توابع و حدود[1]

در چهار بخش اول این فصل توابع و نمودارهایشان ، باتأکیدی خاص بر ***توابع مثلثاتی*** مهم ، بررسی می‌شوند . مفهوم تابع بین ریاضیات پیش حساب و حساب دیفرانسیل و انتگرال قرار دارد ، و فقط در بخش ۵.۱ است که وقتی به ایدهٔ **حد** و ایدهٔ نزدیک به آن **پیوستگی** می‌رسیم ، حساب دیفرانسیل و انتگرال را آغاز کرده‌ایم . در واقع ، اغلب حساب دیفرانسیل و انتگرال را بخشی از ریاضیات تعریف می‌کنند که در آن حدود نقشی اساسی برعهده دارند.

یکی از نکات اصلی این کتاب نوع خاصی حد است ، به نام **مشتق** ، که در کاربردها از اهمیت والایی برخوردار است . لذا ، باید به یاد داشت که تکنیکهای حد ارائه شده در اینجا ، باوجود رنگ و بوی نظری ، درواقع منبعی است برای استفاده‌های بعدی در مطالعهٔ مشتقها .

۱.۱ مفهوم تابع

توابع و متغیرها . منظور از ***تابع*** یعنی تناظری یک به یک بین دو مجموعه ازاعداد باخاصیت کلیدی زیر : به هر عدد در مجموعهٔ اول ، به نام **قلمرو (تعریف)** تابع ، ***یک و فقط یک*** عدد در مجموعهٔ دوم نظیر است . مرسوم است که اعداد مجموعهٔ اول را مقادیر یک ***متغیر مستقل*** و اعداد مجموعهٔ دوم نظیر آنها را مقادیر یک ***متغیر وابسته*** می‌گیرند ؛ واژهٔ "متغیر" یعنی علامتی که برای نمایش عضو نامشخصی از یک مجموعه به کار می‌رود . در این صورت، گوییم متغیر وابسته ***تابعی از*** متغیر مستقل است ، و این متغیرها می‌توانند در یک مسئله هر چه بخواهند باشند . توجه کنید که در این زبان قلمرو تابع مجموعهٔ تمام مقادیری است که متغیر مستقل می‌گیرد . مجموعهٔ تمام مقادیری که متغیر ***وابسته*** می‌گیرد **برد** تابع نام دارد .

مثال ۱ . مساحت یک مربع تابعی از طول ضلع آن است ، چرا که اگر s طول ضلع مربع باشد،

مساحتش A از فرمول زیر به دست می‌آید :

$$A = s^2.$$

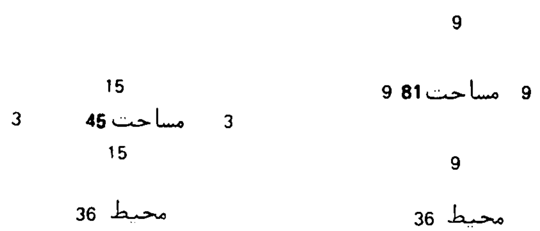
در اینجا s متغیر مستقل است ،و A متغیر وابسته . قلمرو و برد تابع مجموعه‌هایی یکسانند ؛ یعنی ، مجموعهٔ تمام اعداد مثبت . مساحت یک مربع تابعی از محیطش نیز هست . درواقع ، یک مربع به طول ضلع s دارای محیط $p = 4s$ است . لذا ، $s = \frac{1}{4}p$ و $A = s^2 = (\frac{1}{4}p)^2$ ؛ درنتیجه ،

$$A = \frac{1}{16}p^2.$$

در اینجا ، مثل قبل ، متغیر وابسته مساحت A است ، ولی متغیر مستقل محیط p می‌باشد .

مثال ۲ . آیا مساحت یک مستطیل تابعی از محیطش است ؟

حل . خیر ، زیرا محیط یک مستطیل کلی (برخلاف مربع) مساحتش را به‌طورمنحصربه‌فرد مشخص‌نمی‌کند . لذا ، مثلا " ، مستطیلی به‌طول 15 وعرض 3 دارای محیط $36 = 3 + 15 + 3 + 15$ ومساحت $15 \cdot 3 = 45$ است ، درحالی‌که مربعی به‌ضلع 9 همان‌محیط $36 = 9 + 9 + 9 + 9$ را دارد ، ولی با مساحت متفاوت $9^2 = 81$ (ر.ک. شکل ۱) .



شکل ۱

نمادتابع . به‌طورصریحتر ،فرض‌کنیم x متغیر مستقل ، y متغیر وابسته ،و f تابع باشد . ایدهٔ نمایش **تابع** به وسیلهٔ علامتی چون f فکری اساسی است ، و ما آن را از ریاضیدان بزرگ سوئیسی ، لئونارد اویلر[1] (۱۷۰۷–۱۷۸۳) داریم . بالاخره ، مقادیر x و y عددند ، ولی f چیزی مجردتر است . در واقع ، f را می‌توان قاعده یا روندی تصور کرد که تناظری بین

1. Leonhard Euler

مقادیر x و y برقرار می‌کند ، و به هر مقدار داده شده از x مقدار **منحصر به فردی** از y را نسبت می‌دهد . این را می‌توان با علامت بیان کرد :

$$y = f(x),$$

که خوانده می‌شود : " y مساوی اف x است . " اگر x مقدار خاصی چون c داشته باشد ، مقدار نظیر y با $f(c)$ نموده و **مقدار** f **در** c نامیده می‌شود . اما استفاده از یک‌حرف برای نمایش متغیرمستقل و مقادیرش‌ساده‌تر است ،و بااین قرار ، $f(x)$ را مقدار f در x می‌نامیم . گوییم f **بر** (**یا در**) یک مجموعه تعریف شده است اگر هر نقطه از مجموعه به قلمرو f تعلق داشته باشد .

مثال ۳ . فرض کنیم تابع f ریشهٔ دوم عدد x را بگیرد . در این صورت ،

$$f(x) = \sqrt{x}. \qquad (۱)$$

بین تابع f ("ریشهٔ دوم‌گیر") و مقدارش در x تمایزی وجود دارد ، ولی اگر این تمایز مانعی در زبان ایجاد کند چیزی جز وسواس نخواهد بود . لذا ، نمی‌گوییم " تابع f به طوری که $f(x) = \sqrt{x}$ " ، هرچند این بیان منطقا " درست است . به جای آن‌فقط می‌گوییم " تابع $f(x) = \sqrt{x}$ " یا " تابع $y = \sqrt{x}$ " اگر y متغیر وابسته باشد ، یا حتی خلاصه‌تر " تابع $\sqrt{x}$ " . توجه کنید که وسیعترین مجموعه‌ای که تابع (۱) بر آن تعریف شده است مجموعهٔ تمام اعداد نامنفی است ، زیرا نمی‌توان از اعداد منفی جذر گرفت . چند مقدار نمونه از تابع (۱) عبارتنداز

$$f(0) = \sqrt{0} = 0, \qquad f(9) = \sqrt{9} = 3, \qquad f(50) = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

هرگاه یک تابع با فرمول صریحی مانند (۱) ، بدون هیچ اطلاعی از مقادیر متغیر مستقل ، داده شده باشد ، فرض است که قلمرو تابع **وسیعترین** مجموعهٔ مقادیری است که فرمول به ازای آنها با معنی است . این مجموعه **قلمرو طبیعی** تابع نام دارد . مثلا "، قلمرو طبیعی تابع (۱) بازهٔ $0 \le x < \infty$ است . به همین نحو ، اگر

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \qquad (۲)$$

قلمرو طبیعی f بازهٔ $-1 \le x \le 1$ است ،زیرا $1 - x^2$ منفی است اگر x خارج این بازه باشد. هر مجموعهٔ کوچکتر از قلمرو طبیعی تابع f را نیز می‌توان قلمرو f گرفت ، ولی در اینگونه حالات همواره قلمرو را صریحا " نشان می‌دهیم ، مثل فرمول زیر

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad (0 < x < \tfrac{1}{2}), \qquad (۲')$$

که در آن قلمرو، به جای $-1 \le x \le 1$ ، مساوی بازهٔ $0 < x < \frac{1}{2}$ است.

مثال ۴. فرض کنید

$$y = f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}. \tag{۳}$$

$f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(2)$، و $f(-3)$ را بیابید.

حل. برای یافتن $f(0)$ ، $x = 0$ را در فرمول (۳) می‌گذاریم. این نتیجه می‌دهد که

$$f(0) = \frac{1}{0^2 - 4} = -\frac{1}{4},$$

و، به همین نحو،

$$f(1) = \frac{1}{1^2 - 4} = -\frac{1}{3}, \qquad f(-3) = \frac{1}{(-3)^2 - 4} = \frac{1}{5}.$$

از آن سو، کمیت

$$f(2) = \frac{1}{2^2 - 4} = \frac{1}{4 - 4}$$

تعریف نشده است، زیرا مستلزم تقسیم بر صفر است! توجه کنید که قلمرو طبیعی f از تمام اعداد x جز 2 و -2 تشکیل شده است.

استفاده از حروف x ، y ، و f برای متغیر مستقل، متغیر وابسته، و تابع ،اگرچه زیاد به‌کار می‌روند، اجباری نیست. مثلاً ، در مثال ۱ می‌توان تابعی را که محیط p یک مربع را به مساحتش A مربوط می‌کند به صورت زیر نوشت:

$$A = \phi(p) = \frac{1}{16} p^2,$$

که در آن علامت ϕ (حرف کوچک یونانی فی) برای تابع انتخاب شده است. متغیرها اغلب، مثل این حالت، کمیات هندسی یا فیزیکی مورد بحث را بازگو می‌کنند. مثلاً A ، برای مساحت، V برای حجم، t برای زمان، و غیره به کار می‌روند. واژهٔ *شناسه* مترادف دیگری برای متغیر مستقل است. لذا، x شناسهٔ تابع $f(x) = x^2$ است، u شناسهٔ تابع $g(u) = u^3 - 1$ است، و از این قبیل.

همانند مثالهای فوق، توابع معمولاً به کمک فرمول تعریف می‌شوند ،ولی *دلیلی برای آنکه کلاً* **چنین باشد وجود ندارد**؛ در مثال زیر تابعی را می‌بینیم که فرمولی متغیرهای

مستقل و وابستهٔ آن را به هم ربط نمی‌دهد. در واقع، در تحلیل اخیر، یک تابع چیزی جز گردایه‌ای از جفتهای مرتب متمایز از اعداد حقیقی که هیچ دو تای آنها عنصر اول یکسان ندارند نیست (ر.ک. مسئلهٔ ۵۸). همچنین، توابع مورد نظر در اینجا **توابعی حقیقی از یک متغیر حقیقی‌اند**؛ یعنی، هر دو متغیر مستقل و وابسته اعدادی حقیقی‌اند یا، معادلاً، نقاطی بر خط حقیقی می‌باشند. بعداً در این کتاب مفهوم تابع را بااختیار یک نقطه در صفحه یا در فضای سه‌بعدی (یا بیشتر) ابتدا به عنوان متغیر وابسته و سپس‌متغیر مستقل تعمیم خواهیم داد.

مثال ۵. فرض کنیم p بهای قطعی فولاد امریکا در بورس نیویورک بوده، و d مدت زمان باز بودن بورس باشد (d را می‌توان یک عدد هشت رقمی گرفت، که دو رقم اول ماه، دو رقم بعدی روز، و چهار رقم آخر سال را بدهد؛ مثلاً، 10241929 عبارت است از 24 اکتبر 1929، 07041976 عبارت‌است‌از 4 ژوئیهٔ 1976، و از این قبیل.) دراین صورت، p تابعی است از d. باآنکه فرمول‌صریحی متغیرهای p و d را به‌هم ربط نمی‌دهد، همیشه می‌توان مقدار p نظیر به مقدار داده شدهٔ d را با **نگاه کردن** به مقدار منحصر فرد p در ستون مالی یک‌روزنامهٔ عصر منتشر شده در روز d یافت. منحصر به فرد بودن p تابع d بودن آن را تضمین می‌کند. این تابع را می‌توان با علامت $p = h(d)$ بیان کرد، این بار علامت h برای تابع اختیار شده است.

مثال ۶. فرض کنیم سنگی را در چاه خشک عمیقی بیاندازیم. فرض کنیم s مقدار سقوط سنگ به فوت بوده، و t زمان سپری شده به ثانیه پس از سقوط سنگ باشد. همانطور که در فیزیک دیده‌ایم، فرمول

$$s = 16t^2 \tag{۴}$$

با تقریبی مناسب، s را به عنوان تابعی از t بیان می‌کند. با اینحال، فرمول (۴) فقط برای زمانی محدود معتبر است، زیرا سنگ مآلاً به ته چاه می‌خورد. اگر چاه 64 ft عمق داشته باشد، سنگ پس از 2 sec به ته چاه رسیده و سپس بی‌حرکت می‌شود (فرض می‌کنیم برگشت نداشته باشد). در این حالت، فرمول (۴) فقط به ازای $0 \le t \le 2$ معنی دارد؛ یعنی، قلمرو تابع (۴) بازهٔ $0 \le t \le 2$ است. این را می‌توان با نوشتن

$$s = 16t^2 \qquad (0 \le t \le 2), \tag{۴'}$$

به جای (۴)، تصریح کرد. رفتار بعدی سنگ با فرمول $s = 64$، یا به‌طور دقیقتر، با

$$s = 64 \qquad (t > 2)$$

توصیف می‌شود. ضمناً"، در اینجا داشتن توابع **ثابت**، یعنی توابعی که فقط یک مقدار دارند، احساس می‌شود.

دو فرمول اخیر را می‌توان در یک فرمول تلفیق کرد:

$$s = \begin{cases} 16t^2 & ، \quad 0 \le t \le 2 \text{ اگر} \\ 64 & ، \quad t > 2 \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۴")$$

قلمرو تابع جدید بازهٔ نامتناهی $0 \le t < \infty$ است. توجه کنید که دو تابع (۴') و(۴")، اگرچه متفاوتند، ولی یک برد (یعنی بازهٔ $0 \le s \le 64$) دارند.

مسائل

فرض کنید $f(x) = x^2 + 3x + 5$. مقادیر زیر را بیابید.

۱. $f(0)$ ۲. $f(-1)$ ۳. $f(1)$

۴. $f(2)$ ۵. $f(-7)$ ۶. $f(\sqrt{3})$

فرض کنید $g(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. مقادیر زیر را بیابید.

۷. $g(-1)$ ۸. $g(0)$ ۹. $g(1)$

۱۰. $g(2)$ ۱۱. $g(3)$ ۱۲. $g(4)$

فرض کنید $h(x) = |x|/x$. مقادیر زیر را بیابید.

۱۳. $h(0)$ ۱۴. $h(1)$ ۱۵. $h(-1)$

۱۶. $h(\pi)$ ۱۷. $h(100)$ ۱۸. $h(-99)$

فرض کنید $F(s) = (s-1)/(s+1)$. مقادیر زیر را بیابید.

۱۹. $F(1)$ ۲۰. $F(0)$ ۲۱. $F(\frac{9}{10})$

۲۲. $F(-1)$ ۲۳. $F(\sqrt{2})$ ۲۴. $F(1+a)$

فرض کنید $G(t) = \sqrt{4-3t}$. مقادیر زیر را بیابید.

۲۵. $G(1)$ ۲۶. $G(0)$ ۲۷. $G(1.33)$

۲۸. $G(1.34)$ ۲۹. $G(4)$ ۳۰. $G(-4)$

فرض کنید $\phi(u) = 2u^2 - |u|$. مقادیر زیر را بیابید.

۳۱. $\phi(3)$ ۳۲. $\phi(-\frac{1}{2})$ ۳۳. $\phi(-\sqrt{5})$

۳۴. $\phi(\sqrt[4]{2})$ ۳۵. $\phi(1-\pi)$ ۳۶. $\phi(\sqrt{3}-2)$

۳۷. آیا مساحت یک دایره تابعی از محیط آن است؟

۳۸. آیا مساحت یک مثلث تابعی از محیط آن است؟

۳۹. فرض کنید c تعداد ویرگولها در صفحهٔ p این کتاب باشد. آیا c تابعی از p است؟ آیا p تابعی از c است؟

۴۰. آیا وزن یک نامهٔ سفارشی تابع هزینهٔ پست آن است؟

۴۱. فرض کنید $f(n) = a_n$ ، که در آن

$$3.a_1a_2\ldots a_n\ldots \qquad (0 \le a_n \le 9)$$

نمایش اعشاری عدد π است. کدام بزرگتر است، $f(4)$ یا $f(5)$ ؟

۴۲. تابعی که بعضی از مقادیرش در جدول زیر داده شده است:

x	0	20	—	60	80	100
y	32	68	104	140	—	212

یک تابع آشنا در زندگی روزمره است. این چه تابعی است؟ فرمولی برای بیان y به صورت تابعی از x و فرمولی برای بیان x به صورت تابعی از y بیابید. دوجای‌خالی در جدول را پر کنید. y به ازای $x = -40$ چقدر است؟

۴۳. کسر

$$\frac{f(1+a)-f(1)}{a} \qquad (a \neq 0)$$

را درصورتی حساب کنید که $f(x) = x^2$ (کسرهایی از این نوع در بررسی مشتقات ظاهر می‌شوند.)

۴۴. کسر

$$\frac{f(-2+a)-f(-2)}{a} \qquad (a \neq 0)$$

را درصورتی حساب کنید که $f(x) = x^3$.

قلمرو (طبیعی) توابع زیر را بیابید.

۴۵. $y = \dfrac{x(x+1)}{x}$

۴۶. $y = \dfrac{1}{2x-3}$

۴۷. $y = \dfrac{1}{x+|x|}$

۴۸. $y = \sqrt{x+2}$

۴۹. $y = \sqrt[3]{x+1}$

۵۰. $y = \sqrt{x^2-9}$

۵۱. $y = \sqrt{16-x^2}$

۵۲. $y = \sqrt{4x-x^2}$

۵۳. $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$

تابع $y = f(x)$ را با بازهٔ داده شده به عنوان قلمرو طبیعی‌اش بیابید.

۵۴. بازهٔ بستهٔ $[0, 1]$

۵۵. بازهٔ باز $(0, 1)$

۵۶. بازهٔ نیمباز $[0, 1)$

۵۷. بازهٔ نیمباز $(0, 1]$

۵۸. تحقیق کنید که تعاریف زیر در اساس با تعاریف این بخش سازگارند. فرض کنید f مجموعه‌ای از جفتهای مرتب متمایز از اعداد حقیقی باشد به‌طوری که هیچ دو جفت (x, y) در f یک عنصر اول نداشته باشند، و فرض کنید $D = \{x: (x, y) \in f\}$؛ یعنی، D مجموعهٔ تمام عناصر اول جفتهای در f باشد. در این صورت، گوییم f یک **تابع تعریف شده بر** D است، و D **قلمرو** f نام دارد. هرگاه (x, y) جفت مرتبی در f باشد، آنگاه y، یعنی عنصر دوم جفت، **مقدار** f در x نامیده و به صورت $f(x)$ نوشته می‌شود. مجموعهٔ $\{y: (x, y) \in f\}$، یعنی محموعهٔ تمام عناصر دوم جفتهای در f، **برد** f نامیده می‌شود.

راهنمایی. x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته بگیرید. آنچه از x می‌دانیم y را به‌طور منحصر به فرد معین می‌کند.

۲.۱ اعمال بر توابع؛ نمودار توابع

دو تابع f و g داده شده‌اند. فرض کنیم D بزرگترین مجموعه‌ای باشدکه هر دوی f و g بر آن تعریف شده‌اند (D ناتهی فرض می‌شود). در این صورت، منظور از **مجموع** $f + g$ یعنی تابعی که مقدارش در هر نقطهٔ x در D مجموع مقدار f در x و مقدار g در x است. به‌طور دقیقتر، به ازای هر x در D،

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

اعمال جبری دیگر بر f و g به همین نحوِ تعریف می‌شوند؛ یعنی،

$$(cf)(x) = cf(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$f^n(x) = \underbrace{f(x)f(x)\cdots f(x)}_{\text{عامل } n},$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

که البته در فرمول آخر فرض است که به ازای هر x در D، $g(x) \neq 0$.

مثال ۱ . فرض کنید

$$f(x) = \sqrt{x-1}, \qquad g(x) = \frac{1}{x+1}.$$

مقادیر $f+g$ و fg را در نقطهٔ $x = 5$ بیابید .

حل . چون

$$f(5) = \sqrt{5-1} = 2, \qquad g(5) = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6},$$

داریم

$$(f+g)(5) = f(5) + g(5) = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6},$$

$$(fg)(5) = f(5)g(5) = 2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}.$$

قلمرو طبیعی توابع $f+g$ و fg بـــازهٔ $[1, \infty)$ است ، زیرا این وسیعترین مجموعه‌ای است که هر دوی f و g بر آن تعریف شده‌اند .

علامت $\equiv$. منظور از $f(x) \equiv g(x)$ یعنی توابع f و g دارای قلمرو یکسان D اند و به ازای هر x در D ، $f(x) = g(x)$. فرمول $f(x) \equiv g(x)$ را ، که یک ***همانی*** نامیده می شود ، می‌خوانیم :"$f(x)$ به‌طور همانی مساوی $g(x)$ است . "تساوی توابع یعنی تساوی‌همانی"؛ بدین معنی که $f = g$ یعنی $f(x) \equiv g(x)$.

مثال ۲ . توابع $f(x) = |x|$ و $g(x) = \sqrt{x^2}$ (به‌طور همانی) مساویند . قلمـرو تعریف مشترکشان تمام خط حقیقی $-\infty < x < \infty$ است .

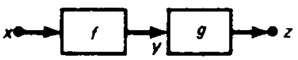
درحالاتی که از قراین روشن باشد که فرمولی یک‌همانی‌است ، علامت تساوی = اغلب به‌جای علامت‌همانی $\equiv$ به‌کارمی‌رود . مثلاً " ،تجزیهٔ آشنای فرمول $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ یک همانی است ، زیرا به ازای هر x معتبر است .

شکل ۲ روش سودمندی را برای تصور تابع f به صورت دستگاه ورودی ــ خروجی

شکل ۲

نشان می‌دهد . عدد x به دستگاه f خورانده می‌شود ، و عدد $y = f(x)$ ، **یعنی مقدار f** در x ، از آن بیرون می‌آید . این را این طور نیز توصیف **می‌کنند که می‌گویند f ، x را به** y **می‌نگارد** ، یا y نقش x **تحت f است** . اینکه f تابع است **یعنی ورودی مفروض x همواره** خروجی y را تولید می‌کند . به‌طورکلی ، ممکن است طرز کار **دستگاه را ندانیم ،و مهندسان** وقتی محتویات یک‌دستگاه مجهول یا اغماض شده‌باشد ، آن را یک " **جعبهٔ‌سیاه**"می‌نامند .

توابع مرکب . حال طبیعی است بپرسیم اگر خروجی یک دستگاه **ورودی دستگاه‌دیگری‌باشد،** چه رخ می‌دهد ، مثل شکل ۳ ، که در آن x به دستگاه f خورانده شد ، **خروجی y به دست** می‌آید ، و سپس‌آن را به دستگاه دوم g خورانده‌ایم و خروجی نهایی z **به دست‌آمده‌است.**



شکل ۳

چون $z = g(y)$ و $y = f(x)$ ، واضح است که $z = g(f(x))$. یک تابع **مانند $g(f(x))$** یک تابع مرکب نامیده می‌شود ، و این گونه توابع در سراسر حساب **دیفرانسیل و انتگرال** ظاهر می‌شوند . عمل تلفیق توابع به این نحو **ترکیب** نام دارد . **البته، در شکل ۳ باید** تأکید کنیم که خروجی "میانی" y یک ورودی **قابل قبول برای دستگاه دوم g است؛ این** بدان خاطر است‌که $g(f(x))$ **فقط به ازای مقادیری از x تعریف شده است که $f(x)$ درقلمرو** g است . به همین نحو ، می‌توان توابع مرکب دیگر ، **مانند $f(g(x))$ ، $f(f(x))$ ،و غیره** را تعریف کرد .

مثال ۳. فرض کنیم

$$f(x) = x + 1, \qquad g(x) = x^2 \tag{۱}$$

جانشانی مستقیما" نتیجه می‌دهد

$$g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \tag{۲}$$

و

$$f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1. \tag{۳}$$

به همین نحو ،

$$f(f(x)) = f(x + 1) = (x + 1) + 1 = x + 2$$

و

$$g(g(x)) = g(x^2) = (x^2)^2 = x^4.$$

علامت ٥ . تابعی که از x به $g(f(x))$ می‌رود با $g \circ f$ نموده می‌شود . لذا ،

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

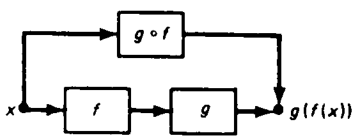
و به همین نحو ، $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ، $(f \circ f)(x) = f(f(x))$ ، و غیره . با این نماد ، (۲) خواهد شد

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 2x + 1, \qquad (۲')$$

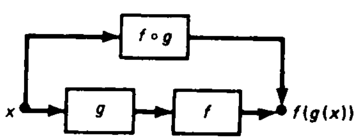
و (۳) به صورت زیر درمی‌آید :

$$(f \circ g)(x) = x^2 + 1, \qquad (۳')$$

و غیره . تعبیر $g \circ f$ به صورت یک دستگاه ورودی ـ خروجی در شکل ۴ (آ) نموده شده است . این دستگاهی است که همان اثر دو دستگاه f و g را دارد که " به‌طور سری" به هم مربوطند که f اول و g دوم است . اگر f و g با ترتیب دیگر ، اول g و بعد f ، به‌هم مربوط شوند ، اثر کل دو دستگاه با اثر دستگاه $f \circ g$ یکی است [ر.ک. شکل ۴ (ب)] .



(آ)



(ب)

شکل ۴

تابع مرکب $f \circ g$ را نباید با تابع حاصل ضرب fg اشتباه کنید (علامت ∘ در ترکیب به کار می‌رود نه در ضرب) . مثلا" ، حاصل ضرب توابع (۱) مساوی است با

$$(fg)(x) = (x + 1)x^2 = x^3 + x^2,$$

که کاملا" با توابع مرکب (۲') و (۳') متفاوت است . ترکیب توابع تعویض‌ناپذیر است ؛ یعنی ، در حالت کلی ، $f \circ g \neq g \circ f$ ، مثل توابعی که هم اکنون درنظرگرفتیم ، درحالی که ضرب توابع همیشه تعویضپذیر است $(fg = gf)$.

مثال ۴ . فرض کنیم $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = -x^2$. در این صورت ،

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{-x^2}$$

به ازای هر مقدار x جز $x = 0$ تعریف نشده است ، و $(f \circ g)(0) = 0$ ، حال آنکه

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -(\sqrt{x})^2 = -x$$

به ازای هر مقدار نامنفی x تعریف شده است .

عمل ترکیب می‌تواند شامل بیش از دو تابع باشد . در این صورت ،ترکیب مرحله به مرحله ، از چپ به راست در مورد نماد $\circ$ و از داخل به خارج در مورد پرانتزها ، انجام می‌شود .

مثال ۵ . فرض کنیم

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(x) = x^2, \qquad h(x) = \sqrt{x}.$$

در این صورت ،

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(\sqrt{x})) = f((\sqrt{x})^2) = f(x) = \frac{1}{x},$$

$$(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x)) = h\left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right) = h\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right) = h\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{|x|},$$

و غیره . توجه کنیدکه قلمرو $f \circ g \circ h$ مجموعهٔ تمام $x > 0$ های‌است ، ولی قلمرو $h \circ g \circ f$ مجموعهٔ تمام $x \neq 0$ های می‌باشد . به عنوان تمرین ، نشان دهید که ترکیب توابع **شرکتپذیر** است ،بدین معنی‌که $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ ؛ و لذا ، بدون پرانتز می‌نویسیم $f \circ g \circ h$.

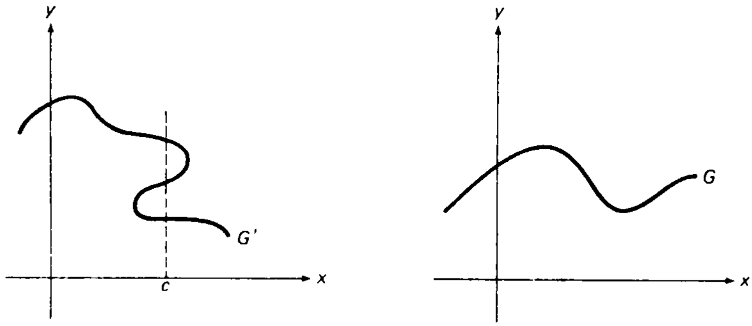
خاصیت خط قائم . حال به نمایش تصویری توابع رو می‌آوریم . منظور از ***نمودار*** تابع

$$y = f(x) \tag{۴}$$

یعنی شکلی هندسی در صفحهٔ xy که از رسم تمام نقاط (x, y) که مختصاتشان در فرمول (۴) ، به عنوان معادله‌ای از دو متغیر x و y ، صدق می‌کنند به‌دست می‌آید . نمودار تابع

$y = f(x)$ ، بـر خلاف نمودار یک معادلهٔ کلیتر از متغیرهای x و y ، خاصیت متمایز زیر را دارد: ***هیچ خط قائم ، یعنی هیچ خط موازی محور y ، نمی‌تواند نمودار $y = f(x)$ را در بیش از یک نقطه قطع کند*** . زیرا هرگاه خط قائم $x = c$ نمودار $y = f(x)$ را در دو یا چند نقطه قطع کند ، آنگاه دو یا چند مقدار از y ، یعنی عرضهای این نقاط ، نظیر یک مقدار از x ، یعنی c ، اند و این با تعریف تابع تضاد دارد .

مثال ۶ . هیچ خط قائمی منحنی G در شکل ۵ (آ) را در بیش از یک نقطه قطع نمی‌کند . لذا G . نمودار یک تابع است . از آن سو ، خطوط قائمی وجود دارند که منحنی G' در شکل ۵ (ب) را در بیش از یک نقطه قطع کنند؛ مثلاً ، خط $x = c$ نمودار G' را در سه نقطه



G' نمودار یک تابع نیست .

(ب)

G نمودار یک تابع است .

(آ)

شکل ۵

قطع می‌کند . بنابراین ، G' نمودار یک تابع **نیست** .

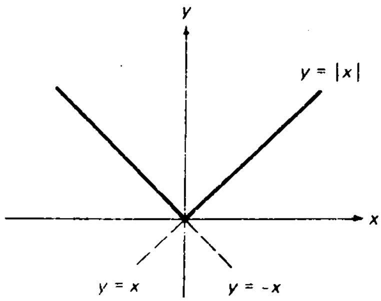
مثال ۷ . نمودار تابع قدرمطلق

$$y = |x| \tag{۵}$$

را رسم کنید .

حل . هرگاه $x \geq 0$ ، آنگاه $|x| = x$ و (۵) به خط مستقیم $y = x$ به شیب 1 مار بر مبداء تحویل می‌شود ، ولی هرگاه $x < 0$ ، آنگاه $|x| = -x$ و (۲) به خط مستقیم $y = -x$ به شیب -1 مار برمبداء تحویل خواهد شد . لذا . نمودار تابع (۵) ، که در شکل ۶ نموده شده است ، از قطعاتی از خطوط $y = x$ و $y = -x$ تشکیل شده است . توجه کنید که نمودار درمبداء ،

که در آنجا خطوط $y = x$ و $y = -x$ متقاطع اند ، گوشهٔ تیز دارد .



شکل ۶

یک تابع مانند $|x|$ ، که نمودارش از قطعاتی از خطوط مستقیم ساخته شده ، **قطعه قطعه خطی** نام دارد (اگر فقط یک خط موجود باشد ، تابع **خطی** خوانده می‌شود) .

مثال ۸. نمودار تابع

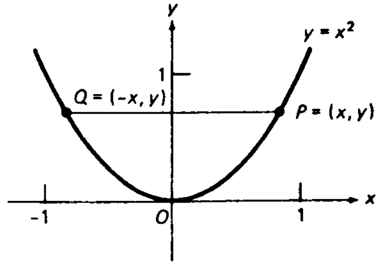
$$y = x^2 \tag{۶}$$

را رسم کنید .

حل. با تشکیل جدول کوچکی از مقادیر x و مقادیر نظیر y حاصل از فرمول (۶) آغاز می‌کنیم :

x	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
y	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	1	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$

سپس جفتهای (x, y) را به صورت نقاطی در صفحهٔ xy رسم کرده و آنها را با منحنی هموار به هم وصل می‌نماییم . با این کار منحنی شکل ۷ به دست می‌آید ، که یک **سهمی** است . چون قلمرو و برد تابع (۶) هر دو بازه‌هایی نامتناهی‌اند (از کدام نوع ؟) ، شکل در واقع بخشی از نمودار در مجاورت مبداء است . هرگاه نقطهٔ $P = (x, y)$ به‌نمودار (۶) تعلق داشته باشد ، نقطهٔ $Q = (-x, y)$ نیز دارد ، زیرا $(-x)^2 = x^2$. همچنین ، P و Q از محور y به یک فاصله بوده و بر یک خط افقی قرار دارند . لذا ، به ازای هر نقطهٔ P از نمودار در یک‌طرف محور y ، نقطه‌ای‌مانند Q از نمودار در آن طرف وجود دارد به‌طوری



شکل ۷

که محور y عمود منصف پاره‌خط PQ است. این را خلاصه کرده می‌گویند منحنی $y = x^2$ **نسبت به محور y متقارن** می‌باشد.

تبصره. این امر که با اتصال چند نقطهٔ "نوعی" به این طریق ویژگیهای اصلی نمودار (۶) ضایع نمی‌شود کاملا" موجه است، و می‌توان آن را به کمک روشهای رسم منحنی در حساب دیفرانسیل و انتگرال که در فصل ۳ عرضه شد یا توصیف هندسی سهمی در فصل ۱۰ توجیه کرد. به‌طورکلی، نمودار G هر تابع به شکل $y = ax^2 + bx + c$، که در آن a، b، و c ثابت‌اند (با $a \neq 0$) یک سهمی است؛ و همچنین است هر شکلی که از انتقال یا دوران G در صفحهٔ xy به دست آید.

توابع زوج. تابع f را زوج گوییم اگر

$$f(-x) \equiv f(x). \qquad (۷)$$

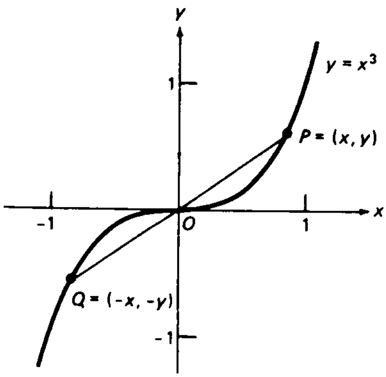
ما هم اکنون نشان دادیم که تابع $f(x) = x^2$ زوج است و نمودارش نسبت به محور y متقارن است. نمودار هر تابع زوج دیگر همین‌خاصیت تقارن را داراست. مثلا"، تابع $f(x) = |x|$ زوج است، زیرا $|-x| \equiv |x|$؛ و درنتیجه، نمودار $y = |x|$ نسبت به محور y متقارن است، و این از شکل ۶ آشکار می‌باشد.

مثال ۹. تابع زیر را رسم کنید:

$$y = x^3. \qquad (۸)$$

حل. با رسم چند نقطهٔ نوعی (x, y) که y شان از (۸) به دست آمده و وصل آنها با یک منحنی هموار، نمودار شکل ۸ به دست می‌آید. هرگاه نقطهٔ $P = (x, y)$ متعلق به نمودار

(۸) باشد ،آنگاه نقطهٔ $Q=(-x,-y)$ نیز تعلق دارد ،زیرا $(-x)^3=-x^3$ ..همچنین ،



شکل ۸

بنا برمثال ۴ ، صفحهٔ ۳۷ ، نقطهٔ میانی پارهخط PQ نقطهٔ

$$\left(\frac{x+(-x)}{2}, \frac{y+(-y)}{2}\right)=(0,0)$$

است؛ یعنی ، مبداء O . لذا ، به ازای هر نقطهٔ P از نمودار در یک طرف محور y ،نقطهای مانند Q از نمودار در طرف دیگر محور y وجود دارد بهطوری که مبداء O نقطهٔ میانی پاره خط PQ است . این را خلاصه کرده میگویند منحنی $y=x^3$ **نسبت به مبداء متقارن**است .

توابع فرد . تابع f را **فرد** گوییم اگر

$$f(-x) \equiv -f(x). \qquad (\text{۷}')$$

هم اکنون نشان دادیم که تابع $f(x)=x^3$ فرد و نمودارش نسبت به مبداء متقارن است . نمودار هر تابع فرد دیگر از همین خاصیت تقارن برخوردار است . به عنوان مثال ،هر خط $y=mx$ ماربر مبداء همین خاصیت را دارد .

خاصیت زوج یا فرد بودن توابع نقش مهمی در ریاضیات کار بسته و فیزیک دارد . به ازای تابع f ، این سئوال که " **جفتی** f چیست؟ " صرفا " یعنی " آیا f زوج استیافرد؟ " البته ، اغلب توابع نهزوجند نهفرد . این ، مثلا " ، در مورد تابع $f(x)=x^2+x^3$ درست است ، که نه در (۷) صدق میکند نه در (۷') .

توابع صعودی و نزولی . حال فرض کنیم نمودار تابع $y=f(x)$ ، با حرکت ازچپ بهراست نقطهٔ متغیر P بر نمودار آن ، که طول x آن دربازهای مانند I است ، *بالا* رود . در این

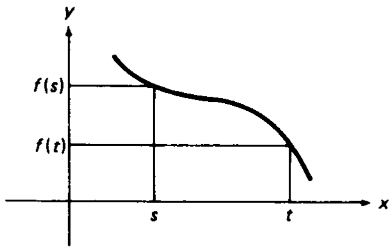
صورت ،گوییم f بر I **صعودی** است . به همین نحو ، اگر نمودار f ، با حرکت از چپ به راست نقطهٔ P ، که طول x آن در بازه‌ای مانند I است ، **پایین بیاید** ، گوییم $f(x)$ بر I **نزولی** است .

مثال ۱۰ . توابع $|x|$ و x^2 هردو بربازهٔ $0 \leq x < \infty$ صعودی‌اند ،واین فورا" از شکلهای ۶ و ۷ دیده می‌شود . همچنین ،از این اشکال معلوم می‌شود که $|x|$ و x^2 بر $-\infty < x \leq 0$ نزولی‌اند .

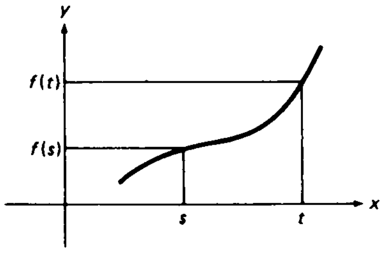
مثال ۱۱ .تابع x^3 بر تمام خط حقیقی صعودی است ، یعنی بر بازهٔ $-\infty < x < \infty$ ، و این از شکل ۸ مشهود است .

مثال ۱۲ . نمودار تابع ثابت $f(x) \equiv c$ خط افقی $y = c$ است ، که نه بالا می‌رود نه پایین می‌آید . لذا ، یک تابع ثابت (بر هر بازه) نه صعودی است نه نزولی .

به آسانی می‌توان برای تابع صعودی یا نزولی تعریف جبری آورد . تابع f تعریف شده بر مجموعهٔ X ، که معمولا" یک بازه است ، بر X **صعودی** است اگر هر وقت $s < t$ ، $f(s) < f(t)$ (در اینجا s و t هر دو در X قرار دارند) . به همین نحو ، f بر X **نزولی** است اگر هر وقت $s < t$ ، نامساوی $f(s) > f(t)$ برقرار باشد . تعبیر هندسی این تعاریف در شکل ۹ (آ) برای تابع صعودی و در شکل ۹ (ب) برای تابع نزولی شده است .



(ب) f نزولی



(آ) f صعودی

شکل ۹

مثال ۱۳ . به‌طور جبری نشان دهید که $f(x) = x^2$ بر $[0, \infty)$ صعودی و بر $(-\infty, 0]$ نزولی است .

حل. هرگاه $0 \leq s < t < \infty$ ، آنگاه $t + s > 0$ و $t - s > 0$ ؛ درنتیجه ،
$$f(t) - f(s) = t^2 - s^2 = (t + s)(t - s) > 0,$$
و لذا ، $f(s) < f(t)$. به همین نحو ، هرگاه $-\infty < s < t \leq 0$ ، آنگاه $t + s < 0$ و $t - s > 0$ ؛ درنتیجه ،
$$f(t) - f(s) = (t + s)(t - s) < 0,$$
که نامساوی $f(s) > f(t)$ را نتیجه می‌دهد .

نمودارهای انتقال. قضیهٔ زیر طرز انتقال نمودار یک تابع در جهت افقی یا قائم را نشان می‌دهد .

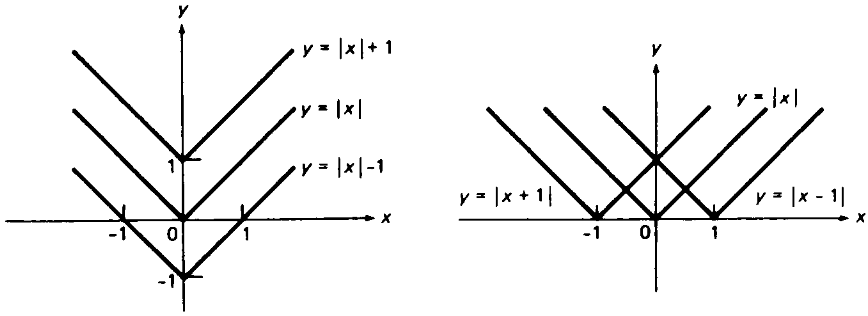
قضیهٔ ۱ (انتقال نمودار یک تابع) . *تابع*
$$y = f(x) \tag{۹}$$
با نمودار G داده شده است . نمودار تابع
$$y = f(x - c) \tag{۱۰}$$
حاصل انتقال افقی G به اندازهٔ $|c|$ واحد است ، به راست اگر $c > 0$ و به چپ اگر $c < 0$.
به‌همین‌نحو ، نمودار تابع
$$y = f(x) + c \tag{۱۰'}$$
حاصل انتقال قائم G به اندازهٔ $|c|$ واحد است ، به بالا اگر $c > 0$ و به‌پایین اگر $c < 0$.

برهان . نقطهٔ (x, y) در (۹) صدق می‌کند اگر و فقط اگر نقطهٔ افقی انتقال‌یافتهٔ $(x + c, y)$ در (۱۰) صدق کند . به همین نحو ، (x, y) در (۹) صدق می‌کند اگر و فقط اگر نقطهٔ قائم انتقال یافتهٔ $(x, y + c)$ در (۱۰') صدق نماید .

علامت منها در (۱۰) و علامت به‌علاوه در (۱۰') ممکن است معما باشند و این معما حل نمی‌شود مگر درک کنیم " y شبیه" دقیق (۱۰) عبارت است از
$$y - c = f(x)$$
تا معادلهٔ معادل (۱۰') که در آن ، طبق معمول ، ثابت c به طرف راست انتقال‌یافته‌است .

مثال ۱۴ . فرض کنیم G نمودار تابع $y = |x|$ باشد . نمودار $y = |x - 1|$ از انتقال G به اندازهٔ یک واحد به راست ، و نمودار $y = |x + 1|$ از انتقال G به اندازهٔ یک واحد به‌چپ

به دست می‌آید[ر.ک. شکل ۱۰ (آ)] . به همین نحو، نمودار $y = |x| + 1$ از انتقال G به اندازهٔ یک واحد به بالا، و نمودار $y = |x| - 1$ از انتقال G به اندازهٔ یک واحد به پایین به دست می‌آید[ر.ک. شکل ۱۰ (ب)] .



(ب) انتقالهای قائم یک نمودار — (آ) انتقالهای افقی یک نمودار

شکل ۱۰

مثال ۱۵. نمودار تابع

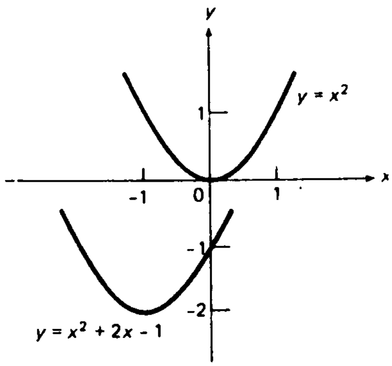
$$y = x^2 + 2x - 1 \qquad (11)$$

را رسم کنید.

حل. با کامل کردن مربع در (۱۱)، به دست می‌آوریم

$$y = (x+1)^2 - 2. \qquad (11')$$

بنابر قضیهٔ ۱، نمودار (۱۱') همان نمودار $y = (x+1)^2$ است که 2 واحد به پایین انتقال یافته است، و نمودار $y = (x+1)^2$ همان نمودار $y = x^2$ است که 1 واحد به چپ انتقال یافته است. لذا. همانطور که شکل ۱۱ نشان می‌دهد، نمودار (۱۱')، یا معادلاً (۱۱)،



شکل ۱۱

نمودار سهمی $y = x^2$ است که 1 واحد به چپ و 2 واحد به پایین انتقال یافته است .

مسائل

فرض کنید $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = 1/x$. مقادیر زیر را حساب کنید .

۱. $(f+g)(3)$ ✓
۲. $(f-g)(8)$
۳. $(fg)(-2)$ ✓
۴. $(2f+3g)(15)$
۵. $(f^2)(24)$
۶. $(f/g)(35)$ ✓

فرض کنید f و g توابع زیر باشند . آیا $f(x) \equiv g(x)$ درست است ؟

۷. $f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^2$ ✓
۸. $f(x) = x/x, g(x) \equiv 1$
۹. $f(x) = |x|/x, g(x) = x/|x|$ ✓
۱۰. $f(x) = (1+x)^2 - (1-x)^2, g(x) = 4x$ ✓

فرض کنید $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = x^2 - 1$. مقادیر زیر را حساب کنید .

۱۱. $f(f(2))$ ✓
۱۲. $f(g(1))$
۱۳. $g(f(-1))$ ✓
۱۴. $g(g(0))$
۱۵. $g(f(g(1)))$ ✓
۱۶. $f(f(f(0)))$ ✓

فرض کنید $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ و $g(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$. تابع مرکب ذکر شده را بیابید .

۱۷. $(f \circ f)(x)$ ✓
۱۸. $(f \circ g)(x)$
۱۹. $(g \circ f)(x)$ ✓
۲۰. $(g \circ g)(x)$ ✓

فرض کنید $f(x) = x^3$ ، $g(x) = x - 1$ ، و $h(x) = \sqrt{x}$. تابع مرکب ذکر شده را بیابید .

۲۱. $(f \circ g \circ h)(x)$ ✓
۲۲. $g(g(f(x)))$
۲۳. $f(f(g(x)))$ ✓
۲۴. $(h \circ g \circ f)(x)$
۲۵. $(g \circ h \circ f)(x)$ ✓
۲۶. $f(h(g(x)))$

تابع خطی $f(x) = ax + b$ را طوری بیابید که در اتحاد داده شده صدق کند .

۲۷. $f(x+1) \equiv 2x$ ✓
۲۸. $f(2x+3) \equiv 3x - 2$
۲۹. $f(1-x) \equiv 5x + 1$ ✓
۳۰. $f(f(x)) \equiv 4x + 3$

تابع داده شده را رسم کنید .

۳۱. $y = x^2 + x + 1$ ✓
۳۲. $y = 1 - x^2$
۳۳. $y = \sqrt{x^2 + 4}$ ✓
۳۴. $y = \sqrt{9 - x^2}$
۳۵. $y = \dfrac{3}{x^2 + 1}$ ✓
۳۶. $y = 3 - \sqrt{16 - x^2}$
۳۷. $y = |x+1| + |x-1|$ ✓
۳۸. $y = |x| + |x+1| + |x+2|$

معین کنید که تابع داده شده زوج یا فرد (یا هیچکدام) است .

۳۹. $f(x) \equiv 10$

۴۰. $f(x) = \frac{1}{x}$

۴۱. $f(x) = x^3 - x + 1$

۴۲. $f(x) = x^4 + x^2 - 7$

۴۳. $f(x) = x^5 - x^3 + x$

۴۴. $f(x) = x^6 + x^3$

۴۵. $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$

۴۶. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

۴۷. $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^3 + 2}}$

۴۸. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 + x}}$

۴۹. فرض کنید قلمرو تابع f چنان است که وقتی شامل x باشد ، شامل $x-$ نیز هست . نشان دهید که اتحاد

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

f را به صورت مجموعی از یک تابع زوج و یک تابع فرد نمایش می‌دهد .

تابع داده شده را به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد بنویسید .

۵۰. $f(x) = \frac{2}{x^2 - x + 1}$

۵۱. $f(x) = (1 + x)^{100}$

۵۲. تابع $y = x^2 - 4x + 3$ کجا صعودی است ؟ کجا نزولی است ؟

۵۳. تابع $y = |x + 1| + |x - 1|$ کجا صعودی است ؟ کجا نزولی است ؟ کجا ثابت است ؟ (ر.ک. مسئلهٔ ۳۷ .)

۵۴. از یک قطعه نخ به طول 12 برای ساختن یک کنتور مستطیلی ، که یکی از اضلاعش به طول x است ، استفاده شده است . بزرگترین بازهٔ $a \le x \le b$ را بیابید که مساحت داخل کنتور تابعی صعودی از x باشد .

تابع $y = g(x)$ را طوری بیابید که نمودارش حاصل دو انتقال داده شده برنمودار $y = f(x) = x^2 + x + 1$ باشد .

۵۵. 5 واحد به راست و 6 واحد به بالا

۵۶. 3 واحد به راست و 4 واحد به پایین

۵۷. 2 واحد به چپ و 7 واحد به پایین

۵۸. 10 واحد به چپ و 1000 واحد به بالا

۵۹. دو انتقال نام ببرید که نمودار $y = f(x) = x^2 + x$ را به‌نمودار $y = g(x) = x^2 + 2x$ تبدیل نمایند .

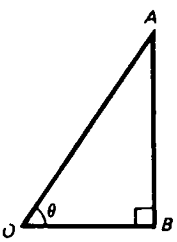
۶۰. فرض کنید $f(x+1)-f(x) \equiv 8x+3$ ، که در آن $f(x) = ax^2+bx+5$. a و b را بیابید.

۶۱. نشان دهید که تابع f بر بازهٔ I صعودی است اگر و فقط اگر $-f$ بر I نزولی باشد.

۶۲. نشان دهید که تابع f با علامت ثابت (یعنی، تابعی که مقادیرش یا همه مثبت‌اند یا همه منفی) بر بازهٔ I صعودی است اگر و فقط اگر متقابلش $1/f$ بر I نزولی باشد.

۳.۱ توابع مثلثاتی

فرض کنیم OAB مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر OA بوده، و θ (تتای کوچک یونانی) زاویهٔ حاده در رأس O باشد، مثل شکل ۱۲. در این صورت، با گرفتن θ به عنوان متغیر مستقل،



شکل ۱۲

توابع مثلثاتی زیر را معرفی می‌کنیم. ابتدا **سینوس** و **کسینوس** θ را با نسبتهای زیر معرفی می‌کنیم:

$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{وتر}} = \frac{|AB|}{|OA|}, \qquad \cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور } \theta}{\text{وتر}} = \frac{|OB|}{|OA|}.$$

سپس **تانژانت** و **کتانژانت** θ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta}, \tag{۱}$$

و **سکانت** و **کسکانت** θ را به صورت زیر:

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}. \tag{۲}$$

برحسب مثلث OAB،

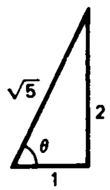
$$\tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{ضلع مجاور } \theta} = \frac{|AB|}{|OB|},$$

و

$$\cot\theta = \frac{|OB|}{|AB|}, \qquad \sec\theta = \frac{|OA|}{|OB|}, \qquad \csc\theta = \frac{|OA|}{|AB|}$$

تناسب این شش تعریف توابع مثلثاتی مبتنی براین امر است که تمام مثلثهای قائم‌الزاویه دارای زاویهٔ حادهٔ θ متشابه‌اند (چرا؟)

مثال ۱ . در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل ۱۳ ، داریم



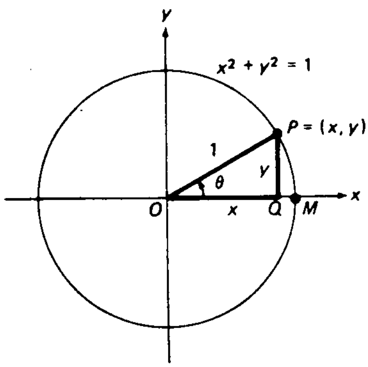
شکل ۱۳

$$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \tan\theta = 2,$$

$$\cot\theta = \frac{1}{2}, \qquad \sec\theta = \sqrt{5}, \qquad \csc\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

توجه کنید که چون طول اضلاع مثلث 1 و 2 است ، از قضیهٔ فیثاغورس معلوم می‌شود که طول وتر مساوی است با $\sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}$.

فرض کنید OAB را با مثلث قائم‌الزاویه و متشابه OPQ به طول وتر 1 عوض کرده باشیم . در این صورت ، OPQ را می‌توان در دایرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 = 1$ چنان جا داد که O مرکز دایره ، OP شعاع دایره ، و OQ در امتداد محور مثبت x واقع باشد ، مثل شکل ۱۴ .



شکل ۱۴

فرض کنیم نقطهٔ P به طول x و عرض y باشد. در این صورت،

$$\cos\theta = \frac{|OQ|}{|OP|} = \frac{x}{1}, \qquad \sin\theta = \frac{|PQ|}{|OP|} = \frac{y}{1},$$

درنتیجه،

$$\cos\theta = x, \qquad \sin\theta = y. \tag{۳}$$

برای تعریف سینوس و کسینوس به ازای θ ی دلخواه، که فقط زاویهٔ θ حاده (یعنی، بین $0°$ و $90°$) نباشد، کافی است استفاده از فرمولهای (۳) را ادامه دهیم. در این وضع، فرمولهای (۱) و (۲) را تعاریف تانژانت، کتانژانت، سکانت، و کسکانت به ازای مقادیر دلخواه θ می‌گیریم. مثل همیشه، زوایا وقتی در جهت خلاف عقربه‌های ساعت سنجیده می‌شوند مثبت، و وقتی در جهت عقربه‌های ساعت سنجیده می‌شوند منفی گرفته می‌شوند.

به‌عنوان نتیجه‌ای فوری از این تعاریف، فرمولهای مهم زیر را به دست می‌آوریم:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \tag{۴}$$

$$|\cos\theta| \le 1, \qquad |\sin\theta| \le 1, \tag{۵}$$

که به ازای هر θ معتبرند. در واقع، طبق (۳)، $\cos\theta$ و $\sin\theta$ مختصات x و y نقطهٔ متغیر P از دایرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 = 1$ اند، و این بی‌درنگ فرمول (۴) را ایجاب می‌کند، که در آن رسم است که به‌جای $(\cos\theta)^2$ و $(\sin\theta)^2$ می‌نویسند $\cos^2\theta$ و $\sin^2\theta$. همچنین، واضح است که مختصات هر نقطهٔ $P = (x, y)$ از دایرهٔ یکه در نامساویهای $|x| \le 1, |y| \le 1$، که معادل (۵) اند، صدق می‌کنند. سایر فرمولهای مثلثاتی را می‌توان از (۴) نتیجه گرفت. مثلاً،

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta, \tag{۶}$$

زیرا، به کمک (۱)، (۲)، و (۴)،

$$1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta.$$

به همین نحو، همانطور که به آسانی معلوم می‌شود،

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta. \tag{۶'}$$

مقیاس رادیان. در شکل ۱۴ فرض کنیم $M = (1, 0)$ نقطه‌ای از دایرهٔ یکه باشد که بر محور مثبت x قرار دارد. منظور از مقیاس رادیان زاویهٔ θ یعنی طول قوس $\widehat{MP}$ به صورت یک عدد «بدون بعد»؛ یعنی، بدون بعد فیزیکی طول (که مثلاً به اینچ یا متر است).

چون محیط دایرهٔ یکه 2π است، پس 2π رادیان $= 360$ درجه، یا معادلاً π رادیان $= 180$ درجه. بنابراین،

$$0.01745 \text{ رادیان} \approx \frac{\pi}{180} \text{ رادیان} = \text{۱ درجه}$$

$$59.29578 \text{ درجه} \approx \frac{180}{\pi} \text{ درجه} = \text{۱ رادیان}$$

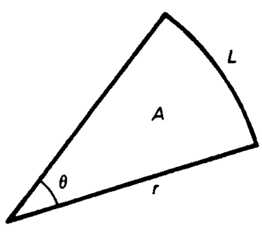
که در آن علامت $\approx$ تساوی تقریبی است. برای احتراز از خلط درجه و رادیان، این قرارداد را می‌پذیریم که **زاویه به رادیان است مگر آنکه همراه با کلمهٔ " درجه " یا علامت درجه ° باشد**. لذا، با این فرض،

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}\frac{180}{\pi} \text{ درجه} = 30°, \qquad \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\frac{180}{\pi} \text{ درجه} = 45°,$$

$$60° = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{3}, \quad 90° = 90\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{2},$$

و از این قبیل.

به‌طورکلی، فرض کنیم دایرهٔ شکل ۱۴ به شعاع r باشد؛ درنتیجه، $|OP| = r$، $M = (r, 0)$ به جای $|OP| = 1$، $M = (1, 0)$، و L طول قوس $\widehat{MP}$ باشد. دراین‌صورت، مقیاس رادیان θ مساوی نسبت L/r تعریف می‌شود (اگر $r = 1$، این به تعریف قبل تحویل می‌شود). واحد طول در نسبت L/r حذف می‌شود، و به این دلیل مقیاس رادیان " بدون بعد " است. حال می‌توان برای طول L یک قوس مستدیر به شعاع r که، مثل شکل ۱۵، در مرکزش زاویه‌ای برابر θ رادیان دربردارد یک‌فرمول‌نوشت. در واقع، چون $\theta = L/r$



شکل ۱۵

فوراً معلوم می‌شود که

$$L = r\theta. \tag{۷}$$

همچنین، برای مساحت A یک قطاع مستدیر به شعاع r که زاویهٔ مرکزی‌اش θ رادیان است فرمول ساده‌ای وجود دارد (ر.ک. شکل ۱۵). واضح است که A با θ نسبت مستقیم

داشته و وقتی $\theta = 0$ مساوی صفر است. بنا براین، $A = k\theta$ ، که در آن k یک ثابت تناسب مثبت است. برای تعیین k ، ملاحظه می‌کنیم که وقتی $\theta = 2\pi$ ، $A = \pi r^2$ ، زیرا مساحت یک قرص مستدیر کامل به شعاع r مساوی πr^2 است. لذا، $\pi r^2 = 2\pi k$ ، یا معادلاً " $k = \frac{1}{2}r^2$ و فرمول $A = k\theta$ خواهد شد

$$A = \frac{1}{2} r^2\theta. \tag{۸}$$

تبصره. فرمولهایی که بعداً " برای محاسبهٔ حدود، مشتقات، و انتگرالهای توابع مثلثاتی به دست می‌آیند همه براین فرض تلویحی استوارند که زوایا به رادیان اند، و در صورتی که به درجه باشند شکل متفاوت پیچیده‌تری را به خود می‌گیرند. لذا، درحل مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال باید از مقیاس رادیان استفاده کرد، که اغلب در این مورد اشتباه می‌شود. با اینحال، اغلب می‌خواهند *جوابهای* مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال را به درجه بیان کنند، زیرا در زندگی روزمره مقیاس درجه از مقیاس رادیان معمولتر است.

فرض کنیم n عدد صحیح دلخواهی باشد. با افزودن $2n\pi$ رادیان به زاویهٔ θ در شکل ۱۴ موجب می‌شود که شعاع OP ، $|n|$ دوران کامل حول مبداء درجهت خلاف عقربه‌های ساعت بزند اگر $n > 0$ و در جهت عقربه‌های ساعت بزند اگر $n < 0$ (OP در صورت $n = 0$ اصلاً " تغییر نمی‌کند) . این تأثیری بر موضع نهایی OP ندارد؛ درنتیجه، اثری بر مختصات P ، یعنی بر مقادیر کسینوس و سینوس، نخواهد داشت. بنا براین، به‌ازای هر عدد صحیح n ،

$$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta, \qquad \sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$$

همچنین، شعاع OP قائم است اگر و فقط اگر $\theta = (n + \frac{1}{2})\pi$ و افقی است اگـر و فقط اگر $\theta = n\pi$ ، که در آن n عدد صحیح دلخواهی است. چون $P = (\cos\theta, \sin\theta)$ ، پس $\cos\theta = 0$ اگروفقط اگر $\theta = (n + \frac{1}{2})\pi$ ، درحالی‌که $\sin\theta = 0$ اگروفقط اگر $\theta = n\pi$. بخصوص

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

و

$$\sin 0 = \sin\pi = 0.$$

شعاع OP در امتداد محور مثبت x است اگر $\theta = 0$ و در امتداد محور منفی x است اگـر $\theta = \pi$ ؛ درنتیجه،

$$\cos 0 = 1, \qquad \cos\pi = -1,$$

درحالی که OP در امتداد محور مثبت y است اگر $\theta = \pi/2$ و درامتداد محور منفی y است

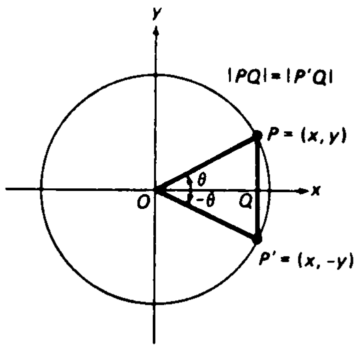
اگر $\theta = 3\pi/2$ ؛ درنتیجه ،

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1, \qquad \sin\frac{3\pi}{2} = -1.$$

همچنین ، تغییر θ به $-\theta$ موجب تبدیل نقطهٔ $P = (x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ بـه نقطهٔ $P' = (x, -y) = (\cos\theta, -\sin\theta)$ می‌شـود ، که منعکس آن نسبت به محور x است (ر . ک . شکل ۱۶) . اما $P' = (\cos(-\theta), \sin(-\theta))$ ؛ و لذا ، طبق تساوی جفتهای مرتب ،

$$\cos(-\theta) = \cos\theta, \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta. \tag{۹}$$

اولین فرمول از این فرمولهای مهم به ما می‌گوید که $\cos\theta$ یک تابع زوج است ، و دومین فرمول می‌گوید که $\sin\theta$ یک تابع فرد می‌باشد .



شکل ۱۶

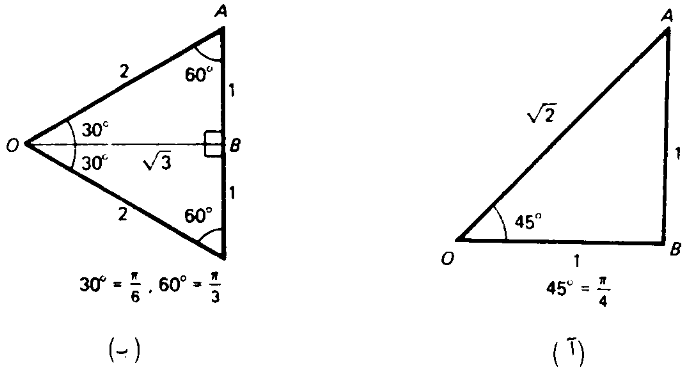
علاوه‌بر مضارب صحیح $\pi/2$ ، چند مقدار خاص دیگری از θ وجود دارند کـه مقادیر توابع مثلثاتی در آنها را می‌توان بدون مراجعه به جداول عددی یا ماشین حسـاب علمی حساب کرد . شکل ۱۷ (آ) یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به طول ضلع ۱ را نشان می‌دهد ، که در آن می‌توان دید

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{|AB|}{|OA|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \tan\frac{\pi}{4} = \frac{|AB|}{|OB|} = 1,$$

و شکل ۱۷ (ب) یک مثلث متساوی‌الاضلاع دو نیم شده به طول ضلع 2 را نشان می‌دهد ، که در آن می‌توان دید

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{|AB|}{|OA|} = \frac{1}{2}, \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{|AB|}{|OB|} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{|AB|}{|OA|} = \frac{1}{2}, \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \frac{|OB|}{|AB|} = \sqrt{3}.$$



شکل ۱۷

این مقادیر از توابع سینوس، کسینوس، و تانژانت را باید به‌خاطر سپرد ، زیرا با آنها مکرر مواجه می‌شویم .

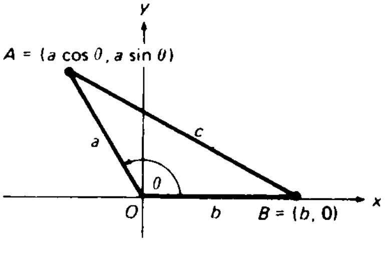
قانون کسینوسها . تعمیم زیر از قضیهٔ فیثاغورس ابزار مفیدی برای حل مسائل مثلثاتی است .

قضیهٔ ۲ (قانون کسینوسها) . *فرض کنیم OAB مثلثی (نه لزوماً " قائم‌الزاویه) بوده ، و θ زاویه‌ای به رأس O باشد . در این صورت ،*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta, \qquad (۱۰)$$

که در آن $a = |OA|$ ، $b = |OB|$ ، و $c = |AB|$.

برهان . مثلث OAB به رأس O را در مبداء صفحهٔ xy و ضلع OB را درامتدادمحور مثبت x قرار می‌دهیم . در این صورت ، مثل شکل ۱۸ ، و به کمک فرمول (۲) ، صفحهٔ ۳۶ ، برای



شکل ۱۸

مجذور فاصلهٔ بین دو نقطه، درمی‌یابیم که

$$c^2 = |AB|^2 = (a\cos\theta - b)^2 + (a\sin\theta)^2$$
$$= a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + b^2 - 2ab\cos\theta,$$

که، به خاطر (۴)، معادل (۱۰) می‌باشد.

توجه کنید که اگر $\theta = \pi/2$ ، مثلث OAB قائم‌الزاویه شده و قانون کسینوسها به قضیهٔ فیثاغورس $c^2 = a^2 + b^2$ تحویل می‌شود.

مثال ۲. زاویهٔ بین دو ضلع یک مثلث $60°$ است. اگر این اضلاع به طولهای 2 و 3 باشند، طول ضلع سوم چقدر است؟

حل. فرض کنیم a و b طول اضلاع داده شده بوده، و c طول ضلع سوم باشد. می‌دانیم که $a = 2$ ، $b = 3$ ، و نیز $\theta = \pi/3$. بنابراین، طبق فرمول (۱۰)،

$$c^2 = 2^2 + 3^2 - 2(2)(3)\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) = 4 + 9 - 12\left(\frac{1}{2}\right) = 7,$$

درنتیجه، $c = \sqrt{7}$.

به کمک قضیهٔ ۲، می‌توان فرمول کلیدی

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{11}$$

برای کسینوس تفاضل بین دو زاویهٔ α و β (حروف کوچک یونانی آلفا و بتا) را ثابت‌کرد. مثلث OAB درشکل ۱۹ را درنظرمی‌گیریم، که در آن O مبداء است، $A = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ و $B = (\cos\beta, \sin\beta)$. زاویهٔ مقابل به ضلع AB مساوی $\theta = \alpha - \beta$ است، و $|OA| = |OB| = 1$. از یک سو، طبق قانون کسینوسها که بر مثلث OAB اعمال شده،

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB|\cos\theta = 2 - 2\cos(\alpha - \beta),$$

و از سوی دیگر، بنابر فرمول مجذور فاصلهٔ بین نقاط A و B ،

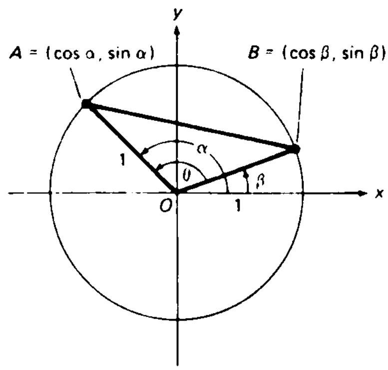
$$|AB|^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$
$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta$$
$$= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta) - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$$
$$= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta),$$

پس نتیجه می‌شود که

$$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta),$$

که با (۱۱) معادل است.

شکل ۱۹ با این فرض رسم شده که $0 < \beta < \alpha$. لازم است حالات دیگر را در نظر گرفته و متقاعد شوید که در هر مورد همان فرمول (۱۱) به دست می‌آید.



شکل ۱۹

از تعویض β با $-\beta$ در (۱۱) و استفاده از فرمولهای (۹)، فرمول لنگه

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad (۱۱')$$

به دست می‌آید. برای به دست آوردن فرمولهایی برای $\sin(\alpha + \beta)$ و $\sin(\alpha - \beta)$، ابتدا در (۱۱) اختیار می‌کنیم $\alpha = (\pi/2) + \theta, \beta = \pi/2$. این کار نتیجه می‌دهد

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\cos\frac{\pi}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\sin\frac{\pi}{2},$$

یا، معادلاً،

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta, \qquad (۱۲)$$

زیرا $\cos(\pi/2) = 0$ و $\sin(\pi/2) = 1$. حال در (۱۱') اختیار می‌کنیم $\alpha = \pi/2, \beta = \theta$، نتیجه می‌دهد

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta,$$

یا، معادلاً،

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta. \qquad (۱۲')$$

حال، از تعویض α با $(\pi/2)+\alpha$ در (۱۱') ، به دست می‌آوریم

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\beta,$$

که پس از اعمال (۱۲) و (۱۲') و ضرب در -1 ، به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \qquad (۱۳)$$

بالاخره، از تعویض β با $-\beta$ در (۱۳) ، فرمول لنگهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \qquad (۱۳')$$

قوانین جمع . فرمولهای (۱۱) ، (۱۱') ، (۱۳) ، و (۱۳') ، که اکنون آنها را به شکل مناسبتری برای به خاطر آوردن درمی‌آوریم ، **قوانین جمع** برای توابع سینوس و کسینوس نامیده می‌شوند .

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

جدول زیر شامل چند فرمول مثلثاتی مفید دیگر است و به‌طرز اثبات آنها اشاره شده است .

فرمول	برهان
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$	در فرمول مربوط به $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ ، θ را به $-\theta$ تغییر دهید .
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$	در فرمول مربوط به $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ ، θ را به $-\theta$ تغییر دهید .
$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$	در فرمول مربوط به $\sin(\alpha+\beta)$ ، $\alpha=\pi, \beta=\theta$ را اختیار کنید .
$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$	در فرمول فوق ، θ را به $-\theta$ تغییر دهید .
$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$	در فرمول مربوط به $\cos(\alpha+\beta)$ ، $\alpha=\pi, \beta=\theta$ را اختیار کنید .
$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$	در فرمول فوق ، θ را به $-\theta$ تغییر دهید .

فرمولهای زاویهٔ مضاعف. با فرض $\alpha = \beta = \theta$ در فرمولهای مربوط به $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ ، **فرمولهای مهم زاویهٔ مضاعف** به دست می‌آیند:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \tag{۱۴}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta. \tag{۱۴'}$$

باتوجه به

$$1+\cos 2\theta = 1+(\cos^2\theta-\sin^2\theta) = (1-\sin^2\theta)+\cos^2\theta = 2\cos^2\theta,$$
$$1-\cos 2\theta = 1-(\cos^2\theta-\sin^2\theta) = (1-\cos^2\theta)+\sin^2\theta = 2\sin^2\theta$$

به جفت فرمول مفید دیگری می‌رسیم:

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}, \qquad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}.$$

ما قبلاً فرمولی برای سینوس تفاضل بین زوایا داشتیم. همچنین، می‌توان فرمولی برای تفاضل بین دو سینوس به دست آورد. در واقع،

$$\begin{aligned}\sin\alpha - \sin\beta &= \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\ &= \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\ &\quad - \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},\end{aligned}$$

و لذا، پس از حذف یک جفت جمله،

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{۱۵}$$

بعداً خواهید دید که این فرمول مفید است.

فرمولهای فوق، که مربوط به سینوس و کسینوس اند، می‌توانند در اثبات فرمولهای مشابهی در باب سایر توابع مثلثاتی مفید واقع شوند.

مثال ۳. نشان دهید که

$$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta, \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\cot\theta,$$

و

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}. \tag{۱۶}$$

حل . با استفاده از فرمولهای نظیر به سینوس و کسینوس، داریم

$$\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin(\pi-\theta)}{\cos(\pi-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta,$$

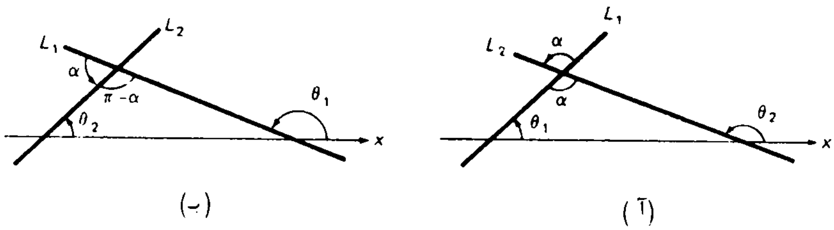
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\cot\theta.$$

همچنین،

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta},$$

که پس از تقسیم صورت و مخرج بر حاصل ضرب $\cos\alpha\cos\beta$ ، به فرمول (۱۶) تحویل می‌شود .

زاویهٔ بین دو خط . حال، به عنوان کاربردی از فرمول (۱۶)، زاویهٔ بین دو خط را مورد بحث قرار می‌دهیم . فرض کنیم L_1 و L_2 دو خط متقاطع در نقطهٔ P باشند، که می‌توان فرض کرد بالای محور x باشد (مثل برهان قضیهٔ ۹، صفحهٔ ۵۳) . در این صورت، کوچکترین زاویهٔ α که L_1 می‌تواند حول P در جهت خلاف عقربه‌های ساعت بچرخد تا بر L_2 منطبق شود *زاویهٔ* بین L_1 و L_2 ، یا دقیقتر *زاویه از* L_1 به L_2 ، نام دارد . (زاویهٔ بین دو خط موازی یا منطبق 0 تلقی می‌شود .) از شکل ۲۰ واضح است که α همواره در بازهٔ $0\le\alpha<\pi$ قرار دارد . فرض کنیم θ_1 میل L_1، و θ_2 میل L_2 باشد . هرگاه مثل شکل ۲۰ (آ) $\theta_1<\theta_2$ ، آنگاه $\theta_2=\alpha+\theta_1$ یا $\alpha=\theta_2-\theta_1$ (ر.ک. برهان قضیهٔ



شکل ۲۰

مذکور)، حال آنکه هرگاه مثل شکل ۲۰ (ب) $\theta_1>\theta_2$ ، آنگاه $\theta_1=(\pi-\alpha)+\theta_2$ یا $\alpha=\pi+(\theta_2-\theta_1)$. فرض کنیم L_1 و L_2 مایل و غیرعمود به شیبهای m_1 و m_2 باشند؛ درنتیجه، $m_1=\tan\theta_1$ و $m_2=\tan\theta_2$. هرگاه $\theta_1<\theta_2$ ، آنگاه، به‌کمک رابطهٔ

$\cdot$ (۱۶)

$$\tan \alpha = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2},$$

حال آنکه هرگاه $\theta_1 > \theta_2$ ، آنگاه

$$\tan \alpha = \tan[\pi + (\theta_2 - \theta_1)] = \frac{\sin[\pi + (\theta_2 - \theta_1)]}{\cos[\pi + (\theta_2 - \theta_1)]}$$

$$= \frac{-\sin(\theta_2 - \theta_1)}{-\cos(\theta_2 - \theta_1)} = \tan(\theta_2 - \theta_1),$$

درنتیجه، مثل قبل،

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}. \qquad (۱۷)$$

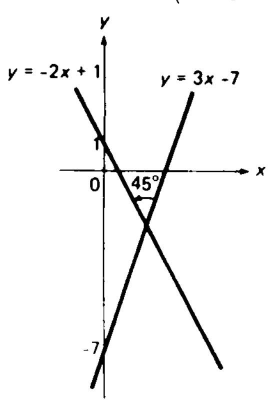
توجه کنید که $m_1 m_2 \neq -1$ ، زیرا L_1 و L_2 غیر عمودند؛ درنتیجه، مخرج $1 + m_1 m_2$ در (۱۷) ناصفر است.

مثال ۴. زاویهٔ α ی بین خطوط $y = 3x - 7$ و $y = -2x + 1$ را بیابید.

حل. اولین خط به شیب $m_1 = 3$ ، و دومین خط به شیب $m_2 = -2$ است. با گذاردن این مقادیر در فرمول (۱۷)، به دست می‌آوریم

$$\tan \alpha = \frac{-2 - 3}{1 - 6} = 1.$$

چون $0° \leq \alpha < 180°$ ، نتیجه می‌گیریم که زاویهٔ α مساوی $45°$ است، که از خط اول به خط دوم سنجیده می‌شود (ر.ک. شکل ۲۱).



شکل ۲۱

مسائل

زاویهٔ داده شده را از درجه به رادیان ببرید.

۱. 15° ۲. 150° ۳. 1500°

۴. -72° ۵. -220° ۶. 423°

زاویهٔ داده شده را از رادیان به درجه ببرید.

۷. $\pi/15$ ۸. $\pi/45$ ۹. $-\pi/12$

۱۰. -5 ۱۱. π^2 ۱۲. 60

طول L قوس مستدیر و مساحت A قطاع مستدیر با شعاع r و زاویهٔ مرکزی θ ی داده شده را بیابید.

۱۳. $r = 2, \theta = \pi/4$ ۱۴. $r = 3, \theta = \pi/6$

۱۵. $r = 5, \theta = 120^\circ$ ۱۶. $r = 10, \theta = 5\pi/6$

۱۷. $r = 50, \theta = 1^\circ$ ۱۸. $r = 4, \theta = 36^\circ$

مثلث به اضلاع a, b, c و زاویهٔ θ مقابل ضلع c داده شده است.

۱۹. c را درصورتی بیابید که $a = 3, b = 5, \theta = \pi/6$

۲۰. c را درصورتی بیابید که $a = 4, b = 6, \theta = \pi/4$

۲۱. b را درصورتی بیابید که $a = 5, c = 7, \theta = 2\pi/3$

۲۲. a را درصورتی بیابید که $b = 6, c = 9, \theta = \pi/3$

۲۳. a را درصورتی بیابید که $b = 10, c = 15, \theta = 3\pi/4$

۲۴. θ را درصورتی بیابید که $a = 5, b = 12, c = 13$

رسم است که برای اضلاع و طولشان یک علامت به کار می‌رود.

در مسائل ۲۵ تا ۴۸ عبارت داده شده را بدون توسل به جدول یا ماشین حساب محاسبه کنید.

۲۵. $\tan 135^\circ$ ۲۶. $\sec 45^\circ$ ۲۷. $\csc 60^\circ$

۲۸. $\cot 30^\circ$ ۲۹. $\csc 30^\circ$ ۳۰. $\cot 45^\circ$

۳۱. $\sec \frac{\pi}{6}$ ۳۲. $\tan \frac{2\pi}{3}$ ۳۳. $\sec \frac{\pi}{3}$

۳۴. $\tan \frac{5\pi}{6}$ ۳۵. $\cot \frac{\pi}{3}$ ۳۶. $\csc \frac{\pi}{4}$

۳۷. $\cos (-120^\circ)$ ۳۸. $\sin 765^\circ$ ۳۹. $\sec 150^\circ$

۴۰. $\cot 210^\circ$ ۴۱. $\csc 135^\circ$ ۴۲. $\tan 300^\circ$

۴۳. $\cot \left(-\frac{35\pi}{4}\right)$ ۴۴. $\sin \left(\frac{17\pi}{3}\right)$ ۴۵. $\tan \frac{19\pi}{6}$

۴۶. $\csc\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$ ۴۷. $\sec\frac{11\pi}{3}$ ۴۸. $\cos\frac{99\pi}{4}$

آیا عدد داده شده مثبت، منفی، یا صفر است؟

۴۹. $\sin 200\pi$ ۵۰. $\sec 5$ ۵۱. $\cos 899°$ ۵۲. $\sin 2^4$

۵۳. مثلثی به اضلاع a, b, c و زوایای A, B, C مقابل به این اضلاع داده شده‌است. قانون سینوسها را تحقیق کنید:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

۵۴. نشان دهید که مساحت مثلث مسئلهٔ قبل مساوی است با

$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

۵۵. مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع s چقدر است؟

۵۶. مساحت یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه به طول وتر h چقدر است؟

اتحاد مثلثاتی داده شده را ثابت کنید.

۵۷. $\sin 3\theta = 3 \sin\theta - 4\sin^3\theta$

۵۸. $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

۵۹. $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

۶۰. $\sin 4\theta = 8\sin\theta\cos^3\theta - 4\sin\theta\cos\theta$

۶۱. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

۶۲. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

۶۳. $\tan\theta = \frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$ ۶۴. $\tan\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

۶۵. $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ ۶۶. $\tan 2\theta = \frac{2}{\cot\theta - \tan\theta}$

زاویهٔ بین جفت خطوط داده شده، که از خط اول به خط دوم سنجیده می‌شود، را بیابید.

۶۷. $5x - y + 7 = 0,\ 3x + 2y = 0$

۶۸. $3x - 2y + 7 = 0,\ 2x + 3y - 3 = 0$

۶۹. $2x - y - 4 = 0,\ x - 3y + 5 = 0$

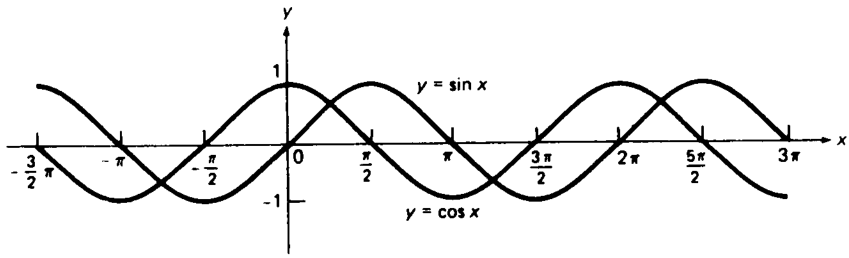
۷۰. $\sqrt{3}x - y + 1 = 0,\ \sqrt{3}x + y - 1 = 0$

۷۱. تقریب $\frac{355}{113} \approx \pi$ با کمال تعجب دقیق است. چقدر دقیق؟

۷۲. نشان دهید که طول شیار مارپیچ در یک صفحهٔ گرامافون 12 اینچی حدود یکچهارم میل است. فرض کنید صفحه 20 دقیقه طول بکشد، در 2 اینچی مرکز تمام شود، و سرعتش rpm $33\frac{1}{3}$ (دور بر دقیقه) باشد.

۴۰۱ مطالب دیگر در باب توابع مثلثاتی

حال نمودار توابع مثلثاتی را بررسی می‌کنیم، متغیر مستقل را به جای θ با x نشان داده، و فرض می‌کنیم x به رادیان باشد. بحث را با سینوس و کسینوس آغاز می‌کنیم. نمودارهای $\sin x$ و $\cos x$ در شکل ۲۲ و در یک دستگاه مختصات دکارتی نموده شده‌اند، و هریک را



شکل ۲۲

می‌توان مستقیما " از تعبیر هندسی توابع یا غیرمستقیم به کمک ماشین حساب علمی یا جداول توابع مثلثاتی به دست آورد. هر نمودار یک منحنی است که به‌طور مرتب بالا و پایین می‌رود. البته، هیچ شکلی نمی‌تواند بیش از قسمتی از نمودار تابعی مانند $\sin x$ که بر تمام خط حقیقی تعریف شده‌است را نشان دهد، ولی آنچه رخ می‌دهد واضح است. بخشی از $\sin x$ که روی هر بازهٔ

$$2n\pi \le x \le 2(n+1)\pi \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

است نسخهٔ کامل بخشی از آن است که روی بازهٔ $0 \le x \le 2\pi$ قرار دارد، و همین امر در مورد نمودار $\cos x$ درست است.

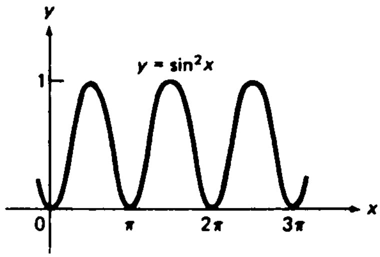
توابع متناوب. این خاصیت تکراری نمودارهای سینوس و کسینوس (و توابع بسیار دیگر، از جمله توابع مثلثاتی دیگر) **تناوب** نام دارد. به‌طور دقیقتر، گوییم تابع f **متناوب**، با دورهٔ **تناوب** p ($p \neq 0$) است اگر

$$f(x+p) \equiv f(x),$$

یعنی، اگر p را به شناسهٔ f بیفزاییم، مقدارش تغییر نکند: در اینجا فرض است که قلمرو

f در صورت شامل بودن x حاوی $x \pm p$ باشد. با این زبان، توابع $\sin x$ و $\cos x$ هر دو متناوب‌اند، با دورهٔ تناوب 2π . این توابع متناوب با دورهٔ تناوب $2n\pi$ ،که n عدد صحیح مثبت یا منفی دلخواهی است، نیز می‌باشند. کوچکترین دورهٔ تناوب مثبت یک تابع متناوب دورهٔ *تناوب اساسی* آن نام دارد. از شکل ۲۲ واضح است که دورهٔ تناوب اساسی $\sin x$ و $\cos x$ مساوی 2π است.

مثال ۱. شکل ۲۳ نشان می‌دهد که دورهٔ تناوب اساسی $\sin^2 x$ مساوی π ، یعنی نصف



شکل ۲۳

دورهٔ تناوب اساسی خود $\sin x$ است.

اختیاری. این مطلب را می‌توان به‌طور جبری به صورت زیر دید. عدد π دورهٔ تناوب $\sin^2 x$ است، زیرا $\sin^2 (x + \pi) \equiv (-\sin x)^2 \equiv \sin^2 x$. فرض کنیم $\sin^2 x$ دورهٔ تناوب مثبت p کوچکتر از π دارد. پس

$$\sin^2 (x + p) \equiv \sin^2 x,$$

که در آن $0 < p < \pi$ ، با اختیار $x = 0$ در آخرین فرمول، به دست می‌آوریم

$$\sin^2 p = \sin^2 0 = 0,$$

یا معادلاً $\sin p = 0$. اما این ممکن نیست، زیرا $\sin p$ به ازای $0 < p < \pi$ نا صفر است. بنابراین، π **کوچکترین** دورهٔ تناوب مثبت $\sin^2 x$ می‌باشد.

توابع کراندار و بی‌کران. نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ هردو به نوار افقی $-1 \le y \le 1$ محدود شده‌اند. این نظیر آن است که بگوییم به ازای هر x ، $|\sin x| \le 1$ و $|\cos x| \le 1$ (ر.ک. صفحهٔ ۸۸). اگر نمودار تابع $y = f(x)$ کاملاً در نوار افقی $-C \le y \le C$ جا

داشته باشد، یا معادلاً، به ازای هر x، $|f(x)| \le C$، گوییم f *کراندار* است، در غیر این صورت گوییم f *بی‌کران* است. به‌طورکلی، گوییم تابع $y = f(x)$ *برب‌ازهٔ* I *کراندار* است اگر $C > 0$ ای، $-C \le f(x) \le C$، یا معادلاً، به ازای جمیع مقادیر x در I و $|f(x)| \le C$، اما در غیر این صورت گوییم f *بر* I *بی‌کران* می‌باشد.

مثال ۲. تابع خطی

$$f(x) = mx + b \qquad (m \neq 0)$$

بر $[-1, 1]$ کراندار و بر $[0, \infty)$ بی‌کران است. به‌طورکلی، f بر هر بازهٔ متناهی کراندار و بر بازهٔ نامتناهی بی‌کران است.

به‌خاطر قضیهٔ ۱، صفحهٔ ۸۲، و فرمولهای

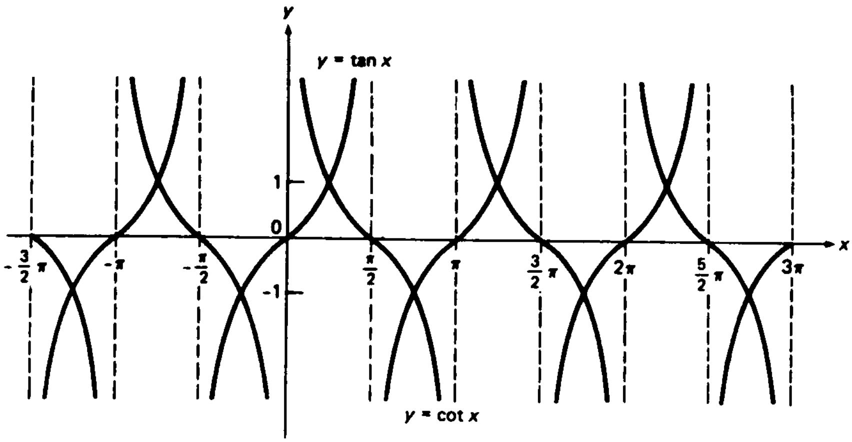
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

انتقال $\sin x$ به اندازهٔ $\pi/2$ به چپ نمودار $\cos x$ را می‌دهد، و معادلاً، انتقال نمودار $\cos x$ به اندازهٔ $\pi/2$ به راست نمودار سینوس را خواهد داد (ر.ک. شکل ۲۲). به زبان مهندسی، که توابع سینوس و کسینوس برای توصیف پدیده‌های متناوب به کار می‌روند و x زمان است، $\cos x$ از $\sin x$ به اندازهٔ $\pi/2$ (یا $90°$) *تقدم دارد* ("جلو است")، ولی $\sin x$ از $\cos x$ به اندازهٔ $\pi/2$ *تأخر* دارد ("عقب است"). در همین وضع، گویند دو "شکل موجی" $\sin x$ و $\cos x$ به اندازهٔ $90°$ **تفاوت فاز** دارند. توجه کنید که نمودار $\cos x$ نسبت به محور y متقارن است، و این مطلب انتظارش می‌رفت، زیرا $\cos x$ تابعی زوج است، و نمودار $\sin x$ نسبت به مبداء متقارن است، زیرا $\sin x$ یک تابع فرد است. همچنین، می‌بینیم که $\cos x$ بر $[-\pi, 0]$ صعودی و بر $[0, \pi]$ نزولی است، ولی $\sin x$ بر $[-\pi/2, \pi/2]$ صعودی و بر $[\pi/2, 3\pi/2]$ نزولی می‌باشد.

حال توابع $\tan x$ و $\cot x$ را درنظر می‌گیریم. شکل ۲۴ نمودار این دو تابع را دریک دستگاه مختصات قائم نشان می‌دهد. تابع $\tan x$ به ازای $x = (n + \frac{1}{2})\pi$، که در آن n عدد صحیح است، تعریف نشده است. از اینرو، می‌توان $\tan x$ را متشکل از بی‌نهایت[1]

---

۱. *اگر مجموعه‌ای شامل* n *عنصر باشد، که* n *عددی صحیح و نامنفی است، گوییم مجموعه متناهی است؛ در غیر این صورت، گوییم مجموعه نامتناهی است، یا شامل بی‌نهایت عنصر است. مثلاً، مجموعهٔ تمام اعداد صحیح نامتناهی است، به ازای بی‌نهایت مقدار از* x، $\sin x = 0$، *و از این قبیل.*



شکل ۲۴

تابع جداگانهٔ

$$y = \tan x \qquad ((n - \tfrac{1}{2})\pi < x < (n + \tfrac{1}{2})\pi),$$

تصور کرد به نام *شاخه‌های* $\tan x$ که هر یک قلمرو تعریف و نمودار خود (که آن نیز یک[1] شاخه نامیده می‌شود) را دارد که روی بازهٔ بازی به طول π قرار دارد. توجه کنید که شاخه‌های $\tan x$ به وسیلهٔ خطوط قائم $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ از هم جدا شده‌اند. به‌همین‌نحو، تابع $\cot x$ به ازای $x = n\pi$ تعریف نشده‌است؛ و لذا، این نیز از بی‌نهایت شاخهٔ

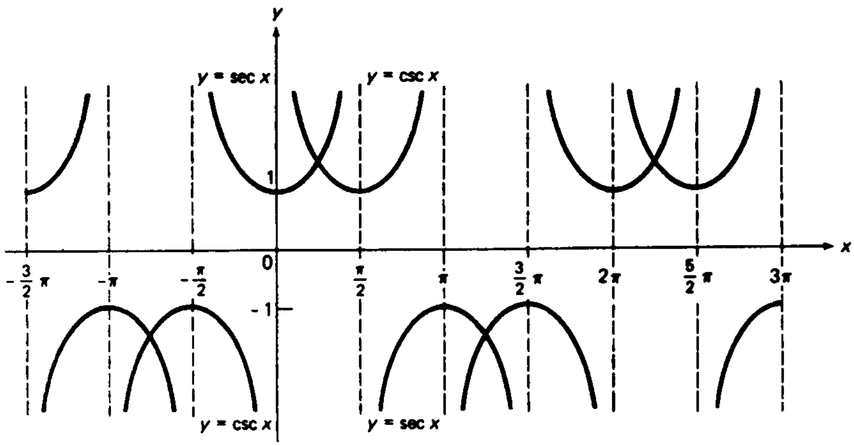
$$y = \cot x \qquad (n\pi < x < (n + 1)\pi)$$

تشکیل شده است که به‌وسیلهٔ خطوط مستقیم $x = n\pi$ از هم جدا شده‌اند.

از شکل ۲۴ معلوم می‌شود که هر شاخهٔ $\tan x$ یک تابع صعودی بی‌کران است، حال آنکه هر شاخهٔ $\cot x$ یک تابع نزولی بی‌کران می‌باشد. شکل نیز نشان می‌دهد که هر دو تابع $\tan x$ و $\cot x$ متناوبند، با دورهٔ تناوب اساسی π (یک تابع متناوب لازم نیست به ازای هر مقدار از x تعریف شده باشد). البته، 2π نیز دورهٔ تناوب این توابع است، ولی دورهٔ تناوب *اساسی*، یعنی کوچکترین دورهٔ تناوب مثبت، نیست. توجه کنید که $\tan x = 0$ اگر و فقط اگر $x = n\pi$، حال آنکه $\cot x = 0$ اگر و فقط اگر $x = (n + \frac{1}{2})\pi$.

نمودار توابع مثلثاتی $\sec x$ و $\csc x$ در شکل ۲۵ نموده شده است. از این شکل واضح است که هر یک از این توابع بی‌کران و متناوب است، با دورهٔ تناوب اساسی 2π، و بی‌نهایت شاخه دارد. توجه کنید که $\sec x$ به اندازهٔ $\pi/2$ بر $\csc x$ تقدم دارد، ولی $\csc x$ به اندازهٔ $\pi/2$ از $\sec x$ تأخر دارد. این خاصیت از توابع $\sin x$ و

$\cos x$ ، که $\csc x$ و $\sec x$ متقابلهای آنهایند ، " به ارث رسیده است " .



شکل ۲۵

مثال ۳ . جمیع مقادیر x را بیابید که $\sec x = 2$.

حل . تابع $\sec x$ مساوی 2 است هر وقت $\cos x = 1/\sec x$ مساوی $\frac{1}{2}$ باشد . این امر در نقاط $x = \pm\pi/3$ رخ میدهد ، ولی در هیچ نقطه از بازهٔ $[-\pi, \pi]$ رخ نمیدهد ، زیرا $\cos x$ بر $[-\pi, 0]$ صعودی و بر $[0, \pi]$ نزولی است . همچنین ، به ازای هر عدد صحیح n ، $\sec (x + 2n\pi) \equiv \sec x$. بنابراین ، $\sec x = 2$ اگر و فقط اگر $x = (2n \pm \frac{1}{3})\pi$ که در آن n عدد صحیح دلخواهی است .

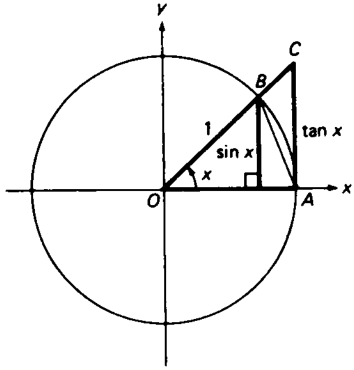
چند نامساوی مثلثاتی . بالاخره ، چند نامساوی مفید به دست میآوریم که توابع سینوس و کسینوس در آنها صدق میکنند . شکل ۲۶ را درنظر میگیریم ، که در آن دایره بهشعاع یک بوده و زاویهٔ x در بازهٔ $0 < x < \pi/2$ قرار دارد . چون

مساحت مثلث AOB > مساحت قطاع AOB > مساحت مثلث AOC

نتیجه میشود که

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x, \qquad (۱)$$

که در آن از فرمول (۸) ، صفحهٔ ۹۰ ، و این امر که مساحت یک مثلث نصف حاصل ضرب قاعده در ارتفاعش میباشد استفاده کردهایم . از تقسیم (۱) بر کمیت مثبت $\frac{1}{2}\sin x$ ، به



شکل ۲۶

دست می‌آوریم

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

یا ، معادلاً ،

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad (۲)$$

(ر.ک. قضیهٔ ۴ ، صفحهٔ ۱۳۰) . این نامساوی مضاعف به ازای $0<x<\pi/2$ — و نیز به‌ازای $0 < x < \pi/2$ برقرار است؛ و درنتیجه ، به ازای $0 < |x| < \pi/2$ برقرار است ، زیرا تعویض x با $-x$ مقدار تابع زوج $\cos x$ یا تابع $(\sin x)/x$ ، که آن نیز زوج است ، را تغییر نمی‌دهد :

$$\frac{\sin(-x)}{-x} \equiv \frac{-\sin x}{-x} \equiv \frac{\sin x}{x} \qquad (x \neq 0).$$

چون $(\sin x)/x$ به ازای $0 < |x| < \pi/2$ مثبت است ، نامساوی دوم در (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1,$$

یا ، معادلاً ،

$$|\sin x| < |x|. \qquad (۳)$$

این نامساوی به‌ازای $0 < |x| < \pi/2$ برقرار است ، و نیز به‌ازای $|x| \geq \pi/2$ ، زیرا $|\sin x| \leq 1$ و $\pi/2 \approx 1.57 > 1$. بنابراین ، (۳) به ازای هر $x \neq 0$ برقرار است ، و در واقع ،

$$|\sin x| \le |x| \qquad (۳')$$

به ازای هر x ، به انضمام $x=0$ ، برقرار است ، زیرا $|\sin 0| = |0|$.

مسائل

فرض کنید n عددی صحیح باشد . نشان دهید که

۱. $\sin(x+n\pi) = (-1)^n \sin x$

۲. $\cos(x+n\pi) = (-1)^n \cos x$

فرض کنید تابع f متناوب با دورهٔ تناوب p باشد؛ درنتیجه ، $f(x+p) \equiv f(x)$. نشان دهید که

۳. $f(x-p) \equiv f(x)$

۴. به ازای هر عدد صحیح n ، $f(x+np) \equiv f(x)$.

نشان دهید که

۵. $\tan x$ و $\cot x$ هر دو توابعی فردند

۶. $\sec x$ یک تابع زوج است ، ولی $\csc x$ یک تابع فرد می‌باشد .

بگویید تابع داده شده زوج است یا فرد (یا هیچکدام) .

۷. $f(x) = \sin x + \cos x$

۸. $f(x) = x + \sin x$

۹. $f(x) = \sin^2 x - \cos x$

۱۰. $f(x) = \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$

تمام مقادیر صادق در هر یک از روابط زیر را بیابید .

۱۱. $\cos x = 1$

۱۲. $\sin x = 1$

۱۳. $\sin x = -1$

۱۴. $\cos x = -1$

۱۵. $\sin x = \frac{1}{2}$

۱۶. $\cos x = -\frac{1}{2}$

۱۷. $\tan x = 1$

۱۸. $\cot x = -1$

۱۹. $\csc x = -2$

۲۰. $\sec x = \sqrt{2}$

۲۱. $\sec x$ تعریف نشده است .

۲۲. $\csc x$ تعریف نشده است

جمیع بازه‌هایی به طول π را بیابید که بر آنها

۲۳. $\sin x$ صعودی است

۲۴. $\sin x$ نزولی است

۲۵. $\cos x$ نزولی است

۲۶. $\cos x$ صعودی است

دورهٔ تناوب اساسی تابع داده شده را بیابید .

۲۷. $\sqrt{\sin x}$

۲۸. $\cos^3 x$

۲۹. $|\cos x|$

۳۰. $\cos x + \sin x$

۳۱. نمودار تابع متناوب $y = f(x)$ را بکشید، با دورهٔ تناوب 2، که مقادیرش بر بازهٔ $-1 \leq x \leq 1$ با فرمول $y = 1 - |x|$ داده شده‌اند.

۳۲. تحقیق کنید که

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$

از این چه رابطه‌ای بین نمودارهای $\tan x$ و $\cot x$ نتیجه می‌شود؟

۱.۵ مفهوم حد و پیوستگی

حال یک مسئلهٔ اساسی از حساب دیفرانسیل و انتگرال را مطرح می‌کنیم. وقتی شناسهٔ x تابع $f(x)$ به‌مقدار معلوم a نزدیک می‌شود، رفتار مقادیر این تابع چگونه است؟ دربعضی حالات جواب شهودا" واضح است. مثلا"، اگر $f(x) = x^2 + 1$ و x به عدد 2 نزدیک‌شود، به نظر واضح است که $f(x)$ به عدد $f(2) = 2^2 + 1 = 5$، یعنی مقدار تابع در $x = 2$، نزدیک می‌شود. این را خلاصه‌کرده می‌گوییم **حد** $f(x)$، وقتی x به 2 نزدیک شود، مساوی 5 است. اما، در حالات دیگر، نمی‌توان حد را به این آسانی، با یک جا نشانی ساده، یافت. در واقع، ممکن است تابع حتی در نقطه‌ای که باید حد حساب شود **تعریف نشده باشد**! مثالهای زیر نحوهٔ بروز این امر را نشان می‌دهند. در فصل بعد خواهید دید که این مثالها، صرف‌نظر از طبیعی بودن، مواردی است که **هر لحظه** بخواهیم نوع مهمی حد، به نام مشتق، را حساب کنیم رخ می‌دهند. لذا، خوب است در اینجا حدود را بیاموزیم؛ درنتیجه، داستان مشتق را می‌توان بعدا" بدون وقفه بازگو کرد.

مثال ۱. تابع

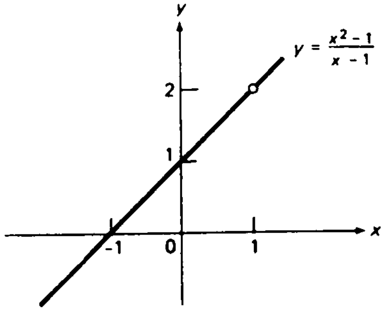
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \qquad (۱)$$

به ازای هر $x \neq 1$ تعریف شده است، ولی به ازای $x = 1$ تعریف نشده است، زیرا مخرج $x - 1$ به ازای $x = 1$ صفر است. در واقع، طرف راست (۱) به ازای $x = 1$ به صورت مبهم 0/0 درمی‌آید. چون

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1 \quad \text{اگر} \quad x \neq 1 \qquad (۱')$$

ولی $f(1)$ تعریف نشده است، نمودار (۱) خط مستقیم $y = x + 1$ بدون نقطهٔ $(1, 2)$ می‌باشد. این نمودار در شکل ۲۷ نموده شده است، که در آن نقطهٔ مفقود، طبق معمول،

با نقطهٔ توخالی نموده شده است . از شکل واضح است که ، با آنکه $f(x)$ به ازای $x = 1$ تعریف نشده است ، اگر x خیلی به 1 نزدیک باشد ، $f(x)$ خیلی به 2 نزدیک است ، که از



شکل ۲۷

فرمول (۱') به‌طور جبری نیز واضح است ، چرا که اگر x تقریبا" (ولی نه صددرصد) مساوی 1 باشد ، $x + 1$ باید تقریبا" مساوی 2 باشد . ما همهٔ این نکات را خلاصه کرده می‌گوییم **حد $f(x)$ وقتی x به 1 نزدیک شود مساوی 2 است** ، یا ، با علامت ،

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2. \qquad (۲)$$

به بیان دیگر ، می‌توان گفت که وقتی x به 1 نزدیک شود ، $f(x)$ به 2 نزدیک می‌شود ، *یا* به طور خلاصه

$$f(x) \to 2 \text{ ، وقتی } x \to 1 \qquad (۲')$$

هنوز باید مفهوم حد را صوری کرد و آن را دقیقتر ساخت ، و این کار در بخش بعد خواهد شد . ولی در این بین متذکر می‌شویم که هم‌اکنون به‌طور غیرصوری نشان داده‌ایم که

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2. \qquad (۳)$$

حد (۳) نمونه‌ای است از یک مشتق ؛ یعنی ، مشتق تابع x^2 در نقطهٔ 1 . به‌طور کلی ، مشتق x^2 در نقطهٔ a حد زیر است :

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a},$$

که اساسا" با همان استدلالی که در اثبات فرمول (۳) ، که نظیر به حالت $a = 1$ است ، به کار رفت معلوم می‌شود که مساوی $2a$ می‌باشد . بعدا" در این باب مطالب بسیاری خواهیم

گفت .

برای محاسبهٔ حد (۳) ، **فقط به کمی جبر نیاز داریم . همانطور که مثال زیر نشان** می دهد ، بعضی از حدود به این آسانی محاسبه نمی شوند .

مثال ۲ . حد

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \qquad (۴)$$

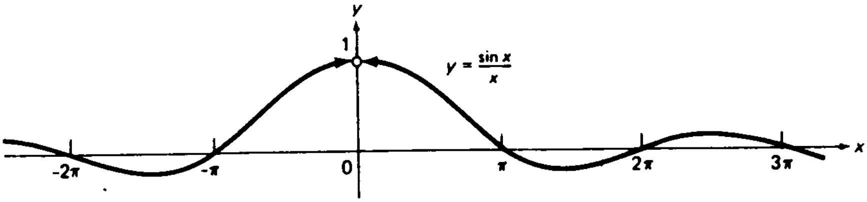
را محاسبه کنید .

حل . تابع $(\sin x)/x$ در $x = 0$ ، یعنی نقطه‌ای که می‌خواهیم حد را در آن حساب کنیم ، تعریف نشده است . به خاطر شباهت با مثال ۱ ، ممکن است بخواهیم صورت و مخرج را بر $x \neq 0$ تقسیم کنیم . اما در اینجا راهی برای تقسیم جبری وجود ندارد . برای محاسبهٔ حد (۴) ، مآلا" به روش دیگری متوسل می شویم . اما فعلا" می خواهیم ببینیم آیا می‌توان مقدار حد را حدس زد .

برای این کار ، از یک ماشین حساب علمی استفاده کرده مقادیر $(\sin x)/x$ را به‌ازای x های نزدیک به 0 محاسبه می‌کنیم ، و در این راه توجه می‌کنیم که $(\sin x)/x$ تابعی زوج است؛ و لذا ، در هر دو نقطهٔ x و $-x$ یک مقدار خواهد داشت . نتایج محاسبات ما در جدول زیر نموده شده‌اند ، که در آن x به رادیان بوده و علامت $\pm$ داخل پرانتز به یاد می‌آورد که هر درایهٔ x عدد ذکر شده یا قرینهٔ آن می باشد .

x	$\frac{\sin x}{x}$	x	$\frac{\sin x}{x}$
$(\pm)$ 1.2	0.77670	$(\pm)$ 0.10	0.99833
1.0	0.84147	0.08	0.99893
0.8	0.89670	0.06	0.99940
0.6	0.94107	0.04	0.99973
0.4	0.97355	0.02	0.99993
0.2	0.99335	0	تعریف نشده

از این جدول قویا" این برداشت می‌شود که وقتی x به 0 نزدیک شود ، مقادیر تابع $(\sin x)/x$ به 1 نزدیک می‌شوند ، و این امر در شکل ۲۸ نموده شده است ، که نمودار $(\sin x)/x$ را نشان می‌دهد . رفتار حدی تابع $(\sin x)/x$ در $x = 0$ ، یعنی رفتار تابع وقتی $x \to 0$ ، با رسم دو سر سهم در نقطهٔ $(0, 1)$ که نمودار وقتی $x \to 0$ به‌آنها می‌رسد نموده شده است. خود نقطهٔ $(0, 1)$ به‌نمودار تعلق ندارد ، و این امر با نقطهٔ توخالی در $(0, 1)$ نموده شده است؛ این صرفا" بدان خاطر است که تابع $(\sin x)/x$ در $x = 0$ تعریف نشده است . لذا ،



شکل ۲۸

به نظر می‌رسد که

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

و ما مآلا" برهان دقیق آن را در مثال ۷، صفحهٔ۱۳۸، خواهیم داد.

تعریف غیرصوری حد. حال مثالهای ۱ و ۲ را در محدودهٔ کلیتری قرار داده و در باب‌هر تابع $f(x)$، **هر** حد L، و **هر** نقطهٔ ثابت a که متغیر مستقل یا شناسهٔ x به آن نزدیک می‌شود صحبت می‌کنیم. مثلا"، در مثال ۱،

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \qquad a = 1, \qquad L = 2,$$

و در مثال ۲،

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad a = 0, \text{ و } \quad L = 1.$$

حال گوییم **وقتی $x \to a$، $f(x)$ به حد L نزدیک می‌شود**، یا *$f(x)$ در a دارای حد L است*، اگر وقتی x به a (بدون‌آنکه‌مساوی a شود) نزدیک شود، $f(x)$ به L نزدیک‌گردد. این را به صورت

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \tag{۵}$$

یا

$$\text{وقتی } x \to a \text{ ، } f(x) \to L \tag{۵'}$$

می‌نویسیم.

همانطور که امثلهٔ فوق نشان می‌دهند، وقتی می‌گوییم به ازای $x \to a$، $f(x)$ به L نزدیک می‌شود، مقصود ما واقعا" این است که وقتی $x \to a$، $f(x)$ می‌تواند به هر میزان خواسته شده به L نزدیک شود. به عبارت دیگر، به ازای هر x به‌قدر کافی نزدیک a، چه

سمت چپ چه سمت راست آن، باید بتوان $f(x)$ را هرقدر بخواهیم به L نزدیک سازیم (این کار به تغییر "دوطرفهٔ" x نیاز دارد). هرقدر کمیت $|f(x) - L|$ کوچکتر باشد، $f(x)$ به L نزدیکتر است؛ بدین معنی که کوچکی $|f(x) - L|$ یعنی نزدیکی $f(x)$ به L، و به همین نحو، کوچکی $|x - a|$ یعنی نزدیکی x به a. لذا، رابطهٔ (۵)، برحسب قدرمطلق، می‌گوید که $|f(x) - L|$ را می‌توان به ازای جمیع مقادیر "به‌قدر کافی کوچک" (ولی ناصفر) از $|x - a|$، "بدلخواه کوچک" نمود. این ایده‌ها در بخش بعد دقیقتر خواهند شد.

اغلب کافی است از یک تابع حددار بدون تعیین حد آن سخن گفت. لذا، گوییم $f(x)$ در a حد دارد اگر عددی مانند L باشد به‌طوری که (۵) برقرار باشد، و در این حالت گوییم حد سمت چپ (۵) **وجود دارد**. اگر عدد L موجود نباشد، گوییم حد **وجود ندارد**، یا اینکه $f(x)$ در a حد ندارد.

مثال ۳. نشان دهید که تابع

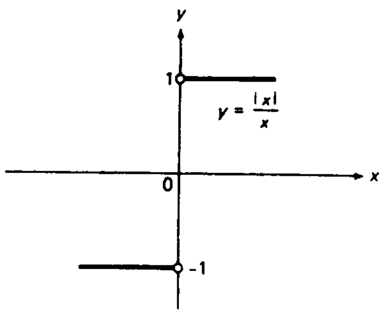
$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

در $x = 0$ حد ندارد.

حل. به آسانی معلوم می‌شود که تابع $|x|/x$ به ازای هر $x \neq 0$ تعریف شده است و دقیقاً با تابع زیر یکی است:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ ، } & x > 0 \text{ اگر} \\ -1 \text{ ، } & x < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

که در شکل ۲۹ رسم شده است. هرگاه وقتی $x \to 0$ ، $f(x) \to L$ ، آنگاه $f(x)$ باید بدلخواه نزدیک L باشد؛ مثلاً، به ازای جمیع x های نزدیک به 0 ، در فاصلهٔ کمتر از $\frac{1}{2}$. اما این ممکن نیست، زیرا هر همسایگی سفتهٔ $x = 0$ ، مهم نیست چقدر کوچک، شامل نقاطی مانند



شکل ۲۹

$x > 0$ است که $f(x) = 1$ و نیز شامل نقاطی مانند $x < 0$ که $f(x) = -1$، وعددی‌مانند L وجود ندارد که در فاصلهٔ کمتر از $\frac{1}{2}$ از 1 و -1 باشد. پس نتیجه می‌شود کـه $f(x)$ در $x = 0$ حد ندارد.

مثال ۴. $\lim_{x \to 0} \cos x$ را محاسبه کنید.

حل. مثل مثال ۲، با استفاده از یک ماشین حساب، مقادیر تابع $\cos x$ را به ازای مقادیر نوعی x که به 0 نزدیک‌می‌شوند حساب می‌کنیم. نتایج در جدول زیر داده شده‌اند (به‌یاد آورید که $\cos x$ یک تابع زوج است).

x	$\cos x$	x	$\cos x$
$(\pm)$ 1.2	0.3624	$(\pm)$ 0.10	0.9950
1.0	0.5403	0.08	0.9968
0.8	0.6967	0.06	0.9982
0.6	0.8253	0.04	0.9992
0.4	0.9211	0.02	0.9998
0.2	0.9801	0	تعریف شده ومساوی 1 است

با امتحان این اعداد قویا" این برداشت را خواهیم داشت که

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1,$$

و، در واقع، می‌توان نشان داد که این امر درست است. اما، بین این جـدول و جدول مثال ۲ تفاوتی اساسی وجود دارد، زیرا $\cos x$ به ازای $x = 0$ *تعریف شده است*، حـال آنکـه تابـع $(\sin x)/x$ تعریف *نشده است*. به‌علاوه، حد $\cos x$ در $x = 0$ همـان مقدا*ر* $\cos x$ در $x = 0$ است؛ یعنی، $\cos 0 = 1$. ایـن مطلب کلیدی را این طور بیان‌می‌کنیم که می‌گوییم تابع $\cos x$ در $x = 0$ **پیوسته** است.

پیوستگی و دلایل ناپیوستگی. به‌طورکلی، فرض‌کنیم f تابعی باشد که در نقطهٔ a تعریف شده است، و نیز حد f در $x = a$ موجود و مساوی $f(a)$ باشد؛ درنتیجه،

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \qquad (۶)$$

در این صورت، گوییم f در a **پیوسته** است. تابع f می‌تواند به یکی از سه دلیل زیر در a **ناپیوسته** باشد (یعنی، در a پیوسته نباشد):

(یک) ممکن است حد f در a موجود نباشد، مثل مثال ۳؛

(دو) ممکن است حد f در a موجود باشد، ولی f در a تعریف نشده باشد، مثل مثالهای ۱و۲؛
(سه) ممکن است حد f در a موجود و f در a تعریف‌شده‌باشد، ولی این حد مساوی $f(a)$ نباشد، مثل مثال ۷ در زیر.

هرگاه تابع f در a ناپیوسته باشد، ناپیوستگی همیشه به‌وسیلهٔ غیرعادی بودن نمودار f در امتداد خط $x = a$ آشکار می‌شود. به بیان نادقیق، نمودار یک‌تابع پیوسته در a نمی‌تواند در a " شکستگی " داشته باشد و، بخصوص، نمی‌تواند در a "سوراخ" یا " جهش " داشته باشد.

مثال ۵. تابع

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

رسم شده در شکل ۲۹ به دلیل (یک) در $x = 0$ ناپیوسته است، و این از جهش نمودار از خط $y = -1$ به خط $y = 1$ آشکار می‌شود.

مثال ۶. در شکل ۲۷ نمودار تابع

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

بدلخواه به نقطهٔ $(1, 2)$ نزدیک می‌شود، ولی خود نقطه در نمودار نیست، ووجود سوراخ نظیر به ما فورا" می‌گوید که تابع به دلیل (دو) در $x = 1$ ناپیوسته است.

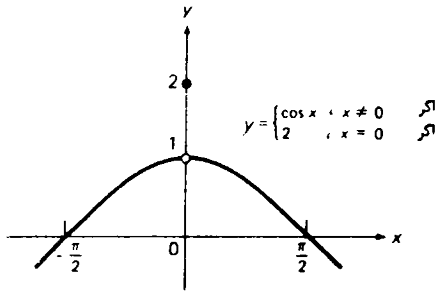
مثال ۷. تابع

$$f(x) = \begin{cases} \cos x \text{ ، } & x \neq 0 \text{ اگر} \\ 2 \text{ ، } & x = 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

که در شکل ۳۰ رسم شده است، به دلیل (سه) در $x = 0$ ناپیوسته است.
در واقع، به همان دلیل مذکور در مثال ۴، وقتی $x \to 0$ ، $f(x) \to 1$، ولی $f(0) = 2$ ؛ درنتیجه،

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0),$$

که بدین وسیله شرط پیوستگی f در $x = 0$ نقض می‌شود. ناپیوستگی f در $x = 0$ مجددا"



شکل ۳۰

وجود یک سوراخ در نمودار را آشکار می‌کند، که این بار در نقطهٔ $(0, 1)$ می‌باشد. نمودار دارای یک نقطهٔ توپر "تنها" در $(0, 2)$ نیز هست، که می‌گوید $f(0) = 2$.

در قضیهٔ ۸، صفحهٔ ۱۳۵، نشان خواهیم داد که هر **تابع چند جمله‌ای** (یا فقطچند جمله‌ای)، یعنی تابعی به شکل

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (a_n \neq 0),$$

به ازای هر x پیوسته است. در اینجا n یک عدد صحیح نامنفی است، به نام **درجهٔ** چند جمله‌ای، و $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ثابتهایی هستند به نام **ضرایب** چندجمله‌ای. به علاوه، در قضیهٔ ۹، صفحهٔ ۱۳۶، نشان خواهیم داد که هر یک از شش تابع مثلثاتی $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\tan x$ ، $\cot x$ ، $\sec x$ ، و $\csc x$ در هر نقطه که تابع تعریف شده باشد پیوسته است.

مثال ۸. بنابر پیوستگی چندجمله‌ای $x^2 + 1$ ، مانند اولین بند این بخش،

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5.$$

به همین نحو، بنابر پیوستگی چندجمله‌ای $x^3 - 3x + 2$ ،

$$\lim_{x \to -2} (x^3 - 3x + 2) = (-2)^3 - 3(-2) + 2 = 0.$$

مثال ۹. بنابر پیوستگی $\sin x$ ،

$$\lim_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0.$$

در تعریف نسبتاً "غیرصوری ما از حد تابع f در نقطهٔ a ، متغیر مستقل x باید بتواند مقادیر بدلخواه نزدیک a را اختیار کند، ولی از آن طرف، لازم نیست f در خود نقطهٔ a تعریف شده باشد، مثل تابع $(\sin x)/x$ که در $x = 0$ تعریف‌نشده است. ازاینرو،

حد f در a فقط تحت تأثیر مقادیر f در مجاورت a می‌باشد. لذا، برای بحث درحد تابع f در نقطهٔ a ، کافی است فرض کنیم f در همسایگی سفته‌ای از a تعریف شده باشد. به همین نحو، برای بحث در پیوستگی تابع f در نقطهٔ a ، کافی است فرض کنیم f در همسایگی a تعریف شده است، ولی این باید یک همسایگی عادی **ناسفته** شامل خود a باشد، زیرا فرمول (۶) معرف پیوستگی f در a مستلزم **مقدار** f در a است.

مسائل

با استفاده از استدلالی همانند در مثال ۱، حدود زیر را محاسبه کنید.

۱. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-2x-8}{x-4}$ ۲. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2+3x-2}{x+2}$

۳. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$ ۴. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^3-125}{x-5}$

۵. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x+1}$ ۶. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$

۷. با ساختن جدولی ازمقادیرتابع $f(x)=(x-1)/(\sqrt{x}-1)$ نزدیک $x=1$ ، متقاعدشوید که وقتی $x\to 1$ ، تابع به حدی نزدیک می‌شود. این حد چقدر است؟ همین نتیجه را به‌طور جبری ثابت کنید. تابع را در مجاورت $x=1$ رسم کنید.

۸. با ساختن جدولی‌از مقادیر تابع $(\tan x)/x$ نزدیک x ، متقاعدشوید که‌وقتی $x\to 0$ ، تابع به حدی نزدیک می‌شود. این حد چقدر است؟ تابع را در محاورت $x=0$ رسم کنید.

حدود زیر را با استدلالی غیرصوری محاسبه کنید.

۹. $\lim\limits_{x\to 0} |x|$ ۱۰. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x}$ ۱۱. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x}$

۱۲. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x}{x}$ ۱۳. $\lim\limits_{x\to 0.1} \dfrac{|x|}{x}$ ۱۴. $\lim\limits_{x\to -0.2} \dfrac{|x|}{x}$

۱۵. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x}$ ۱۶. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2}{x}$ ۱۷. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$

۱۸. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ ۱۹. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\sin x|}{x}$ ۲۰. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin |x|}{x}$

حدود زیر را با استفاده از پیوستگی چندجمله‌ایها محاسبه نمایید.

۲۱. $\lim\limits_{x\to -3} (x^2+3x+4)$ ۲۲. $\lim\limits_{x\to 4} (x^3+1)$

۲۳. $\lim_{x\to 3} (x^4 - 9x - 6)$

۲۴. $\lim_{x\to -2} (x^5 + 5x^2)$

۲۵. $\lim_{x\to 1} (2x^6 - 3x^5 + x^4)$

۲۶. $\lim_{x\to -1} (x^{11} - x^7 + 2)$

حدود زیر را با استفاده از پیوستگی توابع مثلثاتی محاسبه کنید.

۲۷. $\lim_{x\to 1} \sin x$

۲۸. $\lim_{x\to \pi} \cos x$

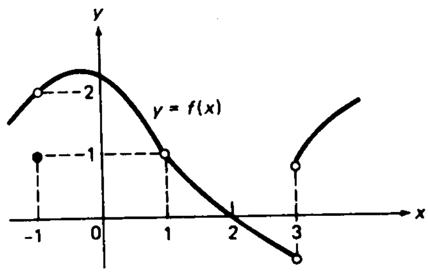
۲۹. $\lim_{x\to -\pi/4} \tan x$

۳۰. $\lim_{x\to \pi/2} \cot x$

۳۱. $\lim_{x\to 0} \sec x$

۳۲. $\lim_{x\to \pi/4} \csc x$

شکل ۳۱ نمودار تابع f را نشان می‌دهد. حدود زیر را بیابید.



شکل ۳۱

۳۳. $\lim_{x\to -1} f(x)$

۳۴. $\lim_{x\to 1} f(x)$

۳۵. $\lim_{x\to 2} f(x)$

۳۶. $\lim_{x\to 3} f(x)$

۳۷. تابع شکل ۳۱ در کدام نقاط $x = \pm 1, 2, 3$ پیوسته است؟

۶.۱ نگاهی دقیقتر به حدود

به یاد آورید که گفتیم وقتی $x \to a$، $f(x) \to L$ یعنی $|f(x) - L|$ را می‌توان، به ازای جمیع مقادیر " به قدر کافی کوچک " ولی ناصفر از $|x - a|$، " بدلخواه کوچک " کرد. آیا می‌توان این تعریف شهودی حد را کاملا " دقیق ساخت؟ جواب مثبت است، و این کار به روشی انجام می‌شود که توسط ریاضیدانان آلمانی، وایراشتراس[1] و هاینه[2]، حدود صد سال قبل، یعنی دویست سال پس از ابداع حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط نیوتن[3] و لایب

---

1. Weierstrass
2. Heine
3. Newton

نیتز[1] ، معرفی شد . این روش " روش ε, δ " نامیده می‌شود ، زیرا شامل اعدادی است که از قدیم با حروف یونانی ε و δ (حروف کوچک اپسیلن و دلتا) نموده می‌شوند . اینکه می‌گوییم $|f(x) - L|$ به ازای جمیع $|x - a|$ های به قدر کافی کوچک بدلخواه کوچک است چه معنی دارد ؟ معنی آن این است که : فرض کنیم شخصی که ما وی را " مدعی " می‌نامیم عدد مثبتی مانند ε به ما بدهد . باید بتوانیم عدد مثبت دیگر δ را طوری بیابیم که به ازای هر $x \neq a$ صادق در نامساوی $|x - a| < \delta$ ، داشته باشیم $|f(x) - L| < \varepsilon$. در اینجا ممکن است بپرسید این چه‌ربطی به کوچک‌بودن اعداد $|f(x) - L|$ و $|x - a|$ دارد . جواب این است که ما به مدعی اجازه می‌دهیم **هر عدد مثبت** ε که بخواهد اختیار کند ؛ بخصوص ، ε ی که مدعی هرقدر بخواهد کوچک باشد ؛ یعنی ، **بدلخواه کوچک** . سپس باید عدد مثبت نظیر δ را بیابیم ، که در حالت کلی اندازه‌اش باید کنترل شود ودرنتیجه باید به قدر کافی کوچک باشد ، به‌طوری که هروقت $|x - a| < \delta$ و $x \neq a$ ، داشته باشیم $|f(x) - L| < \varepsilon$.

تعریف صوری حد . به زبان صوریتر ، فرض کنیم $f(x)$ در همسایگی سفته‌ای از نقطهٔ a تعریف شده باشد . در این صورت ،

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{۱}$$

یعنی به ازای هر $\varepsilon > 0$ (مهم نیست چقدر کوچک) ، می‌توان $\delta > 0$ ای (به قدرکافی کوچک) یافت به‌طوری که هر وقت

$$0 < |x - a| < \delta, \tag{۲}$$

داشته باشیم

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

در اینجا نامساوی مضاعف (۲) شیوهٔ مناسبی است برای نوشتن همزمان $|x - a| < \delta$ و $x \neq a$ ، و ما قبلاً " به آن در صفحهٔ ۲۹ برخورده‌ایم . عبارات داخل پرانتز را می‌توان پس از خوگرفتن با تعریف حذف کرد . همچنین ، وقت آن است که به مسئلهٔ ۳۱ ، که به بحث فعلی مربوط است ، نگاه کنیم .

تبصره . مهم است درک شود که هرگاه نامساوی $|f(x) - L| < \varepsilon$ به‌ازای برقراری (۲) برقرار

1. Leibniz

باشد، آنگاه به ازای **هر عدد مثبت کوچکتر از** δ نیز چنین است. بخصوص، δ تابع ε نیست، اگرچه δ به ε وابسته است، زیرا δ **به‌طور منحصر به فرد** به‌وسیلهٔ ε معین‌نمی‌شود (هر δ ی کوچکتر نیز قابل استفاده است) .

اگر نامساوی مضاعف (۲) را با نامساوی سادهٔ

$$|x - a| < \delta \qquad (۲')$$

عوض کرده و ضمناً بخواهیم $f(x)$ در یک همسایگی معمولی ناسفتهٔ a تعریف‌شده باشد، که بخصوص $f(a)$ تعریف شده است، چه رخ خواهد داد؟ به عبارت دیگر، اینکه بگوییم به ازای هر $\varepsilon > 0$ می‌توان $\delta > 0$ ای‌یافت به‌طوری‌که هروقت (۲') برقرارباشد، $|f(x) - L| < \varepsilon$ چه معنی دارد؟ با کمی فکر معلوم می‌شود که این باید به این معنی باشد که $f(x)$ در a پیوسته است. در واقع، $f(x)$ هنوز در a حد L را دارد، چرا که اگر هروقت (۲') برقرار باشد، داشته باشیم $|f(x) - L| < \varepsilon$، مسلماً هروقت شرط محدودتر (۲) برقرار باشد، خواهیم داشت $|f(x) - L| < \varepsilon$. به‌علاوه، چون در اینجا $x = a$ مجاز بوده، و (۲') خود به خود به ازای $x = a$ برقرار است، بی‌توجه به مقدار δ، باید به ازای هر $\varepsilon > 0$ داشته باشیم $|f(a) - L| < \varepsilon$، که فقط‌وقتی ممکن است که $f(a) = L$. به عبارت‌دیگر، در اینجا به جای (۱) داریم

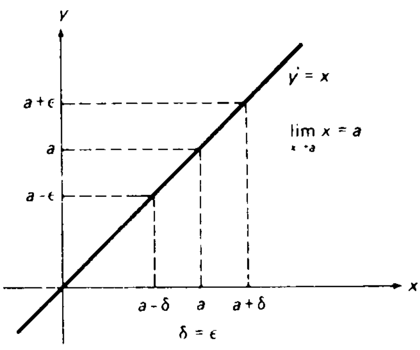
$$\lim_{x \to a} f(x) = L = f(a), \qquad (۱')$$

و این دقیقاً یعنی $f(x)$ در a پیوسته است.

حال کاربرد روش δ، ε را نشان می‌دهیم.

مثال ۱. نشان دهید که به ازای هر a،

$$\lim_{x \to a} x = a \qquad (۳)$$



شکل ۳۲

حل. به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، کافی است، مثل شکل ۳۲، $\delta = \varepsilon$ را اختیار کنیم. در این صورت، واضح است که هروقت $0 < |x - a| < \delta$، یا به خاطر $|x - a| < \delta$، $|x - a| < \varepsilon$. علی‌رغم بداهت، (۳) مطلب مهمی را بیان می‌کند و آن این است که تابع $f(x) = x$ به ازای هر x پیوسته است.

مثال ۲. فرض‌کنید c ثابت دلخواهی باشد. نشان دهید که به ازای هر a،

$$\lim_{x \to a} c = c \tag{۴}$$

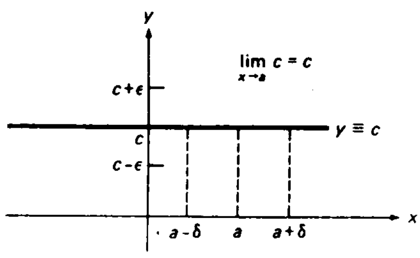
به‌طور دقیقتر، نشان دهید هرگاه $f(x) \equiv c$، آنگاه، به ازای هر a،

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \tag{۴'}$$

حل. می‌بینیم که در این حالت

$$|f(x) - c| \equiv |c - c| = 0.$$

لذا، به‌ازای‌هر $\varepsilon > 0$، $|f(x) - c| < \varepsilon$ به‌ازای $0 < |x - a| < \delta$، یا به‌ازای $|x - a| < \delta$ بی‌توجه به δ ی اختیار شده، خود به خود برقرار است (ر.ک. شکل ۳۳). فرمول (۴) می‌گوید که حد یک ثابت خود ثابت است، یا معادلاً، یک تابع ثابت همه جا (یعنی، به ازای هر x) پیوسته است.



هر $\delta > 0$ ی کارساز است

شکل ۳۳

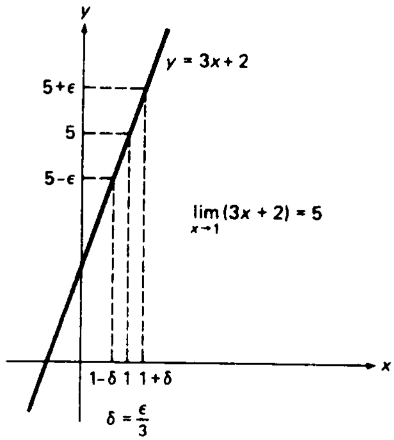
مثال ۳. نشان دهید که

$$\lim_{x \to 1} (3x + 2) = 5. \tag{۵}$$

حل. ما قبلاً " این نوع مسئله را با استفاده از پیوستگی چندجمله‌ایها حل کرده‌ایم (ر.ک. مثال ۸، صفحهٔ ۱۱۵) ، ولی آموزنده است ببینیم برهان δ ، ε چطور پیش می‌رود. به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای می‌خواهیم که هر وقت $0 < |x - 1| < \delta$ ،

$$|(3x + 2) - 5| = |3(x - 1)| = 3|x - 1| < \varepsilon$$

زیرا در این صورت (۵) ثابت خواهد شد. چون $3|x - 1| < \varepsilon$ معادل $|x - 1| < \varepsilon/3$ است. همانطور که شکل ۳۴ نشان می‌دهد، یک انتخاب مناسب $\delta = \varepsilon/3$ می‌باشد.



شکل ۳۴

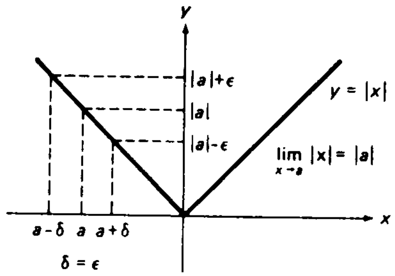
مثال ۴. نشان دهید که به ازای هر a ،

$$\lim_{x \to a} |x| = |a| \qquad (۶)$$

حل. با اعمال نامساوی (۵) ، صفحهٔ ۲۳ ، داریم

$$||x| - |a|| < |x - a|$$

لذا، به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، کافی است $\delta = \varepsilon$ را اختیار کنیم تا هر وقت $0 < |x - a| < \delta$ (یا $|x - a| < \delta$) ، داشته باشیم $||x| - |a|| < \varepsilon$. این مطلب در شکل ۳۵ برای a ی منفی نموده شده است. فرمول (۶) می‌گوید که $|x|$ ، یعنی تابع قدرمطلق، همه‌جاپیوسته است.



شکل ۳۵

مثال ۵. برای حد

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2,$$

که در مثال ۱، صفحه ۱۰۸، به‌طور غیرصوری محاسبه شد، برهان دقیق بیاورید.

حل. به ازای $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ ای می‌خواهیم که هر وقت $0 < |x-1| < \delta$، داشته‌باشیم

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right| = \left|\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}-2\right| = |(x+1)-2| = |x-1| < \varepsilon$$

البته، یک انتخاب مناسب $\delta = \varepsilon$ است. توجه کنید که در اینجا قسمت اول نامساوی مضاعف $0 < |x-1| < \delta$ مورد نیاز است، زیرا تابع $(x^2-1)/(x-1)$ به ازای $x = 1$ تعریف نشده است.

مثال ۶. نشان دهید که

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x}{x}=1. \tag{۷}$$

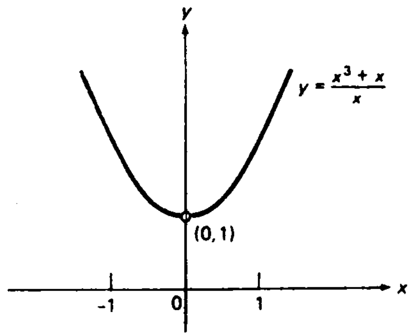
حل. به ازای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ ای جستجو می‌کنیم که هروقت $0 < |x| < \delta$،

$$\left|\frac{x^3+x}{x}-1\right| = |(x^2+1)-1| = |x^2| = |x|^2 < \varepsilon$$

چون $|x|^2 < \varepsilon$ معادل $|x| < \sqrt{\varepsilon}$ است، یک انتخاب مناسب $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ می‌باشد. به‌صورت دیگر، با تقسیم صورت $x^3 + x$ بر مخرج x و استفاده از پیوستگی چندجمله‌ای حاصل $x^2 + 1$، درمی‌یابیم که

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x}{x} = \lim_{x\to 0}(x^2+1) = 0^2+1 = 1.$$

(در این مورد ، مسئلهٔ ۹ به نکتهٔ مهمی اشاره می‌کند .) برقراری (۷) را نیز می‌توان با امتحان نمودار تابع $(x^3 + x)/x$ ،که یک‌سهمی بدون نقطهٔ $(0, 1)$ است ، به‌طور غیرصوری دید (ر.ک. شکل ۳۶) .

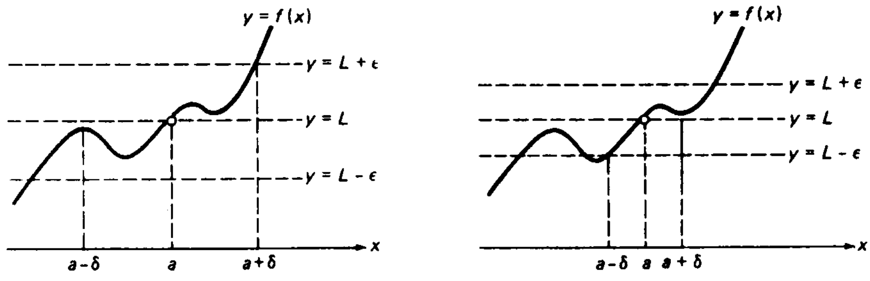


شکل ۳۶

تعبیر هندسی حد. فرض کنیم وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to L$. در این صورت،به‌ازای‌هر$\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای هست به طوری که هر وقت $0 < |x - a| < \delta$ ، $|f(x) - L| < \varepsilon$. اما نامساوی $|f(x) - L| < \varepsilon$ معادل است با $-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$ یا

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon. \qquad (۸)$$

لذا، تعریف ε, δ حد تعبیر هندسی ساده‌ای دارد: *آن قسمت از نمودار تابع* $y = f(x)$ *نظیر به‌مقادیر* x *درهمسایگی‌سفتهٔ* $0 < |x - a| < \delta$ *کاملاً "درنوارافقی* $L - \varepsilon < y < L + \varepsilon$ *به عرض* 2ε *و موازی محور* x *جای‌دارد*. بااستفاده‌از این مطلب می‌توان بزرگترین‌همسایگی سفته‌ای را ساخت که در آن $|f(x) - L| < \varepsilon$. دو قسمت شکل ۳۷ این ساخت رابرای‌تابع



طرز یافتن بزرگترین δ به ازای ε داده شده

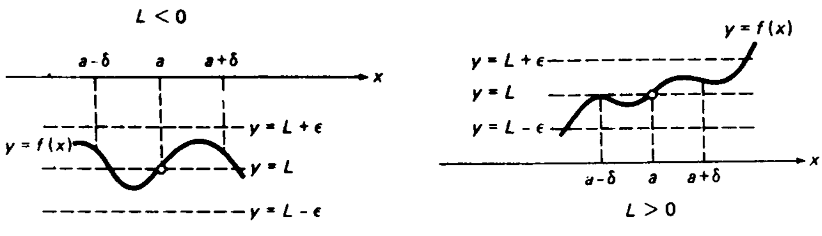
شکل ۳۷

f و دو مقدار مختلف ε نشان می‌دهند. مطمئن شوید که فهمیده‌اید چرا بزرگترین مقدار δ در شکل ۳۷ (آ) از رفتار f در سمت چپ a و در شکل ۳۷ (ب) از رفتار f در سمت راست a معین می‌شود. ما در نقطهٔ (a, L) یک نقطهٔ توخالی گذارده‌ایم تا نشان دهیم که تابع f می‌تواند در a تعریف نشده باشد، یا اینکه ممکن است مقدارش در a با L یکی نباشد. اگر f در a پیوسته باشد، نقطهٔ توخالی یک نقطهٔ توپر خواهد شد.

قواعد اساسی حد. به کمک این تعبیر هندسی روند ε, δ ، می‌توان چند قاعدهٔ اساسی حدود را اثبات کرد. در هر حالت، از نامساوی مضاعف (۸)، که به ازای هر x در δ- همسایگی سفتهٔ $0 < |x-a| < \delta$ برقرار است، آغاز می‌کنیم.

(یک) ***هرگاه $f(x)$ در a دارای حد L باشد، آنگاه $f(x)$ در یک همسایگی سفتهٔ a کراندار است؛*** یعنی، اعداد مثبتی مانند C و δ وجود دارند به‌طوری که هروقت $0 < |x-a| < \delta$ ، $|f(x)| \le C$ ، یا معادلاً $-C \le f(x) \le C$. در واقع، کافی است C را آنقدر بزرگ بگیریم که نوار $-C \le y \le C$ شامل نوار $L-\varepsilon < y < L+\varepsilon$ شود، که همیشه امکان‌پذیر است.

(دو) ***اگر $f(x)$ در a حد ناصفر L را داشته باشد، همسایگی سفته‌ای از a هست که در آن $f(x)$ ناصفر بوده و با L هم‌علامت است.*** برای مشاهدهٔ این امر، ابتدا ε را آنقدر کوچک می‌گیریم که $L-\varepsilon > 0$ اگر $L > 0$ یا $L+\varepsilon < 0$ اگر $L < 0$. دراین صورت، همانطور که در شکل ۳۸(آ) برای $L > 0$ و در شکل ۳۸(ب) برای $L < 0$ نشان داده شده است،



(ب) (آ)

شکل ۳۸

تابع $f(x)$ به ازای جمیع x های واقع در همسایگی مناسبی از a ، با L هم‌علامت است.

(سه) ***هرگاه $f(x)$ در همسایگی سفته‌ای از a نامنفی باشد، آنگاه $f(x)$ نمی‌تواند در a حد منفی داشته باشد.*** همین مطلب که در آن نامنفی و منفی با نامثبت و مثبت عوض شده باشند نیز درست است. این بیان دیگری است از قاعدهٔ (دو).

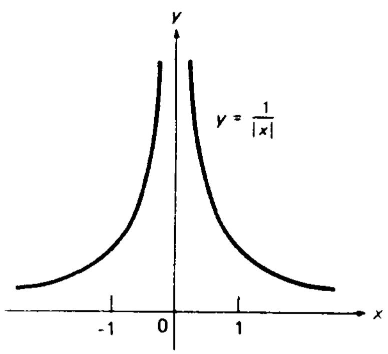
قاعدهٔ آخر تکنیکی‌تر است، و از اینجهت ذکر شده است که در برهان قضیهٔ ۶، صفحهٔ ۱۳۳، به کار خواهد رفت.

اختیاری. (چهار) **هرگاه $f(x)$ در a حد ناصفر L داشته باشد، آنگاه تابع متقابل $1/f(x)$ در همسایگی سفته‌ای از a کراندار است.** برای اثبات این قاعده، مجددا" ε را آنقدر کوچک می‌گیریم که $L - \varepsilon > 0$ اگر $L > 0$ و $L + \varepsilon < 0$ اگر $L < 0$ (ر.ک. شکل ۳۸). در این صورت، $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$، به کمک قضیهٔ ۴، صفحه ۱۳، ایجاب می‌کند که

$$\frac{1}{L+\varepsilon} < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{L-\varepsilon}.$$

لذا، آن قسمت از نمودار تابع $y = 1/f(x)$ نظیر به مقادیر x در همسایگی سفتهٔ $0 < |x - a| < \delta$ کاملا" در نوار افقی $1/(L+\varepsilon) < y < 1/(L-\varepsilon)$ قرار دارد، و برای اتمام برهان، C را آنقدر بزرگ می‌گیریم که این نوار داخل نوار $-C \le y \le C$ قرار گیرد.

مثال ۷. تابع $f(x) = 1/|x|$، که در شکل ۳۹ رسم شده است، در هر همسایگی سفتهٔ نقطهٔ $x = 0$ بی‌کران است. درواقع، به ازای هر $C > 0$، می‌توان با اختیار $0 < |x| < 1/C$ چنین داشت $|f(x)| > C$. لذا، طبق قاعدهٔ (یک)، $f(x)$ در $x = 0$ حد ندارد.



شکل ۳۹

حال بررسی حدود مستلزم دو یا چند تابع را آغاز می‌کنیم، که در دو بخش آینده ادامه خواهد یافت. اولین نتیجه می‌گوید هرگاه تابع کرانداری در یک تابع نزدیک شونده به صفر ضرب شود، آنگاه حاصل ضرب نیز به صفر نزدیک خواهد شد.

قضیهٔ ۳ (حفظ نزدیک شدن به صفر). هرگاه $f(x)$ در همسایگی سفته‌ای از a کراندار بوده

و وقتی $x \to a$ ، $g(x) \to 0$ ، آنگاه وقتی $x \to a$ ، $f(x)g(x) \to 0$.

برهان (اختیاری) . چون $f(x)$ در همسایگی سفته‌ای از a کراندار است ، اعدادی مانند $C > 0$ و $\delta_f > 0$ وجود دارند به‌طوری که هر وقت $0 < |x - a| < \delta_f$ ، $|f(x)| \le C$. همچنین ، چون وقتی $x \to a$ ، $g(x) \to 0$ ، به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta_g > 0$ ای‌وجود دارد به‌طوری که هر وقت $0 < |x - a| < \delta_g$ ، $|g(x) - 0| = |g(x)| < \varepsilon/C$. (استفاده از ε/C به جای ε آخرین مرحلهٔ برهان را پیش‌بینی می‌کند .) حال δ را از دو عدد δ_f و δ_g کوچکتر می‌گیریم ؛ یعنی ، $\delta = \min \{\delta_f, \delta_g\}$ را اختیار می‌کنیم . این δ از نیاز به داشتن همسایگی سفته‌ای از a ناشی‌شده‌است‌که‌درآن **همزمان** داشته باشیم $|f(x)| \le C$ و $|g(x)| < \varepsilon/C$. در ایـن صورت ، هر وقت $0 < |x - a| < \delta$ ، خواهیم داشت

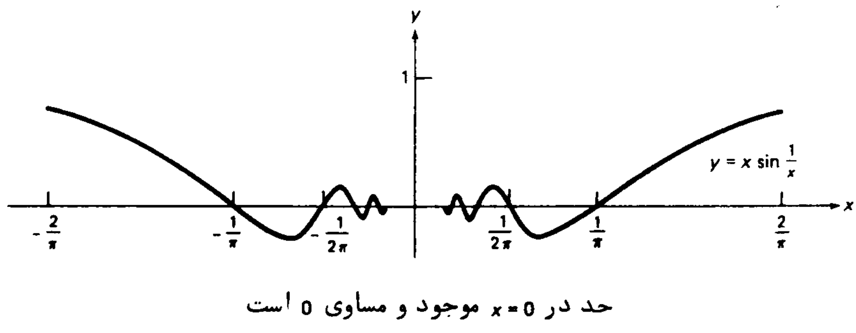
$$|f(x)g(x) - 0| = |f(x)|\,|g(x)| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

اما این به زبان ε, δ یعنی وقتی $x \to a$ ، $f(x)g(x) \to 0$.

نتیجه . *هرگاه $f(x)$ در a حدداشته‌باشد ووقتی $x \to a$ ، $g(x) \to 0$ ، آنگاه‌وقتی $x \to a$ ، $f(x)g(x) \to 0$.*

برهان . قضیهٔ ۳ را به کار برده ، ملاحظه می‌کنیم که هرگاه $f(x)$ در a حد داشته باشـد ، آنگاه ، به خاطر قاعدهٔ (یک) ، $f(x)$ در همسایگی سفته‌ای از a کراندار است .

مثال ۸ . تابع $x \sin(1/x)$ را ، که در شکل ۴۰ رسم شده ، در نظر می‌گیریم ،که‌وقتی $x \to 0$ ، x بیشتر و بیشتر نوسان می‌کند (این تابع به ازای $x = 0$ تعریف نشده است) . چون‌به‌ازای



حد در $x = 0$ موجود و مساوی ۰ است

شکل ۴۰

هر $x \neq 0$ ، $|\sin(1/x)| \leq 1$ و چون $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ ، از قضیهٔ ۳ نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

مثال ۹. فرض کنیم $f(x) = 1/|x|$ و $g(x) = |x|$. در این صورت ،

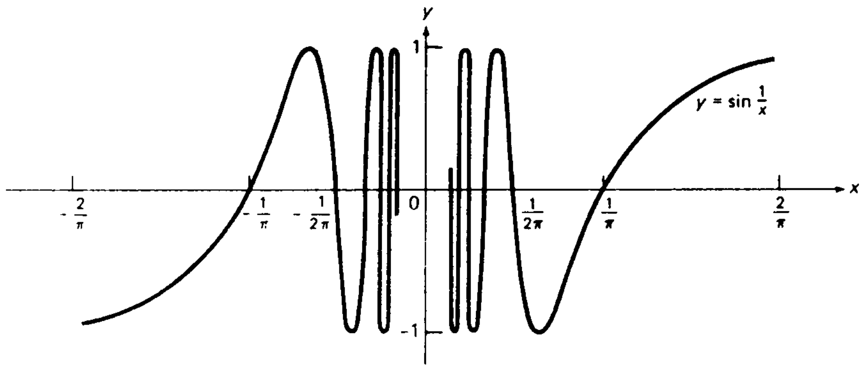
$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0$$

(ر.ک. مثال ۴) ، حال آنکه

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

این با قضیهٔ ۳ تعارضی ندارد ، زیرا ، همانطور که در مثال ۷ گفتیم ، $f(x)$ در همسایگی سفته‌ای از $x = 0$ کراندار نیست .

مثال ۱۰. در مثال ۸ ، به خاطر عامل x ، نوسانات $x \sin(1/x)$ ، وقتی $x \to 0$ ، ضعیفتر می‌شوند . حال این عامل را حذف کرده و رفتار خود تابع $\sin(1/x)$ را در نظر می‌گیریم . وقتی $x \to 0$ ، $\sin(1/x)$ نوسانات بیشتری بین -1 و 1 خواهد داشت ، و همزمان با آن فاصلهٔ بین عبورهای متوالی نمودار تابع از محور x کوچکتر می‌شود (ر.ک. شکل ۴۱) . به سختی می‌توان باورکرد که $\sin(1/x)$ درمجاورت $x = 0$ نزدیک عددی بماند ، زیراهمسایگی سفته‌ای از $x = 0$ وجود ندارد که در آن تابع نوسان کاملی (در واقع ، بی‌نهایت‌نوسان!)



حد در $x = 0$ وجود ندارد .

شکل ۴۱

نداشته باشد. لذا، درک شهودی ما قویاً "می‌گوید که $\sin(1/x)$ در $x=0$ حد ندارد.

اختیاری. برای *اثبات* این مطلب، به روش ε, δ نشان می‌دهیم که فرض اینکه $\sin(1/x)$ در $x=0$ دارای حد L است به‌تناقض منجر می‌شود. فرض کنیم وقتی $x \to 0$، $f(x) \to L$. در این صورت، بااختیار $\varepsilon = \frac{1}{2}$، می‌توان $\delta > 0$ را به‌قسمی یافت که هروقت $0 < |x| < \delta$

$$\left|\sin\frac{1}{x} - L\right| < \frac{1}{2} \qquad (۹)$$

فرض‌کنیم n عدد صحیحی باشد که قدرمطلقش آنقدر بزرگ است‌که‌هر دونقطهٔ $x_1 = 1/(2n+\frac{1}{2})\pi$ و $x_2 = 1/(2n-\frac{1}{2})\pi$ متعلق به همسایگی سفتهٔ $0 < |x| < \delta$ می‌باشند. در این صورت، $\sin(1/x_1) = \sin(2n+\frac{1}{2})\pi = \sin\frac{1}{2}\pi = 1$، حال آنکه $\sin(1/x_2) = \sin(2n-\frac{1}{2})\pi = \sin(-\frac{1}{2}\pi) = -1$. از رابطهٔ (۹) معلوم می‌شود که

$$\left|\sin\frac{1}{x_1} - L\right| = |1 - L| < \frac{1}{2}, \qquad \left|\sin\frac{1}{x_2} - L\right| = |-1 - L| < \frac{1}{2}$$

این دو نامساوی ناسازگارند، زیرا اولی ایجاب می‌کند که $L > \frac{1}{2}$ و دومی ایجاب می‌کند که $L < -\frac{1}{2}$. لذا. فرض حد داشتن $\sin(1/x)$ در $x=0$ به تناقض می‌رسد. بنابراین، $\sin(1/x)$ در $x=0$ حد *ندارد*.

مسائل

ابتدا حد L تابع دادهٔ f را درنقطهٔ a بیابید. سپس، به‌ازای ε دادهٔ‌شده، $\delta > 0$ ای بیابید که هروقت $0 < |x-a| < \delta$، $|f(x) - L| < \varepsilon$، و انتخاب خود را توضیح دهید. سعی کنید δ حتی‌الامکان بزرگ باشد (در مسائل ۵ تا ۸ به ماشین حساب نیاز خواهید داشت).

۱. $f(x) = 5x$، a ی دلخواه، $\varepsilon > 0$ دلخواه.

۲. $f(x) = mx + b$ $(m \neq 0)$، a ی دلخواه، $\varepsilon > 0$ دلخواه.

۳. $f(x) = \dfrac{3x^2 + 8x - 3}{x + 3}, a = -3, \varepsilon = 0.15$

۴. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x - 4}{x - 4}, a = 4, \varepsilon = 0.25$

۵. $f(x) = x^2, a = 2, \varepsilon = 1$

۶. $f(x) = x^2 \sin x, a = 0, \varepsilon = 0.5$

۷. $f(x) = x^3, a = -1, \varepsilon = 0.1$

۸. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}, a = 1, \varepsilon = 0.05$

۹. فرض کنید تابع f در a دارای حد L بوده ولی در a تعریف نشده باشد. همچنین، به ازای هر x در همسایگی سفته‌ای از a، $f(x) = g(x)$، و g در a پیوسته باشد. نشان دهید که $L = g(a)$.

۱۰. فرض کنید تابع f در a دارای حد L باشد، ولی در a تعریف نشده باشد یا در a مقداری غیر از L داشته باشد. در این صورت، همانطور که در صفحهٔ ۱۱۳ دیدیم، f در a ناپیوسته است. نشان دهید این ناپیوستگی **قابل رفع** است به این معنی که می‌توان با تعریف (یا تعریف مجدد) f در a آن را رفع کرد. به‌طور دقیقتر، نشان دهید هرگاه، با تعریف مقدار f در a مساوی L، تابع f را توسیع (یا تعدیل) کنیم، آنگاه تابع جدید به دست آمده در a پیوسته می‌باشد.

۱۱. فرض کنید f در نقطهٔ a ناپیوسته باشد. چه وقت ناپیوستگی **غیرقابل رفع** است؟

۱۲. آیا ناپیوستگی تابع $(\sin x)/x$ در $x = 0$ قابل رفع است؟ ناپیوستگی $|x|/x$ چطور؟ $\sin(1/x)$ چطور؟

۱۳. آیا ناپیوستگی تابع $(x^2 - 1)/(x - 1)$ در $x = 1$ قابل رفع است؟

۱۴. تابعی مثال بزنید که در هر همسایگی سفتهٔ نقطهٔ a کراندار باشد ولی در a حد نداشته باشد.

حد داده شده را (در صورت وجود) محاسبه کنید.

۱۵. $\lim\limits_{x \to 0} x \cos x$

۱۶. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{x}$

۱۷. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\cos x}{x}$

۱۸. $\lim\limits_{x \to 0} x \cos \dfrac{1}{x}$

۱۹. $\lim\limits_{x \to 0} \cos \dfrac{1}{x}$

۲۰. $\lim\limits_{x \to 0} \sin x \cos x$

۲۱. $\lim\limits_{x \to 0} \sin x \sin \dfrac{1}{x}$

۲۲. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \tan x$

۲۳. $\lim\limits_{x \to 0} \sin x \tan x$

۲۴. $\lim\limits_{x \to 0} \sin^n x$ (n عدد صحیح مثبت دلخواهی است)

نشان دهید

۲۵. هرگاه $\lim_{x\to a} f(x) = L$، آنگاه $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$

۲۶. هرگاه $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$، آنگاه $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

۲۷. هرگاه $\lim_{x\to a} |f(x)|$ موجود و ناصفر باشد، آنگاه $\lim_{x\to a} f(x)$ ممکن است موجود نباشد.

۲۸. نشان دهید هرگاه تابع f در a پیوسته باشد، آنگاه $|f|$ نیز چنین است. آیا عکس این مطلب نیز درست است؟

فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a} g(x) = M$. نشان دهید

۲۹. هرگاه $L < M$، آنگاه در مجاورت a (یعنی، در همسایگی سفته‌ای از a)، $f(x) < g(x)$.

۳۰. هرگاه در مجاورت a، $f(x) \leq g(x)$، آنگاه $L \leq M$، که در آن $L = M$ حتی اگر $f(x) < g(x)$ امکان‌پذیر باشد.

۳۱. به روش ε, δ نشان دهید هرگاه

$$\lim_{x\to a} f(x) = M \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a} f(x) = L$$

آنگاه $L = M$. به‌عبارت دیگر، تحقیق کنید هرگاه حد تابع f در نقطهٔ a موجود باشد، آنگاه این حد **منحصر به فرد** است؛ یعنی، همانطورکه در طول بحث تلویحاً فرض کرده‌ایم، فقط یک مقدار بیشتر ندارد.

۷.۱ اعمال جبری بر حدود

در کارهای آتی باید بتوان حدود عبارات جبری مستلزم دو یا چند تابع را محاسبه کرد. این محاسبات به‌وسیله این امر، که اکنون (در قضایای ۴ تا ۶) به اثباتش می‌پردازیم، که حد مجموع دو تابع مجموع حدود توابع است، و همچنین احکام حاصل از تعویض مجموع به **تفاضل**، **حاصل‌ضرب**، و **خارج قسمت**، بسیار ساده خواهد شد. اثباتها ساده ولی تکنیکی‌اند؛ و لذا، اختیاری شده‌اند. در صورت حذف برهانها، مطمئن شوید که صورت قضایا را، که آزادانه به کار می‌روند، فهمیده‌اید. این نکته را در مورد قضایای ۹ و ۱۰، که در آخر بخش اثبات می‌شوند، نیز رعایت نمایید.

قضیهٔ ۴ (حد مجموع یا تفاضل دو تابع) هرگاه وقتی $x \to a$، $f(x) \to L$ و $g(x) \to M$

آنگاه ، وقتی $x \to a$ ، $f(x) + g(x) \to L + M$ و $f(x) - g(x) \to L - M$.

برهان *(اختیاری)* . استدلال کاملا" شبیه استدلالی است که در اثبات قضیهٔ ۳ ، صفحهٔ ۱۲۵،به کار رفت . چون وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to L$ ، بــه ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند $\delta_f > 0$ وجود دارد به‌طوری که هر وقت $0 < |x - a| < \delta_f$ ، $|f(x) - L| < \varepsilon/2$.(استفاده از $\varepsilon/2$ بــه جــای ε آخرین مرحلهٔ برهان را بازگو می‌کند .) همچنیــن ، از آنجــا کــه وقتی $x \to a$ ، $g(x) \to M$ ، عــددی مانند $\delta_g > 0$ وجــود دارد به طوری کــه هر وقت $0 < |x - a| < \delta_g$ ، $|g(x) - M| < \varepsilon/2$.

لذا ، طبق نامساوی مثلثی (قضیهٔ ۵ ، صفحهٔ ۲۲) ، هر وقت

$$0 < |x - a| < \delta = \min \{\delta_f, \delta_g\}$$

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| = |[f(x) - L] + [g(x) - M]|$$
$$\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

اما ، به زبان ε, δ ، این یعنی وقتــی $x \to a$ ، $f(x) + g(x) \to L + M$. اثبــات اینکه وقتی $x \to a$ ، $f(x) - g(x) \to L - M$ اساسا" به همین صورت است .

نتیجه را می‌توان فورا" به بیش از دو تابع تعمیم داد .

نتیجهٔ ۱ .هرگاه وقتی $x \to a$ ، $f_1(x) \to L_1, f_2(x) \to L_2, \ldots, f_n(x) \to L_n$ ، آنگاه وقتی $x \to a$ ،

$$f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x) \to L_1 \pm L_2 \pm \cdots \pm L_n \qquad (۱)$$

برهان . در اینجا می‌توان در هر علامت $\pm$ یکی از + یا − را اختیار کرد ، با این فرض‌که‌در جاهای نظیر در طرفین فرمول (۱) یک انتخاب صورت گیرد . برهان تکرار کاربرد قضیهٔ۴ است .

نتیجهٔ ۲ .وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to L$ *اگر و فقط اگــر* $f(x) = L + e(x)$ ، که در آن وقتــی $x \to a$ ، $e(x) \to 0$.

برهان . فرض کنیم وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to L$ ، و قرار می‌دهیم $e(x) = f(x) - L$.دراین

صورت ،

$$\lim_{x\to a} e(x) = \lim_{x\to a} [f(x) - L] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} L = L - L = 0,$$

زیرا حد ثابت مساوی خود ثابت است . به عکس، فرض کنیم $f(x) = L + e(x)$ ، که درآن وقتی $x \to a$ ، $e(x) \to 0$. در این صورت ،

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} [L + e(x)] = \lim_{x\to a} L + \lim_{x\to a} e(x) = L + 0 = L.$$

می‌توان $e(x) = f(x) - L$ را " خطای " تقریب $f(x) \approx L$ نزدیک a تصور کرد . نتیجهٔ ۲ می‌گوید که وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to L$ اگر و فقط اگر این خطا وقتی $x \to a$ ، به 0 نزدیک شود .

قضیهٔ ۵ (حد حاصل ضرب دو تابع) . هرگاه وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to L$ و $g(x) \to M$ آنگاه وقتی $x \to a$ ، $f(x)g(x) \to LM$.

برهان (اختیاری) . فرض کنیم $e_f(x) = f(x) - L$ و $e_g(x) = g(x) - M$ خطاهای دو تقریب $f(x) \approx L$ و $g(x) \approx M$ نزدیک a باشند . بنابرنتیجهٔ ۲ ، وقتی $x \to a$ ، $e_f(x) \to 0$ و $e_g(x) \to 0$. به‌علاوه ، با محاسبهٔ جبری ساده‌ای ،

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - LM &= [L + e_f(x)][M + e_g(x)] - LM \\ &= Me_f(x) + Le_g(x) + e_f(x)e_g(x), \end{aligned}$$

اما ، طبق قضیهٔ ۳ ، صفحهٔ ۱۲۵ ، و نتیجه‌اش ، هر یک از سه جملهٔ سمت راست ، وقتی $x \to a$ به صفر نزدیک می‌شود (هر تابع ثابت کراندار است) ؛ و لذا . بنابرنتیجهٔ ۱ در بالا ، تمام عبارت سمت راست چنین می‌کند . بنابراین ، وقتی $x \to a$ ، $f(x)g(x) - LM \to 0$ یا معادلاً " $f(x)g(x) \to LM$.

نتیجهٔ ۱ . هرگاه وقتی $x \to a$ ، $f_1(x) \to L_1, f_2(x) \to L_2, \ldots, f_n(x) \to L_n$ ، آنگاه وقتی $x \to a$ ،

$$f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x) \to L_1L_2\cdots L_n$$

برهان . قضیهٔ ۵ را تکرار نمایید .

نتیجهٔ ۲ . هرگاه c ثابت دلخواهی بوده و وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to L$ ، آنگاه ، وقتی $x \to a$ ،

. $cf(x) \to cL$

برهان. در قضیهٔ ۵ $g(x) \equiv c$ را انتخاب کنید.

قضیهٔ ۶ (حدخارج‌قسمت‌دوتابع). هرگاه‌وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to L$ و $g(x) \to M \neq 0$ آنگاه، وقتی $x \to a$ ، $f(x)/g(x) \to L/M$.

برهان (اختیاری). با نوشتن

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} = \frac{M - g(x)}{Mg(x)}, \qquad (۲)$$

می‌بینیم که، طبق قضیهٔ ۴،

$$\lim_{x \to a} [M - g(x)] = \lim_{x \to a} M - \lim_{x \to a} g(x) = M - M = 0.$$

به‌علاوه، طبق نتیجهٔ ۲ از قضیهٔ ۵،

$$\lim_{x \to a} Mg(x) = M^2 \neq 0,$$

درنتیجه، بنابر قاعدهٔ (چهار)، صفحهٔ ۱۲۵، $1/Mg(x)$ در همسایگی سفته‌ای از a کراندار است. بنابراین، طبق قضیهٔ ۳، صفحهٔ ۱۲۵، طرف راست (۲) وقتی $x \to a$ ، به صفر نزدیک می‌شود، یا معادلاً"، وقتی $x \to a$ ، $1/g(x) \to 1/M$. اما $f(x)/g(x)$ حاصل ضرب $f(x)$ در $1/g(x)$ ، یعنی متقابل $g(x)$ ، است؛ و درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۵ ، وقتی $x \to a$ ، $f(x)/g(x) = f(x)[1/g(x)] \to L(1/M) = L/M$.

قضایای ۴ تا ۶ به‌طور خلاصه می‌گویند هرگاه

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \qquad \lim_{x \to a} g(x) = M, \qquad (۳)$$

آنگاه

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M, \qquad (۴)$$

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = LM, \qquad (۵)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \qquad (M \neq 0). \qquad (۶)$$

حال موارد استعمال این فرمولها را نشان می‌دهیم.

مثال ۱. با استفاده از (۴) و (۵)، نشان دهید که

$$\lim_{x \to -4} \left(x^2 + \frac{3}{2}x\right) = 10.$$

حل. ما از قبل می‌دانیم که

$$\lim_{x \to -4} x = -4, \qquad \lim_{x \to -4} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

لذا، با دو بار استفاده از فرمول (۵)،

$$\lim_{x \to -4} x^2 = \lim_{x \to -4} x \cdot \lim_{x \to -4} x = (-4)(-4) = 16,$$

$$\lim_{x \to -4} \frac{3}{2}x = \lim_{x \to -4} \frac{3}{2} \cdot \lim_{x \to -4} x = \frac{3}{2}(-4) = -6.$$

پس، با استفاده از (۴)، خواهیم داشت

$$\lim_{x \to -4} \left(x^2 + \frac{3}{2}x\right) = \lim_{x \to -4} x^2 + \lim_{x \to -4} \frac{3}{2}x = 16 + (-6) = 10.$$

مثال ۲. حد زیر را بیابید:

$$L = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}.$$

حل. مخرج کسر، وقتی $x \to 3$، به صفر نزدیک می‌شود، ولی این مشکل را می‌توان با حذف عامل مشترک $x - 3$ از صورت و مخرج از بین برد:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15} = \frac{(x - 3)(x - 2)}{(x - 3)(x - 5)} = \frac{x - 2}{x - 5} \qquad (x \neq 3, 5).$$

بقیهٔ محاسبات سرراست است. با استفاده از (۶) و (۴)، داریم

$$L = \lim_{x \to 3} \frac{x - 2}{x - 5} = \frac{\lim_{x \to 3} (x - 2)}{\lim_{x \to 3} (x - 5)} = \frac{\lim_{x \to 3} x - \lim_{x \to 3} 2}{\lim_{x \to 3} x - \lim_{x \to 3} 5} = \frac{3 - 2}{3 - 5} = -\frac{1}{2}.$$

خارج قسمت دو چندجمله‌ای، مانند $(x^2 - 5x + 6)/(x^2 - 8x + 15)$، یک تابع

گویا نامیده می‌شود .

اعمال جبری بر توابع پیوسته. حال فرض کنیم $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند ، که هر دو در a پیوسته‌اند . در این صورت ، به‌جای (۳) داریم

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x\to a} g(x) = g(a), \tag{۳'}$$

درنتیجه ، فرمولهای (۴) تا (۶) خواهند شد

$$\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = f(a) \pm g(a), \tag{۴'}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = f(a)g(a), \tag{۵'}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} \qquad (g(a) \neq 0). \tag{۶'}$$

اما این دقیقاً " یعنی توابع $f(x) \pm g(x)$ ، $f(x)g(x)$ ، و $f(x)/g(x)$ در a پیوسته‌اند . لذا ، نتیجهٔ اساسی زیر ثابت شده است .

قضیهٔ ۷ (پیوستگی ترکیب توابع) هرگاه توابع $f(x)$ و $g(x)$ در a پیوسته باشند ، آنگاه مجموع $f(x) + g(x)$ ، تفاضل $f(x) - g(x)$ ، حاصل ضرب $f(x)g(x)$ ، و خارج‌قسمت $f(x)/g(x)$ نیز چنین‌اند ، مشروط براینکه در حالت اخیر $g(a) \neq 0$.

نتیجه. هرگاه توابع $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ در a پیوسته باشند ، آنگاه مجموع جبری $f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)$ و حاصل ضرب $f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$ نیز چنین‌اند .

برهان . طبق تعریف ، یک مجموع جبری مجموعی است که هر جمله‌اش می‌تواند یکی از دو علامت را داشته باشد . برای اثبات نتیجه ، قضیهٔ ۷ را چند بار به کار می‌بریم .

پیوستگی چندجمله‌ایها ، توابع گویا ، و توابع مثلثاتی . دو قضیهٔ زیر در صفحهٔ ۱۱۵ پیش‌بینی شده بودند ، و قبلاً " در حل مسائل حد به‌طور غیررسمی مفید واقع شدند .

قضیهٔ ۸ (**پیوستگی چندجمله‌ایها و توابع گویا**) . چندجمله‌ای

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \qquad (a_n \neq 0)$$

به ازای هر x پیوسته است. تابع گویای

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_Nx^N} \qquad (a_n \neq 0, b_N \neq 0)$$

در هر نقطه از قلمرو تعریفش، یعنی در هر نقطه که مخرجش ناصفر است، پیوسته می‌باشد.

برهان. هرجملهٔ a_kx^k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ از چندجمله‌ای $P(x)$ پیوسته است، زیرامساوی حاصل ضرب $k + 1$ تابع پیوسته، یعنی ثابت a_k و k عامل از x، می‌باشد. پس $P(x)$، که مجموع $n + 1$ جمله از این نوع است، نیز پیوسته می‌باشد. چون چندجمله‌ایها پیوسته اند، خارج‌قسمت $R(x) = P(x)/Q(x)$ دوچندجمله‌ای نیز، جز در نقاطی (درصورت‌وجود) که مخرج $Q(x)$ مساوی صفر است، پیوسته می‌باشد.

حال که دانستیم چندجمله‌ایها پیوسته‌اند، محاسبات مثال ۱ را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$\lim_{x \to -4} \left(x^2 + \frac{3}{2}x\right) = (-4)^2 + \frac{3}{2}(-4) = 16 - 6 = 10.$$

همچنین، با استفاده از توابع گویا، می‌توان از چند مرحله در مثال ۲ گذشت (کدامها؟).

مثال ۳. تابع گویای $1/(1 + x^2)$ به ازای هر x پیوسته است، زیرا مخرجش هرگز صفر نمی‌شود.

مثال ۴. تابع گویای $x/(1 - x^2)$ همه‌جا جز در دو "نقطهٔ ناپیوستگی" $x = 1$ و $x = -1$ که در آنها مخرجش 0 است، پیوسته می‌باشد.

قضیهٔ ۹ (پیوستگی توابع مثلثاتی). *هر یک از توابع مثلثاتی* $\sin x$، $\cos x$، $\tan x$، $\cot x$، $\sec x$، و $\csc x$ *در هر نقطه از قلمرو تعریف خود پیوسته است.*

نمودار توابع مثلثاتی قویا" پیشنهاد می‌کند که این تابعها پیوسته‌اند، زیرا نمودار هر شاخه یک منحنی " ناشکسته " است، ولی باید برهانی صوری برای آن آورد. این کار قدری تکنیکی است؛ و درنتیجه، در آخر بخش ارائه می‌شود.

مثال ۵. بنا بر پیوستگی $\cos x$ ،

$$\lim_{x\to\pi} (\cos^2 x + \cos x + 1) = \cos^2 \pi + \cos \pi + 1 = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1.$$

قضیهٔ ساندویچ. قضیهٔ زیر ابزار مفید دیگری در محاسبهٔ حدود است.

قضیهٔ ۱۰ (قضیهٔ ساندویچ) . *هرگاه در همسایگی سفته‌ای از* a

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

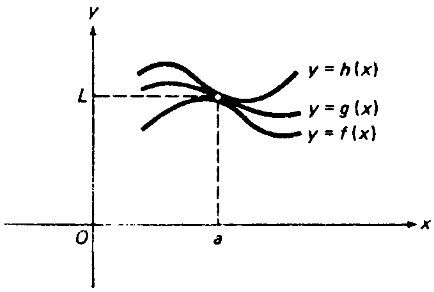
و نیز

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L,$$

آنگاه

$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

به عبارت دیگر، تابعی که بین دو تابع که هر دو حد L را دارند قرار داشته باشد، باید به L نزدیک شود. شکل ۴۲ برقراری این قضیه را قویاً تأیید می‌کند ($g(x)$ ، وقتی



شکل ۴۲

$x \to a$ ، جز به سمت L کجا می‌تواند برود؟) ، ولی برهان دقیقی بعد از برهان قضیهٔ ۹ داده شده است.

مثال ۶. به ازای عدد صحیح مثبت n ، نشان دهید که

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[n]{1 + x} = 1. \qquad (۷)$$

چون $\sqrt[n]{1 + 0} = 1$ ، این می‌گوید که تابع $\sqrt[n]{1 + x}$ در $x = 0$ پیوسته است.

حل . هرگاه $|x| < 1$ ، آنگاه

$$1 - |x| \le \sqrt[n]{1 + x} \le 1 + |x|.$$

(ذکر جزئیات ، که مبتنی بر معنی $|x|$ و مثال ۶ ، صفحهٔ ۱۷ ، است ، را به عنوان تمرین می‌گذاریم .) حال چون

$$\lim_{x \to 0} (1 \pm |x|) = \lim_{x \to 0} 1 \pm \lim_{x \to 0} |x| = 1 \pm 0 = 1,$$

فرمول (۸) فوراً از قضیهٔ ساندویچ نتیجه می‌شود .

مثال ۷ . برای حد

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad (۸)$$

که در مثال ۲ ، صفحهٔ ۱۱۰، به‌طور غیرصوری حساب شد ، برهان دقیق بیاورید .

حل . بنابر فرمول (۲) ، صفحهٔ ۱۰۶،

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad (0 < |x| < \pi/2),$$

که در آن وقتی $x \to 0$ ، $\cos x$ و ثابت 1 هر دو به 1 نزدیک می‌شوند . با اعمال قضیهٔ ساندویچ ، رابطهٔ (۸) فوراً به دست می‌آید .

برهان قضیهٔ ۹ (دلخواه) . با قرار دادن $\alpha = x, \beta = a$ در فرمول (۱۵) ، صفحهٔ ۹۶ به دست می‌آوریم

$$\sin x - \sin a = 2 \cos \frac{x + a}{2} \sin \frac{x - a}{2},$$

که نامساوی زیر را ایجاب می‌کند :

$$|\sin x - \sin a| = 2\left|\cos \frac{x + a}{2}\right|\left|\sin \frac{x - a}{2}\right| \le 2\left|\sin \frac{x - a}{2}\right| \le 2\left|\frac{x - a}{2}\right|,$$

یا معادلاً

$$|\sin x - \sin a| \le |x - a|, \qquad (۹)$$

که به ازای هر x و a معتبر است . (در اینجا از $|\cos (x + a)/2| \le 1$ ، همراه با نامساوی (۳') ، صفحهٔ ۱۰۷، استفاده می‌کنیم .) همچنین ، به خاطر (۹) ،

$$|\cos x - \cos a| = \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right)\right|$$
$$\leq \left|\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \left(a + \frac{\pi}{2}\right)\right| = |x - a|,$$

و نامساوی لنگهٔ زیر را داریم :

$$|\cos x - \cos a| \leq |x - a|, \qquad (۹')$$

که نیز به ازای هر x و a معتبر است. از روابط (۹) و (۹') فوراً نتیجه می‌شود که، هروقت فاصلهٔ x تا a کمتر از $\delta = \varepsilon$ باشد، هر دوی $|\sin x - \sin a|$ و $|\cos x - \cos a|$ از $\varepsilon > 0$ کوچکترند. بنابراین،

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a, \qquad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a,$$

و پیوستگی $\sin x$ و $\cos x$ ثابت شده است. چون توابع $\sin x$ و $\cos x$ به ازای هر x پیوسته‌اند، متقابلهای $\csc x = 1/\sin x$ و $\sec x = 1/\cos x$ و خارج قسمتهای $\tan x = \sin x/\cos x,\ \cot x = \cos x/\sin x$ هر جا تعریف شده‌اند، یعنی هر جا مخرجهایشان ناصفرند، پیوسته می‌باشند.

برهان قضیهٔ ۱۰. به ازای هر $\varepsilon > 0$، می‌توان عددی مانند $\delta_f > 0$ یافت به‌طوری‌که هر وقت $0 < |x - a| < \delta_f$، $|f(x) - L| < \varepsilon$ یا $-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$، و عددی مانند $\delta_h > 0$ به‌طوری که هروقت $0 < |x - a| < \delta_h$، $|h(x) - L| < \varepsilon$ یا $-\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon$ این نامساویها همراه با $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ایجاب می‌کنند که هر وقت $0 < |x - a| < \delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$، $-\varepsilon < f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L < \varepsilon$. بنابراین، هر وقت $0 < |x - a| < \delta$، $-\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon$ یا $|g(x) - L| < \varepsilon$؛ درنتیجه، وقتی $x \to a$، $g(x) \to L$.

مسائل

حدود زیر را محاسبه کنید.

۱. $\displaystyle\lim_{x\to 1.6} \frac{25x^2 - 64}{5x - 8}$ ۲. $\displaystyle\lim_{x\to -0.3} \frac{100x^2 - 9}{10x + 3}$ ۳. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 1}$

۴. $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5}$ ۵. $\displaystyle\lim_{x\to -4} \frac{x^3 + 64}{x + 4}$ ۶. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3}$

۷. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16}$

۸. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1 + x)(1 + 2x) - 1}{x}$

۹. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x) - 1}{x}$

۱۰. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^{100} - 10x^{10} + 999}{x^{50} - 5x^5 + 99}$

۱۱. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1 + x)^5 - (1 + 5x)}{x^2 + x^5}$

۱۲. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1 + 3x)^4 - (1 + 4x)^3}{x^2}$

۱۳. حد L تابع $f(x) = (x + 1)/(x - 2)$ در $x = 5$ را بیابید. سپس، به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، $\delta > 0$ ای بیابید به‌طوری که $0 < |x - 5| < \delta$ ایجاب کند که $|f(x) - L| < \varepsilon$.

نقاطی را، در صورت وجود، بیابید که تابع داده شده در آنها ناپیوسته است.

۱۴. $(x - 1)^2$

۱۵. $101x^{11} - 1001x$

۱۶. $\dfrac{x^2}{x^2 - 49}$

۱۷. $\dfrac{2x + 3}{x^2 + x + 1}$

۱۸. $\dfrac{1}{2x^2 + x - 1}$

۱۹. $\dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$

۲۰. $\dfrac{3x - 5}{x^2 - 3x + 2}$

۲۱. $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$

۲۲. $\dfrac{x^3 + 10}{x^5 - 2x^3 + x}$

حدود زیر را محاسبه کنید.

۲۳. $\lim_{x\to 1} (\cos^2 x - \sin^2 x)$

۲۴. $\lim_{x\to -1} (\cos^2 x + \sin^2 x)$

۲۵. $\lim_{x\to \pi} (\cos^3 x + \sin^3 x)$

۲۶. $\lim_{x\to -\pi/2} (\cos^4 x - \sin^5 x)$

۲۷. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x}$

۲۸. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$

۲۹. $\lim_{x\to \pi/6} \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$

۳۰. $\lim_{x\to \pi/4} (2\sec^4 x - 1)$

۳۱. $\lim_{x\to \pi/3} (\cot x + \csc x)$

۳۲. در مثال ۸، صفحهٔ ۱۲۶، نشان داده شد که

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

این مطلب را با استفاده از قضیهٔ ساندویچ به صورتی دیگر ثابت کنید.

۸.۱ حد تابع مرکب

برای آنکه حدود را به آسانی حساب کنیم باید طرز پرداختن به حدود توابع مرکب، مانند $\sqrt{2x+3}$ و $\sin(\cos x)$، را بیاموزیم. قضیهٔ زیر طرز کار را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۱۱ (حد تابع مرکب). **هرگاه**

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

و g در L پیوسته باشد، آنگاه

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(L). \tag{1}$$

برهان (اختیاری). فرض کنیم $y = f(x)$، و $\varepsilon > 0$ را اختیار می‌کنیم. چون g در L پیوسته‌است، می‌توان $\delta_g > 0$ ای‌یافت به‌طوری‌که‌هروقت $|y - L| < \delta_g$، $|g(y) - g(L)| < \varepsilon$. به‌علاوه، چون f در a دارای حد L است، می‌توان $\delta_f > 0$ ی نیز یافت به‌طوری که هروقت $0 < |x - a| < \delta_f$، $|f(x) - L| = |y - L| < \delta_g$. لذا، $0 < |x - a| < \delta_f$ ایجاب می‌کند که $|y - L| < \delta_g$، که به نوبهٔ خود ایجاب می‌کند که $|g(y) - g(L)| = |g(f(x)) - g(L)| < \varepsilon$. لذا، هر وقت $0 < |x - a| < \delta_f$، $|g(f(x)) - g(L)| < \varepsilon$، و (۱) ثابت می‌شود.

نتیجه (پیوستگی تابع مرکب) هرگاه f در a و g در $f(a)$ پیوسته باشد، آنگاه $g(f(x))$ در a پیوسته می‌باشد.

برهان. از قضیه با فرض $L = f(a)$ استفاده کنید.

نتیجه به‌طور غیرصوری می‌گوید که هر تابع پیوسته از یک تابع پیوسته پیوسته است.

مثال ۱ . به ازای عدد صحیح مثبت n ، نشان دهید

$$\lim_{x\to 1} \sqrt[n]{x} = 1. \qquad (۲)$$

چون $\sqrt[n]{1} = 1$ ، این می‌گوید که تابع ریشهٔ n م $\sqrt[n]{x}$ در نقطهٔ $x = 1$ پیوسته است .

حل . با اختیـــــار $f(x) = x - 1,\ g(x) = \sqrt[n]{1 + x}$ ، داریم $g(f(x)) = \sqrt[n]{x}$. به‌علاوه ،

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0,$$

و ، بنابرمثال ۶ ، صفحهٔ ۱۳۷ ، $g(x)$ در $x = 0$ پیوسته است . پس‌ازقضیهٔ ۱۱ نتیجه‌می‌شود که

$$\lim_{x\to 1} g(f(x)) = \lim_{x\to 1} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{1 + 0} = 1.$$

مثال ۲ . نشان دهید که تابع $\sqrt[n]{x}$ در هر نقطهٔ $a > 0$ پیوسته است .

حل . داریم

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \lim_{x\to a} \sqrt[n]{a\frac{x}{a}} = \lim_{x\to a} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\frac{x}{a}} = \sqrt[n]{a} \lim_{x\to a} \sqrt[n]{\frac{x}{a}},$$

زیرا $\sqrt[n]{a}$ ثـــابت است . بامعرفی متغیر جدید $t = x/a$ و توجه به‌این امر که $x \to a$ ایجاب می‌کند کـــه $t \to 1$ ، پس از استفاده از فرمول (۲) با x به جای t ،

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} \lim_{t\to 1} \sqrt[n]{t} = \sqrt[n]{a} \cdot 1 = \sqrt[n]{a}. \qquad (۳)$$

اما (۳) می‌گوید کـــه $\sqrt[n]{x}$ در $x = a$ پیوسته است . (توجه کنید که معرفی متغیر جدید $t = x/a$ معادل استفاده از قضیهٔ ۱۱ به ازای $f(x) = x/a$ و $g(x) = \sqrt[n]{ax}$ است .)

دلیل گذاردن شرط $a > 0$ این است که $\sqrt[n]{x}$ ، وقتی n زوج است ، به‌ازای x منفی تعریف نشده است ، ولی این شرط‌را می‌توان در صورت فرد بودن n حذف کرد . درواقع ، اگر n فرد باشد ، $\sqrt[n]{x}$ به ازای هر x تعریف شده است و استدلالی که هم‌اکنون داده شد نشان می‌دهد که وقتی $x \to a \neq 0$ ، $\sqrt[n]{x} \to \sqrt[n]{a}$ ، ولی ، بنابر استدلال مثال ۱ در بخش بعد ، وقتی $x \to 0$ ، $\sqrt[n]{x} \to \sqrt[n]{0} = 0$.

مثال ۳ . نشان دهید که $\lim_{x\to 11} \sqrt{2x + 3} = 5$.

حل . توابع $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = \sqrt{x}$ هر دو پیوسته‌اند ، $f(x)$ چون یک چند ـ جمله‌ای است و $g(x)$ بنابر مثال قبل . از اینرو ، بنابرنتیجه ، تابع $g(f(x)) = \sqrt{2x + 3}$ نیز پیوسته می‌باشد . اما ، در این صورت ،

$$\lim_{x \to 11} \sqrt{2x + 3} = \sqrt{2(11) + 3} = \sqrt{25} = 5.$$

مثال ۴ . حد $\cos(\sin x)$ در نقطهٔ $x = 0$ را بیابید .

حل . چون $\sin x$ و $\cos x$ به ازای هر x پیوسته‌اند ، تابع مرکب $\cos(\sin x)$ نیز چنین است . بنابراین ،

$$\lim_{x \to 0} \cos(\sin x) = \cos(\sin 0) = \cos 0 = 1.$$

رفع ابهام . در مثالهای زیر از تمام تکنیکهای محاسبهٔ حد مذکور در این فصل استفاده می‌کنیم . در هر حالت حد عبارتی در a حساب می‌شود که با گذاردن $x = a$ در آن به صورت مبهم $0/0$ درمی‌آید . روند محاسبهٔ این حدود اغلب " رفع ابهام از $0/0$ "نامیده می‌شود .

مثال ۵ . حد $L = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x}$ را محاسبه کنید .

حل . تابع $(1 - \sqrt{x+1})/x$ به ازای $x = 0$ تعریف نشده است؛ در واقع ،جانشانی $x = 0$ آن را به صورت مبهم $0/0$ درمی‌آورد . سعی می‌کنیم x مزاحم در مخرج را با ضرب صورت و مخرج در عامل $1 + \sqrt{x+1}$ حذف کنیم . این شیوه به طرز زیبایی کارساز است ، زیرا به x ی در صورت منجر می‌شود که با x مخرج حذف خواهد شد . به‌طور مشروح ،

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x} \frac{1 + \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - (x+1)}{x(1 + \sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x}{x(1 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{1 + \sqrt{x+1}}.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$L = \frac{-1}{\lim_{x \to 0}(1 + \sqrt{x+1})} = \frac{-1}{1 + \lim_{x \to 0} \sqrt{x+1}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2},$$

که در آن از پیوستگی $\sqrt{x+1}$ در $x = 0$ استفاده می‌کنیم .

مثال ۶. حد $L=\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin c\theta}{\theta}$ را حساب کنید، که در آن c ثابت دلخواهی است.

حل. ابتدا می‌نویسیم

$$L=\lim_{\theta\to 0} c\,\frac{\sin c\theta}{c\theta}=c\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin c\theta}{c\theta}$$

در این صورت، با جانشانی $t=c\theta$ و توجه به اینکه وقتی $\theta\to 0$، $t\to 0$ به دست می‌آوریم

$$L=c\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=c\cdot 1=c.$$

مثال ۷. حد $L=\lim_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$ را محاسبه کنید.

حل. در اینجا با صورت مبهم $0/0$ سروکار داریم، زیرا $\cos\pi=-1$ و $\sin\pi=0$، $\sin^2 x$ را با $1-\cos^2 x$ تعویض کرده، صورت و مخرج را تجزیه می‌کنیم. سپس، بعد از حذف عامل مشترک $1+\cos x$، به دست می‌آوریم

$$L=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^3 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos x}{1-\cos x+\cos^2 x}.$$

عامل $1+\cos x$، که در $x=\pi$ مساوی صفر است، ابهام اولیه را سبب می‌شد، ولی اینک از بین رفته است، و می‌توان، با استفاده از پیوستگی $\cos x$، L را حساب کرد. به عبارت دیگر، اکنون می‌توان جانشانی $x=\pi$ را انجام داده، به دست آورد

$$L=\frac{1-(-1)}{1-(-1)+(-1)^2}=\frac{1+1}{1+1+1}=\frac{2}{3}$$

مثال ۸. حد $L=\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$ را حساب کنید.

حل. در اینجا باز با صورت مبهم $0/0$ سروکار داریم. از ضرب صورت و مخرج در $1+\cos x$ به دست می‌آوریم

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\,\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)},$$

که در آن ، برخلاف مثال قبل ، مشکلی با عامل $1 + \cos x$ نداریم ، زیرا این عامل در $x = 0$ صفـر نیست . هنوز در مخرج x وجود دارد که جلو ما را می‌گیرد . اما آخرین حـد را می‌توان با نوشتن آن به صورت حاصل‌ضربی از دو حد ، که یکی از قبل معلوم است و دیگری را می‌توان با پیوستگی به دست آورد ، به آسانی محاسبه نمود . به‌تفصیل ، داریم

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0.$$

مسائل

حدود زیر را محاسبه کنید .

۱. $\lim_{x\to 0} \sin(\cos x)$

۲. $\lim_{x\to 0} \cos(\tan x)$

۳. $\lim_{x\to 0} \sin(\cos x) \sin x$

۴. $\lim_{x\to 0} \cos(\sin x) \cos x$

۵. $\lim_{x\to \pi/6} \tan(\sin x)$

۶. $\lim_{x\to 2\pi/3} \sin^2(\cos x)$

۷. $\lim_{x\to 0} \sin\left(x \sin \frac{1}{x}\right)$

۸. $\lim_{x\to -1} \sqrt{\frac{3-x}{8-x}}$

۹. $\lim_{x\to 8} \frac{1+\sqrt{x+1}}{x}$

۱۰. $\lim_{x\to 2} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-3}}$

۱۱. $\lim_{x\to 4} \sqrt[3]{\frac{x^3-16}{x+2}}$

۱۲. $\lim_{x\to 3} \sqrt[5]{2x^3 - 3x^2 + x + 2}$

۱۳. $\lim_{x\to -2} \sqrt{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16}$

۱۴. $\lim_{x\to \pi} \sqrt{\cos^2 x - \cos x + 1}$

۱۵. $\lim_{x\to \sqrt{3}} \tan \sqrt{1+x^2}$

۱۶. $\lim_{x\to -\pi} \sin \sqrt{10 + \cos x}$

۱۷. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin \pi x}{x}$

۱۸. $\lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin \frac{1}{2} z}$

۱۹. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$

$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin a\theta}{\sin b\theta} = \frac{a}{b}$

۲۰. $\lim_{\alpha\to 0} \frac{\tan 2\alpha}{\alpha}$

۲۱. $\lim_{\beta\to 0} \frac{\tan \beta}{\tan 3\beta}$

۲۲. $\lim_{x\to -4} \sqrt[5]{4x^3 + x^2 - 3}$

۲۳. $\lim_{x\to 2} \sqrt{\frac{4-x^2}{2-x}}$

۲۴. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x^2}$

۲۵. $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x^2+4}}$

۲۶. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

۲۷. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$

۲۸. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\cos x)}{\cos x}$

۲۹. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\tan x)}{\tan x}$

۳۰. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin(\sin x))}{\sin(\sin x)}$

۳۱. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan x}-1}$

۳۲. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

۳۳. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x}\cos\dfrac{\pi x}{2}$

۳۴. $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\cot x)\sin x$

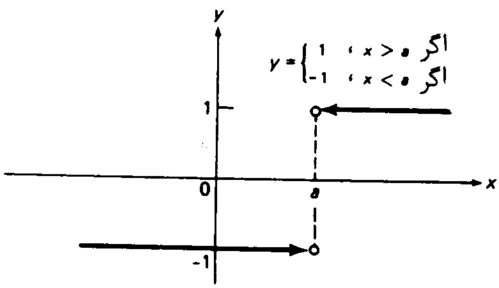
۳۵. ممکن است اغوا شده قضیه ۱۱ را اینطور تعمیم دهیم. هرگاه وقتی $x\to a$ ، $f(x)\to L$ و وقتی $x\to L$ ، $g(x)\to M$ ، آنگاه وقتی $x\to a$ ، $g(f(x))\to M$. با مثال نشان دهید که این حکم نادرست است. شرطی تکمیلی بر رفتار f درمجاورت a قایل شوید که حکم را برقرار سازد.

۹.۱ حدود یکطرفه و پیوستگی

نمودار تابع

$$f(x)=\frac{|x-a|}{x-a}=\begin{cases}1 & \text{اگر } x>a\\ -1 & \text{اگر } x<a\end{cases}\qquad (1)$$

نموده شده در شکل ۴۳، وقتی شناسه x از چپ a به راست a می‌رود، از $1-$ به 1 جهش دارد؛ و لذا، f در a حد ندارد. با اینحال، اگر x فقط از یک سو به a نزدیک شود، f



شکل ۴۳

در a به مقداری حدی نزدیک خواهد شد. پس می‌توان رفتار f را در طرف دیگر a فراموش کرده، f را تابع ثابت $f(x) \equiv 1$ در سمت راست a، یا تابع ثابت $f(x) \equiv -1$ در سمت چپ a درنظر گرفت. رفتار حدی f، وقتی x از یک سو یا سوی دیگر به a نزدیک می‌شود، با دو سر سهم در شکل نموده شده است. یک سر سهم نظیر به حد از راست بوده و با خط $x = a$ در نقطه‌ای به عرض 1 تماس می‌یابد، و دیگری نظیر به حد از چپ با خط $x = a$ در نقطه‌ای به عرض -1 تماس دارد. (این نقاط را با نقطه‌های توخالی نمایش‌می‌دهیم، زیرا هیچیک از آنها به نمودار f تعلق ندارند؛ در واقع، f در a تعریف نشده است.) لذا، تابع f در a **حدود یکطرفه** دارد، اگرچه حد معمولی f در a وجود ندارد.

اگر نقطهٔ متغیر x از راست به نقطهٔ ثابت a نزدیک شود، فقط مقادیر بزرگتر از a $(x > a)$ را بگیرد، می‌نویسیم $x \to a^+$، حال آنکه اگر x از چپ به a نزدیک شود، فقط مقادیر کوچکتر از a $(x < a)$ را بگیرد، می‌نویسیم $x \to a^-$. مثلاً، هم اکنون در مورد تابع (۱) دیدیم که وقتی $x \to a^+$، $f(x) \to 1$ و وقتی $x \to a^-$، $f(x) \to -1$، یا معادلاً

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -1.$$

اولین حد یکطرفه **حد *راست*** f در a، دومین حد یکطرفه **حد چپ** f در a نام دارد.

به آسانی می‌توان برای حدود یکطرفه تعریف ε, δ آورد. فرض کنیم f در نقطهٔ a حد معمولی (دوطرفه) داشته‌باشد. این به‌زبان ε, δ یعنی به ازای هر $\varepsilon > 0$، می‌توان $\delta > 0$ ای یافت به‌طوری که هروقت $0 < |x - a| < \delta$، یعنی هروقت

$$a < x < a + \delta \tag{۲}$$

یا

$$a - \delta < x < a \tag{۲'}$$

داشته باشیم $|f(x) - L| < \varepsilon$. البته، نقاط x صادق در (۲) سمت راست a، و نقاط صادق در (۲') سمت چپ a واقعند. لذا، برای رفتن به حدود یکطرفه، کافی است (۲) را نگهداشته (۲') را حذف کنیم یا (۲') را نگهداشته (۲) را حذف کنیم. به‌طور دقیقتر، وقتی $x \to a^+$، $f(x) \to L$ یعنی به ازای هر $\varepsilon > 0$، می‌توان $\delta > 0$ ای یافت به طوری که هروقت $a < x < a + \delta$، $|f(x) - L| < \varepsilon$، حال آنکه وقتی $x \to a^-$، $f(x) \to L$ یعنی هروقت $a - \delta < x < a$، $|f(x) - L| < \varepsilon$.

حدود یکطرفه‌در مقابل‌حدود معمولی. جدول زیر تشابهات و اختلافات بین حد معمولی و

حدود یکطرفه را توضیح می‌دهد .

	حد معمولی	حدود یکطرفه	
فرض‌کنیم f در	یک همسایگی سفته‌ٔ a	یک بازه‌ٔ باز با نقطه‌ٔ انتهایی چپ a	یک بازه‌ٔ باز با نقطه‌ٔ انتهایی راست a تعریف شده باشد
گوییم f دارای	حد L در a	حد راست L در a	حد چپ L در a است
و می‌نویسیم	$\lim_{x\to a} f(x) = L$	$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$	$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$
اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، بتوان $\delta > 0$ ای یافت به‌طوری که $\|f(x) - L\| < \varepsilon$ به ازای	$0 < \|x - a\| < \delta$	$a < x < a + \delta$	$a - \delta < x < a$ برقرار باشد

در اینجا با ستونهای اول و دوم جدول تعریف حد معمولی ، ستونهای اول و سوم تعریف حد راست ، و ستونهای اول و آخر تعریف حد چپ به دست می‌آید . از توازی این تعاریف آشکار است که هر حکم مذکور برای حدمعمولی مشابهی برای حدود یکطرفه دارد . بخصوص این امر در مورد قضایای ۴ تا ۶ بخش ۷.۱ درست است ؛ درنتیجه ، اعمال جبری وارد بر حدود یکطرفه از همان قواعد اعمال جبری حدود معمولی تبعیت می‌کنند . مثلاً ، هرگاه توابع f و g در a حد راست داشته باشند ، آنگاه

$$\lim_{x\to a^+} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a^+} f(x) + \lim_{x\to a^+} g(x),$$

هرگاه f و g در a حد چپ داشته باشند ، آنگاه

$$\lim_{x\to a^-} f(x)g(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) \cdot \lim_{x\to a^-} g(x),$$

و از این قبیل

قضیه‌ٔ زیر تقریباً" واضح است ، اما آنقدر مهم هست که بیان صوری داشته باشد .

قضیه‌ٔ ۱۲ (شرایط وجود حد) . حد

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

وجود دارد *اگر و فقط اگر* حدود یکطرفه‌ٔ

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \text{ و } \lim_{x\to a^+} f(x)$$

هر دو موجود و مساوی باشند . هرگاه چنین باشد ، آنگاه

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x),$$

یعنی ، حد f در a مساوی مقدار مشترک حدود راست و چپ f در a است .

برهان . اثبات را به عنوان تمرین می‌گذاریم . به جدول مراجعه کنید .

مثال ۱ . نشان دهید که

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[n]{x} = 0.$$

حل . به ازای $\varepsilon > 0$ ، باید $\delta > 0$ ای بیابیم به‌طوری که هروقت $0 < x < \delta$ ،

$$|\sqrt[n]{x} - 0| = |\sqrt[n]{x}| = \sqrt[n]{x} < \varepsilon$$

یک انتخاب مناسب $\delta = \varepsilon^n$ است ، زیرا

$$0 < x < \varepsilon^n$$

ایجاب می‌کند که

$$0 < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{\varepsilon^n} = \varepsilon$$

(ر.ک. مثال ۶ ، صفحهٔ ۱۷) اگر n زوج باشد ، $\sqrt[n]{x}$ به ازای x منفی تعریف نشده‌است، و صحبت از حد $\sqrt[n]{x}$ وقتی $x \to 0^-$ معنی ندارد . اما ، اگر n فرد باشد ، $\sqrt[n]{x}$ به ازای x منفی تعریف شده است ، و اساسا" همان استدلال نشان می‌دهد که

$$\lim_{x\to 0^-} \sqrt[n]{x} = 0.$$

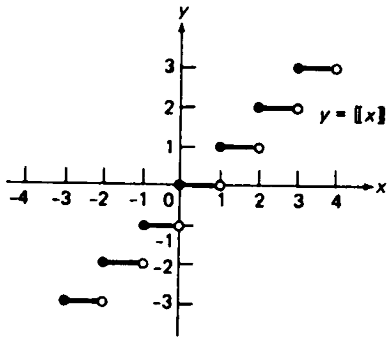
لذا . اگر n فرد باشد ، از قضیهٔ ۱۲ معلوم می‌شود که

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[n]{x} = 0.$$

مثال ۲ . اگر x عددی باشد ، بزرگترین عدد صحیح نا بیشتر از x با $[\![x]\!]$ نموده می‌شود . به عبارت دیگر ، $[\![x]\!]$ عدد صحیح منحصر به فرد n است کـه $n \le x < n + 1$. بنابراین ،

$$[\![\tfrac{1}{2}]\!] = 0, \qquad [\![0]\!] = 0, \qquad [\![\sqrt{2}]\!] = 1, \qquad [\![-\tfrac{3}{2}]\!] = -2,$$

و از این قبیل . در شکل ۴۴ تابع $y = [\![x]\!]$ ، که **تابع بزرگترین عدد صحیح** نام دارد ، رسم شده است($[\![x]\!]$ **قسمت صحیح** x نیز نامیده می‌شود) . طبق معمول ، نقاط توپر تعلق‌به نمودار دارد ، ولی نقاط توخالی چنین نیستند . از نمودار واضح است که $[\![x]\!]$ همه جا جز



شکل ۴۴

در نقاط صحیح

$$x = n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

حد دوطرفهٔ معمولی دارد. $[\![x]\!]$ در یک چنین نقطه حد راست

$$\lim_{x \to n^+} [\![x]\!] = n \tag{۳}$$

و حد چپ

$$\lim_{x \to n^-} [\![x]\!] = n - 1 \tag{۳'}$$

داشته ولی حد معمولی ندارد، زیرا این حدود یکطرفه نامساویند.

پیوستگی یکطرفه. نوعی پیوستگی نیز وجود دارد که مستلزم حدود یکطرفه است. اگر

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a),$$

گوییم تابع f **از راست در a پیوسته** است، اما اگر

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a),$$

گوییم f **از چپ در a پیوسته** می‌باشد (در اینجا باید فرض کرد که f در a تعریف شده است). از قضیهٔ ۱۲ فوراً نتیجه می‌شود که تابع f در نقطهٔ a پیوسته است اگروفقط اگر هم از راست و هم از چپ در a پیوسته باشد. در واقع، طبق این قضیه،

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

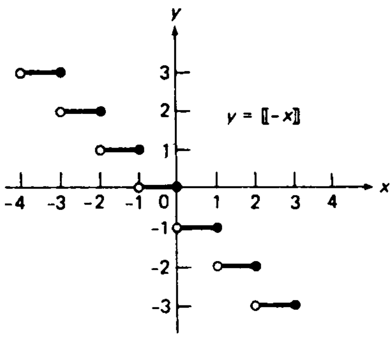
اگر و فقط اگر

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a).$$

مثال ۳. هرگاه n عددی صحیح باشد، آنگاه $[\![n]\!] = n$. از فرمولهای (۳) و (۳') نتیجه می‌شود که تابع بزرگترین عدد صحیح $[\![x]\!]$ در هر نقطهٔ صحیح $x = n$ از راست پیوسته است ولی از چپ پیوسته نیست. این نیز از بررسی شکل ۴۴ واضح است. تابع $[\![x]\!]$ در هر نقطهٔ دیگر به معنی معمولی پیوسته است.

پیوستگی بر یک بازه. گوییم تابع f بر بازهٔ I پیوسته است اگر در هر نقطهٔ I پیوسته باشد، با این فرض که در نقاط انتهایی I (که متعلق به I اند) پیوستگی یکطرفه است. لذا، پیوستگی f بر بازهٔ *باز* (a, b) یعنی f در هر نقطه از (a, b) پیوسته است، ولی پیوستگی f بر بازهٔ *بستهٔ* $[a, b]$ یعنی f در هر نقطهٔ (a, b)، از راست در نقطهٔ انتهایی چپ a، و از چپ در نقطهٔ انتهایی راست b پیوسته می‌باشد. این معنی دارد، زیرا x نمی‌تواند، بدون خارج شدن از بازهٔ $[a, b]$، از چپ به a یا از راست به b نزدیک شود، و ما می‌خواهیم پیوستگی را برای تابعی که قلمرو تعریفش بازهٔ بسته‌ای است نیز تعریف کنیم. به همین نحو، f در بازهٔ نیمباز $[a, b)$ پیوسته است اگر f بر (a, b) و از راست در a پیوسته باشد، f بر $(-\infty, b]$ پیوسته است اگر f بر $(-\infty, b)$ و از چپ در b پیوسته باشد، و از این قبیل.

مثال ۴. فرض کنیم n عدد صحیحی باشد. در این صورت، تابع بزرگترین عدد صحیح $[\![x]\!]$ بر بازهٔ $[n, n + 1)$ پیوسته است ولی بر بازهٔ $(n, n + 1]$ چنین نیست. با توجه به منعکس نمودار $[\![x]\!]$ نسبت به محور y (ر.ک. شکل ۴۵)، درمی‌یابیم که تابع $[\![-x]\!]$ بر $(n, n + 1]$ پیوسته است ولی بر $[n, n + 1)$ چنین نیست.



شکل ۴۵

مسائل

مقادیر زیر را بیابید.

۱. $[\![-\pi]\!]$

۲. $[\![\pi^2]\!]$

۳. $[\![\sqrt{2}-\sqrt{3}]\!]$

۴. $[\![(\frac{2}{3})^4]\!]$

۵. $[\![(1.1)^{10}]\!]$

۶. $[\![(-\frac{7}{11})^{13}]\!]$

حد داده شده را (در صورت وجود) بیابید.

۷. $\lim_{x\to 1^-} \sqrt{x-1}$

۸. $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x-1}$

۹. $\lim_{x\to 1^-} \sqrt[3]{x-1}$

۱۰. $\lim_{x\to 0^+} x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$

۱۱. $\lim_{x\to 0^-} x\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}$

۱۲. $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{\sqrt{x}}$

۱۳. $\lim_{x\to 1^+} \frac{[\![x]\!]}{x}$

۱۴. $\lim_{x\to 1^-} \frac{[\![x]\!]}{x}$

۱۵. $\lim_{x\to 0^+} \frac{[\![x]\!]}{x}$

۱۶. $\lim_{x\to 0^-} \frac{[\![x]\!]}{x}$

۱۷. $\lim_{x\to -1^+} \frac{[\![x]\!]}{x}$

۱۸. $\lim_{x\to -1^-} \frac{[\![x]\!]}{x}$

۱۹. حدود یکطرفهٔ تابع

$$f(x)=\frac{x+x^2}{|x|} \qquad (x\neq 0)$$

در $x=0$ را بیابید.

۲۰. حدود یکطرفهٔ تابع

$$f(x)=\begin{cases} x & x<2 \text{ اگر } \\ 1.1x & x\geq 2 \text{ اگر } \end{cases}$$

در $x=2$ را بیابید.

۲۱. به فرض آنکه

$$f(x)=\begin{cases} 3x & 0\leq x<1 \text{ اگر } \\ 2-x & 1\leq x\leq 2 \text{ اگر } \end{cases}$$

دو بازه با نقاط انتهایی 0 و 1 بیابید که f بر آنها پیوسته باشد. نشان دهید که f بر هر بازه با نقاط انتهایی 1 و 2 پیوسته است.

۲۲ . فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} -|x+1| \text{ ، } x<0 & \text{اگر} \\ |x-1| \text{ ، } x>0 & \text{اگر} \end{cases}$$

که در آن $f(0)$ تعریف نشده است . $f(0)$ چگونه تعریف شود که f از راست در $x = 0$ پیوسته شود ؟ از چپ در $x = 0$ پیوسته شود ؟

فرض کنید حدود راست و چپ تابعی در نقطهٔ a موجود و نامساوی باشند . در این صورت کمیت

$$J = \lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x)$$

جهش f در a نام دارد ، و گویند f در a **ناپیوستگی جهشی** دارد . مثلاً ، هر ناپیوستگی تابع بزرگترین عدد صحیح $[\![x]\!]$ ، که در شکل ۴۴ رسم شده ، یک ناپیوستگی جهشی است ، و جهش در هر نقطهٔ ناپیوستگی $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ دارای مقدار یکسان 1 می‌باشد .

۲۳ . جهش تابع

$$f(x) = \frac{J}{2} \frac{|x-a|}{x-a}$$

چیست و در چه نقطه‌ای رخ می‌دهد ؟

۲۴ . نشان دهید که ناپیوستگی جهشی نمی‌تواند قابل‌رفع باشد (ر.ک. مسئلهٔ ۱۰ ، صفحهٔ ۱۲۹) .

۲۵ . ناپیوستگیهای تابع $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$ را بیابید . آیا اینها ناپیوستگی جهشی‌اند؟ آیا قابل رفع اند ؟

۲۶ . جهشهای تابع

$$f(x) = \begin{cases} 3x \text{ ، } x<1 & \text{اگر} \\ 0 \text{ ، } x=1 & \text{اگر} \\ x \text{ ، } 1<x<3 & \text{اگر} \\ 4 \text{ ، } x \ge 3 & \text{اگر} \end{cases}$$

را بیابید .

۲۷ . به فرض آنکه

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x \text{ ، } x<-\pi/2 & \text{اگر} \\ a\sin x + b \text{ ، } -\pi/2 \le x \le \pi/2 & \text{اگر} \\ \cos x \text{ ، } x>\pi/2 & \text{اگر} \end{cases}$$

چه a و b ای تابع f را همه‌جا پیوسته می‌سازند ؟

۲۸ . نشان دهید که کوچکترین عدد صحیح ناکمتر از x مساوی $-[\![-x]\!]$ است .

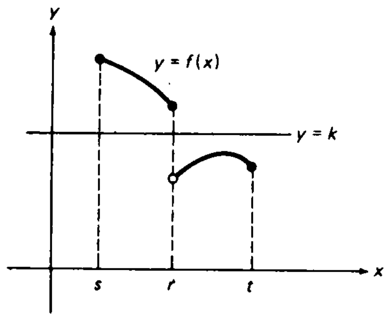
۱۰.۱ خواص توابع پیوسته

حال خواصی از تابع f را بررسی می‌کنیم که صرفاً "نتیجهٔ پیوستگی آن بر یک بازه" می‌باشند.

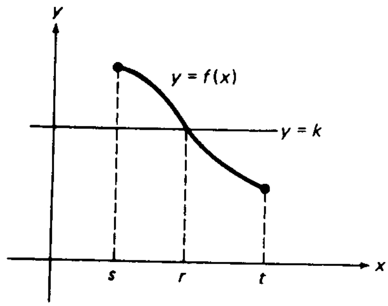
قضیهٔ مقدار میانی

قضیهٔ ۱۳ (قضیهٔ مقدار میانی). هرگاه f بر بازهٔ I پیوسته بوده و f مقادیر مختلف $f(s)$ و $f(t)$ را در دو نقطهٔ s و t از I بگیرد، آنگاه f هر مقدار میانی k را خواهد گرفت؛ یعنی، هر مقدار k بین $f(s)$ و $f(t)$، در نقطه‌ای مانند r بین s و t.

برهان را حذف کرده‌ایم، زیرا مستلزم مفهومی است (**تمامیت** دستگاه اعداد حقیقی) که از حوصلهٔ نخستین درس در حساب دیفرانسیل و انتگرال خارج است. اما معنی هندسی قضیه کاملاً" واضح می‌باشد. همانطور که شکل ۴۶ (آ) نشان داده، نمودار تابع پیوستهٔ f نمی‌تواند از یک طرف خط افقی $y = k$ به طرف دیگر رود بی‌آنکه خط را قطع نماید. پیوستگی f برای صحت قضیه لازم است، زیرا، همانطور که شکل ۴۶ (ب) نشان داده، نمودار یک تابع ناپیوسته می‌تواند از روی خط $y = k$ بی‌آنکه آن را قطع کند ببرد.



(ب)



(آ)

شکل ۴۶

روش تنصیف. اولین مثال ما طرز استفاده از قضیهٔ مقدار میانی برای حل یک معادلهٔ مشکل با هر دقت مطلوب را نشان می‌دهد.

مثال ۱. نشان دهید که معادلهٔ

$$2x^5 + 2x^2 + x - 3 = 0 \qquad (1)$$

ریشه‌ای بین 0 و 1 دارد . این ریشه را با تقریب $\frac{1}{16}$ بیابید .

حل . منظور از **ریشه** (یا **جواب**) معادلهٔ (۱) یعنی مقداری مانند x که در معادله صدق کند . تابع

$$f(x) = 2x^5 + 2x^2 + x - 3$$

را معرفی می‌کنیم که پیوسته است (زیرا یک چندجمله‌ای است) . می‌بینیم که $f(0) = -3$ و $f(1) = 2$. چون $-3 < 0 < 2$ ، از قضیهٔ مقدار میانی معلوم می‌شود که به ازای x ی بین 0 و 1 ، $f(x) = 0$. لذا ، معادلهٔ (۱) ریشه‌ای مانند r بین 0 و 1 ، یعنی در بازهٔ $(0, 1)$ ، دارد .[1] برای آنکه جای r دقیقتر معین شود ، روند زیر را به کار می‌بریم که **روش تنصیف** نام دارد .

ابتدا مقدار f را در نقطهٔ میانی $\frac{1}{2}$ از بازهٔ $(0, 1)$ حساب می‌کنیم :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 3 = -\frac{31}{16} < 0.$$

اما $f(1) > 0$ ؛ و درنتیجه ، باز طبق قضیهٔ مقدار میانی ، $f(x)$ باید به ازای x ی بین $\frac{1}{2}$ و 1 مساوی 0 باشد . بنابراین ، $\frac{1}{2} < r < 1$ ، و r ی را جستجو می‌کنیم که دربازهٔ کوچکتر $(\frac{1}{2}, 1)$ به طول $\frac{1}{2}$ باشد . با تنصیف دیگر ، مقدار f را در نقطهٔ میانی $\frac{3}{4}$ از بازهٔ $(\frac{1}{2}, 1)$ محاسبه می‌کنیم :

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^5 + 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} - 3 = -\frac{333}{512} < 0.$$

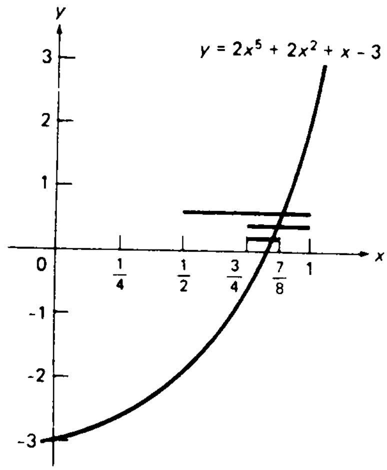
چون $f(\frac{3}{4}) < 0$ و $f(1) > 0$ ، تابع f در نقاط $\frac{3}{4}$ و 1 مقادیری با علایم مختلف می‌گیرد ؛ و لذا ، به ازای x ی بین $\frac{3}{4}$ و 1 ، $f(x) = 0$ ؛ درنتیجه ، r دربازهٔ $(\frac{3}{4}, 1)$ به طول $\frac{1}{4}$ قراردارد . این هنوز برای تعیین r با دقت مطلوب کافی نیست ؛ درنتیجه ، تنصیف سوم را انجام داده و در می‌یابیم که $f(\frac{7}{8}) > 0$ (محاسبه به عنوان تمرین گذارده می‌شود) . چون $f(\frac{3}{4}) < 0$ و $f(\frac{7}{8}) > 0$ ، می‌توان مطمئن بود که r در بازهٔ $(\frac{3}{4}, \frac{7}{8})$ به طول $\frac{1}{8}$ قراردارد . اما نقطهٔ میانی $\frac{1}{2}(\frac{3}{4} + \frac{7}{8}) = \frac{13}{16}$ این بازه در فاصلهٔ حداکثر $\frac{1}{16}$ از هر نقطهٔ درونی خود قرار دارد ؛ و درنتیجه ، همانطور که مطلوب است ، در فاصلهٔ حداکثر $\frac{1}{16}$ از ریشهٔ r واقع

---

۱ . *در واقع ، می‌توان به کمک آزمونی که بعداً می‌آید نشان داد که f بر $(0, 1)$ صعودی است ؛ درنتیجه ، r تنها ریشهٔ معادلهٔ (۱) بین 0 و 1 می‌باشد (ر.ک. مثال ۴ ، صفحه ۲۷۰) .*

خواهد بود .

لذا ، تقریب $r \approx \frac{13}{16} = 0.8125$ بـه اندازه‌ٔ $\frac{1}{16}$ دقیق است . محاسبـاتی دقیقتـر نشان می‌دهد که ، تا چهار رقم اعشار ، $r = 0.8305$ ؛ درنتیجه ، خطای تقریب ما بـه r ، مبتنی بر سه‌تنصیف ، حدوداً " $0.8305 - 0.8125 = 0.0180$ می‌باشـد . چون $\frac{1}{16} = 0.0625$ این خطا عملاً " از میزان انتظار ما کوچکتر است (ر.ک. مسئله‌ٔ ۳) . در شکل ۴۷ ، تعبیر هندسی سه تنصیف متوالی با سه پاره‌خط افقی نموده شده است ، که در آن کوتاهترین پاره خط نقاط $\frac{3}{4}$ و $\frac{7}{8}$ محور x را به هم وصل می‌کند .



شکل ۴۷

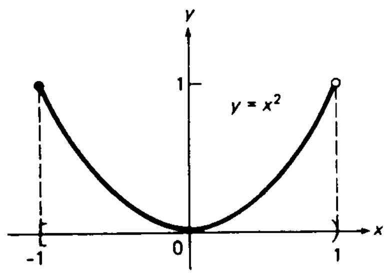
مقادیر اکستریم . فرض کنیم تابع f بربازه‌ٔ I تعریف شده باشد (ولی نه لزوماً " پیوسته) ، و نقطه‌ای مانند q در I موجود باشد به‌طوری که به ازای هـر x در I ، $f(q) \geq f(x)$. در این صورت ، عدد $f(q) = M$ **مقدار ماکزیمم** ، یا فقط **ماکزیمم** ، f بر I نامیده می‌شود . به عبارت دیگر ، M **بزرگترین مقداری** است که f در نقطه‌ای از I می‌گیرد . به همین نحو ، فرض کنیم نقطه‌ای‌مانند p در I وجوددارد به‌طوری‌که به ازای هر نقطه‌ٔ x در I ، $f(p) \leq f(x)$ در این صورت ، عدد $f(p) = m$ **مقدار مینیمم** ، یافقط **مینیمم** ، f بر I نام دارد و**کوچکترین مقداری** است که f در نقاط I می‌گیرد . چیزی مانع اینکه f ماکزیمم یا مینیمم خود را در چند نقطه از I بگیرد نیست ، ولی ماکزیمم یا مینیمم در صورت وجود باید منحصر به فرد باشد (چرا؟) . اصطلاح **مقدار اکستریم** ، یا فقط **اکسترمم** ، اشاره به ماکزیمم یا مینیمم دارد.

مثال ۲ . فرض کنیم $f(x) = k$ تابع ثابتی باشد که بر بازه‌ٔ I تعریف شده است . f در هر

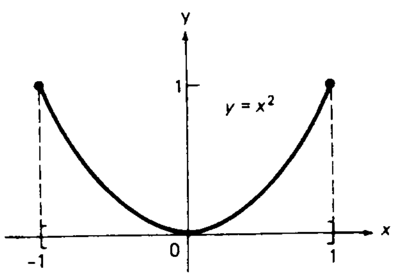
نقطهٔ I ماکزیمم و مینیمم دارد ، که هر دو مساوی k می‌باشند . به عکس ، هرگاه f بر بازه‌ای چون I دارای ماکزیمم M و مینیمم m بوده ، و M و m مساوی با مقدار مشترک k باشند، آنگاه بر I ، $f(x) \equiv k$.

مثال ۳ . فرض کنیم $f(x) = x^2$ و I بازهٔ نیمباز $[-1, 1)$ ، مثل شکل ۴۸ (آ) ، باشد . واضح است که f بر I دارای ماکزیمم $M = 1$ و $m = 0$ است . در واقع ، f ماکزیمم خود را در $x = -1$ ، یعنی طول نقطهٔ اوج نمودار f ، و مینیمم خود را در $x = 0$ ، یعنی طول نقطهٔ خضیض نمودار ، می‌گیرد . هرگاه I بازهٔ **بستهٔ** $[-1, 1]$ باشد ، آنگاه f همان اکسترممها را دارد ، ولی در اینجا ماکزیمم M در $x = 1$ و نیز در $x = -1$ گرفته می‌شود [ر . ک . شکل ۴۸ (ب)] .

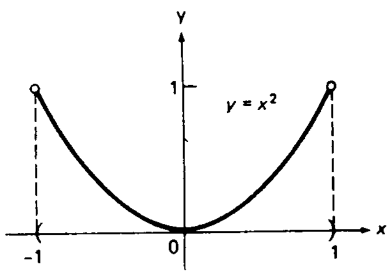
مثال ۴ . مجدداً فرض کنیم $f(x) = x^2$ ، ولی این بار I را بازهٔ **باز** $(-1, 1)$ می‌گیریم . از شکل ۴۸ (پ) واضح است که f ، مثل مثال قبل ، دارای مینیمم $m = 0$ در $x = 0$ است .



(آ)



(ب)



(پ)

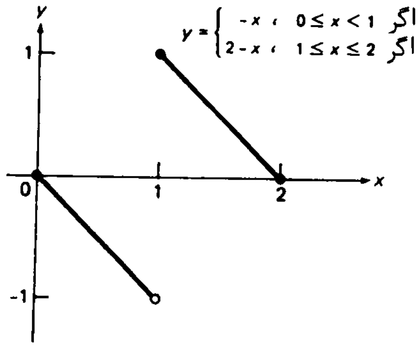
شکل ۴۸

اما f بر I دیگر ماکزیمم ندارد، زیرا f ، بی‌آنکه خود مقدار 1 را بگیرد، مقادیر بدلخواه نزدیک 1 را خواهد گرفت (بزرگترین عدد کوچکتر از 1 وجود ندارد) .

مثال ۵ . فرض کنیم I بازهٔ بستهٔ $[0, 2]$ بوده، و f تابع پیوستهٔ

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{اگر } 0 \leq x < 1 \text{ ،} \\ 2 - x & \text{اگر } 1 \leq x \leq 2 \text{ ،} \end{cases}$$

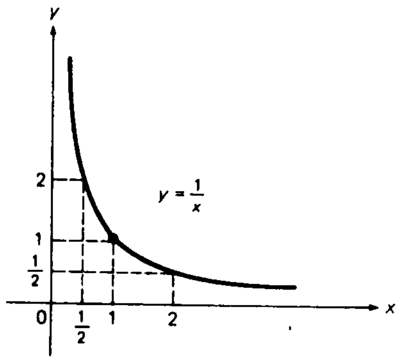
باشد که در شکل ۴۹ رسم شده است . واضح است که f بر I دارای ماکزیمم $M = 1$ است



شکل ۴۹

که در $x = 1$ (طول نقطهٔ اوج نمودار) گرفته می‌شود، ولی بر I مینیمم ندارد، زیرا f بی‌آنکه مقدار -1 را بگیرد، مقادیر بدلخواه نزدیک به -1 را خواهد گرفت (کوچکترین عدد بزرگتر از -1 وجود ندارد) .

مثال ۶ . فرض کنیم I بازهٔ بستهٔ بی‌کران $[1, \infty)$ بوده، و $f(x) = 1/x$. از شکل ۵۰ واضح



شکل ۵۰

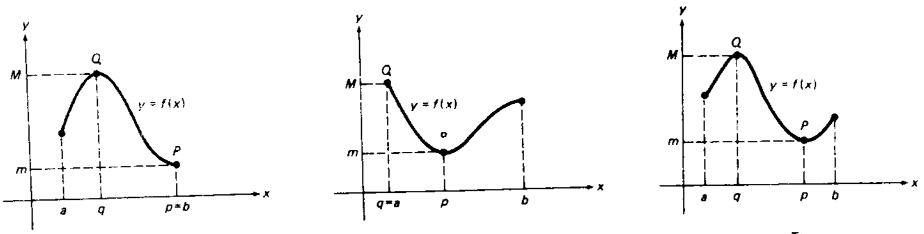
است که f بر I دارای ماکزیمم M است ، که در $x = 1$ گرفته می‌شود ، ولی مینیمم ندارد ، چون f ، بی‌آنکه مقدار 0 را بگیرد ، مقادیر بدلخواه نزدیک به 0 را خواهد گرفت (کوچکترین عدد مثبت وجود ندارد) .

قضیهٔ مقدار اکستریم . همانطور که امثلهٔ فوق نشان می‌دهند ، هیچ حکم کلی درباب وجود مقادیر اکستریم تابع دلخواه f بر بازهٔ دلخواه I وجود ندارد . اما ، درحالتی‌که f بر I **پیوسته** بوده ، و I ***کراندار*** و **بسته** باشد ، وجود مقادیر اکستریم را می‌توان تضمین کرد :

قضیهٔ ۱۴ (قضیهٔ مقدار اکستریم) . *هرگاه f بر بازهٔ بستهٔ کراندار $I = [a, b]$ پیوسته باشد ، آنگاه f بر I کراندار است ، و f بر I ماکزیمم M و مینیمم m را دارد . یعنی ، نقاطی مانند p و q در I وجود دارند به‌طوری که ، به ازای هر x در I ،*

$$m = f(p) \leq f(x) \leq f(q) = M$$

برهان حذف شده است ، زیرا مثل برهان قضیهٔ مقدار میانی شامل نکاتی فنی است . با اینحال ، اینکه صحت قضیهٔ مقدار اکستریم به پیوستگی f وابسته است در مثال ۵ ، واینکه این صحت به بسته و کراندار بودن I وابسته‌است در مثالهای ۴ و ۶ نموده شده‌است. تعبیر هندسی قضیه این است که نمودار یک تابع پیوسته بر بازهٔ کراندار بستهٔ I باید دارای نقطهٔ اوج $Q = (q, M)$ و نقطهٔ حضیض $P = (p, m)$ باشد . نقطهٔ q می‌تواند یک نقطهٔ درونی یا یک نقطهٔ انتهایی I باشد ، و همین امر در مورد P نیز درست است . چند حالت ممکن در شکل ۵۱ نموده شده است .

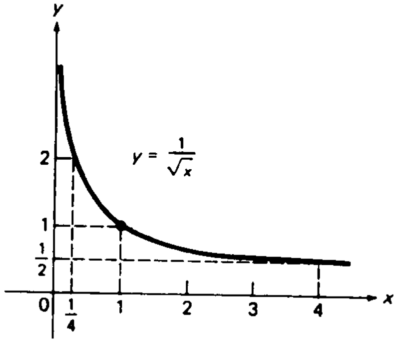


(آ) (ب) (پ)

شکل ۵۱

مثال ۷ . تابع $f(x) = 1/\sqrt{x}$ بر بازهٔ کراندار بستهٔ $I = [1, 4]$ پیوسته است و ، دررابطه با قضیهٔ ۱۴ ، f بر $[1, 4]$ کراندار است باماکزیمم $M = f(1) = 1$ و مینیمم $m = f(4) = \frac{1}{2}$ (توجه کنید که f نزولی است) . تابع f بر بازهٔ $(0, 1]$ پیوسته است ، ولی از شکل ۵۲

معلوم می‌شود که f بر $(0, 1)$ ماکزیمم ندارد؛ و در واقع، بر $(0, 1)$ بی‌کران می‌باشد. این امر با قضیهٔ ۱۴ سازگار است، زیرا بازهٔ $(0, 1)$ **باز** می‌باشد.



شکل ۵۲

رفتار بازه‌ها تحت نگاشتهای پیوسته. بحث خواص توابع پیوسته را با قضیهٔ مفیدی در رفتار بازه‌ها تحت نگاشتهای پیوسته پایان می‌دهیم. فرض کنیم تابع f بر مجموعهٔ X تعریف شده باشد، و Y مجموعهٔ $\{y : y = f(x),\ x \in X\}$ باشد؛ یعنی، مجموعهٔ تمام مقادیری که f با تغییر متغیر مستقل x در مجموعهٔ X می‌گیرد. گوییم f، *X را به روی Y می‌نگارد*، و همانطور که y نقش x تحت f نامیده می‌شود، Y *نقش X تحت f* خوانده می‌شود.

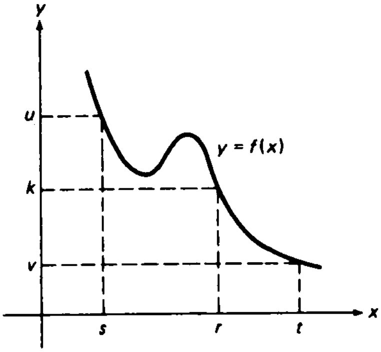
قضیهٔ ۱۵ (قضیهٔ نگاشت بازه). *فرض کنیم f بر بازهٔ I از هر نوع پیوسته بوده، و J نقش I تحت f باشد. در این صورت،*

(یک) J نیز یک بازه می‌باشد؛

(دو) اگر I بازهٔ بستهٔ کرانداری باشد، J نیز چنین می‌باشد.

برهان *(دلخواه)*. برای اثبات (یک)، فرض کنیم u و v نقاط متمایزی در J باشند. در این صورت، نقاط متمایزی چون s و t در I وجوددارند به‌طوری که $f(s) = u$ و $f(t) = v$ (ر.ک. شکل ۵۳). فرض‌کنیم k نقطه‌ای‌بین u و v باشد. بنابر قضیهٔ مقدارمیانی، نقطه‌ای مانند r بین s و t وجود دارد به‌طوری که $f(r) = k$. بنابراین، k متعلق به J می‌باشد. لذا، هروقت مجموعهٔ J شامل دو نقطهٔ متمایز u و v باشد، شامل هر نقطهٔ k بین u و v نیز هست. لذا، طبق تبصرهٔ صفحهٔ ۳۰، J یک بازه می‌باشد.

برای اثبات (دو)، فرض کنیم I کراندار و پیوسته بوده، و M و m ماکزیمم و مینیمم

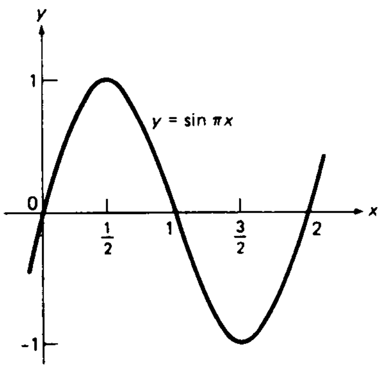


شکل ۵۳

f بر I باشند که وجودشان‌را قضیهٔ مقدار اکستریم تضمین‌می‌کند. در این صورت، مجموعهٔ J ، که به خاطر قسمت (یک) بازه است، فقط می‌تواند بازهٔ کراندار بستهٔ $[m, M]$ باشد. اگر f تابع ثابت باشد، J به مجموعه‌ای شامل فقط یک نقطه تحویل می‌شود. برای احتساب این حالت، از حالا به بعد مجموعه‌ای که فقط شامل یک نقطه، مثلاً k ، باشدرا به صورت بازهٔ بستهٔ $[k, k]$ ، که نقاط انتهایی‌اش یکی هستند، درنظر می‌گیریم.

قضیهٔ ۱۵ به‌زبان ساده می‌گوید که هر تابع پیوسته بازه‌ها را به روی بازه‌ها و بازه‌های بستهٔ کراندار را به روی بازه‌های بستهٔ کراندار می‌نگارد. نقش پیوستهٔ یک‌بازه که‌کراندار و بسته نباشد ممکن است بازه‌ای از هر نوع باشد. مثلاً، به ازای تابع مثال ۷، نقش بازهٔ کراندار $(0, 1)$ بازهٔ بی‌کران $(1, \infty)$ می‌باشد.

مثال ۸. فرض کنیم $f(x) = \sin \pi x$. با توجه به شکل ۵۴ معلوم می‌شود که اگر $0 < \delta$ ،



شکل ۵۴

تابع پیوستهٔ f بازهٔ باز $(\frac{1}{2}-\delta, \frac{3}{2}+\delta)$ را به روی بازهٔ بستهٔ $[-1, 1]$ می‌نگارد .

مسائل

۱ . هرگاه $f(x) = 1/x$ ، آنگاه $f(-1) = -1$ و $f(1) = 1$ ، ولی f مقدار صفر را بین $x = -1$ و $x = 1$ نمی‌گیرد . چرا این با قضیهٔ مقدار میانی تعارضی ندارد ؟

۲ . نشان دهید که معادلهٔ $8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = 0$ ریشه‌ای مانند r_1 بین -1 و 0، ریشه‌ای مانند r_2 بین 0 و 1 ، و ریشه‌ای مانند r_3 بین 1 و 2 دارد . با جانشانی $x = t/2$ ، مقادیر دقیق این ریشه‌ها را بیابید . آیا ریشه‌های دیگری نیز وجود دارند ؟

۳ . در مثال ۱ سه تنصیف تقریب $r \approx \frac{13}{16}$ را می‌دهد ، که خطایی حدوداً مساوی 0.0180 دارد . چند تنصیف دیگر یک چنین خطای کوچکی را تضمین می‌کنند ؟

۴ . نشان دهید که معادلهٔ $x^6 + 2x - 2 = 0$ ریشه‌ای مانند r_1 بین -2 و -1 ، و ریشهٔ دیگری چون r_2 بین 0 و 1 دارد . نشان دهید که ریشهٔ دیگری وجود ندارد . با استفاده از روش تنصیف ، r_1 و r_2 را به میزان $\frac{1}{16}$ تقریب کنید .

راهنمایی . خط $y = 2 - 2x$ منحنی $y = x^6$ را درست در دو نقطه قطع می‌کند .

۵ . نشان دهید که معادلهٔ $\cos \pi x = x$ یک و فقط یک ریشه مانند r بین 0 و $\frac{1}{2}$ دارد . با استفاده از روش تنصیف ، r را به میزان $\frac{1}{32}$ تقریب کنید .

۶ . نشان دهیدکه معادلهٔ $\sin \pi x = x$ ریشه‌ای چون r_1 بین $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ ، و ریشهٔ دیگری‌مانند r_2 بین $-\frac{3}{4}$ و $-\frac{1}{2}$ دارد . رابطهٔ بین r_1 و r_2 چیست ؟ آیا معادله ریشه‌های دیگری غیراز $x = 0$ دارد ؟ با استفاده‌از روش‌تنصیف ، r_1 و r_2 را به‌میزان $\frac{1}{64}$ تقریب‌نمایید .

۷ . فرض کنید f بر بازهٔ $[a, b]$ پیوسته بوده و ، به ازای هر x در $[a, b]$ ، $a \le f(x) \le b$. نشان دهید که نقطه‌ای مانند c در $[a, b]$ ، به نام **نقطهٔ ثابت** f ، وجود داردکه $f(c) = c$.

۸ . آسانسوری از یک عمارت رفیع ظرف 5 دقیقه بالا رفته ، در طبقات مختلف برای پیاده یا سوار کردن توقف‌می‌کند . سپس در 3 دقیقه پایین می‌آید . نشان دهیدکه ، صرف‌نظر از جزئیات حرکت ، جایی (عموماً " بین طبقات) وجود دارد که آسانسور درست دو بار به فاصلهٔ 4 دقیقه از آن رد می‌شود .

برای تابع f و بازهٔ I داده شده ، ماکزیمم M و مینیمم m تابع f بر I را یافته ، و نقاطی از I را تعیین کنید که در آنها M و m گرفته می‌شوند (هر اکسترممی‌راکه‌وجودندارد مشخص کنید) . همچنین ، بازهٔ J را طوری بیابید که نقش I تحت f باشد .

۹. $f(x) = x^2 - 2x - 2,\ I = (0, 3]$

۱۰. $f(x) = 1 + x - x^2,\ I = [-1, 2]$

۱۱. $f(x) = x^3 + 1,\ I = [-1, 1]$

۱۲. $f(x) = x^2 + 2x + 3,\ I = [-2, 1)$

۱۳. $f(x) = 1/(x - 1),\ I = (1, \infty)$

۱۴. $f(x) = |x| + |x + 1|,\ I = [-3, 1]$

۱۵. $f(x) = 1/(x^2 + 1),\ I = (-\infty, 0]$

۱۶. $f(x) = \sqrt{1 - x^2},\ I = (-1, 1)$

۱۷. $f(x) = \sqrt[3]{1 - x},\ I = [1, 9]$

۱۸. $f(x) = \sqrt[4]{1 + x},\ I = [0, 15]$

۱۹. $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x,\ I = [0, \pi]$

۲۰. $f(x) = |\sin x|,\ I = [0, 2\pi)$

۲۱. فرض کنید تابع f دارای ماکزیمم M و مینیمم m بر بازهٔ I باشد. نشان دهید $-f$ نیز بر I مقادیر اکستریم دارد. این مقادیر چه هستند، و کجاها گرفته می‌شوند؟

۲۲. نشان دهید که تابع صعودی f همواره بر بازهٔ کراندار بستهٔ $I = [a, b]$ دارای ماکزیمم M و مینیمم m است، حتی‌اگر f در نقاطی‌از I ناپیوسته باشد. f کجاها مقادیر اکستریم خود را می‌گیرد؟ درحالتی که f نزولی است بحث کنید.

اصطلاحات و مباحث کلیدی

تعریف تابع، متغیرهای مستقل و وابسته

قلمرو و برد تابع، قلمرو طبیعی

شناسه و مقادیر تابع

اعمال جبری بر توابع، تساوی تابعها

تساوی همانی و اتحادها

توابع مرکب و عمل ترکیب

نمودار تابع و خاصیت خط قائم

توابع زوج و فرد، توابع صعودی و نزولی

انتقال نمودار یک تابع

توابع مثلثاتی و نمودار آنها

رادیان در مقابل درجه

طول قوس مستدیر ، مساحت قطاع مستدیر

قانون کسینوسها ، قوانین جمع برای سینوس و کسینوس

زاویهٔ بین دوخط

توابع متناوب ، دورهٔ تناوب اساسی

توابع کراندار و بی‌کران

حد تابع $f(x)$ وقتی $x \to a$

پیوستگی و دلایل ناپیوستگی

تعریف ε, δ حد و تعبیر هندسی آن

اعمال جبری بر حدود و توابع پیوسته

قضیهٔ ساندویچ

حدود راست و چپ

پیوستگی از راست و از چپ ، پیوستگی بر بازه

قضیهٔ مقدار میانی ، روش تنصیف

مقادیر اکستریم تابع ، قضیهٔ مقدار اکستریم

قضیهٔ نگاشت بازه

مقادیری از توابع مثلثاتی که مکرر به کار می‌روند

تابع \ θ	$0°$ یا 0 رادیان	$30°$ یا $\frac{\pi}{6}$ رادیان	$45°$ یا $\frac{\pi}{4}$ رادیان	$60°$ یا $\frac{\pi}{3}$ رادیان	$90°$ یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—

مسائل تکمیلی

فرض کنید $f(x) = (2x+1)/(3x^2-1)$. مقادیر زیر را بیابید .

۱. $f(-1)$ ۲. $f(0)$ ۳. $f(\frac{1}{2})$

۴. $f(1/\sqrt{2})$ ۵. $f(1/\sqrt{3})$ ۶. $f(-3)$

فرض کنید $f(x) = x^2 - 2x + 3$. تمام جوابهای معادلهٔ داده شده را بیابید .

۷. $f(x) = 6$ ۸. $f(x) = 0$

۹. $f(x) = 2$ ۱۰. $f(x) = 11$

۱۱. آیا محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع تابعی از مساحت آن است ؟

۱۲. فرض کنید d تعداد اعداد صحیح مثبتی باشد که (دقیقا") مقسوم‌علیه‌های عدد صحیح مثبت n اند؛ مثلا"، $d = 6$ اگر $n = 12$، زیرا 12 دارای مقسوم‌علیه‌های 1، 2، 3، 4، 6، و 12 است. آیا n تابعی از d است؟

فرض کنید $f(t) = 2^t$ و $g(t) = t^2$. مقادیر زیر را حساب کنید.

۱۳. $(2f - g)(0)$ ۱۴. $(f + \frac{1}{2}g)(1)$ ۱۵. $(fg)(-1)$

۱۶. $(1 + g^2)(2)$ ۱۷. $(f/g)(-2)$ ۱۸. $(f^2 - g^2)(4)$

هرگاه

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x > 0 \\ 0 & \text{اگر } x \leq 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x > 0 \\ 1 & \text{اگر } x \leq 0 \end{cases}$$

تابع مرکب داده شده را بیابید.

۱۹. $f(f(x))$ ۲۰. $f(g(x))$

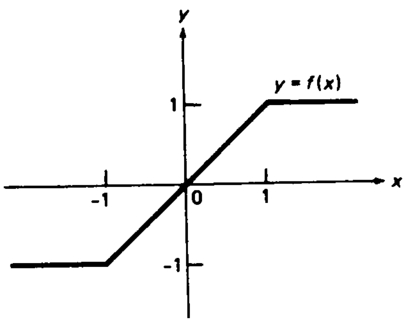
۲۱. $g(f(x))$ ۲۲. $g(g(x))$

۲۳. تابع غیرثابت f را طوری بیابید که $f \circ f = f$.

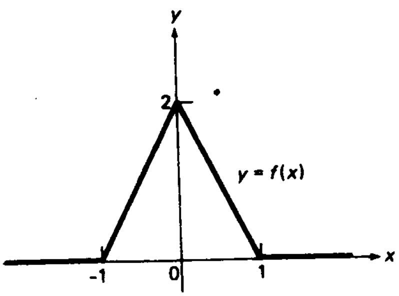
۲۴. نشان دهید که $fg \equiv 0$ با $f \not\equiv 0, g \not\equiv 0$ سازگار است. به عبارت دیگر، نشان دهید که حاصل‌ضرب دو تابع ناصفر می‌تواند صفر باشد. یعنی وضع توابع بااعدادفرق‌دارد.

برای نمودار توابع f زیر فرمول ساده‌ای برحسب قدرمطلق بیابید.

۲۵. شکل ۵۵ ۲۶. شکل ۵۶



شکل ۵۵



شکل ۵۶

زوج یا فرد (یا هیچکدام) بودن تابع داده‌شده را مشخص کنید.

۲۷. $f(x) = \sin(\sin x)$ ۲۸. $f(x) = \cos(\sin x)$

۲۹. $f(x) = \tan(\sec x)$ ۳۰. $f(x) = [\![x]\!]$

۳۱. چه تابع f ی هم زوج و هم فرد است؟

۳۲. نشان دهید که نمودار تابع ناصفر f نمی‌تواند نسبت به محور x متقارن باشد.

۳۳. دو خط ماربر مبداء بیابید که با خط $3x - 2y + 6 = 0$ زاویهٔ °45 بسازند.

۳۴. نشان دهید که هر یک از معادلات $\sin x = \cos x$ ، $\tan x = \cot x$ ، و $\sec x = \csc x$ بی‌نهایت جواب دارد.

۳۵. دورهٔ تناوب اساسی تابع $|\sin x| + |\cos x|$ را تعیین کنید.

۳۶. نشان دهید که تابع $f(x) = x - [\![x]\!]$ متناوب، با دورهٔ تناوب اساسی 1 ، است، و نمودار آن را رسم کنید. ناپیوستگیهای f را بیابید.

۳۷. اگر $f + g$ و f در a حد داشته باشند، آیا g نیز چنین است؟ اگر $f + g$ در a حد داشته باشد، آیا f و g نیز چنین‌اند؟

۳۸. اگر fg و f در a حد داشته باشند، آیا g نیز چنین است؟ اگر fg در a حدداشته باشد، آیا f و g نیز چنین اند؟

$f(0)$ چه باید باشد تا تابع داده شده در $x = 0$ پیوسته گردد؟

۳۹. $f(x) = \dfrac{x^2}{x}$ ۴۰. $f(x) = \dfrac{5x^2 - 3x}{2x}$

۴۱.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \text{ ، } & \text{اگر } x \neq 0 \\ 2 \text{ ، } & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

۴۲.
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 2} \text{ ، } & \text{اگر } x \neq 0 \\ -1 \text{ ، } & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

مقادیر زیر را بیابید.

۴۳. $[\![n - \frac{1}{2}]\!]$ (n یک عدد صحیح) ۴۴. $[\![(2.05)^4]\!]$

۴۵. $[\![\pi - \sqrt{10}]\!]$ ۴۶. $[\![(-0.9)^{90}]\!]$

۴۷. آیا درست است که $[\![|x|]\!] \equiv |[\![x]\!]|$ ؟

به فرض آنکه

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ ، } & \text{اگر } x < 0 \\ 0 \text{ ، } & \text{اگر } x = 0 \\ 1 \text{ ، } & \text{اگر } x > 0 \end{cases}$$

تمام ناپیوستگیهای توابع مرکب $f \circ g$ و $g \circ f$ را درصورتی بیابید که

۴۸. $g(x) = 1 + x^2$

۴۹. $g(x) = x(1 - x^2)$

۵۰. $g(x) = x - [\![x]\!]$

حدود زیر را محاسبه کنید.

۵۱. $\lim_{x\to 1} (x^{100} + x^{50} + 1)$

۵۲. $\lim_{x\to -1} (x^{99} + x^{49} + 1)$

۵۳. $\lim_{x\to -4} \frac{x^3 + 4x + 12}{x^4 - 3x + 4}$

۵۴. $\lim_{x\to 3} \sqrt{\frac{x^2 + 10x - 39}{x - 3}}$

۵۵. $\lim_{x\to 1} \frac{(x^2 - 1)^{10}}{(x^2 - 2x + 1)^5}$

۵۶. $\lim_{x\to 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$

۵۷. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

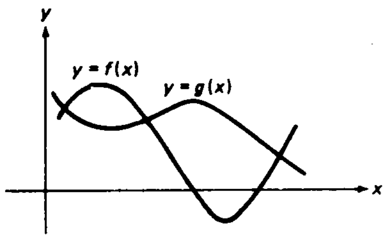
۵۸. $\lim_{x\to -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}$

۵۹. $\lim_{x\to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$

۶۰. $\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ (m, n اعداد صحیح مثبت)

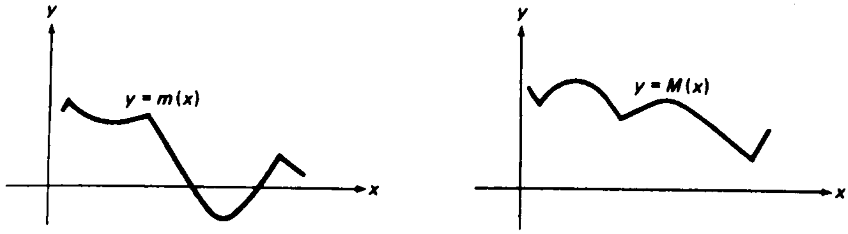
راهنمایی. بنابر **قضیهٔ عاملی** (ثابت شده در صفحهٔ ۶۴۰) ، چندجمله‌ای $Q(x)$ بر عامل خطی $x - c$ بخشپذیر است اگر و فقط اگر $Q(c) = 0$. این مطلب در حل مسائل ۵۶ تا ۵۸ مفید خواهد بود.

۶۱. نشان دهید هرگاه توابع f و g همه‌جا پیوسته باشند، آنگاه توابع $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ و $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ نیز چنین‌اند. [شکلهای ۵۷ (ب) و ۵۷ (پ) $M(x)$ و $m(x)$ توابع f و g و شکل ۵۷ (آ) را نشان می‌دهند.]



دو تابع

(آ)



ماکزیمم آنها
(ب)

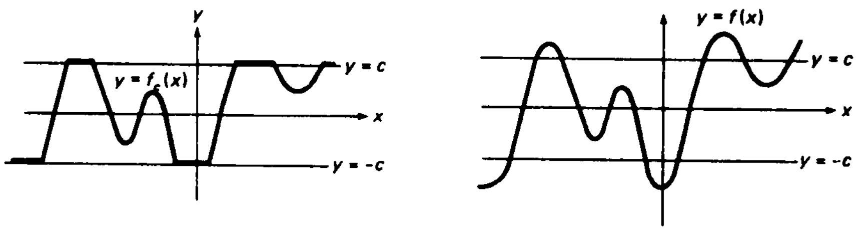
مینیمم آنها
(پ)

شکل ۵۷

۶۲ . با استفاده از مسئلهٔ قبل ، نشان دهید هرگاه تابع f همه‌جا پیوسته باشد، آنگاه تابع " سنجاق شدهٔ "

$$f_c(x) = \begin{cases} c & \text{،}\quad f(x) > c \quad \text{اگر} \\ f(x) & \text{،}\quad |f(x)| \leq c \quad \text{اگر} \\ -c & \text{،}\quad f(x) < -c \quad \text{اگر} \end{cases}$$

نیز به ازای هر $c > 0$ چنین است . [شکل ۵۸ (ب) شکل سنجاق شدهٔ تابع f را که نمودارش در شکل ۵۸ (آ) رسم شده است نشان می‌دهد .]



پیش از " سنجاق شدن "
(آ)

بعداز " سنجاق شدن "
(ب)

شکل ۵۸

۶۳ . نشان دهید که همواره بین هر دو عدد حقیقی متمایز می‌توان عددی گویا و عددی گنگ یافت ؛ و در واقع ، بی‌نهایت از این اعداد وجود دارند .

۶۴ . با استفاده از مسئلهٔ قبل نشان دهید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{،}\quad \text{اگر } x \text{ گویاست} \\ 0 & \text{،}\quad \text{اگر } x \text{ گنگ است} \end{cases}$$

در هر نقطهٔ a حد ندارد؛ و درنتیجه، همه‌جا ناپیوسته است.

فرض کنید $f(x)$ همان تابع مسئلهٔ ۶۴ باشد. در رفتار حدی تابع زیر(در هر نقطه)بحث کنید.

۶۵. $xf(x)$

۶۶. $|x|f(x)$

۶۷. $\frac{|x|}{x}f(x)$

۶۸. $f(x)\sin x$

۶۹. اعداد دلخواه a، b، و c داده شده‌اند و $a \neq 0$. نشان دهید که معادلهٔ $ax+b\sin x=c$ همیشه جواب دارد.

۷۰. نشان دهید که معادلهٔ $\cot \pi x = x$ در هر بازهٔ $I_n=(n, n+1)$، که در آن n صحیح و دلخواه است، درست یک ریشه مانند r_n دارد. با استفاده از روش تنصیف، r_0، r_1، و r_2 را به میزان $\frac{1}{32}$ تخمین بزنید.