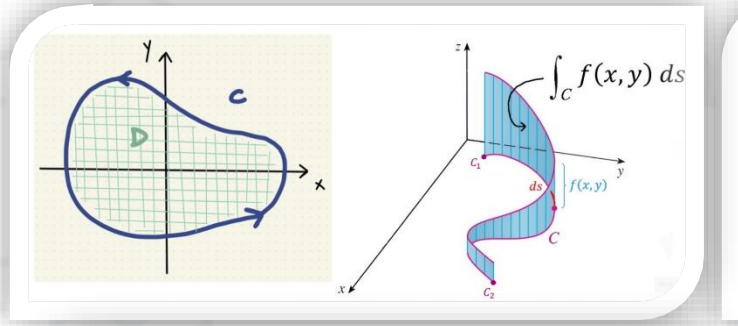
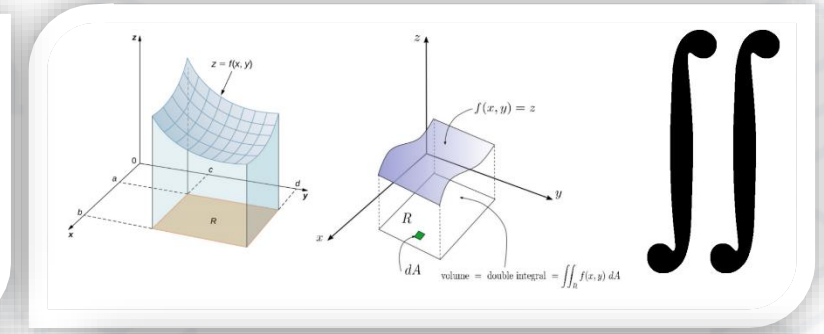
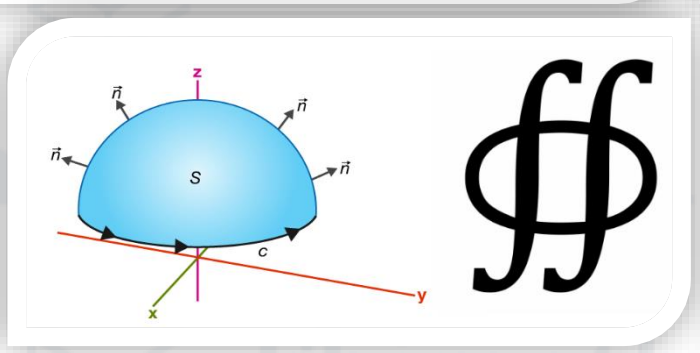
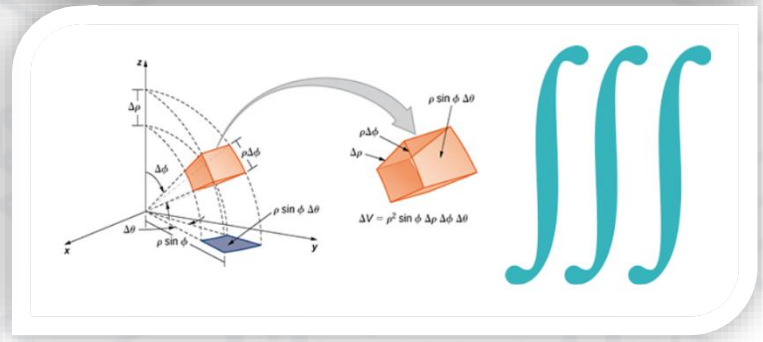








ریاضی عمومی ۲

پایانترم خرداد ۱۴۰۲

سوال + پاسخ تشریحی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده ریاضی

بسمه تعالی

سؤالات امتحانی پایان‌ترم ریاضی عمومی ۲

۱۴۰۲/۰۳/۲۰

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی: .....

شماره دانشجویی: .....

رشته تحصیلی: .....

استفاده از ماشین حساب و جزوه مجاز نیست.

۱. مینیمم تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ را با شرط $2x-y-2z=3$ به‌دست آورید.

---

۲. مقدار انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{\frac{1}{e}}^{1}\int_{\frac{1}{y}}^{e}\cos(x-\ln x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

ب) $\iiint_V xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ که در آن V ناحیه محصور به رویهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ ، در یک هشتم اول فضا است.

---

۳. فرض کنید منحنی C مرز ذوزنقه با رئوس $(1,1)$، $(1,2)$، $(2,3)$ و $(2,1)$ باشد که یکبار در جهت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود. مقدار کار انجام شده توسط میدان برداری $\vec{F}=(e^{x^2}+y^2)\,\vec{i}+(xy+\sin(\ln y))\,\vec{j}$ روی منحنی C را به‌دست آورید.

---

۴. مقادیر A و B را چنان بیابید که میدان برداری $\vec{F}=Ax\sin(\pi y)\,\vec{i}+(x^2\cos(\pi y)+Bye^{-z})\,\vec{j}+y^2e^{-z}\,\vec{k}$ پایستار (نگهدار) باشد. سپس $\int_C \vec{F}.\vec{\mathrm{d}r}$ را به‌دست آورید. C منحنی فصل مشترک سهمی‌گون $z=x^2+4y^2$ و صفحه $z=3x-2y$ از نقطه $(0,0,0)$ تا $(1,\frac{1}{2},2)$ است.

---

۵. سیالی در حال چرخش درون یک مخزن استوانه‌ای روباز با میدان سرعت $\vec{F}(x,y,z)=-y\sqrt{x^2+y^2}\,\vec{i}+x\sqrt{x^2+y^2}\,\vec{j}$ است. محور این استوانه در جهت محور z ها قرار دارد و شعاع و ارتفاع آن به‌ترتیب ۲ و ۴ است. اگر S سطح مخزن باشد، مقدار انتگرال $\iint_S curl\vec{F}.\vec{\mathrm{d}S}$ را به‌دست آورید.

---

۶. مساحت قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=1$ بالای صفحه $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (مساحت عرقچین) را به‌دست آورید.

سربلند و پیروز باشید

حل سوال۱ توابع چندمتغیره-اکسترمم

$$L = x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} + \lambda(۲x - y - ۲z - ۳)$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{L_x = ۰} ۲x + ۲\lambda = ۰ \rightarrow \lambda = -x \\ \xrightarrow{L_y = ۰} ۲y - \lambda = ۰ \rightarrow \lambda = ۲y \longrightarrow -x = ۲y = z \\ \xrightarrow{L_z = ۰} ۲z - ۲\lambda = ۰ \rightarrow \lambda = z \end{cases}$$

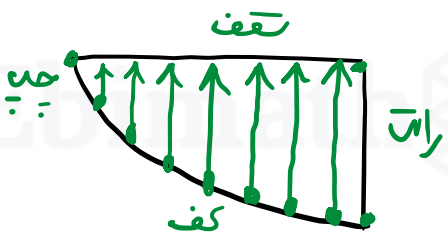
$$\xrightarrow[-x=۲y=z]{۲x-y-۲z=۳} ۲(-۲y) - y - ۲(۲y) = ۳ \rightarrow -۹y = ۳ \rightarrow \underline{y = -\frac{۱}{۳}} \xrightarrow{-x=۲y=z} \underline{x = \frac{۲}{۳}}, \underline{z = -\frac{۲}{۳}}$$

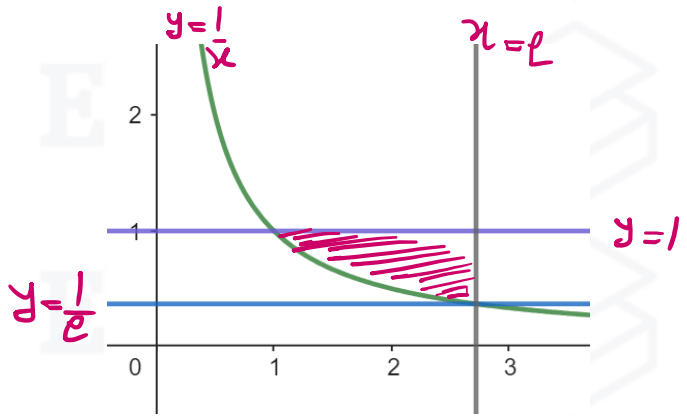
$$\xrightarrow{f(x,y,z)=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}} f\left(\frac{۲}{۳}, \frac{-۱}{۳}, \frac{-۲}{۳}\right) = \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲} + \left(\frac{-۱}{۳}\right)^{۲} + \left(\frac{-۲}{۳}\right)^{۲} = \underline{۱}$$

حل سوال۲-قسمت الف) انتگرال دوگانه-تعویض کران

سوال حل شده صفحه ۲۶ جزوه ریاضی۲

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1}\int_{\frac{1}{y}}^{e}\cos(x-\ln x)\,dx\,dy$$





$$=\int_{x=1}^{e}\boxed{\int_{y=\frac{1}{x}}^{1}\cos(x-\ln x)\,dy}\,dx$$

$$=\int_{x=1}^{e}\boxed{\cos(x-\ln x)\,y\Big|_{y=\frac{1}{x}}^{y=1}}\,dx=\int_{x=1}^{e}(1-\frac{1}{x})\cos(x-\ln x)\,dx=\sin(x-\ln x)\Big|_{x=1}^{x=e}$$

$$=\underline{\sin(e-1)-\sin(1)}$$

حل سوال۲-قسمت ب) انتگرال سه گانه-مختصات کروی

$$x = r\sin\phi\cos\theta$$
$$y = r\sin\phi\sin\theta$$
$$z = r\cos\phi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$
$$dv = r^2 dr d\theta \sin\phi d\phi$$

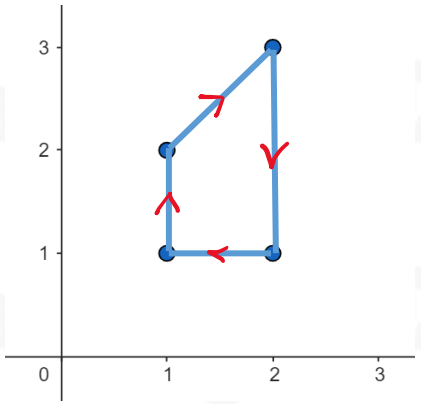
$$\rightarrow \iiint_V xyz\, dxdydz = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{2} \left((r\sin\varphi\cos\theta)(r\sin\varphi\sin\theta)(r\cos\varphi)\right) r^2 dr d\theta \sin\varphi d\varphi$$

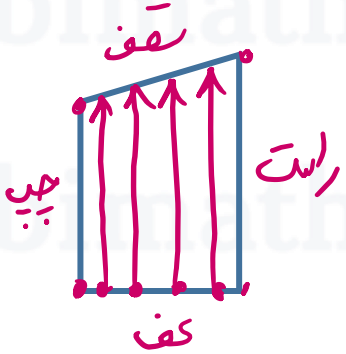
$$= \left(\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos\varphi d\varphi\right)\left(\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta d\theta\right)\left(\int_{r=0}^{2} r^5 dr\right)$$

$$= \left(\frac{\sin^4\varphi}{4}\Big|_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\right)\left(\frac{-1}{4}\cos 2\theta\Big|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\right)\left(\frac{r^6}{6}\Big|_{r=0}^{2}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{32}{3}\right) = \boxed{\frac{4}{3}}$$

حل سوال۳) انتگرال خم-قضیه گرین

$$\int \vec{F}.d\vec{r} = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$





$$\vec{F} = \underbrace{(e^{x^4} + y^2)}_{P}\vec{i} + \underbrace{(xy + \sin(\ln y))}_{Q}\vec{j}$$

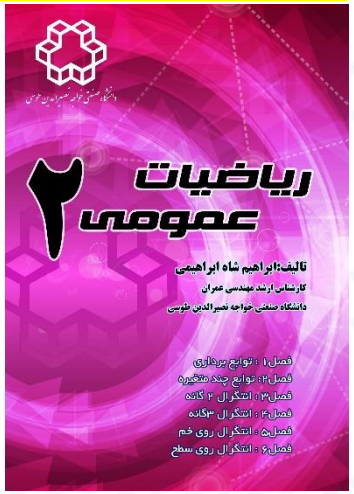
$$\rightarrow work = \int \vec{F}.d\vec{r} = \iint (y - 2y)\,dA = -\iint y\,dA = -\int_{x=1}^{2} \boxed{\int_{y=1}^{y=x+1} y\,dy}\,dx$$

$$= -\int_{x=1}^{2} \boxed{\frac{y^2}{2}\Big|_{y=1}^{y=x+1} dy}\,dx = -\int_{x=1}^{2} \frac{(x+1)^2 - 1}{2}\,dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{(x+1)^3}{6}\right)\Big|_{x=1}^{2} = \frac{1}{2} - \frac{19}{6} = \boxed{-\frac{8}{3}}$$

چون جهت حرکت ذکر شده در صورت سوال خلاف جهت قراردای قضیه گرین است پس حاصل $\boxed{+\frac{8}{3}}$ می شود.

حل سوال۴) انتگرال خم-میدان پایستار-پتانسیل

سوال حل شده صفحه ۴۱ جزوه ریاضی۲



$$\vec{P}=Ax\sin(\pi y)\ ,\ \vec{Q}=x^{2}\cos(\pi y)+Bye^{-z}\ ,\ \vec{R}=y^{2}e^{-z}$$

$$\xrightarrow[\overrightarrow{curlF}=\vec{0}]{\text{شرط پایستاری}}\overrightarrow{curlF}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\vec{i}-(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z})\vec{j}+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\vec{k}=\vec{0}$$

$$\rightarrow(2ye^{-z}+Bye^{-z})\vec{i}+(0)\vec{j}+(2x\cos(\pi y)-A\pi x\cos(\pi y))\vec{k}=\vec{0}$$

$$\rightarrow\begin{cases}2ye^{-z}+Bye^{-z}=0\rightarrow 2+B=0\rightarrow B=-2\\ 2x\cos(\pi y)-A\pi x\cos(\pi y)=0\rightarrow 2-A\pi=0\rightarrow A=\frac{2}{\pi}\end{cases}$$

$$\int\vec{F}.d\vec{r}=\int Pdx+\overset{*}{\int}Qdy+\overset{**}{\int}Rdz=(\frac{x^{2}}{\pi}\sin(\pi y)+0-y^{2}e^{-z}+0)\Big|_{(0,0,0)}^{(1,\frac{1}{2},2)}=\frac{1}{\pi}-\frac{1}{4}e^{-2}$$

$$\iint \overrightarrow{curlF}.d\vec{S} = \int \vec{F}.d\vec{r}$$

حل سوال۵) انتگرال سطح-قضیه استوکس

$$x^2+y^2=4 \rightarrow \begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases} \rightarrow \vec{r}(t)=(2\cos t, 2\sin t, 4) \rightarrow d\vec{r}=(-2\sin t, 2\cos t, 0)dt$$

$$F(x,y,z)=-y\sqrt{x^2+y^2}\,i+x\sqrt{x^2+y^2}\,j \longrightarrow F(t)=-4\sin t\, i+4\cos t\, j$$

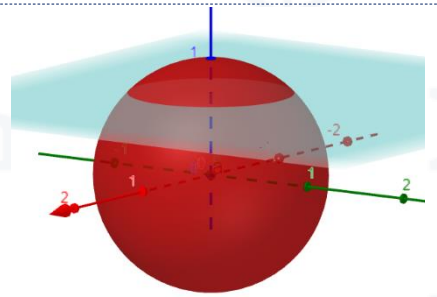
$$\rightarrow \iint \overrightarrow{curlF}.d\vec{S} = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int_{t=0}^{2\pi} (-4\sin t, 4\cos t).(-2\sin t, 2\cos t, 0)dt$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} (8\sin^2 t + 8\cos^2 t)dt = 8\int_{t=0}^{2\pi} dt = 8t\Big|_{t=0}^{2\pi} = \underline{16\pi}$$

بصورت مستقیم هم میشه حل کرد که پاسخ نهایی هر دو روش یکسان خواهد بود.

حل سوال۶ انتگرال سطح-مساحت سطوح فضایی

$\iint ds$



تفاوت با $\vec{n}ds$ برداری

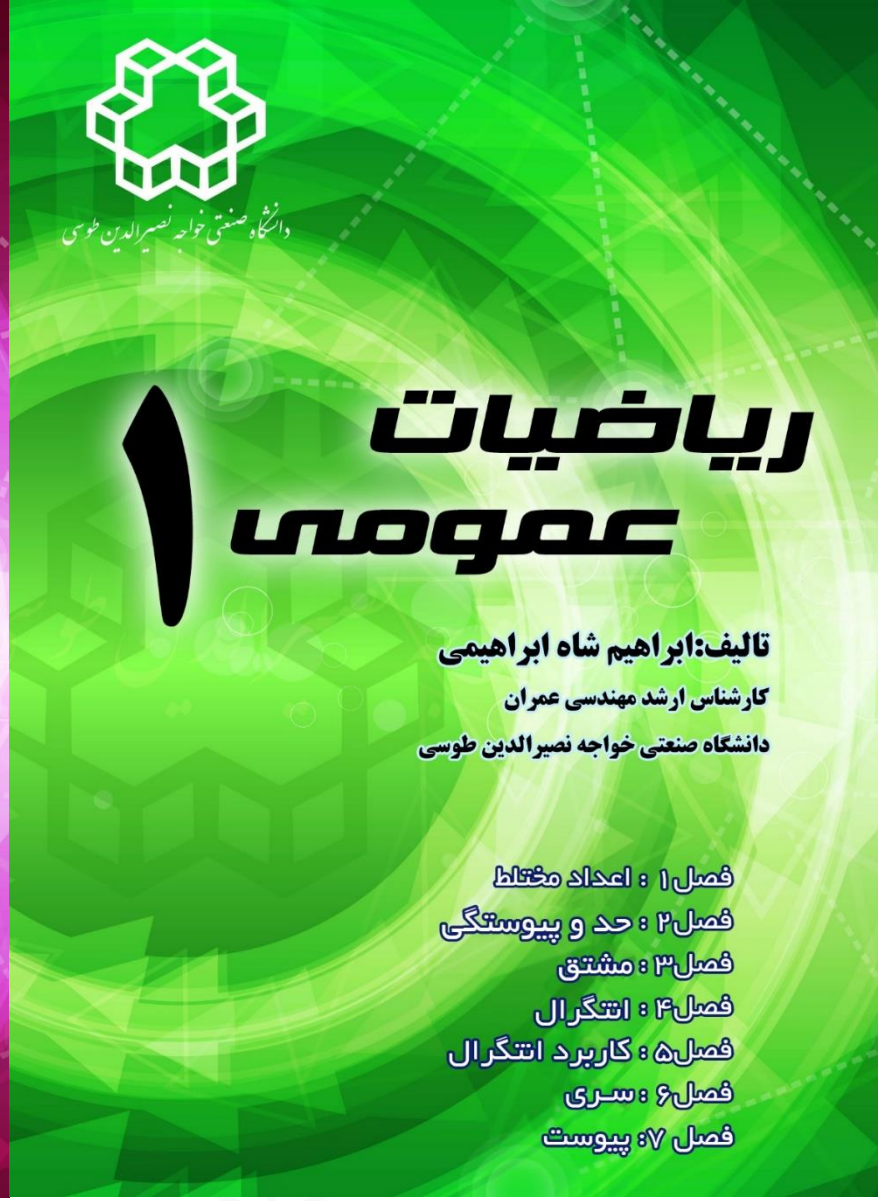
$$ds = \frac{|\vec{\nabla}_g|}{|\vec{\nabla}_g . \vec{k}|} dA$$

$$\xrightarrow{g = x^2+y^2+z^2-1=0} \vec{\nabla}_g = (2x, 2y, 2z)$$

$$\rightarrow ds = \frac{|(2x, 2y, 2z)|}{|(2x, 2y, 2z).(0,0,1)|} dA \rightarrow ds = \frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{2z} dA \rightarrow s = \iint ds = \iint \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z} dA$$

$$\xrightarrow{x^2+y^2+z^2=1} = \iint \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dA \xrightarrow[z=\frac{\sqrt{2}}{2}]{x^2+y^2+z^2=1} x^2+y^2 = \frac{1}{2} \rightarrow s = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r\,dr\,d\theta$$

$$\rightarrow s = \left(\int_{r=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}}\right)\left(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta\right) = \left(-\sqrt{1-r^2}\Big|_{r=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\left(\theta\Big|_{\theta=0}^{2\pi}\right) = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(2\pi) = \underline{(2-\sqrt{2})\pi}$$



برای دریافت جزوات و ویدئوهای اصلی کلاس و همچنین نمونه سوالات امتحانی به سایت EbiMath.com و یا کانال تلگرامی @EbiMath
مراجعه کنید و برای دیدن فیلم های کوتاه از بخش های مختلف ریاضیات، صفحه اینستاگرام EbiMath8020 را دنبال کنید.