به نام خداوند جان و خرد

دفترچه سوالات

آزمون‌های انتخابی پانزدهمین تیم ایران در المپیاد جهانی نجوم و اخترفیزیک

بوگوتا – کلمبیا (به صورت مجازی)

به نام خدا

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملّی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

پانزدهمین دوره‌ی انتخابی تیم المپیاد نجوم و اخترفیزیک

آزمون تئوری یک

۲۸ مهر ۱۴۰۰

مدّت آزمون: ۱۸۰ دقیقه (۱۴:۰۰ تا ۱۷:۰۰)

دفترچه‌ی سؤالات

ضمن آرزوی موفّقیّت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است به موارد زیر توجّه فرمایید:

این آزمون ۴ سؤال دارد و زمان آن ۱۸۰ دقیقه است.

ⓒ کلیه‌ی حقوق این سؤالات برای معاونت دانش‌پژوهان جوان محفوظ است.

ثوابت فیزیکی و نجومی

G	ثابت جهانی گرانش	$N.m^{۲}.kg^{-۲}$	۶.۶۷×۱۰^{-۱۱}
c	سرعت نور	$m.s^{-۱}$	۳×۱۰^{۸}
h	ثابت پلانک	$m^{۲}.kg.s^{-۱}$	۶.۶۳×۱۰^{-۳۴}
k	ثابت بولتزمن	$J.K^{-۱}$	۱.۳۸×۱۰^{-۲۳}
$M_{\odot}$	جرم خورشید	kg	۱.۹۹×۱۰^{۳۰}
$R_{\odot}$	شعاع خورشید	m	۶.۹۶×۱۰^{۸}
$L_{\odot}$	درخشندگی خورشید	W	۳.۸۵×۱۰^{۲۶}
$M_{\oplus}$	جرم زمین	kg	۵.۹۷×۱۰^{۲۴}
$R_{\oplus}$	شعاع زمین	km	۶۳۷۸
pc	پارسک	m	۳.۰۹×۱۰^{۱۹}
AU	واحد نجومی	m	۱.۵×۱۰^{۱۱}
$H_{.}$	ثابت هابل	$\frac{km}{s.Mpc}$	۶۸

سوال ۱ (طراح: امیررضا قدیانی)

در نظر بگیرید جهان ما یک جهان بسته و کروی و ماده غالب با پارامتر چگالی $\Omega_{.} = ۳.۸۵$ است. اگر پارامتر هابل $H_{.} = ۶۸ \frac{km}{s.Mpc}$ باشد جهان ما چند سی سی است؟

حال فرض کنید تمام این حجم جهان با آب پرشده است و می خواهیم با استفاده از تمامی ستاره های جهان قابل مشاهده که حدود آنرا از دمای فعلی (همدما با دمای پس زمینه کیهانی) به نقطه جوش برسانیم.

فرم ظرفیت گرمایی ویژه آب بر حسب دما به صورت زیر است:

$$c_{(T)} = c_{.} e^{\frac{T - ۲۷۳.۱۵}{T_*}}$$

که ثابت T_* دمای لحظه $t = ۰.۱۹۳۶ Myr$ بعد از بیگ بنگ کیهان است و ثابت $c_{.}$ مقدار $۴۰۰۰ \frac{j}{kg.K}$ را دارد. فرض کنید درجهان قابل مشاهده حدود $۱۰^{۱۱}$ کهکشان مانند راه شیری وجود دارد و تمام ستارگان خورشیدگون هستند. برای این کارچقدر زمان لازم است؟

سوال ۲ (طراح: امیرحسین امیری و امیررضا قدیانی)

گروهی از آدم فضـایی‌ها از روی سـیاره خودشـان که در خوشه‌ای با میل ۲۵− است در حال بررسی زمین هسـتند. این گروه در حال بررسـی قطب جنوب زمین هستند. فرض کنید قطب جنوب یک دایره صغیره به شعاع ۳۵ درجه باشد، در این صورت چند درصد هر تصویری که فضایی‌ها از زمین می‌گیرند را قطب جنوب تشکیل داده است؟

سوال ۳ (طراح: امیررضا قدیانی)

در نظر بگیرید که می خواهیم المان های گوجیرا-جانسـون را در ناحیه ای خاص از سـتاره را بررسی کنیم که کاملا همسانگرد و هم دماست و دمای آن ۸۴۰۰ کلوین است. همچنین شار تابشی (F_{rad}) در این ناحیه برابر مقدار $۵.۶۴۶۵ \times ۱۰^{۸} \frac{w}{m^{۲}}$ است. المان های گوجیرا-جانسون در فضای کروی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{cases} d\alpha = \sin(۲\theta)\, d\varphi d\theta \\ d\beta = \cos\theta\, d\alpha \end{cases}$$

حال مطلوب است نسبت میانگین شدت (I) بر روی پارامتر α بر میانگین شدت بر روی پارامتر β که هردو در فضای یک نیم کره بررسی شده باشند.

سوال ۴ (طراح: امیرحسین امیری)

کهکشانی داریم با بازوهای مارپیچی که شکل هر بازوی آن از رابطه $r = r_0 ۲^{۲\theta/\pi}$ پیروی می‌کند که در آن r_0 فاصله نزدیک‌ترین نقطه این بازو تا مرکز کهکشان است. همچنین این بازو چگالی خطی ثابتی برابر λ_0 دارد. می‌خواهیم نیرویی که این بازو به مرکز کهکشان وارد می‌کند را بیابیم ولی نمی‌خواهیم آن را به صورت پیوسته در نظر بگیریم. می‌خواهیم مجموع جرم از زاویه ۰ تا ۴۵ درجه را به صورت یک جرم نقطه‌ای در زاویه ۰ بگذاریم و مجموع ۴۵ تا ۹۰ درجه را در ۴۵ درجه و به همین ترتیب مجموع جرم بین زاویه $\frac{i\pi}{۴}$ تا $\frac{(i+۱)\pi}{۴}$ به صورت جرمی نقطه‌ای در زاویه $\frac{i\pi}{۴}$ گذاشته می‌شود (مطابق شکل زیر)

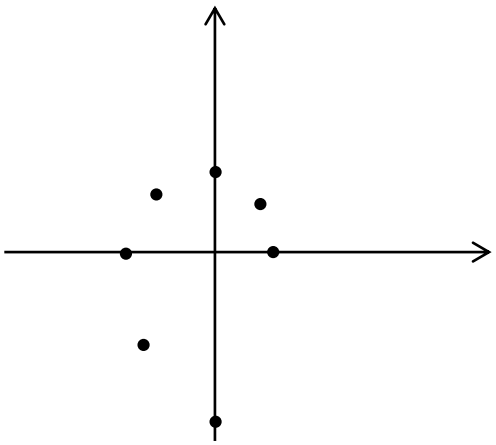
الف) جرم اولین جرم نقطه‌ای (در زاویه صفر) را بیابید و آن را m_0 بنامید.

ب) رابطه جرم هر ذره را فقط برحسب m_0 و θ بیابید.

ج) بردار نیرویی که بازو به مرکز کهکشان وارد می‌کند را بیابید. (فرض کنید بازو تا زاویه‌ی نهایی α ادامه می‌یابد)

د) اگر α به سمت بی‌نهایت میل کند بردار نیرو چه خواهد شد؟

(شکل شماتیک است)



به نام خدا

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملّی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

پانزدهمین دوره‌ی انتخابی تیم المپیاد نجوم و اخترفیزیک

آزمون تئوری دو

۲۹ مهر ۱۴۰۰

مدّت آزمون: ۱۳۵ دقیقه (۹:۰۰ تا ۱۱:۱۵)

دفترچه‌ی سؤالات

ضمن آرزوی موفّقیّت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است به موارد زیر توجّه فرمایید:

این آزمون ۳ سؤال دارد و زمان آن ۱۳۵ دقیقه است.

ⓒ کلیه‌ی حقوق این سؤالات برای معاونت دانش‌پژوهان جوان محفوظ است.

ثوابت فیزیکی و نجومی

G	ثابت جهانی گرانش	$N.m^{۲}.kg^{-۲}$	۶.۶۷×۱۰^{-۱۱}
c	سرعت نور	$m.s^{-۱}$	۳×۱۰^{۸}
h	ثابت پلانک	$m^{۲}.kg.s^{-۱}$	۶.۶۳×۱۰^{-۳۴}
k	ثابت بولتزمن	$J.K^{-۱}$	۱.۳۸×۱۰^{-۲۳}
$M_{\odot}$	جرم خورشید	kg	۱.۹۹×۱۰^{۳۰}
$R_{\odot}$	شعاع خورشید	m	۶.۹۶×۱۰^{۸}
$L_{\odot}$	درخشندگی خورشید	W	۳.۸۵×۱۰^{۲۶}
$M_{\oplus}$	جرم زمین	kg	۵.۹۷×۱۰^{۲۴}
$R_{\oplus}$	شعاع زمین	km	۶۳۷۸
pc	پارسک	m	۳.۰۹×۱۰^{۱۹}
AU	واحد نجومی	m	۱.۵×۱۰^{۱۱}
$H_{.}$	ثابت هابل	$\frac{km}{s.Mpc}$	۶۸

سوال ۱ (طراح: کسری حاجیان)

در این سوال با یک مدل‌سازی می‌خواهیم پتانسیل و چگالی یک کهکشان دیسکی در راستای z را بررسی کنیم. در طول حل از یک دستگاه مختصات استوانه‌ای (R, ϕ, z) استفاده کنید. در این مدل‌سازی فرض می‌کنیم توزیع جرم در راستای z تنها به انرژی ذرات در راستای z ربط دارد و توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$f(E_z) = \frac{\rho_0}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} \exp\left(-\frac{E_z}{\sigma_z^2}\right)$$

که در آن E_z مجموع انرژی جنبشی واحد جرم (در راستای z) و پتانسیل ذره است. σ_z سرعت پخشی ذرات در راستای z و ρ_0 ثابت است. پتانسیل را به صورت $\Phi(z)$ در نظر بگیرید و فرض کنید در $z = 0$، اندازه پتانسیل و تغییرات آن در راستای z ناچیز است.

الف) رابطه‌ای برای $\rho(z)$ برحسب $\Phi(z)$ و ثوابت پیدا کنید.

ب) رابطه زیر را اثبات کنید و مقدار z_0 را برحسب ثوابت بیابید:

$$2\frac{d^2\Phi(z)}{d\xi^2} = \Phi_0 \exp\left(-\frac{\Phi(z)}{\sigma_z^2}\right), \qquad \xi = \frac{z}{z_0}$$

ج) رابطه زیر را برای $\rho(z)$ اثبات کنید:

(α یک ضریب ثابت است که فقط وابسته به Φ_0 است)

$$\rho(z) = \alpha\rho_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

د) رابطه زیر را برای چگالی سطحی دیسک کهکشان اثبات کنید:

$$\Sigma = 4\alpha\rho_0 z_0$$

روابطی که ممکن است بدردتان بخورد:

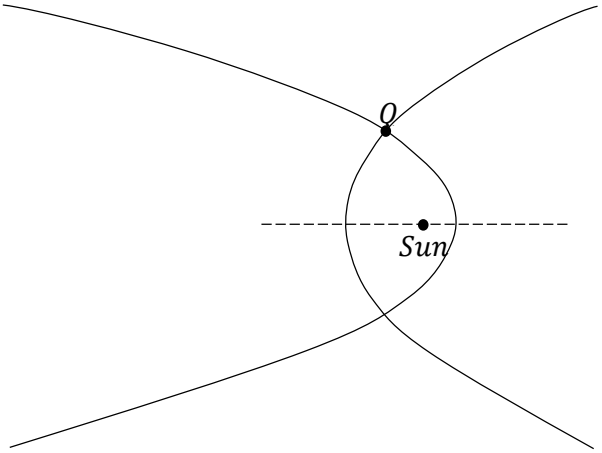
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\, dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{-x}}} = \ln\left(\left|\frac{\sqrt{1-e^{-x}}+1}{\sqrt{1-e^{-x}}-1}\right|\right)$$

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

سوال ۲ (طراح: امیرحسین امیری)

منجمی در قرن هفتم هجری دو دنباله دار که به دور خورشید می‌گردند را رصد می‌کند. این دو دنباله‌دار در مدار سهمی در حرکت اند به طوریکه محور اصلی سهمی در آن‌ها یکی است ولی راستای آن ۱۸۰ درجه اختلاف دارد. (مطابق شکل زیر)



در شکل فوق Q نیز محل تلاقی دو مدار است.

این منجم هنوز در عصری که در آن بتوان به راحتی فاصله سنجی کرد زندگی نمی‌کند و او با کلی تقلا فقط توانسته است زمان حضور دنباله دار ها در حضیضشان را ثبت کند و در جدول زیر آورده:

دنباله دار اول	دنباله دار دوم
۲۳ شهریور	۱۵ خرداد

این منجم مشاهده می‌کند که این دو دنباله‌دار در تاریخ ۲۵ بهمن به همدیگر برخورد می‌کنند.

الف) اگر مدت زمان رسیدن دنباله دار اول از حضیض تا Q را t_1 بنامیم و برای دنباله دار دوم t_2، فاصله حضیض دنباله دار اول (P_1) و فاصله حضیض دنباله دار دوم (P_2) را فقط برحسب t_1 و t_2 و GM_{sun} بیان کنید. (رابطه صریح، به این صورت که $P_1(t_1, t_2, GM_{sun})$ بدست بیاید)

ب) با توجه به روابط بخش قبل P_1 و P_2 را بیابید.

ج) بردار سرعت دنباله دار ها دقیقا قبل برخورد را بیابید.

د) اگر جرم دنباله دار اول دو برابر دنباله دار دوم باشد و بعد از برخورد به هم بچسبند مشخصات مدار نهایی را بیابید.

سوال ۳ (طراح: امیررضا قدیانی)

ابری گازی با شـعاع اولیه R. و جرم M متشکل از ذرات هیدروژن مولکولی را در نظر بگیرید که در اطراف آن هیچ جرم دیگری وجود ندارد و ضـریب جذب در آن فقط تابعی از طول موج (κ_λ) است. همچنین برای ضریب شکست این ابر رابطه زیر را داریم :

$$n = APR^{۲}$$

که در آن P فشار گاز در ابر و R شعاع هرلحظه ابر و A یک ثابت است. پرتویی تکفام از فاصله ای بیشتر از شعاع اولیه به سمت مرکز ابر راهی می شود. لحظه ای که پرتو به لبه ورودی ابر می رسد، ابر با سرعت ثابت v شروع به انبساط می کند. توزیع گاز در ابر در هر لحظه همگن است. نسبت شدت پرتو خروجی به شدت اولیه را دست آورید.

به نام خدا

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملّی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

پانزدهمین دوره‌ی انتخابی تیم المپیاد نجوم و اخترفیزیک

آزمون تحلیل داده

۲۹ مهر ۱۴۰۰

مدّت آزمون: ۱۲۰ دقیقه (۱۴:۰۰ تا ۱۶:۰۰)

دفترچه‌ی سؤالات

ضمن آرزوی موفّقیّت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است به موارد زیر توجّه فرمایید:

این آزمون ۲ سؤال دارد و زمان آن ۱۲۰ دقیقه است.

ⓒ کلیه‌ی حقوق این سؤالات برای معاونت دانش‌پژوهان جوان محفوظ است.

سوال۱ (طراح: هدی پورغلامی)

در یک کاوش باستان‌شناسی، تعدادی کتیبه به زبانی باستانی و با منشا ناشناخته کشف شده است. در نتیجهٔ تلاش‌های انجام‌شده برای خواندن این کتیبه‌ها، محققان جدول درصد فراوانی نسبی هر حرف این زبان در جدول ۱ گردآوری کرده‌اند.

حرف	درصد فراوانی هر حرف در هر کتیبه								
𐤀	۷,۹۴	۷,۸۶	۸,۳۱	۸,۱۱	۸,۱۸	۸,۲۱	۸,۲۳	۸,۲۴	۷,۷۹
𐤁	۱۳,۰۵	۱۲,۷۹	۱۲,۹۲	۱۳,۰۰	۱۲,۶۵	۱۲,۶۶	۱۳,۰۸	۱۲,۸۵	۱۳,۰۷
𐤂	۷,۳۸	۶,۷۴	۷,۱۵	۷,۲۴	۷,۱۰	۷,۷۳	۶,۷۵	۷,۹۱	۷,۴۳
𐤃	۱۱,۸۲	۱۱,۷۰	۱۱,۸۵	۱۱,۴۴	۱۲,۳۵	۱۲,۱۰	۱۱,۷۲	۱۲,۱۴	۱۲,۱۶
𐤄	۲,۴۳	۲,۲۴	۳,۱۵	۲,۸۰	۳,۰۷	۲,۷۵	۲,۵۳	۲,۵۵	۲,۲۱
𐤅	۱,۱۸	۱,۱۱	۰,۷۸	۰,۷۸	۰,۷۱	۱,۵۰	۰,۷۰	۱,۰۴	۱,۲۷
𐤆	۲,۱۲	۱,۷۷	۱,۵۰	۱,۵۸	۱,۸۴	۱,۴۸	۲,۲۲	۲,۱۸	۱,۸۹
𐤇	۱۳,۳۱	۱۳,۵۱	۱۳,۵۰	۱۳,۳۲	۱۴,۰۰	۱۳,۲۲	۱۳,۱۱	۱۳,۶۲	۱۳,۸۳
𐤈	۵,۹۰	۵,۴۵	۵,۹۷	۵,۹۰	۶,۰۵	۶,۱۲	۵,۷۱	۵,۶۸	۵,۶۷
𐤉	۶,۶۴	۶,۵۸	۶,۸۹	۶,۷۱	۶,۳۶	۶,۴۶	۶,۶۴	۶,۳۰	۶,۵۹
𐤊	۷,۲۲	۶,۴۷	۶,۸۲	۷,۳۰	۶,۹۷	۶,۴۶	۶,۷۵	۷,۱۷	۷,۰۹
𐤋	۲,۷۶	۲,۴۶	۲,۶۴	۲,۳۴	۲,۰۷	۲,۳۷	۱,۹۷	۲,۰۱	۱,۹۲
𐤌	۱۸,۲۷	۲۱,۳۲	۱۸,۵۰	۱۹,۵۰	۱۸,۶۷	۱۸,۹۵	۲۰,۵۹	۱۸,۳۱	۱۹,۰۹

جدول ۱

یک زبان‌شناس به‌صورت اتفاقی کشف کرد که میانگین فراوانی نسبی حروف این زبان، تقریبا با یک زبان محلی نزدیک به محل کشف مشابه است. با اتکا بر این الگو می‌توان نتیجه گرفت که احتمالا منشا این زبان با زبان محلی یکی است و توسط انسان‌ها ساخته شده است. تلفظ این حروف و درصد فراوانی آن‌ها در این زبان محلی در جدول ۲ آمده است.

حرف	a	e	h	i	j	m	n	o	p	r	s	t	u
درصد فراوانی	۸,۲	۱۳,۰	۱۸,۴	۷,۰	۱,۱	۲,۴	۶,۷	۱۲,۵	۱,۹	۶,۰	۶,۳	۱۳,۷	۲,۸

جدول ۲

الف) میانگین درصد فراوانی هر حرف کتیبه را به همراه خطای آن به‌دست آورید. (در انتهای دفترچه پاسخنامه جدولی برای راحتی شما داده شده است.)

ب) مشخص کنید که هر حرف این کتیبه، متناظر با چه صدایی در آن زبان محلی است. در این زبان محلی به سیارهٔ مشتری ponrat گفته می‌شود. این نام را به خط کتیبه بنویسید.

ج) نمودار هیستوگرام حروف کتیبه (درصد فروانی نسبی بر حسب حرف) را برای حروف باستانی به ترتیب صعودی (از کمترین فراوانی تا بیشترین فراوانی) رسم کنید.

د) به هر حرف از بیشترین تا کمترین فراوانی به ترتیب یک عدد نسبت دهید (از ۱ تا ۱۳) و این عدد را پارامتر x در نظر بگیرید. پارامتر y نیز خود درصد فراوانی است. به این پارامترها خطی برازش کرده و رگرسیون آن را یادداشت کنید.

هـ) برای درصد فراوانی حروف زبان محلی نیز همین برازش را انجام داده و رگرسیون آن را یادداشت کنید.

و) برای تطابق بیشتر این دو زبان با یکدیگر از مقایسهٔ رگرسیون‌های این دو خط برازش‌شده استفاده می‌کنیم. اگر انحراف نسبی رگرسیون حروف باستانی از زبان محلی کمتر از ۱۵٪ بود، فرضیهٔ ما قوی‌تر می‌شود. آیا این شرط برقرار است؟

سوال ۲ (طراح: هدی پورغلامی)

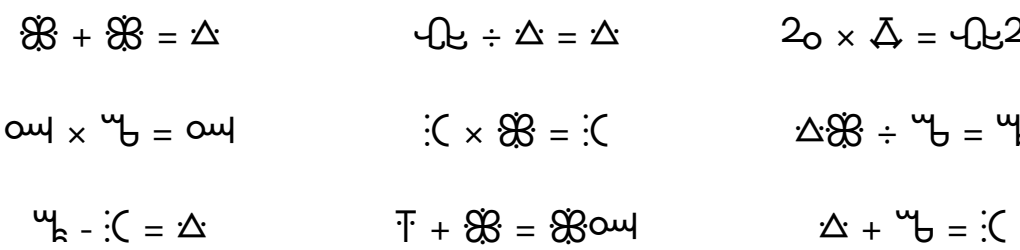
زبان‌شناس دیگری که یک منجم آماتور هم هست، الگوی دیگری بین حروف این زبان ناشناخته کشف کرد که طبق آن می‌توان منشا این زبان را از خارج از منظومهٔ شمسی و حاوی پیامی از گذشته به آینده دانست. طبق این الگو، حروف الفبای این زبان، نماد صورفلکی دایره‌البروج هستند. که متناظر بعضی از آن‌ها را در جدول ۳ مشاهده می‌کنید.

حمل	حوا	اسد	سنبله	میزان	سرطان	قوس	دلو

جدول ۳

ح) در جدول پاسخنامه، صورت‌فلکی متناظر با سایر حروف را حدس زده و بنویسید.

ط) این منجم-زبان‌شناس در ادامه کشف جالبی درباره سیستم اعداد این زبان کشف کرد. برخی عملیات ریاضی را با استفاده از حروف به عنوان ارقام در زیر مشاهده می‌کنید. مشخص کنید هر حرف نشان‌دهندهٔ کدام رقم است. (سیستم اعداد آن‌ها ده-دهی است.)



ی) در اتفاقی جالب اگر ارقام ۰ تا ۹ این زبان را به ترتیب بنویسیم، ترتیب صورفلکی متناظر با حروف نیز درست مثل ترتیب صورفلکی آسمان است. طبق نظر این محقق رقم صفر نشان‌دهندهٔ صورت فلکی اعتدال بهار در سالی است که این کتیبه نوشته شده است. سن این کتیبه را تخمین بزنید. (دوره تناوب حرکت تقدیمی:۲۶۰۰۰ سال)

حرف											
𓄿											
𓅱											
𓅓											
𓃀											
𓋴											
𓇋											
𓂝											
𓎛											
𓍿											
𓈖											
𓐍											
𓄡											
𓂻											
𓎡											
𓏲𓏥											