

## معادله‌های خطی مرتبه بالاتر

ساختار نظری و روشهای حل ارائه شده در فصل قبل برای معادلات خطی مرتبه دوم را می‌توان مستقیماً به معادلات خطی مرتبه سوم و بالاتر تعمیم داد. در این فصل این تعمیم را به‌طور مختصر مرور می‌کنیم. به این دلیل که چیزهایی که ممکن است در معادله‌های مرتبه بالاتر رخ بدهند از تنوع بسیار بیشتری برخوردارند، توجهمان را بیشتر به نمونه‌هایی معطوف می‌کنیم که پدیده جدیدی در آنها رخ می‌دهد.

### ۱.۴ نظریه عمومی معادلات خطی مرتبه $n$ ام

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه  $n$ ام، معادله‌ای به صورت

$$P_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} + P_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + P_1(t) \frac{dy}{dt} + P_0(t)y = G(t) \quad (1)$$

است. فرض می‌کنیم که  $P_n, \dots, P_0$  و  $G$  تابعهایی پیوسته با مقدار حقیقی روی بازه‌ای مانند  $\alpha < t < \beta$  هستند و  $P_n$  هیچ‌جا در این بازه صفر نیست. در این صورت، با تقسیم معادله (۱) بر  $P_n(t)$  نتیجه می‌شود

$$L[y] = \frac{d^n y}{dt^n} + p_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_1(t) \frac{dy}{dt} + p_0(t)y = g(t). \quad (2)$$

عملگر دیفرانسیل خطی  $L$  از مرتبه  $n$ ام که با معادله (۲) تعریف شده، شبیه عملگر مرتبه دوم است که در فصل ۳ معرفی شد. نظریه ریاضی مربوط به معادله (۲) کاملاً متناظر نظریه مربوط به معادلات خطی مرتبه دوم است؛ به همین دلیل تنها همان نتیجه‌ها را برای معادلات مرتبه  $n$ ام بیان می‌کنیم. اثبات اکثر حکمها هم شبیه حکمهای مشابه مربوط به معادله مرتبه دوم است و معمولاً آنها را به‌صورت تمرین واگذار می‌کنیم.

معادله (۲) شامل مشتق مرتبه  $n$ ام  $y$  نسبت به  $t$  است، بنابراین برای حل آن به  $n$  انتگرال‌گیری نیاز داریم و هریک از این انتگرال‌گیری‌ها یک ثابت دلخواه را در جواب دخیل می‌کند؛ بنابراین می‌توانیم انتظار داشته باشیم که برای به‌دست آوردن جوابی یکتا، لازم است که  $n$  شرط اولیه

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \quad (3)$$

را بگذاریم که در آن  $t_0$  نقطه دلخواهی در بازه  $I$  است و  $y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0$  مجموعه‌ای از مقدارهای ثابت حقیقی مشخص است. قضیه بعد که مشابه قضیه ۱.۲.۳ است، تضمین می‌کند که مسئله مقدار اولیه (۲) و (۳) جوابی یکتا دارد.

### قضیه ۱.۱.۴

اگر تابعهای  $p_1, p_2, \dots, p_n$  و  $g$  در بازه  $I$  پیوسته باشند، دقیقاً یک جواب  $y = \phi(t)$  برای معادله دیفرانسیل (۲) وجود دارد که در شرایط اولیه (۳) هم صدق می‌کند. این تابع در همه بازه  $I$  جواب است.

در اینجا این قضیه را ثابت نمی‌کنیم؛ اما اگر تابعهای  $p_1, \dots, p_n$  ثابت باشند، می‌توانیم جواب مسئله مقدار اولیه (۲) و (۳) را به روشی شبیه روش فصل ۳ بسازیم؛ بخش‌های ۲.۴ تا ۴.۴ را ببینید. با اینکه در این حالت می‌توانیم جوابی بیابیم، بدون استفاده از قضیه ۱.۱.۴ یکتایی آن را نمی‌دانیم. اثباتی برای این قضیه را می‌توان در کتاب اینس (بخش ۳۲.۳) یا در کتاب کادینگتون (فصل ۶) یافت.

معادله همگن. همانند حالت مسئله مرتبه دوم، ابتدا معادله همگن

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = 0 \quad (4)$$

را بررسی می‌کنیم. اگر تابعهای  $y_1, y_2, \dots, y_n$  جوابهای معادله (۴) باشند، با محاسبه مستقیم نتیجه می‌شود که ترکیب خطی

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t) \quad (5)$$

که در آن  $c_1, c_2, \dots, c_n$  ثابتهای دلخواه هستند نیز جواب معادله (۴) است. بنابراین طبیعی است بررسی کنیم که جواب (۴) را می‌توان به صورت ترکیب خطی  $y_1, \dots, y_n$  نوشت یا نه. این امر درست است اگر، فارغ از شرایط اولیه (۳)، بتوان ثابتهای  $c_1, \dots, c_n$  را طوری انتخاب کرد که ترکیب خطی (۵) در شرایط اولیه صدق کند؛ یعنی به ازای هر انتخاب نقطه  $t_0$  در  $I$  و به ازای هر انتخاب  $y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0$  باید بتوانیم  $c_1, \dots, c_n$  را طوری تعیین کنیم که در معادله‌های

$$\begin{aligned} c_1 y_1(t_0) + \dots + c_n y_n(t_0) &= y_0, \\ c_1 y'_1(t_0) + \dots + c_n y'_n(t_0) &= y'_0, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6)$$

$$c_1 y^{(n-1)}_1(t_0) + \dots + c_n y^{(n-1)}_n(t_0) = y^{(n-1)}_0$$

صدق کنند. دستگاه معادله‌های (۶) را می‌توان نسبت به ثابتهای  $c_1, \dots, c_n$  به طور یکتا حل کرد به شرط آنکه دترمینان ضرایب صفر نباشد. از طرف دیگر، اگر دترمینان ضرایب صفر باشد همواره می‌توان مقادیر  $y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0$  را طوری انتخاب کرد که معادله (۶) جواب نداشته باشد. بنابراین شرط لازم و کافی برای وجود جواب برای معادله (۶) به ازای همه مقادیر دلخواه  $y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0$  این است که رانسکین، یعنی

$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{(n-1)}_1 & y^{(n-1)}_2 & \dots & y^{(n-1)}_n \end{vmatrix} \quad (7)$$

در  $t = t_0$  ناصفر باشد. چون  $t_0$  را می‌توان هر نقطه‌ای در بازه  $I$  انتخاب کرد، لازم و کافی است که  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$  در هر نقطه از بازه ناصفر باشد. همانند حالت معادلات خطی مرتبه دوم، می‌توان ثابت کرد که اگر  $y_1, y_2, \dots, y_n$  جوابهای مستقل خطی (۴) باشند، یا  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$  به ازای هر  $t$  در بازه  $I$  صفر است و یا هرگز صفر نمی‌شود؛ مسئله ۲.۵ را ببینید. بنابراین به قضیه زیر می‌رسیم.

### قضیه ۲.۱.۴

اگر تابعهای  $p_1, p_2, \dots, p_n$  در بازه باز  $I$  پیوسته باشند، اگر  $y_1, \dots, y_n$  جوابهای معادله (۴) باشند و اگر به ازای حداقل یک نقطه در  $I$  مانند  $t_0$  بدانیم که  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(t_0) \neq 0$ ، هر جواب معادله (۴) را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از  $y_1, y_2, \dots, y_n$  نوشت.

به مجموعه جوابهای  $y_1, \dots, y_n$  برای معادله (۴) که رانسکین آنها ناصفر است، مجموعه اساسی جوابها می‌گوییم. وجود مجموعه اساسی جوابها را می‌توان دقیقاً به همان شیوه اثبات وجود برای معادلات خطی مرتبه دوم ثابت کرد (قضیه ۵.۲.۳ را ببینید). چون همه جوابهای معادله (۴) به شکل (۵) هستند، به هر ترکیب خطی دلخواه از اعضای هر مجموعه اساسی جواب معادله (۴) جواب عمومی می‌گوییم.

استقلال خطی و وابستگی خطی. حال ارتباط بین مجموعه اساسی جوابها و مفهوم استقلال خطی را، که ایده‌ای کلیدی در جبر خطی است، بررسی می‌کنیم. می‌گوییم تابعهای  $f_1, f_2, \dots, f_n$  روی بازه  $I$  وابسته خطی هستند اگر ثابتهای  $k_1, k_2, \dots, k_n$  وجود داشته باشند که اقلاً یکی از آنها ناصفر است و به ازای هر  $t$  در  $I$ ،

$$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) + \dots + k_n f_n(t) = 0. \quad (8)$$

می‌گوییم تابعهای  $f_1, \dots, f_n$  روی بازه  $I$  مستقل خطی هستند اگر آنها روی  $I$  وابسته خطی نباشند.

تعیین کنید که توابع  $f_1(t) = 1, f_2(t) = t, f_3(t) = t^2$  برای بازه  $-\infty < t < \infty$ :  $I$  مستقل خطی‌اند یا وابسته خطی. ترکیب خطی

$$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) + k_3 f_3(t) = k_1 + k_2 t + k_3 t^2$$

را تشکیل می‌دهیم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم؛ یعنی

$$k_1 + k_2 t + k_3 t^2 = 0. \quad (9)$$

اگر معادله (۹) به ازای هر  $t$  در  $I$  برقرار باشد، مطمئناً باید در هر سه نقطه متمایز در  $I$  هم درست باشد. هر سه نقطه‌ای را می‌توان برای این منظور استفاده کرد، اما ساده‌تر است که  $t = 0, t = 1, t = -1$  را انتخاب کنیم. با قرار دادن این مقادیر در معادله (۹)، دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} k_1 &= 0, \\ k_1 + k_2 + k_3 &= 0, \\ k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

را به دست می‌آوریم. از اولین معادله از دستگاه (۱۰) درمی‌یابیم که  $k_1 = 0$  و از دو تای دیگر هم به‌سادگی نتیجه می‌شود که  $k_2 = k_3 = 0$ . بنابراین هیچ مجموعه‌ای از ثابتها وجود ندارد که اقلاً یکی از آنها ناصفر باشد و معادله (۹) حتی به ازای این سه نقطه انتخابی برقرار باشد. پس تابعهای داده‌شده، در بازه  $I$  وابسته خطی نیستند و بنابراین باید مستقل خطی باشند. در حقیقت این تابعها روی هر بازه‌ای مستقل خطی هستند. این امر را می‌توان به همین شیوه احتمالاً با انتخاب سه نقطه دیگر ثابت کرد.

مثال

۱

تعیین کنید که تابعهای  $f_1(t) = 1$ ,  $f_2(t) = 2 + t$ ,  $f_3(t) = 3 - t^2$ ,  $f_4(t) = 4t + t^2$  در بازه دلخواه  $I$  مستقل خطی هستند و یا وابسته خطی.

ترکیب خطی

$$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) + k_3 f_3(t) + k_4 f_4(t) = k_1 + k_2(2 + t) + k_3(3 - t^2) + k_4(4t + t^2) \\ = (k_1 + 2k_2 + 3k_3) + (k_2 + 4k_4)t + (-k_3 + k_4)t^2 \quad (۱۱)$$

را تشکیل می‌دهیم. این عبارت وقتی روی یک بازه صفر است که

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0, \quad k_2 + 4k_4 = 0, \quad -k_3 + k_4 = 0.$$

این سه معادله با چهار مجهول جوابهای متعددی دارد؛ به عنوان مثال اگر  $k_2 = 1$ ،  $k_3 = -1$ ،  $k_4 = -1$  و  $k_1 = 5$  پس تابعهای داده شده بر هر بازه‌ای وابسته خطی هستند.

با استفاده از مفهوم استقلال خطی می‌توانیم صورت‌بندی معادلی برای مجموعه‌ای اساسی جوابهای معادله همگن (۴) پیدا کنیم. فرض کنید  $y_1, \dots, y_n$  جوابهای معادله (۴) روی بازه‌ای مثل  $I$  باشند و معادله

$$k_1 y_1(t) + \dots + k_n y_n(t) = 0 \quad (۱۲)$$

را در نظر بگیرید. با مشتق‌گیری مکرر از (۱۲)، به  $n - 1$  معادله

$$k_1 y_1'(t) + \dots + k_n y_n'(t) = 0 \\ \vdots \\ k_1 y_1^{(n-1)}(t) + \dots + k_n y_n^{(n-1)}(t) = 0 \quad (۱۳)$$

می‌رسیم. دستگاه شامل معادلات (۱۲) و (۱۳) دستگاهی از  $n$  معادله خطی جبری برحسب  $n$  مجهول  $k_1, \dots, k_n$  است. در ترمینان ضرایب این سیستم رانسکین  $y_1, \dots, y_n$  در  $t$  (یعنی  $W(y_1, \dots, y_n)(t)$ ) است. به این ترتیب به قضیه زیر می‌رسیم.

#### قضیه ۳.۱.۴

اگر  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادله (۴)، یعنی

$$L[y] = y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_1(t)y' + p_0(t)y = 0$$

روی بازه‌ای مثل  $I$  باشد آنگاه  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  بر  $I$  مستقل خطی هستند. برعکس، اگر  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  جوابهای مستقل خطی معادله (۴) بر  $I$  باشند آنگاه آنها یک مجموعه اساسی جواب روی  $I$  هستند.

برای اثبات این قضیه، ابتدا فرض کنید  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  یک مجموعه اساسی از جوابهای معادله (۴) بر  $I$  هستند. در این صورت، به ازای هر  $t$  در  $I$ ،  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(t) \neq 0$ . بنابراین دستگاه (۱۲)، (۱۳) به ازای هر  $t$  در  $I$  تنها جواب  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$  را دارد. پس  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  بر  $I$  وابسته خطی نیستند و بنابراین روی  $I$  مستقل خطی هستند.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنید  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  بر  $I$  مستقل خطی باشند. برای اینکه ثابت کنیم این تابعها یک مجموعه اساسی جواب هستند، باید ثابت کنیم که رانسکین در  $I$  هرگز صفر نمی‌شود. فرض کنید این طور نباشد؛ بنابراین حداقل یک نقطه مانند  $t_0$  موجود است که رانسکین در آن صفر است. در این نقطه دستگاه (۱۲)، (۱۳) جوابهای ناصفر دارد که آنها را با  $k_1^*, \dots, k_n^*$  نشان می‌دهیم. حال ترکیب خطی

$$\phi(t) = k_1^* y_1(t) + \dots + k_n^* y_n(t) \quad (۱۴)$$

را تشکیل می‌دهیم. پس  $\phi(t)$  در مسئله مقدار اولیه

$$L[y] = 0, \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = 0 \quad (۱۵)$$

صدق می‌کند. تابع  $\phi$  در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند چون ترکیبی خطی از جوابهاست و در شرایط اولیه صدق می‌کند چون اینها دقیقاً معادله‌های (۱۲)، (۱۳) هستند که در  $t_0$  محاسبه شده‌اند. اما تابع  $y(t) = 0$  به ازای هر  $t$  در  $I$  جواب (۱۵) است. طبق قضیه ۳.۱.۴ جواب مسئله مقدار اولیه یکتا است. پس به ازای هر  $t$  در  $I$ ،  $\phi(t) = 0$ . در نتیجه  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  بر بازه  $I$  مستقل خطی هستند که تناقض است. بنابراین فرض وجود نقطه‌ای که در آن رانسکین صفر است دست‌نیافتنی است. بنابراین رانسکین بر  $I$  هرگز صفر نمی‌شود، که همان است که باید ثابت می‌شد.

توجه کنید که عکس قضیه ۳.۱.۴ در مورد مجموعه‌ای از تابعهای  $f_1, \dots, f_n$  که جوابهای معادله (۴) نباشند، لزوماً صحیح نیست. ممکن است که آنها بر بازه  $I$  مستقل خطی باشند در حالی که رانسکین آنها در نقطه‌ای برابر صفر است، یا حتی ممکن است رانسکین در همه نقاط صفر باشد و مجبور شویم در نقطه‌های مختلف مجموعه‌های مختلفی از ثابتهای  $k_1, \dots, k_n$  انتخاب کنیم. مثالی از این وضع را می‌توانید در مسئله ۲۵ ببینید.

معادله غیرهمگن. حال معادله غیرهمگن (۲)، یعنی

$$L[y] = y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_1(t)y' + p_0(t)y = g(t)$$

را در نظر بگیرید. اگر  $Y_1$  و  $Y_2$  دو جواب دلخواه از معادله (۲) باشند، بلافاصله از خطی بودن عملگر  $L$  نتیجه می‌شود که

$$L[Y_1 - Y_2](t) = L[Y_1](t) - L[Y_2](t) = g(t) - g(t) = 0;$$

بنابراین تفاضل هر دو جواب از معادله غیرهمگن (۲)، جوابی از معادله همگن (۴) است. چون هر جواب از معادله همگن را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از مجموعه‌ای اساسی از جوابها مثل  $y_1, \dots, y_n$  نوشت، هر جواب معادله (۲) را می‌توان به صورت

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t) + Y(t) \quad (۱۶)$$

نوشت که در آن  $Y$  یک جواب خاص معادله غیرهمگن (۲) است. به ترکیب خطی (۱۶) جواب عمومی معادله غیرهمگن (۲) می‌گوییم.

پس مسئله اصلی تعیین یک مجموعه اساسی از جوابهای  $y_1, \dots, y_n$  برای معادله همگن (۴) است. اگر ضرایب ثابت باشند، این مسئله نسبتاً ساده است؛ در بخش بعدی درباره آن بحث می‌کنیم. اگر ضرایب ثابت نباشند، معمولاً باید از روشهای عددی مانند آنچه که در فصل ۸ ارائه می‌شود و یا روش سریها مشابه آنچه که در فصل ۵ می‌آید استفاده کرد. این راه‌حلها با افزایش مرتبه معادله پیچیده‌تر می‌شوند.

روش کاهش مرتبه (بخش ۴.۳) را هم می‌توان برای معادله‌های مرتبه  $n$  به‌کار گرفت. اگر  $y_1$  جوابی از معادله (۴) باشد، جایگزینی  $y = v(t)y_1(t)$  منجر به معادله دیفرانسیلی از مرتبه  $n-1$  برای  $v'$  می‌شود (مسئله ۲۶ را برای حالتی که  $n=3$  ببینید). اما اگر  $n \geq 3$ ، خود معادله کاهش‌یافته حداقل از مرتبه دو است و ندرتاً ممکن است که به‌طور قابل توجهی ساده‌تر از معادله اولیه باشد. پس در عمل، به‌ندرت کاهش مرتبه برای معادلات مرتبه بالاتر از دو مفید است.

## مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۶ بازه‌ای را تعیین کنید که معادله در آن مطمئناً جواب دارد.

$$\begin{aligned} ۱. \quad & y^{(4)} + 4y''' + 3y'' = t^2 \\ ۲. \quad & ty''' + (\sin t)y'' + 3y = \cos t \\ ۳. \quad & y''' + ty'' + t^2y' + t^3y = \ln t \\ ۴. \quad & (x-1)y^{(4)} + (x+1)y'' + (\tan x)y = 0 \\ ۵. \quad & t(t-1)y^{(4)} + e^ty'' + 4t^2y = 0 \\ ۶. \quad & (x^2-4)y^{(4)} + x^2y''' + 9y = 0 \end{aligned}$$

در هر یک از مسئله‌های ۷ تا ۱۰ تعیین کنید که مجموعه تابعهای داده‌شده مستقل خطی هستند و یا وابسته خطی. اگر وابسته خطی بودند، یک رابطه خطی بین آنها پیدا کنید.

$$\begin{aligned} ۷. \quad & f_1(t) = 2t-3, f_2(t) = t^2+1, f_3(t) = 2t^2-3t \\ ۸. \quad & f_1(t) = 2t-3, f_2(t) = 2t^2+1, f_3(t) = 3t^2+t \\ ۹. \quad & f_1(t) = 2t-3, f_2(t) = t^2+1, f_3(t) = 2t^2-t \\ ۱۰. \quad & f_1(t) = 2t-3, f_2(t) = t^2+1, f_3(t) = 2t^2-t \end{aligned}$$

در هر یک از مسئله‌های ۱۱ تا ۱۶، ثابت کنید که تابعهای داده‌شده جوابهای معادله دیفرانسیل هستند و رانسکین آنها را حساب کنید.

$$\begin{aligned} ۱۱. \quad & y'' + 4y' = 0, \sin(2t), \cos(2t) \\ ۱۲. \quad & y'' + y = 0, t, \cos t, \sin t \\ ۱۳. \quad & y'' - y' - 2y = 0, e^{-2t}, e^{-t}, e^t \\ ۱۴. \quad & y'' + 2y' + y = 0, t, 1, y^{(4)}(t) \\ ۱۵. \quad & 2xy'' - y' + 2y = 0, x, x^2, x^3 \\ ۱۶. \quad & xy''' - y'' = 0, x, x^2 \end{aligned}$$

۱۷. ثابت کنید بازه‌ای  $I$ ،  $W(\delta, \sin^2 t, \cos 2t) = 0$ ، آیا می‌توانید این حکم را بدون محاسبه مستقیم رانسکین ثابت کنید؟

۱۸. ثابت کنید عملگر دیفرانسیل تعریف‌شده با

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y$$

عملگر دیفرانسیل خطی است؛ یعنی ثابت کنید

$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2]$$

که در آن  $y_1$  و  $y_2$  تابعهای  $n$  بار مشتق‌پذیر و  $c_1$  و  $c_2$  ثابتهای دلخواه هستند. به همین ترتیب، ثابت کنید که اگر  $y_1, y_2, \dots, y_n$  جوابهای  $L[y] = 0$  باشند آنگاه ترکیب خطی  $c_1y_1 + \dots + c_ny_n$  هم جوابی از  $L[y] = 0$  است.

۱۹. فرض کنید عملگر دیفرانسیل خطی  $L$  به‌صورت

$$L[y] = a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny$$

تعریف شده باشد که در آن  $a_0, a_1, \dots, a_n$  ثابتهای حقیقی هستند.

(الف)  $L[t^n]$  را بیابید.

(ب)  $L[e^{3t}]$  را بیابید.

(ج) چهار جواب معادله  $y'' + 5y' + 4y = 0$  را تعیین کنید. آیا این چهار جواب مجموعه اساسی از جوابها هستند؟ چرا؟

۲۰. در این مسئله نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان قضیه ۶.۲.۳ (قضیه آبل) را به معادله‌های مرتبه بالاتر تعمیم داد. خطهای اساسی روند اثبات را برای معادله مرتبه سوم

$$y''' + p_1(t)y'' + p_2(t)y' + p_3(t)y = 0$$

ارائه می‌کنیم. فرض کنید  $y_1, y_2, y_3$  جوابهای این معادله روی بازه‌ای مثل  $I$  باشند.

(الف) اگر  $W = W(y_1, y_2, y_3)$ ، ثابت کنید که

$$W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

راهنمایی: مشتق دترمینان ۳ در ۳، مجموع سه دترمینان ۳ در ۳ است که به‌ترتیب با مشتق‌گیری از سطرهای اول، دوم و سوم به‌دست می‌آیند.

(ب) مقادیرهای  $y_1''', y_2''', y_3'''$  و  $y_1''$  را از معادله دیفرانسیل جایگزین کنید، سطر اول را در  $p_3$ ، سطر دوم را در  $p_2$  ضرب کنید و آنها را به سطر آخری اضافه کنید تا به

$$W' = -p_1(t)W$$

برسید.

(ج) ثابت کنید

$$W(y_1, y_2, y_3)(t) = c \exp \left[ - \int p_1(t) dt \right].$$

نتیجه می‌شود که بر  $I$ ،  $W$  یا همواره صفر است و یا هرگز صفر نمی‌شود.

(د) این استدلال را به معادله مرتبه  $n$ 

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = 0$$

با جوابهای  $y_1, \dots, y_n$  تعمیم بدهید. به این ترتیب فرمول آبل را برای این حالت ثابت کرده‌اید؛ یعنی

$$W(y_1, \dots, y_n)(t) = c \exp \left[ - \int p_1(t) dt \right].$$

در هر یک از مسئله‌های ۲۱ تا ۲۴، از فرمول آبل (مسئله ۲۰) برای یافتن رانسکین مجموعه‌ای اساسی جوابهای معادله دیفرانسیل داده‌شده استفاده کنید.

$$y'' + 3y' + y = 0 \quad ۲۱. \quad y^{(2)} + y = 0 \quad ۲۲.$$

$$ty''' + 2y'' - y' + ty = 0 \quad ۲۳. \quad t^2y^{(4)} + t^2y''' + ty'' - 2y = 0 \quad ۲۴.$$

۲۵. الف) ثابت کنید که تابعهای  $f(t) = t^t$  و  $g(t) = t^t$  بر  $0 < t < 1$  و  $0 < t < 1$  مستقل خطی هستند.ب) ثابت کنید  $f(t)$  و  $g(t)$  بر  $1 < t < \infty$  مستقل خطی هستند.ج) ثابت کنید  $W(f, g)(t)$  به ازای هر  $t$  در  $1 < t < \infty$  صفر است.۲۶. ثابت کنید که اگر  $y_1$  جوابی از

$$y''' + p_1(t)y'' + p_2(t)y' + p_3(t)y = 0$$

باشد، جایگزینی  $y = y_1(t)v(t)$  متجر به معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$y_1 v'' + (3y_1' + p_1 y_1) v' + (3y_1'' + 2p_1 y_1' + p_2 y_1) v = 0$$

برای  $v'$  می‌شود.

در هر یک از مسئله‌های ۲۷ و ۲۸ از روش کاهش مرتبه (مسئله ۲۶) برای حل معادله دیفرانسیل داده‌شده استفاده کنید.

$$y_1(t) = e^t; (2-t)y''' + (2t-3)y'' - ty' + y = 0, t < 2 \quad ۲۷.$$

$$y_2(t) = t^2; y_1(t) = t^2; t^2(t+3)y''' - 3t(t+2)y'' + 6(1+t)y' - 6y = 0, t > 0 \quad ۲۸.$$

## ۲.۴ معادلات همگن با ضرایب ثابت

معادله دیفرانسیل خطی و همگن مرتبه  $m$ 

$$L[y] = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (۱)$$

را در نظر بگیرید که در آن  $a_0, a_1, \dots, a_n$  ثابتهای حقیقی هستند. با توجه به آنچه که درباره معادله خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت می‌دانیم، طبیعی است که انتظار داشته باشیم که به ازای مقدار مناسبی برای  $r$ ،  $y = e^{rt}$  جواب معادله (۱) باشد. در حقیقت به ازای هر  $r$ ،

$$L[e^{rt}] = e^{rt}(a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0) = e^{rt}Z(r) \quad (۲)$$

که در آن

$$Z(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0. \quad (۳)$$

به ازای هر مقدار از  $r$  که  $Z(r) = 0$  نتیجه می‌شود که  $L[e^{rt}] = 0$  و  $y = e^{rt}$  جوابی برای معادله (۱) است. به چندجمله‌ای  $Z(r)$  چندجمله‌ای مشخصه و به معادله  $Z(r) = 0$  معادله مشخصه معادله دیفرانسیل (۱) می‌گوییم. هر چندجمله‌ای مرتبه  $n$  ریشه مثل  $r_1, r_2, \dots, r_n$  دارد که ممکن است بعضی از آنها مساوی باشند. بنابراین می‌توانیم چندجمله‌ای مشخصه را به صورت

$$Z(r) = a_n (r - r_1)(r - r_2) \dots (r - r_n). \quad (۴)$$

بنویسیم.

ریشه‌های حقیقی و متمایز: اگر ریشه‌های معادله مشخصه حقیقی و متمایز باشند،  $n$  جواب متمایز  $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \dots, e^{r_n t}$  برای معادله (۱) داریم. اگر این تابعها مستقل خطی باشند، جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \dots + c_n e^{r_n t}. \quad (۵)$$

یک راه برای اثبات استقلال خطی  $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \dots, e^{r_n t}$  محاسبه دترمینان رانسکین است. راه دیگر در مسئله ۴۰ طرح شده است.

جواب عمومی معادله

$$y^{(4)} + y''' - 7y'' - y' + 6y = 0 \quad (۶)$$

را به دست بیاورید. همچنین جوابی را بیابید که در شرایط اولیه

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -2, \quad y'''(0) = -1 \quad (۷)$$

صدق کند و نمودار آن را رسم کنید.

با فرض  $y = e^{rt}$  باید  $r$  را با حل معادله

$$r^4 + r^3 - 7r^2 - r + 6 = 0 \quad (۸)$$

تعیین کنیم. ریشه‌های این معادله  $r_1 = 1, r_2 = -1, r_3 = 2, r_4 = -3$  هستند؛ بنابراین جواب عمومی معادله (۶) عبارت است از

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} + c_4 e^{-3t}. \quad (۹)$$

۱. برای بیش از ۲۰۰ سال یکی از سؤالات مهم در ریاضیات این بود که هر معادله چندجمله‌ای حداقل یک ریشه دارد یا نه. کارل فریدریش گاوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵م) در رساله دکترایش در ۱۷۹۹ میلادی با اثبات قضیه اساسی جبر جواب مثبت به این سؤال داده است، اگرچه اثبات وی معیارهای نوین دقت را برآورده نمی‌کند. پس از آن چندین اثبات دیگر از جمله سه اثبات توسط خود گاوس کشف شد. امروزه، دانشجویان معمولاً با قضیه اساسی جبر در اولین درس توابع مختلط روبرو می‌شوند که می‌توان آن را از برخی خواص توابع تحلیلی مختلط نتیجه گرفت.

از شرایط اولیه (۷) نتیجه می‌شود که  $c_1, \dots, c_4$  در چهار معادله

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &= 1, \\ c_1 - c_2 + 2c_3 - 3c_4 &= 0, \\ c_1 + c_2 + 4c_3 + 9c_4 &= -2, \\ c_1 - c_2 + 8c_3 - 27c_4 &= -1 \end{aligned} \quad (10)$$

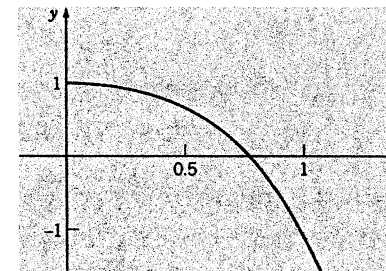
صدق می‌کنند. با حل این دستگاه چهار معادله جبری خطی نتیجه می‌شود

$$c_1 = \frac{11}{8}, \quad c_2 = \frac{5}{12}, \quad c_3 = -\frac{2}{3}, \quad c_4 = -\frac{1}{8};$$

بنابراین جواب مسئله مقدار اولیه عبارت است از

$$y = \frac{11}{8}e^t + \frac{5}{12}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{2t} - \frac{1}{8}e^{-3t}. \quad (11)$$

نمودار جواب در شکل ۱.۲.۴ نشان داده شده است.



شکل ۱.۲.۴ جواب مسئله مقدار اولیه مثال ۱.

همان‌طور که در مثال ۱ دیدیم، روند حل معادله خطی مرتبه  $n$ ام با ضرایب ثابت بستگی به یافتن ریشه‌های معادله چندجمله‌ای مرتبه  $n$ ام متناظرش دارد. اگر شرایط اولیه مفروض باشند، دستگاهی از  $n$  معادله خطی جبری برای تعیین مقادیر مناسب  $c_1, \dots, c_n$  معین می‌شود. هر چند که هریک از این کارها با افزایش  $n$  پیچیده‌تر می‌شود، اغلب می‌توان دستگاه را با ماشین حساب و یا رایانه به آسانی حل کرد.

برای چندجمله‌ای‌های مرتبه سوم و چهارم فرمول‌هایی<sup>۱</sup> نظیر معادلات مرتبه دوم اما پیچیده‌تر وجود دارند که عبارت دقیق ریشه‌ها را می‌دهند. الگوریتم‌های یافتن ریشه در ماشین حساب‌ها و رایانه‌ها موجودند. گاهی طوری

۱. روش حل معادلات مرتبه سوم ظاهراً توسط سی‌بین دال فرو (۱۴۶۵-۱۵۲۶م) در حدود ۱۵۰۰ میلادی کشف شد، اگرچه برای بار اول در ۱۵۴۵ میلادی توسط جیرولامو کاردانو (۱۵۰۱-۱۵۷۶م) در *Arts Magna* ثبت شد. این کتاب شامل روشی برای حل معادلات مرتبه چهارم هم هست که کاردانو آن را به شاگردش لودویکو فراری (۱۵۲۲-۱۵۶۵م) منتسب کرده است. این سؤال که آیا فرمول مشابهی برای معادله‌های با درجه بالاتر موجود است یا نه برای بیش از دو قرن تا سال ۱۸۲۶ میلادی باز باقی ماند که در آن زمان نیز آبل نشان داد که هیچ جواب عمومی‌ای برای معادله‌های چندجمله‌ای از مرتبه پنج و یا بیشتر وجود ندارد. اوارست گالوا (۱۸۱۱-۱۸۳۲م) در ۱۸۳۱ میلادی یک نظریه کلی ارائه کرد که متأسفانه برای چندین دهه فراگیر نشد.

در حل‌کننده معادلات دیفرانسیل تعبیه شده‌اند که روند تجزیه چندجمله‌ای مشخصه پنهان است و جواب معادله دیفرانسیل به‌طور خودکار تولید می‌شود.

اگر مجبور شدید چندجمله‌ای مشخصه‌ای را دستی تجزیه کنید، حکم زیر گاهی مفید است. فرض کنید ضرایب چندجمله‌ای

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0 \quad (12)$$

صحیح باشند. اگر  $r = \frac{p}{q}$  ریشه گویایی باشد که در آن  $p$  و  $q$  عامل مشترک ندارند،  $p$  باید عاملی از  $a_n$  و  $q$  باید عاملی از  $a_0$  باشد. به‌عنوان مثال در معادله (۸)، عاملهای  $a_0$ ،  $\pm 1$  هستند و عاملهای  $a_n$  عبارت‌اند از  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$ . با آزمودن این ریشه‌های احتمالی درمی‌یابیم که  $1, -1, 2, -3$  واقعاً ریشه‌های معادله‌اند. در این حالت ریشه‌های دیگری وجود ندارند، چون چندجمله‌ای مرتبه چهارم است. اگر بعضی از ریشه‌ها گنگ و یا مختلط باشند که معمولاً چنین است، این روند معمولاً آنها را نمی‌یابد، اما حداقل می‌توان درجه چندجمله‌ای را با تقسیم بر چندجمله‌ای متناظر ریشه‌های گویا کاهش داد.

اگر ریشه‌های معادله مشخصه حقیقی و متمایز باشند، دیده‌ایم که جواب عمومی (۵) همان مجموع توابع نمایی است. به‌ازای مقادیر بزرگ  $t$ ، جواب تحت تسلط عبارت نظیر بزرگ‌ترین ریشه جبری است. اگر این ریشه مثبت باشد، جوابها به‌طور نمایی بی‌کران می‌شوند؛ در حالی که اگر منفی باشد، جوابها به صفر میل می‌کنند. بالاخره، اگر بزرگ‌ترین ریشه صفر باشد، جوابها با بزرگ شدن  $t$  به ثابتی غیرصفر میل می‌کنند. البته برای شرایط اولیه معین، ضریب جمله غالب ممکن است صفر باشد؛ پس ماهیت جواب به‌ازای  $t$ های بزرگ با بزرگ‌ترین ریشه بعدی معین می‌شود.

ریشه‌های مختلط. اگر معادله مشخصه ریشه‌های مختلط داشته باشد، ریشه‌ها باید به‌صورت مزدوج مختلط  $\lambda \pm i\mu$  ظاهر شوند، چون ضرایب  $a_0, \dots, a_n$  اعداد حقیقی هستند. اگر ریشه‌ها تکراری نباشند جواب عمومی معادله (۱) باز هم به شکل (۵) است. در این حالت، درست مثل معادله مرتبه دوم (بخش ۳.۳)، می‌توانیم جوابهای مختلط  $e^{(\lambda+i\mu)t}$  و  $e^{(\lambda-i\mu)t}$  را با جوابهای حقیقی مقدار

$$e^{\lambda t} \cos \mu t, \quad e^{\lambda t} \sin \mu t \quad (13)$$

که قسمت‌های حقیقی و موهومی  $e^{(\lambda+i\mu)t}$  هستند جایگزین کنیم. پس حتی اگر بعضی از ریشه‌های معادله مشخصه مختلط باشند، باز هم می‌توانیم جواب عمومی معادله (۱) را به‌صورت ترکیب خطی جوابهای حقیقی مقدار بنویسیم.

جواب عمومی معادله

$$y^{(4)} - y = 0 \quad (14)$$

را بیابید. همچنین جوابی را که در شرایط اولیه

$$y(0) = \frac{1}{4}, \quad y'(0) = -\frac{1}{4}, \quad y''(0) = \frac{5}{4}, \quad y'''(0) = -2 \quad (15)$$

صدق می‌کند بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

با قرار دادن  $e^{3t}$  به‌جای  $y$  می‌بینیم که معادله مشخصه عبارت است از

$$r^4 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0;$$

مثال  
۲

بنابراین ریشه‌ها عبارت‌اند از ۱، -۱،  $i$  و  $-i$  و جواب عمومی معادله (۱۴) عبارت است از

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t.$$

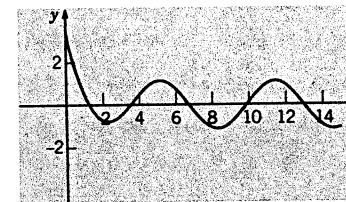
اگر شرایط اولیه (۱۵) را اعمال کنیم نتیجه می‌شود

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 3, \quad c_3 = \frac{1}{4}, \quad c_4 = -1;$$

پس جواب مسئله مقدار اولیه داده‌شده عبارت است از

$$y = 3e^{-t} + \frac{1}{4} \cos t - \sin t. \quad (16)$$

نمودار این جواب را در شکل ۲.۲.۴ نشان داده‌ایم.

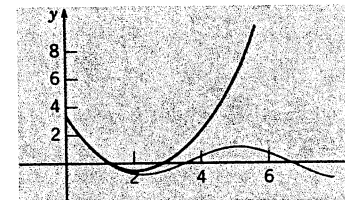


شکل ۲.۲.۴ نمودار جواب (۱۶).

توجه کنید که شرایط اولیه (۱۵) باعث می‌شوند که ضریب  $c_1$  از جمله‌نمایی رشد یابنده در جواب عمومی صفر باشد. بنابراین این جمله در جواب (۱۶) غایب است، که افول نمایی به نوسان یکنواخت (مانند شکل ۲.۲.۴) را وصف می‌کند. اما اگر شرایط اولیه کمی تغییر کند آنگاه  $c_1$  احتمالاً ناصفر است و ماهیت جواب تغییر می‌کند. به عنوان مثال اگر سه شرط اولیه اول بدون تغییر باقی می‌مانند اما مقدار  $y'''(0) = -2$  به  $-\frac{15}{8}$  تغییر می‌کرد، جواب مسئله مقدار اولیه تبدیل می‌شد به

$$y = \frac{1}{32} e^t + \frac{15}{32} e^{-t} + \frac{1}{4} \cos t - \frac{17}{16} \sin t. \quad (17)$$

ضرایب معادله (۱۷) فقط کمی با ضرایب معادله (۱۶) تفاوت دارند، اما جمله‌نمایی رشد یابنده حتی برای ضریب نسبتاً کوچک  $\frac{1}{32}$  پس از زمان  $t$  بزرگ‌تر از ۴ یا ۵ کاملاً بر جواب غلبه می‌کند. این موضوع را به توضیح در شکل ۳.۲.۴ می‌توان دید که در آن نمودار جوابهای (۱۶) و (۱۷) را نشان داده‌ایم.



شکل ۳.۲.۴ نمودار جوابهای (۱۶) (منحنی کم رنگ) و (۱۷) (منحنی پررنگ).

ریشه‌های تکراری. اگر ریشه‌های معادله مشخصه متمایز نباشند، یعنی اگر بعضی از ریشه‌ها تکرار شوند، جواب داده‌شده در معادله (۵) به توضیح جواب عمومی معادله (۱) نیست. یادآوری می‌کنیم که اگر  $r_1$  ریشه‌ای تکراری برای معادله خطی مرتبه دوم  $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$  باشد، دو جواب مستقل خطی عبارت‌اند از  $e^{r_1 t}$  و  $t e^{r_1 t}$ . برای معادله مرتبه  $n$ ، اگر یک ریشه  $Z(r) = 0$  مثلاً  $r = r_1$   $s$  بار تکرار شده باشد،

$$e^{r_1 t}, t e^{r_1 t}, t^2 e^{r_1 t}, \dots, t^{s-1} e^{r_1 t} \quad (18)$$

جوابهای معادله (۱) هستند. برای اثبات این گزاره مسئله ۴۱ را ببینید.

اگر ریشه مختلط  $\lambda + i\mu$   $s$  بار تکرار شود، مزدوج مختلط  $\lambda - i\mu$  نیز  $s$  بار تکرار می‌شود. متناظر این  $2s$  جواب مختلط مقدار، می‌توانیم  $2s$  جواب حقیقی مقدار بیابیم، چون قسمت‌های حقیقی و مختلط  $e^{(\lambda+i\mu)t}$ ،  $t e^{(\lambda+i\mu)t}$ ،  $\dots$ ،  $t^{s-1} e^{(\lambda+i\mu)t}$  هم جوابهای مستقل خطی هستند:

$$e^{\lambda t} \cos \mu t, e^{\lambda t} \sin \mu t, t e^{\lambda t} \cos \mu t, t e^{\lambda t} \sin \mu t, \dots, t^{s-1} e^{\lambda t} \cos \mu t, t^{s-1} e^{\lambda t} \sin \mu t$$

بنابراین جواب عمومی معادله (۱) را همواره می‌توان به صورت ترکیبی خطی از  $n$  جواب حقیقی مقدار نوشت. به مثال زیر توجه کنید.

جواب عمومی معادله

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0 \quad (19)$$

را بیابید.

معادله مشخصه عبارت است از

$$r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)(r^2 + 1) = 0.$$

ریشه‌ها عبارت‌اند از  $i$ ،  $-i$ ،  $i$ ،  $-i$  و جواب عمومی معادله (۱۹) عبارت است از

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 t \cos t + c_4 t \sin t.$$

برای تعیین ریشه‌های معادله مشخصه، ممکن است لازم باشد که ریشه‌های سوم، ریشه‌های چهارم و یا حتی بالاتر (احتمالاً مختلط) اعداد را به دست بیاوریم. معمولاً راحت‌ترین راه برای انجام این کار استفاده از فرمول اولیه، یعنی  $e^{it} = \cos t + i \sin t$  و قوانین جبری داده‌شده در بخش ۳.۳ است. این موضوع را در مثال بعدی نشان داده‌ایم.

جواب عمومی معادله

$$y^{(4)} + y = 0 \quad (20)$$

را بیابید.

معادله مشخصه عبارت است از

$$r^4 + 1 = 0.$$

برای حل معادله، باید ریشه‌های چهارم  $-1$  را محاسبه کنیم. حال به  $-1$  به عنوان عدد مختلط  $i + 0 - 1$  نگاه می‌کنیم؛ اندازه این عدد ۱ و زاویه قطبی آن  $\pi$  است، پس

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi = e^{i\pi}.$$

علاوه بر این، زاویه با جمع با مضارب  $2\pi$  تغییر نمی‌کند؛ پس

$$-1 = \cos(\pi + 2m\pi) + i \sin(\pi + 2m\pi) = e^{i(\pi + 2m\pi)}$$

که در آن  $m$  صفر و یا عددی صحیح مثبت یا منفی است. پس

$$(-1)^{1/2} = e^{i(\pi/2 + m\pi/2)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{m\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{m\pi}{2}\right).$$

چهار ریشه چهارم  $-1$  با قرار دادن  $0, 1, 2, 3$  به جای  $m$  به دست می‌آیند که عبارت‌اند از

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که به ازای هر مقدار دیگر  $m$  مجدداً یکی از این چهار ریشه به دست می‌آید. به عنوان مثال، متناظر  $m=4$  باز  $(1+i)/\sqrt{2}$  به دست می‌آید. جواب عمومی معادله (۲۰) عبارت است از

$$y = e^{t/\sqrt{2}} \left( c_1 \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + c_2 \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \right) + e^{-t/\sqrt{2}} \left( c_3 \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + c_4 \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \right). \quad (21)$$

دست آخر، توجه کنید که مسئله یافتن ریشه‌های معادله چندجمله‌ای ممکن است حتی با کمک رایانه هم چندان سراسر نباشد. به عنوان مثال، ممکن است تعیین اینکه دو ریشه مسأری‌اند یا بسیار به هم نزدیک هستند، مشکل باشد. یادآوری می‌کنیم که شکل کلی جواب عمومی در این دو حالت متفاوت است.

اگر ثابت‌های  $a_0, a_1, \dots, a_n$  در معادله (۱) مختلط باشند، جواب معادله (۱) باز به شکل (۴) است. اما در این حالت، در حالت کلی ریشه‌های معادله مشخصه اعداد مختلط هستند و اینکه مزدوج مختلط هر ریشه باز هم ریشه است دیگر درست نیست. جوابهای متناظر، مختلط مقدار هستند.

## مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۶، عدد مختلط داده شده را به شکل  $R(\cos \theta + i \sin \theta) = Re^{i\theta}$  بنویسید.

$$\begin{array}{ll} 1+i & 1. \\ -1+\sqrt{3}i & 2. \\ -i & 3. \\ -\sqrt{3}-i & 4. \\ -1+i & 5. \end{array}$$

در هر یک از مسئله‌های ۷ الی ۱۰، با دنبال کردن روند نمایش داده شده در مثال ۴، ریشه‌های مشخص شده از عدد مختلط داده شده را تعیین کنید.

$$\begin{array}{ll} 1^{1/3} & 7. \\ 1^{1/2} & 8. \\ [2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})]^{1/2} & 9. \end{array}$$

در هر یک از مسئله‌های ۱۱ تا ۲۸، جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را بیابید.

$$\begin{array}{ll} y''' + 3y'' - 4y = 0 & 11. \\ y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 & 12. \\ 2y''' - 4y'' - 2y' + 4y = 0 & 13. \\ y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0 & 14. \end{array}$$

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0. \quad 15.$$

$$y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y'' - y = 0. \quad 17.$$

$$y^{(5)} - 8y'' = 0. \quad 19.$$

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0. \quad 21.$$

$$y''' + 5y'' + 6y' + 2y = 0. \quad 23.$$

$$y^{(4)} - 7y''' + 6y'' + 30y' - 36y = 0. \quad 25.$$

$$18y''' + 21y'' + 14y' + 4y = 0. \quad 26.$$

$$12y^{(4)} + 31y''' + 75y'' + 37y' + 5y = 0. \quad 27.$$

$$y^{(4)} + 6y''' + 17y'' + 22y' + 14y = 0. \quad 28.$$

در هر یک از مسئله‌های ۲۹ تا ۳۶، جواب مسئله مقدار اولیه داده شده را بیابید و نمودار آن را رسم کنید. جواب وقتی که  $t \rightarrow \infty$  چگونه رفتار می‌کند؟

$$y''(0) = 2, y'(0) = 1, y(0) = 0; y''' + y' = 0. \quad 29.$$

$$y'''(0) = 0, y''(0) = -1, y'(0) = 0, y(0) = 0; y^{(4)} + y = 0. \quad 30.$$

$$y'''(1) = 0, y''(1) = 0, y'(1) = 2, y(1) = -1; y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0. \quad 31.$$

$$y'''(0) = 0, y''(0) = -2, y'(0) = 0, y(0) = -2; 2y^{(4)} - y''' - 9y'' + 4y' + 4y = 0. \quad 32.$$

$$y''(0) = -2, y'(0) = -1, y(0) = 2; y''' - y'' + y' - y = 0. \quad 33.$$

$$y''(0) = -1, y'(0) = 1, y(0) = 2; 4y''' + y' + 5y = 0. \quad 34.$$

$$y''(0) = 0, y'(0) = 2, y(0) = -2; 6y''' + 5y'' + y' = 0. \quad 35.$$

$$y'''(0) = 3, y''(0) = 0, y'(0) = -2, y(0) = 1; y^{(4)} + 6y''' + 17y'' + 22y' + 14y = 0. \quad 36.$$

۳۷. ثابت کنید جواب عمومی  $y^{(4)} - y = 0$  را می‌توان به صورت

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 \cosh t + c_4 \sinh t$$

نوشت. جوابی را تعیین کنید که در شرایط اولیه  $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 1, y'''(0) = 1$  صدق کند. چرا راحت‌تر است که به جای  $e^t$  و  $e^{-t}$  از جوابهای  $\cosh t$  و  $\sinh t$  استفاده کنیم؟

۳۸. معادله  $y^{(4)} - y = 0$  را در نظر بگیرید.

الف) با استفاده از فرمول آبل [مسئله ۲۰ (د) از بخش ۱.۴] رانسکین مجموعه اساسی جوابهای معادله داده شده را بیابید.

ب) رانسکین جوابهای  $e^t, e^{-t}, \sin t$  و  $\cos t$  را تعیین کنید.

ج) رانسکین جوابهای  $\cosh t, \sinh t, \cos t$  و  $\sin t$  را تعیین کنید.

۳۹. دستگاه فنر-وزنه نشان داده شده در شکل ۴.۲.۴ را، که شامل دو وزنه به وزن واحد است که از فنرهایی با ثابت فنر ۳ و ۲ آویزان هستند، در نظر بگیرید. فرض کنید میرایی در این سیستم وجود ندارد.



۴۰. در این مسئله راهی برای اثبات اینکه اگر  $r_1, \dots, r_n$  همگی حقیقی و متمایز باشند آنگاه  $e^{r_1 t}, \dots, e^{r_n t}$  در بازه:

$-\infty < t < \infty$  مستقل خطی هستند طرح می‌کنیم. برای انجام این کار، رابطه خطی

$$c_1 e^{r_1 t} + \dots + c_n e^{r_n t} = 0, \quad -\infty < t < \infty \quad (i)$$

را در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم همه ثابتها صفر هستند.

الف) معادله (i) را در  $e^{-r_1 t}$  ضرب کنید و نسبت به  $t$  مشتق بگیرید تا نتیجه شود

$$c_1(r_2 - r_1)e^{(r_2 - r_1)t} + \dots + c_n(r_n - r_1)e^{(r_n - r_1)t} = 0.$$

ب) حاصل قسمت (الف) را در  $e^{-(r_2 - r_1)t}$  ضرب کنید و سپس نسبت به  $t$  مشتق بگیرید تا نتیجه شود

$$c_1(r_3 - r_2)(r_2 - r_1)e^{(r_3 - r_2)t} + \dots + c_n(r_n - r_2)(r_2 - r_1)e^{(r_n - r_2)t} = 0.$$

ج) روند قسمت‌های (الف) و (ب) را ادامه بدهید تا به

$$c_n(r_n - r_{n-1}) \dots (r_n - r_1)e^{(r_n - r_{n-1})t} = 0$$

برسید. بنابراین  $c_n = 0$  و در نتیجه

$$c_1 e^{r_1 t} + \dots + c_{n-1} e^{r_{n-1} t} = 0.$$

د) استدلال قبلی را تکرار کنید تا ثابت کنید  $c_{n-1} = 0$ . به طریق مشابه می‌توانید ثابت کنید که

$$c_1 = c_2 = \dots = c_{n-2} = 0. \text{ پس تابعهای } e^{r_1 t}, \dots, e^{r_{n-1} t} \text{ مستقل خطی هستند.}$$

۴۱. در این مسئله راهی برای اثبات اینکه اگر  $r = r_1 = r_2$  ریشه‌ای با تکرار  $s$  از چندجمله‌ای مشخصه  $Z(r)$  باشد آنگاه  $e^{r_1 t},$

$t e^{r_1 t}, \dots, t^{s-1} e^{r_1 t}$  جوابهای معادله (۱) هستند ارائه می‌کنیم. این مسئله روش ارائه شده در مسئله ۲۲ بخش

۴.۳ برای معادله‌های مرتبه دوم را به معادله‌های مرتبه  $m$  تعمیم می‌دهد. از معادله (۲) در متن یعنی

$$L[e^{rt}] = e^{rt} Z(r) \quad (i)$$

شروع می‌کنیم و نسبت به  $r$  به طور مکرر مشتق می‌گیریم و پس از هر مشتق‌گیری قرار می‌دهیم  $r = r_1$ .

الف) توجه کنید که اگر  $r_1$  ریشه‌ای با تکرار  $s$  باشد آنگاه  $Z(r) = (r - r_1)^s q(r)$  که در آن  $q(r)$  چندجمله‌ای از

از درجه  $n - s$  است و  $q(r_1) \neq 0$ . ثابت کنید  $Z(r_1), Z'(r_1), \dots, Z^{(s-1)}(r_1)$  همگی صفر هستند

$$\text{اما } Z^{(s)}(r_1) \neq 0.$$

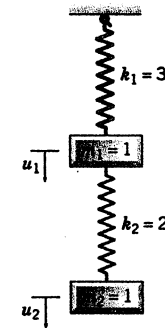
ب) با مشتق‌گیری مکرر از (i) نسبت به  $r$  ثابت کنید

$$\frac{\partial}{\partial r} L[e^{rt}] = L\left[\frac{\partial}{\partial r} e^{rt}\right] = L[te^{rt}]$$

:

$$\frac{\partial^{s-1}}{\partial r^{s-1}} L[e^{rt}] = L[t^{s-1} e^{rt}]$$

ج) ثابت کنید  $e^{r_1 t}, t e^{r_1 t}, \dots, t^{s-1} e^{r_1 t}$  جوابهای معادله (۱) هستند.



شکل ۴.۲.۴ دستگاه دو فنر-دو جرم.

الف) ثابت کنید جابه‌جایی‌های جرما از وضعیت تعادلی نظیرشان، که آنها را با  $u_1$  و  $u_2$  نشان می‌دهیم، در معادله‌های

$$u_1'' + 5u_1 = 2u_2, \quad u_2'' + 2u_2 = 2u_1 \quad (i)$$

صدق می‌کنند.

ب) اولین معادله از (i) را برحسب  $u_2$  حل کنید و در معادله دوم جایگزین کنید تا معادله مرتبه چهارم

$$u_1^{(4)} + 7u_1'' + 6u_1 = 0 \quad (ii)$$

برحسب  $u_1$  به دست بیاید. جواب عمومی معادله (ii) را بیابید.

ج) فرض کنید شرایط اولیه عبارت‌اند از

$$u_1(0) = 1, \quad u_1'(0) = 0, \quad u_2(0) = 2, \quad u_2'(0) = 0. \quad (iii)$$

با استفاده از معادله اول از معادله‌های (i) و شرایط اولیه (iii)، مقادیر  $u_1''(0)$  و  $u_1'''(0)$  را به دست بیاورید و

ثابت کنید که جواب معادله (ii) که در چهار شرط اولیه روی  $u_1$  صدق می‌کند،  $u_1(t) = \cos t$  است. ثابت

کنید جواب متناظر برای  $u_2$   $u_2(t) = 2 \cos t$  است.

د) حال فرض کنید شرایط اولیه عبارت‌اند از

$$u_1(0) = -2, \quad u_1'(0) = 0, \quad u_2(0) = 1, \quad u_2'(0) = 0. \quad (iv)$$

همانند بخش (ج) کار را ادامه بدهید تا ثابت کنید جوابهای متناظر عبارت‌اند از  $u_1(t) = -2 \cos \sqrt{6}t$  و

$$u_2(t) = \cos \sqrt{6}t$$

ه) توجه کنید که جوابهای به دست آمده در قسمت‌های (ج) و (د) دو وضع مختلف ارتعاش را توصیف می‌کنند.

در اولی، بسامد حرکت برابر ۱ است و دو جرم هم فاز حرکت می‌کنند و هر دو با هم به طرف بالا و پایین می‌روند؛

جرم دوم دوبرابر سریع‌تر از اولی حرکت می‌کند. بسامد حرکت دوم  $\sqrt{6}$  است و جرما هم فاز با یکدیگر حرکت

نمی‌کنند. یکی به سمت پایین می‌رود و در حالی که دیگری به بالا می‌رود و برعکس. در این وضع، جرم اول

دوبرابر سریع‌تر از دومی حرکت می‌کند. برای شرایط دیگر که متناسب با یکی از معادلات (iii) یا (iv) نیستند،

حرکت جرما ترکیبی از این دو وضع است.

## ۳.۴ روش ضرایب نامعین

اگر  $g(t)$  به فرم مناسبی باشد، یک جواب خاص  $Y$  از معادله خطی غیرهمگن مرتبه  $m$  با ضرایب ثابت، یعنی

$$L[y] = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(t) \quad (۱)$$

را می‌توان با روش ضرایب نامعین یافت. روش ضرایب نامعین به کلیت روش تغییر پارامتر که در بخش بعد تشریح می‌شود نیست، اما استفاده از آن بسیار ساده‌تر است.

مانند معادلات خطی مرتبه دوم، اگر عملگر دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت  $L$  بر چندجمله‌ای‌ای مانند  $A_m t^m + A_{m-1} t^{m-1} + \dots + A_1 t + A_0$ ، تابع نمایی‌ای مانند  $e^{\alpha t}$ ، تابع سینوسی‌ای مانند  $\sin \beta t$  یا تابع کسینوسی‌ای مانند  $\cos \beta t$  به‌کار گرفته شود نتیجه به‌ترتیب چندجمله‌ای، تابع نمایی یا ترکیبی خطی از تابعهای سینوسی و کسینوسی خواهد بود. بنابراین اگر  $g(t)$  مجموعی از چندجمله‌ای‌ها، توابع نمایی، سینوسی، کسینوسی و یا حاصلضرب چنین تابعهایی باشد، می‌توانیم انتظار داشته باشیم که بتوان  $Y(t)$  را با انتخاب ترکیبی مناسب از چندجمله‌ایها، توابع نمایی و یا مانند آنها که در چند ثابت نامعین ضرب شده است به‌دست آورد. این ثابتها را هم می‌توان با جایگزینی عبارت به‌دست آمده در معادله (۱) معین کرد.

هنگام استفاده از این روش برای معادلات مرتبه بالاتر از دو، تفاوت اصلی با حالت مرتبه دوم این است که ممکن است ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه تکرار بالاتر از دو داشته باشند و در نتیجه ممکن است لازم باشد جمله‌های پیشنهادی برای بخش غیرهمگن جوابها را در توانهای بالاتر  $t$  ضرب کنیم تا از جوابهای معادله همگن مربوطه متمایز شوند. در این مثالها گامهای جبری بدیهی را حذف کرده‌ایم، چرا که هدف اصلی نشان دادن چگونگی به‌دست آوردن صورت صحیح کلی برای جواب مفروض است.

جواب عمومی معادله

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 4e^t \quad (۲)$$

را به‌دست بیاورید.

چندجمله‌ای مشخصه معادله همگن متناظر معادله (۲) عبارت است از

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = (r-1)^3;$$

بنابراین جواب عمومی معادله همگن عبارت است از

$$y_c(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t. \quad (۳)$$

برای یافتن جواب خاص  $Y(t)$  از معادله (۲)، با فرض اینکه  $Y(t) = Ae^t$  شروع می‌کنیم؛ اما چون  $e^t$ ،  $te^t$  و  $t^2 e^t$  همگی جوابهای معادله همگن هستند، باید انتخاب اولیه را در  $t^3$  ضرب کنیم. پس بالاخره  $Y(t) = At^3 e^t$  را در نظر می‌گیریم که در آن  $A$  ضریب نامعین است. برای یافتن مقدار مناسب  $A$ ، سه بار مشتق می‌گیریم به‌جای  $y$  و مشتق‌هایش در معادله (۲) جایگزین می‌کنیم و سپس جمله‌های دو معادله حاصله را کنار هم قرار می‌دهیم. به این طریق نتیجه می‌شود

$$6Ae^t = 4e^t;$$

پس  $A = \frac{2}{3}$  و جواب خاص عبارت است از

$$Y(t) = \frac{2}{3} t^3 e^t. \quad (۴)$$

جواب عمومی معادله (۲)، مجموع  $y_c(t)$  از معادله (۳) و  $Y(t)$  از معادله (۴) است؛ یعنی

$$y = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t + \frac{2}{3} t^3 e^t.$$

یک جواب خاص برای معادله

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 3 \sin t - 5 \cos t \quad (۵)$$

به‌دست بیاورید.

جواب عمومی معادله همگن در مثال ۳ بخش ۲.۴ پیدا شد:

$$y_c(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 t \cos t + c_4 t \sin t \quad (۶)$$

که متناظر ریشه‌های  $i$ ،  $-i$  و  $-i$  از معادله مشخصه بود. فرض ابتدایی جواب خاص  $Y(t) = A \sin t + B \cos t$  است، اما باید این انتخاب را در  $t^2$  ضرب کنیم تا از همه جوابهای معادله همگن متمایز شود. پس بالاخره

$$Y(t) = At^2 \sin t + Bt^2 \cos t$$

را در نظر می‌گیریم. حال از  $Y(t)$  چهاربار مشتق می‌گیریم و در معادله دیفرانسیل (۴) جایگزین می‌کنیم و سپس جملات را در کنار هم می‌گذاریم و در نهایت به

$$-8A \sin t - 8B \cos t = 3 \sin t - 5 \cos t$$

می‌رسیم. پس  $A = -\frac{5}{8}$  و  $B = \frac{3}{8}$ ، و جواب خاص معادله (۴) عبارت است از

$$Y(t) = -\frac{5}{8} t^2 \sin t + \frac{3}{8} t^2 \cos t. \quad (۷)$$

اگر  $g(t)$  مجموع چند جمله باشد، در عمل ساده‌تر است که جواب متناظر هر جمله از  $g(t)$  را جداگانه محاسبه کنیم. همانند معادله مرتبه دوم، جواب خاص مسئله کامل، مجموع جوابهای خاص هر یک از مؤلفه‌های مسئله است. این موضوع را در مثال بعد نشان داده‌ایم.

یک جواب خاص برای معادله

$$y''' - 4y' = t + 3 \cos t + e^{-2t} \quad (۸)$$

به‌دست بیاورید.

ابتدا معادله همگن را حل می‌کنیم. معادله مشخصه  $r^3 - 4r = 0$  است و ریشه‌ها عبارت‌اند از  $0$  و  $\pm 2$ ، بنابراین

$$y_c(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}.$$

می‌توانیم جواب خاص معادله (۸) را به‌صورت مجموع جوابهای معادله‌های دیفرانسیل

$$y''' - 4y' = t, \quad y''' - 4y' = 3 \cos t, \quad y''' - 4y' = e^{-2t}$$

بنویسیم. انتخاب اولیه ما برای جواب خاص  $Y_1(t)$  برای معادله اول  $A_1 t + A_0$  است، اما تابع ثابت جوابی از معادله همگن است و لذا باید آن را در  $t$  ضرب کنیم؛ بنابراین

$$Y_1(t) = t(A_1 t + A_0).$$

برای معادله دوم

$$Y_2(t) = B \cos t + C \sin t$$

انتخاب می‌کنیم. نیازی به اصلاح این انتخاب اولیه نیست، چون  $\cos t$  و  $\sin t$  جوابهای معادله همگن نیستند. در نهایت برای معادله سوم چون  $e^{-2t}$  جوابی از معادله همگن است، فرض می‌کنیم

$$Y_3(t) = Ete^{-2t}$$

ثابتها با جایگزینی در تک‌تک این معادله‌های دیفرانسیل به‌دست می‌آیند و عبارتاند از  $A_0 = -\frac{1}{\lambda}$ ،  $A_1 = 0$ ،  $B = 0$ ،  $C = -\frac{r}{\delta}$  و  $E = \frac{1}{\lambda}$ . بنابراین یک جواب خاص معادله (۸) عبارت است از

$$Y(t) = -\frac{1}{\lambda}t^2 - \frac{r}{\delta}\sin t + \frac{1}{\lambda}te^{-2t}. \quad (9)$$

باید به‌خاطر داشته باشید که عملیات جبری موردنیاز برای معادلات مرتبه بالاتر، به‌طور قابل توجهی بیشتر خواهد بود، به‌ویژه اگر جمله‌های غیرهمگن حتی کمی پیچیده باشند. رایانه می‌تواند در محاسبات جبری بسیار مفید واقع شود.

وقتی بتوان شکل درست  $Y(t)$  را حدس زد، می‌توان از روش ضرایب نامعین استفاده کرد؛ اما معمولاً این کار برای معادله‌های دیفرانسیل با ضرایب غیرثابت و یا برای جمله‌های غیرهمگن غیر از انواعی که شرح دادیم غیرممکن است. برای مسئله‌های پیچیده‌تر می‌توانیم از روش تغییر پارامترها که در بخش بعد درباره آن صحبت خواهیم کرد استفاده کنیم.

## مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۸، جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده‌شده را به‌دست بیاورید.

$$1. \quad y''' - y'' - y' + y = 2e^{-t} + 3, \quad y^{(2)} - y = 2t + \sin t.$$

$$3. \quad y''' + y'' + y' + y = e^{-t} + 4t, \quad y''' - y' = 2 \cos t.$$

$$5. \quad y^{(2)} - 4y' = t^2 + e^t, \quad y^{(2)} + 2y' + y = 3 + \cos 2t.$$

$$7. \quad y^{(2)} + y''' = \sin 2t, \quad y^{(2)} + y''' = t.$$

در هر یک از مسئله‌های ۹ تا ۱۲، جواب مسئله مقدار اولیه داده‌شده را بیابید و سپس نمودار جواب را رسم کنید.

$$9. \quad y''(0) = 1, y(0) = y'(0) = 0; y''' + 2y' = t$$

$$10. \quad y''(0) = -\frac{7}{2}, y'(0) = -\frac{1}{2}, y(0) = 1; y''' - 3y'' + 2y' = t + e^t$$

$$11. \quad y^{(2)} + 2y' + y = 2t + 4, \quad y^{(2)} + y''' = 1, y(0) = y'(0) = 0$$

$$12. \quad y'''(0) = 2, y''(0) = -1, y'(0) = 0, y(0) = 3; y^{(2)} + 2y''' + y'' + 8y' - 12y = 12 \sin t - e^{-t}$$

در هر یک از مسئله‌های ۱۳ تا ۱۸، شکل مناسب  $Y(t)$  را برای استفاده از روش ضرایب نامعین تعیین کنید. ثابتها را حساب نکنید.

$$13. \quad y''' - 2y'' + y' = t^2 + 2e^t, \quad y''' - y' = te^{-t} + 2 \sin t.$$

$$15. \quad y^{(2)} - 2y'' + y = \cos t + e^{2t} + e^t, \quad y^{(2)} + 2y''' + 2y'' = 3e^t + 2te^{-t} + e^{-t} \sin t.$$

$$17. \quad y^{(2)} - y''' - y'' + y' = t^2 + 4 + t \sin t, \quad y^{(2)} + 2y'' = \sin 2t + te^t + 4.$$

۱۹. معادله دیفرانسیل خطی مرتبه  $m$ م غیرهمگن

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = g(t) \quad (i)$$

را در نظر بگیرید که در آن  $a_0, \dots, a_n$  ثابت هستند. ثابت کنید اگر  $g(t)$  به‌شکل

$$e^{\alpha t}(b_0 t^m + \dots + b_m)$$

باشد، جایگزینی  $y = e^{\alpha t}u(t)$  معادله (i) را به‌شکل

$$k_0 u^{(n)} + k_1 u^{(n-1)} + \dots + k_n u = b_0 t^m + \dots + b_m \quad (ii)$$

تبدیل می‌کند که در آن  $k_0, \dots, k_n$  ثابت هستند.  $k_0$  و  $k_n$  را برحسب  $a$ ها و  $\alpha$  تعیین کنید. پس مسئله تعیین یک جواب خاص برای معادله اولیه به مسئله تعیین یک جواب خاص مسئله‌ای ساده‌تر با ضرایب ثابت و جمله غیرهمگنی به‌صورت چندجمله‌ای تبدیل می‌شود.

روش ناپودکوندها. در مسئله‌های ۲۰ تا ۲۲ راهی دیگر برای رسیدن به‌شکل مناسب  $Y(t)$  برای استفاده در روش ضرایب نامعین را مطرح می‌کنیم. روند براساس این نکته بنا شده است که می‌توان به جمله‌های نمایی، چندجمله‌ای یا سینوسی (یا مجموع و حاصلضرب چنین جملاتی) به‌عنوان جوابهایی از معادلات دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت معینی نگاه کرد. مناسب است که از نماد  $D$  به‌جای  $d/dt$  استفاده کنیم؛ در این صورت به‌عنوان مثال  $e^{-t}$  جوابی از  $(D+1)y = 0$  است. می‌گوییم عملگر دیفرانسیل  $D+1$ ،  $D$  را ناپود می‌کند و یا ناپودکننده  $e^{-t}$  است. به‌طور مشابه،  $D^2 + 4$  ناپودکننده  $\sin 2t$  و  $\cos 2t$ ، و  $D^2 - 6D + 9$  ناپودکننده  $e^{3t}$  و  $te^{3t}$  است.

۲۰. ثابت کنید عملگرهای دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت از قانون جابه‌جایی پیروی می‌کنند؛ یعنی ثابت کنید به‌ازای هر تابع دوبار مشتق‌پذیر  $f$  و هر دو ثابت  $a$  و  $b$ ،

$$(D-a)(D-b)f = (D-b)(D-a)f.$$

نتیجه را می‌توان بلافاصله به هر تعداد متناهی از عاملها تعمیم داد.

۲۱. مسئله یافتن یک جواب خاص  $Y(t)$  از

$$(D-2)^2(D+1)Y = 3e^{2t} - te^{-t} \quad (i)$$

را در نظر بگیرید که طرف چپ معادله متناظر به‌شکل تجزیه چندجمله‌ای مشخصه مربوطه نوشته شده است.

الف) ثابت کنید  $D-2$  و  $(D+1)^2$  به‌ترتیب ناپودکننده‌های طرف راست معادله (i) هستند و عملگر مرکب  $(D+1)^2(D-2)$  به‌طور همزمان طرف راست معادله (i) را ناپود می‌کند.

استفاده از روش تغییر پارامتر ابتدا لازم است که معادله دیفرانسیل همگن مربوطه را حل کنیم. ممکن است این کار در حالت کلی مشکل باشد، مگر آنکه ضرایب ثابت باشند. به هر حال روش تغییر پارامتر باز هم از این نظر از روش ضرایب نامعین کلی‌تر است و به‌ازای هر تابع پیوسته مثل  $g$  منجر به عبارتی برای جواب خاص می‌شود، در حالی که روش ضرایب نامعین در عمل محدود به دسته‌ای خاص از  $g$ ها است.

حال فرض کنید که یک مجموعهٔ اساسی از جوابهای  $y_1, y_2, \dots, y_n$  برای معادلهٔ همگن شناسیم. در این صورت، جواب عمومی معادلهٔ همگن عبارت است از

$$y_c(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t). \quad (۲)$$

روش تغییر پارامترها برای تعیین یک جواب خاص برای معادلهٔ (۱) مبتنی بر امکان تعیین  $n$  تابع  $u_1, u_2, \dots, u_n$  بنا شده است که  $Y(t)$  به‌شکل

$$Y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) + \dots + u_n(t)y_n(t) \quad (۳)$$

باشد. چون  $n$  تابع را باید تعیین کنیم، باید  $n$  شرط تعیین کنیم. یکی از آنها به‌وضوح آن است که  $Y$  در معادلهٔ (۱) صدق کند و  $n-1$  شرط دیگر طوری انتخاب می‌شوند که محاسبات را تا حد امکان ساده کنند. چون هنگام حل معادلهٔ دیفرانسیلی از مرتبهٔ بالا برای  $u_1, \dots, u_n$  به‌دردت انتظار ساده‌شدن را داریم، طبیعی است که شرایطی اعمال کنیم که مشتق‌های مرتبهٔ بالاتر  $u_1, \dots, u_n$  در آن ظاهر نشوند. از معادلهٔ (۳) به‌دست می‌آوریم

$$Y' = (u_1 y_1' + u_2 y_2' + \dots + u_n y_n') + (u_1' y_1 + u_2' y_2 + \dots + u_n' y_n) \quad (۴)$$

که در آن وابستگی متغیر  $t$  را در هر یک از توابع معادلهٔ (۴) حذف کرده‌ایم. پس اولین شرطی که اعمال می‌کنیم این است که

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 + \dots + u_n' y_n = 0. \quad (۵)$$

با ادامهٔ این روند و  $n-1$  بار مشتق گرفتن از  $Y$  به‌دست می‌آید

$$Y^{(m)} = u_1 y_1^{(m)} + u_2 y_2^{(m)} + \dots + u_n y_n^{(m)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (۶)$$

و  $n-1$  شرط

$$u_1 y_1^{(m-1)} + u_2 y_2^{(m-1)} + \dots + u_n y_n^{(m-1)} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n-1 \quad (۷)$$

روی توابع  $u_1, \dots, u_n$  به‌دست می‌آیند. مشتق  $m$ ام  $Y$  عبارت است از

$$Y^{(n)} = (u_1 y_1^{(n)} + \dots + u_n y_n^{(n)}) + (u_1' y_1^{(n-1)} + \dots + u_n' y_n^{(n-1)}). \quad (۸)$$

در نهایت این شرط را روی  $Y$  اعمال می‌کنیم که  $Y$  باید جوابی از معادلهٔ (۱) باشد. با جایگزینی از معادلهٔ (۶) و (۸) به‌جای مشتق‌های  $Y$  و ساده کردن جمله‌ها و استفاده از این واقعیت که به‌ازای  $n, 2, 1, \dots, i$ ،  $L[y_i] = 0$  نتیجه می‌شود

$$u_1' y_1^{(n-1)} + u_2' y_2^{(n-1)} + \dots + u_n' y_n^{(n-1)} = g. \quad (۹)$$

ب) عملگر  $(D+1)^2(D-2)$  را روی معادلهٔ (i) به‌کار ببرید و از نتیجهٔ مسئلهٔ ۲۰ استفاده کنید تا به

$$(D-2)^2(D+1)^2 Y = 0 \quad (ii)$$

برسید. پس  $Y$  جوابی از معادلهٔ همگن (ii) است. با حل معادلهٔ (ii)، ثابت کنید

$$Y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + c_3 t^2 e^{2t} + c_4 t^3 e^{2t} + c_5 e^{-t} + c_6 t e^{-t} + c_7 t^2 e^{-t} \quad (iii)$$

که در آن  $c_1, \dots, c_7$  ثابت‌هایی هستند که هنوز معین نیستند.

ج) توجه کنید که  $e^{2t}, t e^{2t}, t^2 e^{2t}$  و  $e^{-t}$  جوابهای معادلهٔ همگن متناظر معادلهٔ (i) هستند و بنابراین، در حل معادلهٔ غیرهمگن مفید نیستند. بنابراین  $c_1, c_2, c_3$  و  $c_5$  در معادلهٔ (iii) را می‌توان برابر صفر فرض کرد، پس

$$Y(t) = c_4 t^3 e^{2t} + c_6 t e^{-t} + c_7 t^2 e^{-t}. \quad (iv)$$

این شکل، شکل مناسب جواب خاص  $Y$  برای معادلهٔ (i) است. مقدار ضرایب  $c_4, c_6$  و  $c_7$  را می‌توان با جایگزینی معادلهٔ (iv) در معادلهٔ دیفرانسیل (i) یافت.

خلاصه. فرض کنید

$$L(D)y = g(t) \quad (v)$$

که در آن  $L(D)$  عملگر دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت و  $g(t)$  مجموع یا حاصلضرب جمله‌های نمایی، چندجمله‌ای، و سینوسی است. برای یافتن شکل جواب خاص معادلهٔ (v) به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

الف) عملگر دیفرانسیلی مانند  $H(D)$  با ضرایب ثابت بیابید که  $g(t)$  را نابود کند؛ یعنی عملگری بیابید  $H(D)g(t) = 0$ .

ب)  $H(D)$  را روی معادلهٔ (v) به‌کار ببرید تا به

$$H(D)L(D)y = 0 \quad (vi)$$

تبدیل شود که معادلهٔ همگنی از مرتبهٔ بالاتر است.

ج) معادلهٔ (vi) را حل کنید.

د) جمله‌هایی را که در جواب معادلهٔ  $L(D)y = 0$  هم ظاهر می‌شوند از جمله‌های به‌دست آمده در بخش (ج) حذف کنید. جمله‌های باقی‌مانده، شکل صحیح جواب خاص معادلهٔ (v) را نشان می‌دهند.

۲۲. با استفاده از روش نابودکننده‌ها شکل جواب خاص  $Y(t)$  را برای هر یک از معادله‌های مسئله‌های ۱۳ تا ۱۸ بیابید. ضرایب را حساب نکنید.

## ۴.۴ روش تغییر پارامترها

روش تغییر پارامترها برای تعیین یک جواب خاص برای معادلهٔ دیفرانسیل خطی غیرهمگن مرتبهٔ  $n$ ام

$$L[y] = y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_1(t)y' + p_0(t)y = g(t) \quad (۱)$$

تعمیم مستقیم همین روش برای معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم (بخش ۶.۳ را ببینید) است. همانند قبل، برای

از معادله (۱۲) استفاده می‌کنیم. ابتدا

$$W(t) = W(e^t, te^t, e^{-t})(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & e^{-t} \\ e^t & (t+1)e^t & -e^{-t} \\ e^t & (t+2)e^t & e^{-t} \end{vmatrix}.$$

با فاکتورگیری  $e^t$  از هر یک از دو ستون اول و  $e^{-t}$  از ستون سوم به دست می‌آوریم

$$W(t) = e^t \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & t+1 & -1 \\ 1 & t+2 & 1 \end{vmatrix};$$

سپس با تفریق سطر اول از سطر دوم و سطر سوم نتیجه می‌شود

$$W(t) = e^t \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

در نهایت درمیان آخر را با استفاده از کهادهای متناظر ستون اول محاسبه می‌کنیم؛ پس

$$W(t) = 2e^t.$$

سپس

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & te^t & e^{-t} \\ 0 & (t+1)e^t & -e^{-t} \\ 1 & (t+2)e^t & e^{-t} \end{vmatrix}.$$

با استفاده از کهادهای متناظر ستون اول به دست می‌آوریم

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} te^t & e^{-t} \\ (t+1)e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} \\ = -2t - 1.$$

به طریق مشابه

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} e^t & 0 & e^{-t} \\ e^t & 0 & -e^{-t} \\ e^t & 1 & e^{-t} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = 2$$

و

$$W_3(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & 0 \\ e^t & (t+1)e^t & 0 \\ e^t & (t+2)e^t & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (t+1)e^t \end{vmatrix} = e^{2t}.$$

معادله (۹) با  $n-1$  معادله (۷)، منجر به  $n$  معادله همزمان جبری بر حسب  $u'_1, u'_2, \dots, u'_n$  می‌شود:

$$\begin{aligned} y_1 u'_1 + y_2 u'_2 + \dots + y_n u'_n &= 0, \\ y'_1 u'_1 + y'_2 u'_2 + \dots + y'_n u'_n &= 0, \\ y''_1 u'_1 + y''_2 u'_2 + \dots + y''_n u'_n &= 0, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}_1 u'_1 + \dots + y^{(n-1)}_n u'_n &= g. \end{aligned} \quad (10)$$

دستگاه (۱۰) یک دستگاه خطی جبری بر حسب کمیت‌های مجهول  $u'_1, \dots, u'_n$  است. با حل این دستگاه و سپس انتگرال‌گیری از عبارتهای حاصله می‌توانید ضرایب  $u_1, \dots, u_n$  را به دست بیاورید. یک شرط کافی برای وجود جواب دستگاه معادلات (۱۰) این است که درمیان ضرایب به ازای هر مقدار  $t$  ناصفر باشد. اما، درمیان ضرایب دقیقاً  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$  است که چون  $y_1, \dots, y_n$  مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادله همگن است، هرگز صفر نیست و بنابراین تعیین  $u'_1, \dots, u'_n$  امکان‌پذیر است. با استفاده از دستور کرامر<sup>۱</sup> می‌توانیم جواب دستگاه معادلات (۱۰) را به صورت

$$u'_m(t) = \frac{g(t)W_m(t)}{W(t)}, \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

بنویسیم. در اینجا  $W(t) = W(y_1, y_2, \dots, y_n)(t)$  و  $W_m$  درمیان به دست آمده از  $W$  با جایگزینی ستون  $m$  آن با ستون  $(0, 0, \dots, 0, 1)$  است. با این نماد یک جواب خاص معادله (۱) به صورت

$$Y(t) = \sum_{m=1}^n y_m(t) \int_t^t \frac{g(s)W_m(s)}{W(s)} ds \quad (12)$$

داده می‌شود که در آن  $t$  دلخواه است. اگرچه این روند سراسر است، محاسبات جبری لازم برای تعیین  $Y(t)$  از معادله (۱۲) با افزایش  $n$  پیچیده و پیچیده‌تر می‌شود. گاهی ممکن است اتحاد آبل (مسئله ۲۰ بخش ۱.۴)، یعنی

$$W(t) = W(y_1, \dots, y_n)(t) = c \exp \left[ - \int p_1(t) dt \right]$$

محاسبه را کمی ساده‌تر کند. مقدار ثابت  $c$  را می‌توان با محاسبه مقدار  $W$  در نقطه‌ای مناسب به دست آورد.

فرض کنید  $e^t, y_1(t) = te^t$  و  $y_2(t) = e^{-t}$  جوابهای معادله همگن متناظر

$$y''' - y'' - y' + y = g(t) \quad (13)$$

باشند. یک جواب خاص برای معادله (۱۳) را به صورت انتگرال بیان کنید.

۱. دستور کرامر منتسب به گابریل کرامر (۱۷۰۴-۱۷۵۲ م) استاد آکادمی کالوین ژنو است که آن را در شکل کلی در ۱۷۵۰ میلادی (بدون اثبات) به چاپ رساند. پیش از او، حکم را برای دستگاههای کوچکتر می‌دانستند.

با جایگزینی این نتایج در معادله (۱۲)،

$$\begin{aligned} Y(t) &= e^t \int_t^t \frac{g(s)(-1-2s)}{2e^s} ds + te^t \int_t^t \frac{g(s)(2)}{2e^s} ds + e^{-t} \int_t^t \frac{g(s)e^{ts}}{2e^s} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_t^t \{e^{t-s}[-1+2(t-s)] + e^{-(t-s)}\} g(s) ds. \end{aligned}$$

## مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۶، با استفاده از روش تغییر پارامترها جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده را تعیین کنید.

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{2t}, \quad 0 < t < \pi, y''' + y' = \tan t. \quad ۱.$$

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, y''' + y' = \sec t. \quad ۲.$$

$$y''' - y'' + y' - y = e^{-t} \sin t. \quad ۳.$$

$$y^{(4)} + 2y'' + y = \cos t. \quad ۴.$$

در هر یک از مسئله‌های ۷ و ۸، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده را به‌دست بیاورید. جوابها را برحسب یک یا چند انتگرال باقی بگذارید.

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, y''' - y'' + y' - y = \sec t. \quad ۷.$$

$$0 < t < \pi, y''' - y' = \csc t. \quad ۸.$$

در هر یک از مسئله‌های ۹ تا ۱۲، جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را به‌دست بیاورید و سپس نمودار آن را رسم کنید.

$$y'''(0) = 1, y''(0) = -1, y'(0) = 0, y(0) = 2; y^{(4)} + 2y'' + y = \sin t. \quad ۹.$$

$$y''(0) = -2, y'(0) = 1, y(0) = 2; y''' + y' = \sec t. \quad ۱۰.$$

$$y''(0) = 1, y'(0) = -1, y(0) = 2; y''' - y'' + y' - y = \sec t. \quad ۱۱.$$

$$y''(\frac{\pi}{2}) = -1, y'(\frac{\pi}{2}) = 1, y(\frac{\pi}{2}) = 2; y''' - y' = \csc t. \quad ۱۲.$$

$$۱۳. \text{ فرض کنید } x, x^2 \text{ و } 1/x \text{ جوابهای معادلهٔ همگن متناظر}$$

$$x^2 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^4, \quad x > 0$$

باشند. یک جواب خاص برای این معادله بیابید.

۱۴. فرمولی شامل انتگرالها برای یک جواب خاص برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''' - y'' + y' - y = g(t)$$

به‌دست بیاورید.

۱۵. فرمولی شامل انتگرالها برای جواب خاص معادلهٔ دیفرانسیل

$$y^{(4)} - y = g(t)$$

بیابید.

راهنمایی: تابعهای  $\sinh t$ ,  $\cosh t$ ,  $\sin t$  و  $\cos t$  یک مجموعهٔ اساسی از جوابهای معادلهٔ همگن تشکیل می‌دهند.

۱۶. فرمولی شامل انتگرالها برای جواب خاص

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = g(t)$$

بیابید. اگر  $g(t) = t^{-2}e^t$  را تعیین کنید.

۱۷. فرمولی شامل انتگرالها برای جواب خاص معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = g(x), \quad x > 0$$

بیابید.

راهنمایی: ثابت کنید  $x$ ,  $x^2$  و  $x^3$  جوابهای معادلهٔ همگن هستند.

## مراجع

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1961; New York: Dover, 1989).

Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations* (London: Longmans, Green, 1927; New York: Dover, 1953).