینکه نیروی افقی به سیستم وارد نمی شود لذا عکس العمل افقی تکیه گاه A یعنی (A_x) برابر صفر است.

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 10 - 10 - 10 = 0$$

$$A_y + B_y = 30 \text{ kN} \quad \text{رابطه I}$$

$$\uparrow \sum M_A = 0 \Rightarrow 10 \times 4 + 10 \times 8 + 10 \times 12 - B_y \times 16 = 0$$

$$16B_y = 240 \Rightarrow B_y = \frac{240}{16} \Rightarrow \boxed{B_y = 15 \text{ kN} \uparrow}$$

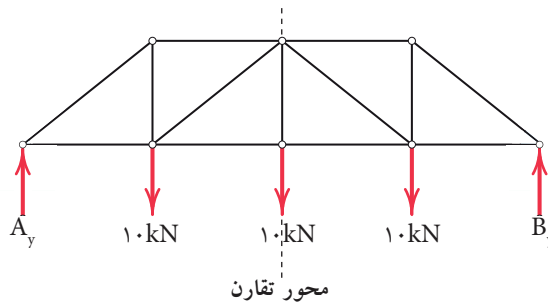
مقدار B_y را در رابطه I قرار می دهیم داریم:

$$A_y + 15 = 30 \text{ kN} \Rightarrow A_y = 15 \text{ kN} \uparrow$$

نکته:

هرگاه بارگذاری و هندسه سازه ای متقارن باشند کل بارهای وارده به صورت مساوی بین دو تکیه گاه تقسیم می شود.

بنابراین با توجه به تقارن در سازه فوق داریم:

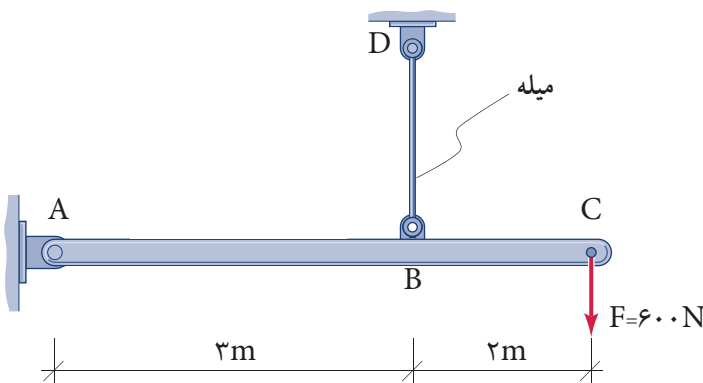


$$\text{کل بار} = 10 + 10 + 10 = 30 \text{ kN}$$

$$A_y = B_y = \frac{30}{2} = 15 \text{ kN}$$

مثال ۴

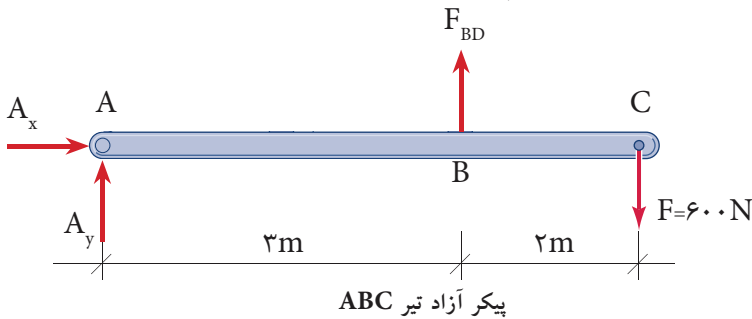
عکس العمل های تکیه گاهی تیر ABC را به دست آورید.



گام اول:

ترسیم پیکر آزاد تیر ABC

چون عضو BD میله است و با توجه به این که در تکیه گاه میله ای عکس العمل تکیه گاهی، در راستای میله می باشد، خواهیم داشت:



گام دوم:

تشکیل معادلات تعادل

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + F_{BD} - 600 = 0 \Rightarrow A_y + F_{BD} = 600 \text{ N} \quad \text{رابطه I}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow 600 \times 5 - F_{BD} \times 3 = 0 \Rightarrow \boxed{F_{BD} = 1000 \text{ N}}$$

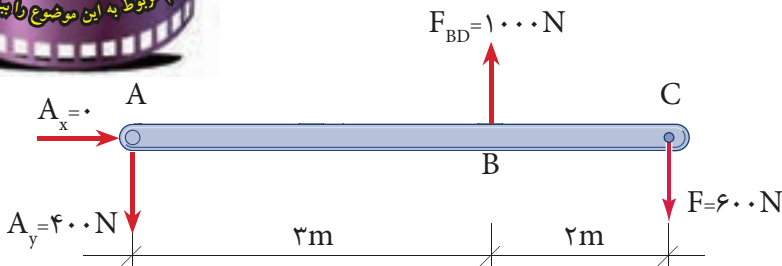
از رابطه I داریم:

$$A_y + F_{BD} = 600 \Rightarrow A_y + 1000 = 600 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = -400 \text{ N} \downarrow}$$



با توجه به علامت منفی در مقدار A_y ، جهت عکس العمل

تکیه گاهی A_y به طرف پایین (↓) خواهد بود؛ یعنی:



خلاصه فصل

- مفهوم تعادل آن است که ذره یا جسم مادی هیچ گونه حرکت و یا چرخشی نداشته باشد.
- شرط تعادل نقطه مادی آن است که برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد یعنی:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma \vec{F}_x = 0 \\ \Sigma \vec{F}_y = 0 \end{cases}$$

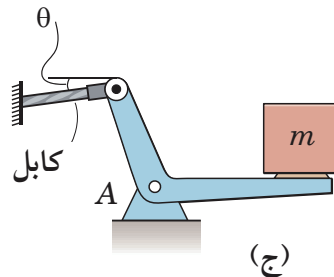
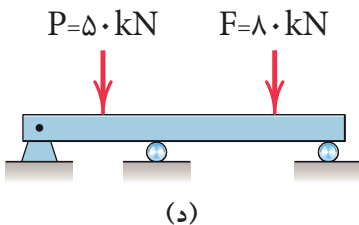
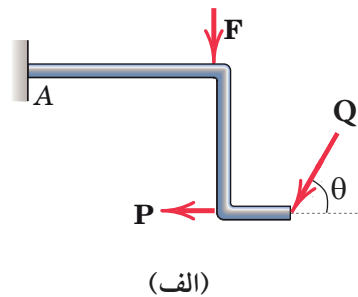
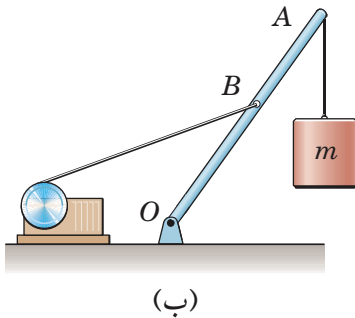
- هرگاه جسم یا نقطه مادی را از محیط اطراف خود جدا و نیروهای وارد بر آن‌ها را در راستاهای موجود نمایش دهیم، پیکر آزاد جسم و یا نقطه مادی را ترسیم نموده ایم.
- شرایط تعادل جسم صلب عبارت است از:

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M = 0 \end{cases}$$

- برای تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی از معادلات تعادل جسم صلب و یا نقطه مادی استفاده می‌شود.

خودآزمایی

۱- پیکر آزاد هر کدام از شکل‌های زیر را رسم نمائید.



۲- عکس العمل‌های تکیه‌گاهی را در شکل‌های زیر به دست آورید.

$$(g = 10 \frac{m}{s^2})$$

