پاسخ‌نامه‌تشریحی

۱ — ۱ **۲** ۳ ۴

اگر یک جامعه با اندازه‌ی n_1 و واریانس σ_1^2 و جامعه‌ی دیگری با اندازه‌ی n_2 و واریانس σ_2^2 وجود داشته باشد و میانگین دو جامعه با هم برابر باشند، واریانس جامعه‌ی حاصل از اجتماع این دو جامعه، از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\sigma^2 = (\frac{n_1}{n_1+n_2})\sigma_1^2 + (\frac{n_2}{n_1+n_2})\sigma_2^2 = (\frac{12}{36})(12.6) + (\frac{24}{36})(7.2) = \frac{1}{3}(12.6) + \frac{2}{3}(7.2) = 9 \to \sigma = 3$$

۲ — ۱ **۲** ۳ ۴

در ابتدا میانگین دقت این دو کارگر را به‌دست می‌آوریم:

$$\bar{x}_A = \frac{15+14+15+16+17+19}{6} = \frac{96}{6} = 16 \quad , \quad \bar{x}_B = \frac{16+14+17+14+17+18}{6} = \frac{96}{6} = 16$$

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{6}(1+4+1+0+1+9) = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \to \sigma_A = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{6}(0+4+1+4+1+4) = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \to \sigma_B = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

می‌دانیم $C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ است و چون $C_{V_{\bar{A}}} > C_{V_{\bar{B}}}$ است پس دقت کاری B از A بیش تر است.

۳ — ۱ **۲** ۳ ۴

می‌دانیم مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر صفر است. بنابراین میانگین داده‌ها برابر $\bar{x} = 12$ می‌باشد و داریم:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-12)^2+(x_2-12)^2+\cdots+(x_{50}-12)^2}{50} = \frac{\text{مجموع مجذورات اختلاف داده‌ها از ۱۲}}{50} = \frac{450}{50} = 9 \Rightarrow \sigma = 3$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0.25$$

۴ — ۱ ۲ **۳** ۴

$$\bar{x} = \frac{72}{12} = 6$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - (\bar{x})^2 = \frac{480}{12} - (6)^2 = 40 - 36 = 4 \to \sigma = 2$$

$$C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

۵ — ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\bar{x} = 15 \Rightarrow \frac{x_1+x_2+\cdots+x_8}{8} = 15 \Rightarrow x_1+x_2+\cdots+x_8 = 120$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 = 4 \Rightarrow \frac{1}{8}\left((x_1-15)^2+(x_2-15)^2+\cdots+(x_8-15)^2\right) = 4$$

$$\Rightarrow (x_1-15)^2+(x_2-15)^2+\cdots+(x_8-15)^2 = 32$$

چون میانگین دو عدد ۱۲ و ۱۸ برابر ۱۵ است پس در ده داده‌ی حاصل میانگین تغییر نمی‌کند.

$$\sigma^2_{\text{جدید}} = \frac{1}{10}(\underbrace{(x_1-15)^2+(x_2-15)^2+\cdots+(x_8-15)^2}_{32} + (12-15)^2 + (18-15)^2)$$

$$= \frac{1}{10}(32+9+9) = \frac{50}{10} = 5$$

۶ — ۱ ۲ ۳ **۴**

چون واریانس این ۱۱ داده‌ی آماری برابر صفر است، در نتیجه تمام داده ها با هم برابرند.

میانگین سه داده‌ی اضافه شده $22 = \frac{66}{3} = \frac{26+16+24}{3}$ است و چون با اضافه شدن این سه داده ،میانگین ۱۴ داده تغییر نکرده است پس میانگین ۱۴ داده نیز برابر ۲۲ است.چون می دانیم در بین ۱۴ داده، ۱۱ داده با هم برابرند می توانیم همه‌ی آن ۱۱ داده را ۲۲ در نظر بگیریم.

$$\sigma^{۲} = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i - \bar{x})^{۲}$$

$$= \frac{۱}{۱۴}\left(۱۱(۲۲-۲۲)^{۲} + (۲۴-۲۲)^{۲} + (۱۶-۲۲)^{۲} + (۲۶-۲۲)^{۲}\right)$$

$$= \frac{۱}{۱۴}(۰ + ۴ + ۳۶ + ۱۶) = \frac{۵۶}{۱۴} = ۴ \rightarrow \sigma = ۲$$

۷ ۴ **۳** ۲ ۱

برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۱۸ واحد کم می‌کنیم و دقت کنید که واریانس تغییری نمی‌کند.

$$\bar{x} = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}F_i x_i = \frac{۱}{۲۵}\left((۴\times(-۶)) + (۳\times(-۳۱)) + (۹\times ۰) + (۷\times ۳) + (۲\times ۶)\right)$$

$$= \frac{۱}{۲۵}(-۲۴ - ۹ + ۲۱ + ۱۲) = ۰$$

$$\sigma^{۲} = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}F_i(x_i - \bar{x})^{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲۵}\left(۴(-۶-۰)^{۲} + ۳(-۳-۰)^{۲} + ۹(۰-۰)^{۲} + ۷(۳-۰)^{۲} + ۲(۶-۰)^{۲}\right)$$

$$= \frac{۱}{۲۵}(۱۴۴ + ۲۷ + ۶۳ + ۷۲) = \frac{۳۰۶}{۲۵} = ۱۲/۲۴$$

۸ ۴ **۳** ۲ ۱ اگر اضلاع مربع‌ها را به صورت x_i نشان دهیم، در این صورت $\sum_{i=۱}^{N} x_i^{۲}$ مجموع مساحت‌های این مربع‌ها و $\frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^{۲}}{N}$ برابر میانگین مساحت این مربع‌ها می‌باشد.

$$C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow ۰/۲ = \frac{\sigma}{۱۵} \rightarrow \sigma = ۳ \rightarrow \sigma^{۲} = ۹$$

$$\sigma^{۲} = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^{۲}}{N} - (\bar{x})^{۲} \rightarrow ۹ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^{۲}}{N} - (۱۵)^{۲} \rightarrow \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^{۲}}{N} = ۲۳۴$$

۹ ۴ ۳ ۲ **۱**

در ۲۰ داده‌ی آماری، میانه برابر با میانگین داده‌های دهم و یازدهم است:

$$\text{میانه} = \frac{x_{۱۰} + x_{۱۱}}{۲}$$

چارک اول، میانه‌ی ۱۰ داده‌ی اول است، یعنی برابر با میانگین داده‌های پنجم و ششم:

$$Q_۱ = \frac{x_۵ + x_۶}{۲}$$

و چارک سوم، میانه‌ی ۱۰ داده‌ی آخر است، یعنی برابر با میانگین داده‌های پانزدهم و شانزدهم:

$$Q_۳ = \frac{x_{۱۵} + x_{۱۶}}{۲}$$

$$\overbrace{x_۱,\cdots x_۵}^{\text{دنباله‌ی چپ}} \underset{Q_۱}{\underset{\downarrow}{,}} x_۶,\cdots x_{۱۰} \underset{Q_۲}{\underset{\downarrow}{,}} x_{۱۱},\cdots x_{۱۵} \underset{Q_۳}{\underset{\downarrow}{,}} \overbrace{x_{۱۶},\cdots x_{۲۰}}^{\text{دنباله‌ی راست}}$$

بنا به فرض، میانگین دنباله‌ی سمت چپ و دنباله‌ی سمت راست با هم برابر است، پس:

$$\frac{x_۱ + \cdots x_۵}{۵} = \frac{x_{۱۶} + \cdots x_{۲۰}}{۵} \Rightarrow x_۱ + \cdots x_۵ = x_{۱۶} + \cdots x_{۲۰}$$

اما می‌دانیم داده‌های دنباله‌ی چپ همواره کوچک‌تر یا مساوی داده‌های دنباله‌ی راست‌اند. پس:

$$x_۱ + \cdots + x_۵ \leq x_{۱۶} + \cdots + x_{۲۰}$$

پس حالت تساوی تنها زمانی رخ می‌دهد که همه‌ی داده‌ها با هم برابر باشند، یعنی:

$$x_۱ = x_۲ = \cdots = x_{۱۰} = x_{۱۱} = \cdots = x_{۲۰}$$

بنابراین در این داده‌ها، شاخص‌های پراکندگی از جمله انحراف معیار، برابر صفر است.

۱۰ **۴** ۳ ۲ ۱ داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$۷, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۲, \underbrace{۱۳}_{\text{میانه}}, ۱۶, ۱۷, ۱۷, ۱۸, ۲۰, ۲۱$$

چارک اول برابر $\frac{۱۰+۱۱}{۲} = ۱۰٫۵$ و چارک سوم برابر $\frac{۱۷+۱۸}{۲} = ۱۷٫۵$ است. بنابراین داده‌های بین ۱۰٫۵ و ۱۷٫۵ داخل جعبه قرار می‌گیرند. یعنی:

$$۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۳, ۱۶, ۱۷, ۱۷$$

$$\bar{x} = \frac{۱۱+۱۲+۱۲+۱۳+۱۶+۱۷+۱۷}{۷} = \frac{۹۸}{۷} = ۱۴$$

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i - \bar{x})^۲$$

$$= \frac{۱}{۷}\left((۱۱-۱۴)^۲ + (۱۲-۱۴)^۲ + (۱۲-۱۴)^۲ + (۱۳-۱۴)^۲ + (۱۶-۱۴)^۲ + (۱۷-۱۴)^۲ + (۱۷-۱۴)^۲\right)$$

$$= \frac{۱}{۷}(۹+۴+۴+۱+۴+۹+۹) = \frac{۴۰}{۷} \simeq ۵٫۷۱$$

(۱۱) ۴ ۳ ۲ **۱** ضریب تغییرات هر دو را محاسبه می کنیم و باهم مقایسه می کنیم.

$$CV_A = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۳٫۶}{۱۵۰} = ۰٫۰۲۴ \quad , \qquad CV_B = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۳٫۸۴}{۱۶۰} = ۰٫۰۲۴$$

بنابراین دقت عمل آن‌ها یکسان است.

(۱۲) ۴ ۳ **۲** ۱

$$\sigma_۱^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i - \bar{x})^۲ \to ۱۲ = \frac{۱}{۱۵}\sum_{i=۱}^{۱۵}(x_i - \bar{x})^۲ \to \sum_{i=۱}^{۱۵}(x_i - \bar{x})^۲ = ۱۸۰$$

$$\sigma_۲^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i - \bar{x}^۲) \to ۷٫۶ = \frac{۱}{۱۰}\sum_{i=۱}^{۱۰}(x_i - \bar{x})^۲ \to \sum_{i=۱}^{۱۰}(x_i - \bar{x})^۲ = ۷۶$$

باتوجه به اینکه میانگین هر دو دسته، یکسان است پس وقتی آنها را با هم ترکیب کنیم میانگین تغییر نمی‌کند و فقط تعداد داده‌ها، ۲۵ می‌شود.

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i - \bar{x})^۲ \to \sigma^۲ = \frac{۱}{۲۵}\sum_{i=۱}^{۲۵}(x_i - \bar{x})^۲ = \frac{۱}{۲۵}(۱۸۰+۷۶) = \frac{۲۵۶}{۲۵}$$

$$\to \sigma = \sqrt{\frac{۲۵۶}{۲۵}} = \frac{۱۶}{۵} = ۳٫۲$$

(۱۳) **۴** ۳ ۲ ۱

$$\bar{x} = \frac{۲۴۰}{۳۰} = ۸$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i{}^۲}{N} - (\bar{x})^۲ \to \sigma^۲ = \frac{۲۱۹۰}{۳۰} - ۸^۲ = ۷۳ - ۶۴ = ۹ \to \sigma = ۳$$

$$C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۳}{۸} = ۰٫۳۷۵$$

(۱۴) ۴ ۳ ۲ **۱** ابتدا ضریب تغییرات داده های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ راحساب می کنیم.

$$\bar{x} = \frac{۱+۲+۳+۴+۵}{۵} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{N}^{i=۱}(x_i - \bar{x})^۲ = \frac{۱}{۵}((۱-۳)^۲ + (۲-۳)^۲ + (۳-۳)^۲ + (۴-۳)^۲ + (۵-۳)^۲)$$

$$= \frac{۱}{۵}(۴+۱+۰+۱+۴) = \frac{۱۰}{۵} = ۲ \to \sigma = \sqrt{۲} \sim ۱٫۴$$

$$C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۱٫۴}{۳}$$

حال اگر داده ها را ۱۲ برابر کنیم میانگین و انحراف معیار نیز ۱۲ برابر می شوند و اگر ۶ واحد به داده ها اضافه کنیم،انحراف معیار تغییر نمی کند و به میانگین ۶ واحد اضافه می شود.

$$C_{V_{\text{جدید}}} = \frac{۱۲ \times ۱/۴}{(۱۲ \times ۳) + ۶} = \frac{۱۶/۸}{۴۲} = ۰/۴$$

۱۵ ۴ ۳ ۲ ۱

$$CV_{\text{قدیم}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow ۰/۰۸ = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow \sigma = ۰/۰۸\bar{x}$$

اگر به تمام داده‌ها ۵ واحد اضافه شود انحراف معیار تغییر نمی کند ولی به میانگین، ۵ واحد اضافه می‌شود.

$$CV_{\text{جدید}} = \frac{\sigma}{\bar{x}+۵} \rightarrow ۰/۰۷۵ = \frac{۰/۰۸\bar{x}}{\bar{x}+۵} \rightarrow \frac{۷۵}{۱۰۰۰} = \frac{\frac{۸}{۱۰۰}\bar{x}}{\bar{x}+۵} \rightarrow ۸۰\bar{x} = ۷۵\bar{x} + ۳۷۵$$

$$\rightarrow ۵\bar{x} = ۳۷۵ \rightarrow \bar{x} = \frac{۳۷۵}{۵} = ۷۵$$

۱۶ ۴ ۳ ۲ ۱ اگر به هر یک از داده‌ها مقدار $\bar{x}$ را اضافه کنیم، انحراف معیار تغییر نمی کند ولی به میانگین، $\bar{x}$ اضافه می‌شود.

$$CV_{\text{قدیم}} = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

$$CV_{\text{جدید}} = \frac{\sigma}{\bar{x}+\bar{x}} = \frac{\sigma}{۲\bar{x}} \rightarrow \frac{CV_{\text{جدید}}}{CV_{\text{قدیم}}} = \frac{\frac{\sigma}{۲\bar{x}}}{\frac{\sigma}{\bar{x}}} = \frac{۱}{۲}$$

۱۷ ۴ ۳ ۲ ۱

اگر هر یک از داده‌ها را دو برابر کنیم انحراف معیار و میانگین نیز دو برابر می‌شوند و وقتی ۳ واحد به آن‌ها اضافه کنیم، انحراف معیار تغییر نکرده و به میانگین ۳ واحد اضافه می‌شود.

$$CV_{\text{قدیم}} = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

$$CV_{\text{جدید}} = \frac{۲\sigma}{۲\bar{x}+۳} \rightarrow \frac{CV_{\text{جدید}}}{CV_{\text{قدیم}}} = \frac{\frac{۲\sigma}{۲\bar{x}+۳}}{\frac{\sigma}{\bar{x}}} = \frac{۲\bar{x}}{۲\bar{x}+۳} = \frac{۲۴}{۲۷} = \frac{۸}{۹}$$

۱۸ ۴ ۳ ۲ ۱ اگر N مربع به ضلع x_i داشته باشیم در این صورت مجموع مساحت‌ها به صورت $\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲$ و میانگین مساحت مربع‌ها به صورت $\frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N}$ است.

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N} - (\bar{x})^۲ \rightarrow ۵ = x - (۱۲)^۲ \rightarrow x = ۵ + ۱۴۴ = ۱۴۹$$

۱۹ ۴ ۳ ۲ ۱ طول اضلاع مربع را $x_۱, x_۲, \cdots, x_N$ درنظر می‌گیریم، در این صورت میانگین مساحت مربع‌ها به صورت $\frac{x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_N^۲}{N}$ یا $\frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N}$ می‌باشد.

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N} - (\bar{x})^۲ = ۶۵/۴۴ - ۶۴ = ۱/۴۴ \rightarrow \sigma = \sqrt{۱/۴۴} = ۱/۲$$

$$C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۱/۲}{۸} = ۰/۱۵$$

۲۰ ۴ ۳ ۲ ۱ اگر طول اضلاع مربع‌ها را با x_i و تعداد مربع‌ها را N در نظر بگیریم داریم:

$$C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow ۰/۲ = \frac{\sigma}{۱۵} \rightarrow \sigma = ۳$$

مساحت مربع‌ها برابر $\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲$ می‌باشد بنابراین میانگین مساحت مربع‌ها برابر $\frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N}$ است.

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N} - (\bar{x})^۲ \rightarrow ۹ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N} - (۱۵)^۲ \rightarrow \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N} = ۲۳۴$$

۲۱ ۴ ۳ ۲ ۱

(A میانگین (نفر $\bar{x} = \frac{۲۲ + ۲۳ + ۲۴ + ۲۷ + ۲۹}{۵} = \frac{۱۲۵}{۵} = ۲۵$

$$\bar{x} = \frac{۲۱+۲۴+۲۵+۲۷+۲۸}{۵} = \frac{۱۲۵}{۵} = ۲۵$$ میانگین (نفر B)

اکنون ضریب تغییرات هر دو را حساب می کنیم:

$$\sigma_A^۲ : \frac{(۲۲-۲۵)^۲+(۲۳-۲۵)^۲+(۲۴-۲۵)^۲+(۲۷-۲۵)^۲+(۲۹-۲۵)^۲}{۵}$$
$$= \frac{۹+۴+۱+۴+۱۶}{۵} = \frac{۳۴}{۵} = ۶/۸ \rightarrow \sigma_A = \sqrt{۶/۸} \rightarrow CV_A = \frac{\sqrt{۶/۸}}{۲۵}$$
$$\sigma_B^۲ : \frac{(۲۱-۲۵)^۲+(۲۴-۲۵)^۲+(۲۵-۲۵)^۲+(۲۷-۲۵)^۲+(۲۸-۲۵)^۲}{۵}$$
$$= \frac{۱۶+۱+۰+۴+۹}{۵} = ۶ \rightarrow \sigma_B = \sqrt{۶} \rightarrow CV_B = \frac{\sqrt{۶}}{۲۵}$$

همانطور که مشاهده می کنید ضریب تغییرات فرد B کمتر از فرد A است یعنی پراکندگی دقت عمل او کمتر است پس دقت عمل بیش تری دارد.

۲۲ ۱ ۲ ۳ **۴** طبق صورت سوال $CV_{\text{قدیم}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = ۱/۳۵$

داده‌های قدیم: $x_۱ \ , \ x_۲ \ , \ x_۳ \ , \ \cdots$

داده‌های جدید: $۲x_۱ + \frac{\bar{x}}{۴} \ , \ ۲x_۲ + \frac{\bar{x}}{۴} \ , \ ۲x_۳ + \frac{\bar{x}}{۴} \ , \ \cdots$

داده ها دو برابر شده‌اند بنابراین انحراف‌معیار و میانگین نیز دو برابر می‌شوند و چون به داده‌ها $\frac{\bar{x}}{۴}$ اضافه شده است به میانگین نیز $\frac{\bar{x}}{۴}$ اضافه می شود ولی انحراف معیار تغییری نمی کند.

$$CV_{\text{جدید}} = \frac{۲\sigma}{۲\bar{x}+\frac{\bar{x}}{۴}} = \frac{۲\sigma}{\frac{۹}{۴}\bar{x}} = \frac{۸}{۹}\left(\frac{\sigma}{\bar{x}}\right) = \frac{۸}{۹}(۱/۳۵) = \frac{۱۰/۸}{۹} = ۱/۲$$

۲۳ ۴ ۳ ۲ **۱** وقتی داده‌های آماری را دو برابر کنیم، انحراف‌معیار و میانگین نیز دو برابر می‌شوند و وقتی از داده‌ها ۷ واحد کم می کنیم انحراف‌معیار تغییر نمی کند ولی از میانگین ۷ واحد کم می‌شود.

$$CV_{\text{قدیم}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \ , \ CV_{\text{جدید}} = \frac{۲\sigma}{۲\bar{x}-۷}$$

طبق سوال: $CV_{\text{جدید}} = ۱/۵ CV_{\text{قدیم}} \rightarrow \frac{۲\sigma}{۲\bar{x}-۷} = ۱/۵ \times \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow \frac{۲}{۲\bar{x}-۷} = \frac{۱/۵}{\bar{x}}$

$$\rightarrow ۳\bar{x} - ۱۰/۵ = ۲\bar{x} \rightarrow \bar{x} = ۱۰/۵$$

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} \rightarrow ۱۰/۵ = \frac{x}{۲۰} \rightarrow x = ۲۱۰$$

۲۴ ۴ ۳ ۲ **۱** ۲۹ داده‌ی آماری را به صورت ۱۲, ۱۳, ۲۱, ۲۲ و $x_۱, x_۲, \cdots, x_{۲۵}$ نشان می‌دهیم.

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i - \bar{x})^۲$$
$$\rightarrow ۵ = \frac{۱}{۲۹}\left((x_۱-۱۷)^۲+(x_۲-۱۷)^۲+\cdots+(x_{۲۵}-۱۷)^۲+(۱۲-۱۷)^۲+(۱۳-۱۷)^۲+(۲۱-۱۷)^۲+(۲۲-۱۷)^۲\right)$$
$$\rightarrow ۵\times۲۹ = (x_۱-۱۷)^۲+(x_۲-۱۷)^۲+\cdots(x_{۲۵}-۱۷)^۲+۲۵+۱۶+۱۶+۲۵$$
$$\rightarrow (x_۱-۱۷)^۲+(x_۲-۱۷)^۲+\cdots(x_{۲۵}-۱۷)^۲ = ۱۴۵-۸۲$$
$$\rightarrow (x_۱-۱۷)^۲+(x_۲-۱۷)^۲+\cdots+(x_{۲۵}-۱۷)^۲ = ۶۳$$

چون چهار داده‌ی حذف شده، میانگینشان ۱۷ است $\left(\frac{۱۲+۱۳+۲۱+۲۲}{۴} = \frac{۶۸}{۴} = ۱۷\right)$ بنابراین پس از حذفشان دوباره میانگین همان ۱۷ است. اکنون واریانس ۲۵ داده‌ی باقی‌مانده را حساب می‌کنیم.

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{۲۵}\left((x_۱-۱۷)^۲+(x_۲-۱۷)^۲+\cdots(x_{۲۵}-۱۷)^۲\right) = \frac{۱}{۲۵}(۶۳) = \frac{۶۳}{۲۵} = ۲/۵۲$$

۲۵ ۴ ۳ ۲ **۱** وقتی از داده‌ها ۴۴ واحد کم می کنیم از میانگین نیز ۴۴ واحد کم می‌شود ولی انحراف معیار تغییر نمی کند.

$$\bar{x}=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{n}F_ix_i\to\bar{x}-۴۴=\frac{۱}{۲۰}((۴\times(-۳))+(۷\times(-۱))+(۵\times۱)+(۳\times۳)+(۱\times۵))$$

$$\to\bar{x}-۴۴=۰\to\bar{x}=۴۴$$

$$\sigma^۲=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{n}F_i(x_i-\bar{x})^۲\to\sigma^۲=\frac{۱}{۲۰}(۴(-۳)^۲+۷(-۱)^۲+۵(۱)^۲+۳(۳)^۲+۱(۵)^۲)$$

$$=\frac{۱}{۲۰}(۳۶+۷+۵+۲۷+۲۵)=\frac{۱۰۰}{۲۰}=۵\to\sigma=\sqrt{۵}$$

$$C_V=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{۵}}{۴۴}\sim\frac{۲/۲}{۴۴}=۰/۰۵$$

۲۶ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$\bar{x}=\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_{۲۱}+۱۰+۱۵+۴۵+۵۰}{۲۵}=۳۰$$

$$\Rightarrow x_۱+x_۲+\cdots+x_{۲۱}+۱۲۰=۷۵۰\Rightarrow x_۱+x_۲+\cdots+x_{۲۱}=۶۳۰$$

$$\bar{x}_{\text{جدید}}=\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_{۲۱}}{۲۱}=\frac{۶۳۰}{۲۱}=۳۰$$

$$\sigma^۲=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{۲۵}(x_i-\bar{x})^۲\Rightarrow۶۴=\frac{۱}{۲۵}\sum_{i=۱}^{۲۵}(x_i-\bar{x})^۲\Rightarrow\sum_{i=۱}^{۲۵}(x_i-\bar{x})^۲=۱۶۰۰$$

اما مجموع مربعات انحراف از میانگین ۴ داده‌ی ناجور برابر است با:

$$(۱۰-۳۰)^۲+(۱۵-۳۰)^۲+(۴۵-۳۰)^۲+(۵۰-۳۰)^۲=۱۲۵۰$$

بنابراین: $۱۲۵۰+\sum_{i=۱}^{۲۱}(x_i-\bar{x})^{۲۱}=۱۶۰۰\Rightarrow\sum_{i=۱}^{۲۱}(x_i-\bar{x})^۲=۳۵۰$

حال به راحتی می‌توانیم واریانس ۲۱ داده‌ی باقی‌مانده را حساب کنیم.

$$\sigma^۲=\frac{\sum_{i=۱}^{۲۱}(x_i-\bar{x})^۲}{N}=\frac{۳۵۰}{۲۱}=۱۶/۶۶$$

۲۷ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$\bar{x}=\frac{۴۵+۳۶+۴۸+۴۲+۳۹}{۵}=۴۲$$

$$\sigma^۲=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i-\bar{x})^۲=\frac{۱}{۵}\left((۴۵-۴۲)^۲+(۳۶-۴۲)^۲+(۴۸-۴۲)^۲+(۴۲-۴۲)^۲+(۳۹-۴۲)^۲\right)$$

$$=\frac{۱}{۵}(۹+۳۶+۳۶+۰+۹)=\frac{۹۰}{۵}=۱۸\to\sigma=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$$

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۴۲}=۰/۱$$

۲۸ (۱) (۲) **(۳)** (۴) با توجه به اینکه میانگین برابر ۱۶ می‌باشد داریم:

x_i	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
$x_i-\bar{x}$	-۴	-۲	۰	۲	۴
فراوانی مطلق	۵	۷	۱۰	a	۳

مجموع اختلاف داده ها از میانگین برابر صفر می‌باشد پس:

$$(۵\times(-۴))+(۷\times(-۲))+(۱۰\times۰)+(a\times۲)+(۳\times۴)=۰\to-۲۰-۱۴+۲a+۱۲=۰\to a=۱۱$$

$$\sigma^۲=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}F_i(x_i-\bar{x})^۲$$

$$= \frac{۱}{۵+۷+۱۰+۱۱+۳}\left((۵\times۱۶)+(۷\times۴)+(۱۰\times۰)+(۱۱\times۴)+(۳\times۱۶)\right) = \frac{۱}{۳۶}(۲۰۰) = ۵٫۵۵$$

۲۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

میانگین این داده‌ها برابر $\bar{x} = \frac{۱۰۰}{۵۰} = ۲$ است.

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N} - (\bar{x})^۲ \rightarrow \sigma^۲ = \frac{۲۷۲}{۵۰} - (۲)^۲ = \frac{۱۳۶}{۲۵} - ۴ = \frac{۳۶}{۲۵} \rightarrow \sigma = \frac{۶}{۵}$$

$$c_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{۶}{۵}}{۲} = \frac{۶}{۱۰} = ۰٫۶$$

۳۰ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\sigma^۲ = ۴ \rightarrow \sigma^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i-\bar{x})^۲ \rightarrow ۴ = \frac{۱}{۲۶}\left((x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+\cdots+(x_{۲۶}-\bar{x})^۲\right)$$

$$\rightarrow (x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+\cdots+(x_{۲۶}-\bar{x})^۲ = ۱۰۴$$

اگر یکی از داده‌ها را که با میانگین برابر است را حذف کنیم تغییری در میانگین ۲۵ داده‌ی باقی‌مانده رخ نمی‌دهد و جمع مربعات تفاضل ۲۵ داده از میانگین همان ۱۰۴ است.

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{۲۵}\left((x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+\cdots+(x_{۲۵}-\bar{x})^۲\right) = \frac{۱}{۲۵}(۱۰۴) = \frac{۱۰۴}{۲۵} = ۴٫۱۶$$

۳۱ ۱ ۲ **۳** ۴

داده‌ها از کوچک به بزرگ مرتب‌شده داده شده‌اند.

$$\underbrace{۳, ۳, ۴, ۶, ۶, ۸,}_{\text{نیمه ی اول داده ها}}\ \underbrace{۸, ۹, ۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۳}_{\text{نیمه ی دوم داده ها}}$$

تعداد داده‌ها ۱۲ تاست. در هر سری شش داده داریم که میانه‌ی شش داده برابر با نصف مجموع دو داده‌ی وسط است. پس داریم:

$$\text{میانه‌ی نیمه‌ی اول داده‌ها} = \text{چارک اول} = Q_۱ = \frac{۴+۶}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$$

$$\text{میانه‌ی نیمه‌ی دوم داده‌ها} = \text{چارک سوم} = Q_۳ = \frac{۱۱+۱۲}{۲} = \frac{۲۳}{۲} = ۱۱٫۵$$

طبق گفته‌ی مسأله از بین داده‌ها، اعداد کم تر از ۵ و بیش تر از ۱۱٫۵ را حذف می کنیم که اعداد باقی مانده عبارتند از:

$$۶, ۶, ۸, ۸, ۹, ۱۱$$

حالا ضریب تغییرات آن ها را می خواهیم. ابتدا میانگین را محاسبه می کنیم:

$$\bar{x} = \frac{۲(۶)+۲(۸)+۹+۱۱}{۶} = \frac{۴۸}{۶} = ۸$$

حال، واریانس و سپس انحراف معیار را حساب می کنیم:

$$\sigma^۲ = \frac{۲(۶-۸)^۲+۲(۸-۸)^۲+(۹-۸)^۲+(۱۱-۸)^۲}{۶} = \frac{۸+۰+۱+۹}{۶} = \frac{۱۸}{۶} = ۳$$

$$\Rightarrow \text{انحراف معیار} = \sigma = \sqrt{۳}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{۳}}{۸} \cong \frac{۱٫۷}{۸} \cong ۰٫۲۱$$

۳۲ ۱ ۲ ۳ **۴** ۲۲ داده‌ی آماری را به صورت: $x_۱, x_۲, \cdots, x_{۲۲}$ در نظر می گیریم که میانگینشان برابر ۱۶ و واریانس آنها برابر ۴ است.

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i-\bar{x})^۲ \Rightarrow ۴ = \frac{۱}{۲۲}\left((x_۱-۱۶)^۲+(x_۲-۱۶)^۲+\cdots+(x_{۲۲}-۱۶)^۲\right)$$

$$\Rightarrow (x_۱-۱۶)^۲+(x_۲-۱۶)^۲+\cdots+(x_{۲۲}-۱۶)^۲ = ۴\times۲۲ = ۸۸$$

سه داده‌ی ۱۷ و ۲۰ و ۱۱ که به این ۲۲ داده اضافه می‌شوند میانگینشان برابر $۱۶ = \frac{۴۸}{۳} = \frac{۱۱+۲۰+۱۷}{۳}$ است. بنابراین میانگین ۲۵ داده‌ی جدید همان ۱۶ است. اکنون واریانس ۲۵ داده‌ی جدید را حساب می‌کنیم.

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{۲۵}\left(\underbrace{(x_۱-۱۶)^۲+(x_۲-۱۶)^۲+\cdots+(x_{۲۲}-۱۶)^۲}_{۸۸}+(۱۱-۱۶)^۲+(۲۰-۱۶)^۲+(۱۷-۱۶)^۲\right)$$

$$= \frac{۱}{۲۵}(۸۸+۲۵+۱۶+۱) = \frac{۱۳۰}{۲۵} = ۵٫۲$$

۳۳ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\bar{x}=\frac{۲۷۵}{۲۵}=۱۱$$

$$\sigma^۲=\frac{\sum_{i=۱}^{N}x_i^۲}{N}-(\bar{x})^۲=\frac{۳۲۵۰}{۲۵}-(۱۱)^۲=۱۳۰-۱۲۱=۹\to\sigma=۳$$

$$C_V=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۳}{۱۱}=۰/۲۷۲۷$$

۳۴ **۱** ۲ ۳ ۴ در ابتدا میانگین امتیازات دو نفر را بدست می‌آوریم.

$$\bar{x}_۱=\frac{۷+۹+۸+۹+۷}{۵}=۸\ ,\ \bar{x}_۲=\frac{۱۰+۸+۶+۷+۹}{۵}=۸$$

حال که میانگین‌ها برابر است دقت کاری نفری بیشتر است که ضریب تغییراتش کمتر باشد.

$$\sigma_۱^۲=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i-\bar{x})^۲=\frac{(۷-۸)^۲+(۹-۸)^۲+(۸-۸)^۲+(۹-۸)^۲+(۷-۸)^۲}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

$$\sigma_۲^۲=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i-\bar{x})^۲=\frac{(۱۰-۸)^۲+(۸-۸)^۲+(۶-۸)^۲+(۷-۸)^۲+(۹-۸)^۲}{۵}=\frac{۱۰}{۵}$$

چون میانگین‌ها برابر هستند بنابراین ضریب تغییرات نسبت مستقیم با واریانس دارد پس دقت نفر اول بیشتر است.

$$\sigma_۱^۲<\sigma_۲^۲\Rightarrow CV_۱<CV_۲$$

۳۵ ۱ **۲** ۳ ۴ برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۱۰ واحد کم می‌کنیم (دقت کنید که واریانس و انحراف معیار، تغییری نمی‌کنند.)

$$\bar{x}=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}F_ix_i\to\bar{x}-۱۰=\frac{۱}{۲۴}((۳\times(-۲۱))+(۲\times(-۱))+(۱۲\times۰)+(۶\times۱)+(۱\times۲))$$

$$\to\bar{x}-۱۰=\frac{۱}{۲۴}(-۶-۲+۶+۲)\to\bar{x}-۱۰=۰\to\bar{x}_{\text{اولیه}}=۱۰$$

$$\sigma^۲=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}F_i(x_i-\bar{x})^۲$$

$$=\frac{۱}{۲۴}(۳(-۲-۰)^۲+۲(-۱-۰)^۲+۱۲(۰-۰)^۲+۶(۱-۰)^۲+۱(۲-۰)^۲)=\frac{۱}{۲۴}(۱۲+۲+۶+۴)=\frac{۲۴}{۲۴}=۱$$

$$\to\sigma_{\text{اولیه}}=۱\to C_V=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۱}{۱۰}=۰/۱$$

۳۶ ۱ ۲ **۳** ۴ با توجه به این که مجموع ۸ داده ی آماری ۴۸ است، بنابراین میانگین آن ها برابر است با $\bar{x}=\frac{۴۸}{۸}=۶$

$$CV=\frac{\sigma}{x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\sigma=\frac{۱}{۲}\bar{x}\Rightarrow\sigma=\frac{۱}{۲}\times۶=۳\to\sigma^۲=۳^۲=۹$$

$$\sigma^۲=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}x_i^۲-(\bar{x})^۲\to۹=\frac{۱}{۸}(x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_۸^۲)-۳۶$$

$$\to۴۵=\frac{۱}{۸}(x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_۸^۲)\to x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_۸^۲=۳۶۰$$

۳۷ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\sum F_i(x_i-\bar{x})^۲}{\sum F_i}}=\sqrt{\frac{\sum F_i(x_i-(۱۲))^۲}{۱۶}}\sigma_y=\sqrt{\frac{۱(-۳)^۲+۳(-۲)^۲+۱(-۱)^۲+۶(۱)^۲+۲(۲)^۲}{۱۶}}$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{۹+۱۲+۱+۶+۸}{۱۶}}=\sqrt{\frac{۳۶}{۱۶}}=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{\sigma_y=\sigma_x}\sigma_x=\frac{۳}{۲}$$

پس: $CV=\frac{\sigma_x}{\bar{x}}=\frac{\frac{۳}{۲}}{۱۲}=\frac{۱}{۸}$

۳۸ ۱ ۲ ۳ **۴** طول اضلاع مربع را $x_۱, x_۲, \cdots, x_N$ در نظر می‌گیریم، میانگین محیط مربع‌ها برابر ۸۴ است (مجموع محیط مربع‌ها تقسیم بر تعدادشان) پس داریم:

$$\bar{x}=\frac{۴x_۱+۴x_۲+\cdots+۴x_N}{N}\to۸۴=\frac{۴(x_۱+x_۲+\cdots+x_N)}{N}\to\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_N}{N}=۲۱\to\text{میانگین اضلاع}=\bar{x}=۲۱$$

میانگین مساحت مربع‌ها برابر ۴۹۰ است (مجموع مساحت مربع‌ها تقسیم بر تعدادشان) پس داریم:

$$\frac{x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_N^۲}{N} = ۴۹۰ \to \sum_{i=۱}^{N} x_i^۲ = ۴۹۰$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N} - (\bar{x})^۲ \Rightarrow \sigma^۲ = ۴۹۰ - ۴۴۱ = ۴۹ \Rightarrow \sigma = ۷$$

$$C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۷}{۲۱} = ۰/۳۳$$

۳۹ ۴

میانگین این ۲۵ داده‌ی آماری، برابر ۲ $= \frac{۵۰}{۲۵} = \bar{x}$ است.

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N} - \bar{x}^۲ \to \sigma^۲ = \frac{۱۵۶/۲۵}{۲۵} - ۴ = ۶/۲۵ - ۴ = ۲/۲۵ \to \sigma = ۱/۵$$

$$C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \to C_V = \frac{۱/۵}{۲} = ۰/۷۵$$

۴۰ ۳ ۷ داده بعد از چارک سوم، ۷ داده قبل از چارک اول و ۱۷ داده روی جعبه و داخل جعبه قرار دارند.

$$\text{مجموع تمام داده‌ها} = ۷(۱۲) + ۱۷(۱۵) + ۷(۲۱) = ۴۸۶$$

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع تمام داده‌ها}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} = \frac{۴۸۶}{۳۱} = ۱۵۶/۷۱$$

۴۱ ۴

میانگین این ۴۰ داده‌ی آماری، برابر ۲ $= \frac{۸۰}{۴۰} = \bar{x}$ است.

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N} - (\bar{x})^۲ = \frac{۲۵۰}{۴۰} - (۲)^۲ = ۶/۲۵ - ۴ = ۲/۲۵ \to \sigma = \sqrt{۲/۲۵} = ۱/۵$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۱/۵}{۲} = ۰/۷۵$$

۴۲ ۳ چون انحراف معیار برابر ۳ است پس واریانس ۹ می‌باشد.

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i - \bar{x})^۲ \to ۹ = \frac{۱}{۱۸}\sum_{i=۱}^{۱۸}(x_i - ۲۵)^۲ \to \sum_{i=۱}^{۱۸}(x_i - ۲۵)^۲ = ۹ \times ۱۸ = ۱۶۲$$

میانگین ۳ داده‌ی جدید اضافه شده ۲۵ است $\left(\frac{۲۸ + ۲۷ + ۲۰}{۳} = \frac{۷۵}{۳} = ۲۵\right)$ یعنی در ۲۱ داده‌ی جدید میانگین همان ۲۵ است و تغییر نمی‌کند.

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{۲۱}(x_i - \bar{x})^۲$$

$$\to \sigma^۲ = \frac{۱}{۲۱}\left(\sum_{i=۱}^{۱۸}(x_i - ۲۵)^۲ + (۲۰ - ۲۵)^۲ + (۲۷ - ۲۵)^۲ + (۲۸ - ۲۵)^۲\right)$$

$$\to \sigma^۲ = \frac{۱}{۲۱}(۱۶۲ + ۲۵ + ۴ + ۹) = \frac{۲۰۰}{۲۱} = ۹/۵۲$$

۴۳ ۱

مراکز دسته‌ها به ترتیب برابر ۶ و ۸ و ۱۰ و ۱۲ و ۱۴ می‌باشند.

$$\bar{x} = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} F_i x_i = \frac{۱}{۱۲ + a}((۳ \times ۶) + (۲ \times ۸) + (a \times ۱۰) + (۶ \times ۱۲) + (۱ \times ۱۴)) = \frac{۱۲۰ + ۱۰a}{۱۲ + a} = \frac{۱۰(۱۲ + a)}{۱۲ + a} = ۱۰$$

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} F_i(x_i - \bar{x})^۲ = \frac{۱}{۱۲ + a}(۳(۶ - ۱۰)^۲ + ۲(۸ - ۱۰)^۲ + a(۱۰ - ۱۰)^۲ + ۶(۱۲ - ۱۰)^۲ + ۱(۱۴ - ۱۰)^۲)$$

$$= \frac{۱}{۱۲ + a}(۴۸ + ۸ + ۰ + ۲۴ + ۱۶) = \frac{۹۶}{۱۲ + a} = ۶ \to ۷۲ + ۶a = ۹۶ \to ۶a = ۲۴ \to a = ۴$$

۴۴) ۱ ۲ ۳ **۴** مجموع فراوانی‌های نسبی N داده‌ی آماری برابر یک می‌باشد.

$$۰/۱ + ۰/۲۵ + ۰/۲ + \alpha = ۱ \rightarrow \alpha = ۰/۴۵$$

میانگین داده ها را می توان از مجموع حاصلضرب فراوانی نسبی هر دسته در مرکز آن دسته بدست آورد.

$$\bar{x} = (۰/۱ \times ۸) + (۰/۲۵ \times ۱۲) + (۰/۲ \times ۱۶) + (۰/۴۵ \times ۲۰) = ۱۶$$

$$\sigma^۲ = \sum_{i=۱}^{N} f_i(x_i - \bar{x})^۲ = ۰/۱(۸-۱۶)^۲ + ۰/۲۵(۱۲-۱۶)^۲ + ۰/۲(۱۶-۱۶)^۲ + ۰/۴۵(۲۰-۱۶)^۲$$

$$= ۶/۴ + ۴ + ۰ + ۷/۲ = ۱۷/۶$$

توجه کنید که واریانس را برحسب فراوانی نسبی بدین گونه بدست می‌آورند.

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} F_i(x_i - \bar{x})^۲ = \frac{F_۱}{N}(x_۱ - \bar{x})^۲ + \frac{F_۲}{N}(x_۲ - \bar{x})^۲ + \cdots = f_۱(x_۱ - \bar{x})^۲ + f_۲(x_۲ - \bar{x})^۲ + \cdots$$

۴۵) **۱** ۲ ۳ ۴

اگر به تمام داده‌ها، میانگین را اضافه کنیم در این صورت انحراف معیار تغییر نمی کند ولی به میانگین، $\bar{x}$ اضافه می‌شود.

$$CV_{\text{قدیم}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = ۱/۲$$

$$CV_{\text{جدید}} = \frac{\sigma}{\bar{x} + \bar{x}} = \frac{\sigma}{۲\bar{x}} = \frac{۱}{۲} \times \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۱}{۲}(۱/۲) = ۰/۶$$

۴۶) ۱ **۲** ۳ ۴

میانگین برابر $\bar{x} = \frac{۱۰۰}{۴۰} = ۲/۵$ است.

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_{i^۲}}{N} - (\bar{x})^۲ \rightarrow \sigma^۲ = \frac{۳۴۰}{۴۰} - (۲/۵)^۲ = ۸/۵ - ۶/۲۵ = ۲/۲۵$$

$$\rightarrow \sigma = \sqrt{۲/۲۵} = ۱/۵$$

۴۷) ۱ ۲ **۳** ۴

$$\text{میانگین} = \bar{x} = \frac{۹ + ۲(۱۱) + ۲(۱۲) + ۱۳ + ۲(۱۴)}{۸} = \frac{۹ + ۲۲ + ۲۴ + ۱۳ + ۲۸}{۸} = \frac{۹۶}{۸} = ۱۲$$

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} F_i(x_i - \bar{x})^۲ = \frac{۱}{۸}((۹-۱۲)^۲ + ۲(۱۱-۱۲)^۲ + ۲(۱۲-۱۲)^۲ + (۱۳-۱۲)^۲ + ۲(۱۴-۱۲)^۲)$$

$$\Rightarrow \sigma^۲ = \frac{۹ + ۲ + ۰ + ۱ + ۸}{۸} = \frac{۲۰}{۸} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵ \rightarrow \sigma = \sqrt{۲/۵} \sim ۱/۶$$

$$C_V = \frac{۱/۶}{۱۲} = \frac{۱۶}{۱۲۰} \sim ۰/۱۳$$

۴۸) ۱ **۲** ۳ ۴

نکته: در محاسبهٔ میانهٔ داده‌های $x_۱, x_۲, \cdots, x_n$
اگر تعداد داده‌ها فرد باشد دادهٔ وسط
و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد میانگین
دو دادهٔ وسط برابر میانه خواهد بود.
نکته: در داده‌های فوق میانه همان چارک دوم
$Q_۲$ می‌باشد میانه نیمهٔ اول داده‌ها $Q_۱$
(چارک اول) و میانهٔ نیمهٔ دوم داده‌ها $Q_۳$ (چارک سوم) است.

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

داده‌ها: ۱۰/۶, ۱۰/۶, ۱۱/۲, ۱۱/۵, ۱۱/۹, ۱۲/۳, ۱۲/۷, ۱۲/۸, ۱۳/۵, ۳۰/۲

تعداد داده‌ها برابر ۱۰ می‌باشد پس میانه $(Q_۲)$ میانگین دو دادهٔ وسط می‌باشد.

$$Q_۲ = \frac{\text{دادهٔ ۵ ام} + \text{دادهٔ ۶ ام}}{۲} = \frac{۱۱/۹ + ۱۲/۳}{۲} = \frac{۲۴/۲}{۲} = ۱۲/۱$$

$$Q_1 \xlongequal{\text{میانهٔ داده‌های کمتراز } ۱۲/۱} \text{دادهٔ سوم} = ۱۱/۲ \quad , \quad Q_۳ \xlongequal{\text{میانهٔ داده‌های بیشتراز } ۱۲/۱} ۱۲/۸$$

$$\frac{Q_1 + Q_۳ - ۲Q_۲}{Q_۳ - Q_1} = \frac{۱۱/۲ + ۱۲/۸ - ۲ \times ۱۲/۱}{۱۲/۸ - ۱۱/۲} = \frac{-۰/۲}{۱/۶} = -۰/۱۲۵$$

۴۹ ۴ ۳ ۲ ۱

نکته: در نمودار جعبه‌اي Q_1 و $Q_۳$ ابتدا و انتهاي جعبه بوده و جزو داده‌هاي داخل جعبه محسوب نمي‌شود.

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم: ۳۲, ۳۷, ۳۹, ۴۲, ۴۶ , ۵۰ , ۵۴, ۵۶, ۵۷, ۵۹

میانه ($Q_۲$)، Q_1 و $Q_۳$ را می‌یابیم:

$$Q_۲ = \text{میانه} = \frac{\text{دادهٔ ۵ ام} + \text{دادهٔ ۶ ام}}{۲} = \frac{۴۶ + ۵۰}{۲} = ۴۸$$

$$\text{نیمهٔ اول داده‌ها} : ۳۲, ۳۷, ۳۹, ۴۲, ۴۶ \Rightarrow \text{چارک اول} = Q_1 = ۳۹$$

$$\text{نیمهٔ دوم داده‌ها} : ۵۰, ۵۴, ۵۶, ۵۷, ۵۹ \rightarrow \text{چارک سوم} = Q_۳ = ۵۶$$

پس داده‌های داخل جعبه، داده‌های بین ۳۹ و ۵۶ است یعنی داده‌های ۴۲, ۴۶, ۵۰ , ۵۴ داده‌های داخل جعبه است.

ابتدا میانگین سپس انحراف‌معیار را می‌یابیم:

$$\bar{x} = \frac{۴۲ + ۴۶ + ۵۰ + ۵۴}{۴} = \frac{۱۸۰ + ۱۲}{۴} = \frac{۱۹۲}{۴} = ۴۸$$

$$\text{واریانس} : \sigma^۲ = \frac{\sum_{i=1}^{۴}(x_i - \bar{x})^۲}{۴} = \frac{(۴۲-۴۸)^۲ + (۴۶-۴۸)^۲ + (۵۰-۴۸)^۲ + (۵۴-۴۸)^۲}{۴} = \frac{۳۶ + ۴ + ۴ + ۳۶}{۴} = \frac{۸۰}{۴} = ۲۰$$

$$\Rightarrow \sigma = ۲\sqrt{۵} \rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۴۸} = \frac{\sqrt{۵}}{۲۴} \simeq ۰/۰۹۳$$