دانشجوی گرامی

از آن‌جا که مباحث مربوط به آمار در رشته‌های مدیریت، حسابداری و اقتصاد بسیار متنوع است بر آن شدیم این مباحث را در این مجموعه به‌صورت تست‌های طبقه‌بندی شده قرار دهیم و نکات مهم را در حل تشریحی آن مطرح کنیم.

لازم به ذکر است که برای دانشجویان مدیریت و حسابداری فصول ۱ تا ۴ بیشتر مدنظر طراحان بوده است و برای دانشجویان اقتصاد فصول ۴ تا ۶ بیشتر مدنظر طراحان بوده است.

امید است این مجموعه بتواند کمکی در جهت موفقیت شما در آزمون کارشناسی ارشد باشد.

مولف

در جدول ذیل دروس به سرفصلهای مهم آن طبقه بندی شده و مشخص شده است که در هر سال از هر مبحث چند تست سوال شده است و دانشجوی محترم می تواند زمان باقیماندهٔ خود را با توجه به اهمیت مباحث مدیریت نماید.

رشته: مدیریت درس: آمار								
ردیف	**مبحث**	**۱۳۸۵**	**۱۳۸۶**	**۱۳۸۷**	**۱۳۸۸**	**۱۳۸۹**	**مجموع ۵ سال**	**نسبت از کل**
		تعداد تست	**تعداد تست**	**تعداد تست**	**تعداد تست**	**تعداد تست**		
1	آمار توصیفی	4	5	5	5	4	23	31%
2	آنالیز ترکیبی واحتمال	2	3	5	5	3	18	24%
3	متغیر تصادفی	4	2	1	2	3	12	16%
4	توابع توزیع گسسته و پیوسته	5	2	2	1	4	14	19%
5	نمونه گیری و برآورد و نظریه چبی شف	0	1	1	2	0	4	5%
6	آزمون فرض و توزیع کای دو	0	2	1	0	1	4	5%
7	سری زمانی	0	0	0	0	0	0	0%
جمع		**15**	**15**	**15**	**15**	**15**	**75**	**100%**

فصل اول

آمار توصیفی

جدول فراوانی

۱ ـ در جدول فراوانی تجمعی داده‌های دسته‌بندی شده زیر اگر درصد فراوانی نسبی دسته وسط 24 باشد، فراوانی مطلق دسته چهارم کدام است؟ **(برنامه‌ریزی شهری ۸۶)**

مرکز دسته	13	15	17	19	21
فراوانی تجمعی	5	14	A	41	50

۱) 14 ۲) 15 ۳) 16 ۴) 17

حل:گزینه ۲ درست است.

فراوانی تجمعی دسته آخر با تعداد داده‌ها (N) برابر است $\leftarrow$ $F_{c_5} = N = 50$

$$\begin{cases} f_i = \dfrac{F_i}{N} & \text{(فراوانی نسبی)} \\ f_i \times 100 = \dfrac{F_i}{N} \times 100 & \text{(درصد فراوانی نسبی)} \end{cases}$$

(درصد فراوانی نسبی دسته وسط) $f_3 \times 100 = 24 \rightarrow \dfrac{F_3}{50} \times 100 = 24 \rightarrow \boxed{F_3 = 12}$ (فراوانی مطلق دسته سوم)

یادداشت:

....

....

....

....

حال با داشتن F_3 می‌توان مقدار a (فراوانی تجمعی دسته سوم $= F_{c_3}$) را به‌دست آورد.

$\left(F_{c_i} = F_i + F_{c_{i-1}}\right)$ فراوانی تجمعی هر دسته برابر است با فراوانی مطلق آن دسته به‌علاوه فراوانی تجمعی دسته قبل.

$$a = F_{c_3} = F_3 + F_{c_2} = 12 + 14 = 26$$

حال با کامل شدن ردیف فراوانی تجمعی جدول به راحتی ردیف فراوانی مطلق به‌دست می‌آید زیرا:

$$F_i = F_{c_i} - F_{c_{i-1}} \rightarrow F_4 = F_{c_4} - F_{c_3} = 41 - 26 = 15$$

دسته	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم
F_{c_i}	5	14	$\boxed{a = 26}$	41	50 = N
F_i	5	9	12	15	9
$f_i \times 100$			24		

مد یا نما (Mo)

۲ ـ از 50 کارمند بانک، سؤال شده است که «مناسب‌ترین زمان شروع به کار در صبح را چه ساعتی می‌دانید؟» نتایج به‌دست آمده دارای میانگین 8.45، میانه 8.15 و نمای 7.15 بوده است. براساس این اطلاعات مناسب‌ترین ساعت برای شروع کار بانک‌ها کدام است؟ (اقتصاد ۸۸)

۱) 7.15 ۲) 8.0 ۳) 8.15 ۴) 8.45

حل: گزینه ۱ درست است.

با توجه به این که سؤال مطرح شده نوعی «نظرسنجی» مردم است و در واقع هدف دانستن نظر مردم درباره ساعات کار بانک‌هاست. بنابراین مهم این است که بدانیم بیشترین رأی(نظر) مردم روی چه ساعتی بوده است. به عبارت دیگر شاخص مُد که تنها کاربرد آن در نظر سنجی است بهترین معیار خواهد بود.

۳ ـ در جدول داده‌های طبقه‌بندی شده زیر اگر مد جامعه 25.5 باشد، درصد فروانی نسبی دسته سوم کدام است؟

(برنامه ریزی شهری ۸۷)

حدود دسته	15 – 19	19 – 23	23 – 27	27 – 31
فراوانی مطلق	7	12	α	14

۱) 32 ۲) 34 ۳) 35 ۴) 36

حل: گزینه ۲ درست است.

☜ **یادآوری:**

$$\text{درصد فراوانی نسبی} = \frac{\text{فراوانی مطلق}}{\text{تعداد داده‌ها}} \times 100 \rightarrow f_i = \frac{F_i}{N} \times 100$$

برای به‌دست آوردن درصد فراوانی نسبی دسته سوم، نیازمند F_3 یعنی α و N تعداد داده‌ها هستیم.

توجه : دقت کنید که مد جامعه 25.5 است. پس حتماً در دسته (27 – 23) قرار دارد. حال با توجه به فرمول محاسبه مد داریم:

$$Mo = \text{حدپایین دسته} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times \text{طول دسته}$$

یادداشت:

....

....

....

....

$$25.5 = 23 + \frac{(\alpha-12)}{(\alpha-12)+(\alpha-14)}\times 4 \rightarrow 4\alpha-48=5\alpha-65 \rightarrow \boxed{F_3=\alpha=17}$$

$$\begin{cases} f_3=\dfrac{F_3}{N}\times 100=\dfrac{17}{50}\times 100=34 \\ N=\sum F_i=7+12+17+14=50 \end{cases}$$

میانه $(Md = Me)$

۴ـ در جدول توزیع فراوانی زیر، مقدار مد و میانه به ترتیب (از چپ به راست) کدام است؟(حسابداری۸۰)

x_i	-1	0	1	2	3
فراوانی	10	30	10	25	25

۱) $(0\ ,\ 0.50)$ ۲) $(0\ ,\ 1.5)$ ۳) $(25\ ,\ 0.50)$ ۴) $(30\ ,\ 25)$

حل:گزینه ۲ درست است.

x_i	-1	0	1	2	3
F_i	10	30	10	25	25
F_{C_i}	10	40	50	75	$N=100$

راه حل اول:

محل میانه $=\frac{N}{2}+\frac{1}{2}=\frac{100}{2}+\frac{1}{2}=50.5$

مقدار میانه $=x_{(50)}+0.5\left(x_{(51)}-x_{(50)}\right)=1+0.5(2-1)=1.5$

به‌دست آوردن $x_{(50)}$ ، $x_{(51)}$: چون داده‌ها در جدول به ترتیب صعودی است اندیس x را از ردیف فراوانی (با جمع بستن F_iها تا رسیدن به عدد اندیس یا عدد بزرگ‌تر از آن) پیدا کرده و x متناظر آن را از ردیف بالا پیدا می‌کنیم.

راه حل دوم: میانه برابر است با اولین داده‌ای که فراوانی تجمعی آن بزرگ‌تر و یا مساوی $\frac{N}{2}$ باشد.

$F_{c_i}\ge\frac{N}{2}=50 \rightarrow F_{c_3}=50 \rightarrow x_3=1$ میانه

مد $=Mo=0$ داده‌ای که دارای بیشترین فراوانی است.

۵ـ میانه در توزیع آماری 50 مشاهده دسته‌بندی شده برابر 41 می‌باشد. اگر طول دسته‌ها 5، فراوانی طبقه میانه‌دار 10 و مجموع فراوانی‌های ماقبل طبقه میانه‌دار برابر 18 باشد، حدود دسته میانه‌دار، کدام است؟(حسابداری و مدیریت ۸۶)

۱) $(36.5,41.5)$ ۲) $(37\ ,\ 42)$ ۳) $(37.5\ ,\ 42.5)$ ۴) $(38\ ,43)$

حل:گزینه ۳ درست است.

$Md=41$, $N=50$, $I=$ طول دسته $=5$

$F_{Md}=10$ (فراوانی طبقه میانه‌دار) و $F_{C_{Md-1}}=18$ (فراوانی تجمعی دسته ماقبل میانه)

$Md=$ حدپایین طبقه میانه‌دار $+\dfrac{\frac{N}{2}-F_{C_{i-1}}}{F_i}\times$ طول دسته $\rightarrow 41=$ حدپایین طبقه $+\dfrac{\frac{50}{2}-18}{10}\times 5$

$\rightarrow$ حد پایین طبقه $=41-3.5=37.5 \rightarrow$ حدود دسته $=(37.5, 37.5+5)=(37.5\ ,\ 42.5)$

یادداشت:

....

....

....

....

۶ـ **برای مقادیر متغیر تصادفی x به شرح زیر:** $x: 60\ ,\ 40\ ,\ 60\ ,\ 80$ **(اقتصاد ۸۳)**

۱) فقط میانگین حسابی و میانه با هم برابرند.
۲) فقط میانگین حسابی و نما با هم برابرند.
۳) میانگین حسابی، میانه و نما با هم برابرند.
۴) فقط میانه و نما با هم برابرند.

خواص میانه

۷ـ **در 50 داده آماری میانه** $Md = 12$ **و** $\sum_{i=1}^{50} x_i = 550$ **است، اگر** $A = \sum_{i=1}^{50} \left| x_i - 12 \right|$ **و** $B = \sum_{i=1}^{50} \left| x_i - 11 \right|$ **آن‌گاه:**

(مدیریت ۸۴)

۱) $A < B$
۲) $A = B$
۳) $A > B$
۴) $A = B - 1$

حل:گزینه ۱ درست است.

طبق خاصیت سوم میانه داریم: a عدد دلخواه $\sum \left| x_i - Md \right| < \sum \left| x_i - a \right|$

در این سؤال $a = \mu$ است یعنی در حالت B، عدد 11 نشان‌دهنده میانگین است. اما در اصل قضیه هیچ تفاوتی ایجاد نمی‌کند چون به ازای هر a دلخواه این رابطه برقرار است:

$$\begin{cases} Md = 12 \\ \mu = \dfrac{\sum x_i}{N} = \dfrac{550}{50} = 11 \end{cases} \rightarrow \sum \left| x_i - 12 \right| < \sum \left| x_i - 11 \right| \rightarrow A < B$$

۸ـ **در صورتی که به بزرگ‌ترین عدد یک سری داده مقدار ثابتی اضافه گردد، این افزایش بر کدام معیار تأثیر نمی‌گذارد؟ (اقتصاد۸۰)**

۱) ضریب پراکندگی
۲) میانه
۳) میانگین
۴) واریانس

حل:گزینه ۲ درست است.

خاصیت (2) میانه: برخلاف میانگین، میانه از اعداد بسیار بزرگ یا بسیار کوچک متأثر نمی‌شود.

نکته: چون میانه تابع ترتیب داده‌هاست، بنابراین تا زمانی که تغییرات روی داده‌ها (افزایش بزرگ‌ترین داده یا کاهش کوچک‌ترین داده) ترتیب داده‌ها را عوض نکند، روی میانه تأثیری ندارد.

☜ **یادآوری: مد، تابع فراوانی داده ها است.**

۹ـ **مشاهدات** $x_1, x_2, 15, x_4, x_5$ **دارای انحراف معیار صفر هستند. آنگاه میانهٔ مشاهدات** $(2x_1+1),(2x_2+1),\ldots,(2x_5+1)$ **برابر است با: (اقتصاد ۸۷)**

۱) 18
۲) 21
۳) 24
۴) 31

حل:گزینه ۴ درست است.

☜ **یادآوری:**

(۱) خواص انحراف معیار: انحراف معیار داده‌های مساوی برابر صفر است. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n \Leftrightarrow \sigma = 0$

(۲) خواص میانه: با تغییر در مبدأ و مقیاس داده‌ها، میانه تغییر خواهد کرد: $Md(ax+b) = aMd + b$

(۳) خواص میانه: میانه در داده‌های مساوی برابر داده‌هاست. $x_i = a, a, a, \ldots, a \rightarrow Md = a$

یادداشت:

....

....

....

....

با توجه به یادآوری (۱) چون انحراف معیار داده‌ها برابر صفر است بنابراین 5 داده با هم برابر می‌باشند و چون مقدار یکی 15 است بنابراین همه مشاهدات 15 هستند.

$$\sigma = 0 \xrightarrow{(1)} x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 15 \xrightarrow{(3)} Md_x = 15$$

$$(2)\ Md(2x+1) = 2Md_x + 1 = 2\times 15 + 1 = 31$$

☜ **یادآوری:** طبق خاصیت خطی بودن میانه، چنانچه تغییری در داده ها ایجاد شود، میانه نیز به همان اندازه تغییر خواهد کرد.

۱۰ ـ اگر داده‌ها به صورت $1,3,5,6,8,7,10,100$ باشد، کدام شاخص مرکزی نماینده‌ای بهتر برای داده‌ها است؟ (برنامه‌ریزی شهری ۷۹)

۱) مد　　۲) میانه　　۳) نما　　۴) چارک‌ها

حل:گزینه ۲ درست است.

یکی از خواص میانه این است که: میانه بر خلاف میانگین از اعداد بسیار بزرگ یا بسیار کوچک متأثر نمی‌شود.
در این سؤال عدد 100 در بین داده‌ها یک عدد بزرگ نسبت به سایر داده‌ها است. به این دلیل میانه نماینده بهتری برای داده‌ها است.

محاسبه چندک‌ها

۱۱ ـ چارک سوم جدول زیر کدام است؟(حسابداری ۷۸)

CL	2 − 5	6 − 9	10 − 13
F_i	10	30	20

۱) 6.8　　۲) 9.5　　۳) 10　　۴) 10.5

حل:گزینه ۴ درست است.

CL	2 − 5	6 − 9	10 − 13
F_i	10	30	20
F_{c_i}	10	40	60 = N

محل چارک سوم: اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعی آن بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{3N}{4}$ باشد.

$$F_{C_i} \geq \frac{3N}{4} = \frac{3\times 60}{4} = 45 \quad \rightarrow \quad \text{طبقه سوم}$$

با توجه به گسسته بودن طبقات ابتدا طبقه سوم را پیوسته می‌کنیم $(9.5 - 13.5)$

$$Q_3 = \text{حد پایین طبقه} + \frac{\frac{3N}{4} - F_{c_{i-1}}}{F_i} \times \text{طول طبقه} = 9.5 + \frac{45 - 40}{20} \times 4 = 10.5$$

۱۲ ـ در جدول زیر دهک دوم برابر چند است؟(مدیریت ۸۰)

CL	40 − 50	50 − 60	60 − 70
F_i	5	18	7

۱) 48.2　　۲) 51.5　　۳) 50.55　　۴) 62.38

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۳ درست است.

CL	40 – 50	50 – 60	60 – 70
F_i	5	18	7
F_{c_i}	5	23	30 = N

محل دهک دوم: اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعی آن بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{2N}{10}$ باشد:

$$F_{C_i} \geq \frac{2N}{10} = \frac{2 \times 30}{10} = 6 \quad \rightarrow \quad (50 - 60) \text{ طبقه دوم}$$

$$D_2 = \text{حد پایین طبقه} + \frac{\frac{2N}{10} - F_{c_{i-1}}}{F_i} \times \text{طول طبقه} = 50 + \frac{6 - 5}{18} \times 10 = 50.55$$

۱۳ ـ در 120 داده‌ی آماری، کوچکترین و بزرگترین آنها به ترتیب 12 و 54 می‌باشد. این داده‌ها در 7 طبقه دسته‌بندی شده‌اند به طوری که مقدار دهک ششم برابر 32 و در دسته وسط واقع است. اگر فراوانی مطلق این طبقه 9 باشد، درصد فراوانی نسبی تجمعی آن کدام است ؟ (GIS ۸۷)

۱) 63 ۲) 65 ۳) 68 ۴) 72

حل:گزینه ۲ درست است.

ابتدا فاصله طبقات را به‌دست آوریم تا از روی آن بتوان جدول توزیع فراوانی را کشید. توجه کنید که چون تعداد طبقات 7 تاست بنابراین طبقه وسط، طبقه چهارم خواهد بود.

$$\begin{cases} I = \frac{R}{k} = \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{7} = \frac{54 - 12}{7} = \frac{42}{7} = 6 \\ \text{دامنه تغییرات: R و تعداد طبقات :K و فاصله طبقات : I} \end{cases}$$

حدود دسته‌ها	12 – 18	18 – 24	24 – 30	$\overbrace{30 - 36}^{\text{طبقه وسط}}$	…
F_i				9	

حال به دنبال فراوانی تجمعی نسبی دسته وسط هستیم پس باید F_{c_i} را پیدا کنیم. می دانیم که دهک ششم در طبقه وسط یعنی $(30-36)$ قرار دارد بنابراین داریم:

$$D_6 = \text{حد پایین دسته} + \frac{\frac{6N}{10} - F_{c_{i-1}}}{F_i} \times \text{طول دسته} \rightarrow \; 32 = 30 + \frac{\frac{6 \times 120}{10} - F_{c_{i-1}}}{9} \times 6 \;\; \rightarrow \;\; F_{c_{i-1}} = 69$$

$$F_{c_i} = F_i + F_{c_{i-1}} = 9 + 69 = 78 \rightarrow f_{c_i} = \frac{F_{c_i}}{N} = \frac{78}{120} = 0.65 = \%65$$

یادداشت:

....

....

....

....

تحلیل چندک‌ها

۱۴ ـ در یک بررسی آماری در خصوص نمرات هوش دانش‌آموزان یک منطقه آموزش و پرورش کمیت‌های زیر به دست آمده است:

$Q_1 = 80$ (چارک اول)	$\bar{x} = 120$ (میانگین حسابی)
$Q_3 = 140$ (چارک سوم)	$Md = 110$ (میانه)
$S = 20$ (انحراف معیار)	$Mo = 107$ (نما)

کدام‌یک از موارد زیر درست است؟ (اقتصاد ۸۳)

۱) نمرات نیمی از دانش‌آموزان بین 80 تا 140 می‌باشد.
۲) نمرات نیمی از دانش‌آموزان کمتر از 120 است.
۳) نمرات 75 درصد از دانش‌آموزان بیشتر از 140 می‌باشد.
۴) نمرات بیشتر دانش‌آموزان 140 و بیشتر است.

حل:گزینه ۱ درست است.

با توجه به داده‌های مسئله به بررسی گزینه‌ای می‌پردازیم.

گزینه۱) با توجه به این‌که فاصله چارک اول تا چارک سوم 50 درصد داده‌ها را در بر دارد این جمله صحیح است که نمرات نیمی از دانش‌آموزان بین $Q_1 = 80$ تا $Q_3 = 140$ است.

گزینه۲) چون مقدار $\bar{x}$ برابر 120 است فقط می‌توان گفت میانگین (معدل) نمرات 120 است.

گزینه۳) با توجه به این‌که مقدار $Q_3 = 140$ است. می‌توان گفت نمرات 75 درصد از دانش‌آموزان کمتر و یا مساوی 140 است. یا می‌توان گفت نمرات 25 درصد از دانش‌آموزان بیشتر از 140 است.

گزینه۴) با توجه به گزینه ۳ این جمله نادرست است.

۱۵ ـ فرض کنید دهک ششم حقوق کارکنان در یک مؤسسه برابر با 135 هزار تومان است. این بدان معنی است که حقـوق دریـافتی 40 درصد کارکنان: (اقتصاد ۸۵)

۱) بیشتر از 135 هزار تومان است.
۲) درست برابر با 135 هزار تومان است.
۳) کمتر یا مساوی 135 هزار تومان است.
۴) 135 هزار تومان و بقیه کارکنان بیشتر از 135 هزار تومان است.

حل:گزینه ۱ درست است.

$D_6 = 135$ (دهک ششم) مفهوم آن این است که: 60 درصد از کارکنان حقوقی کمتر و یا مساوی 135 هزار تومان دریافت می‌کنند و یا می‌توان گفت 40 درصد از کارکنان حقوقی بیشتر از 135 هزار تومان دریافت می‌کنند.

میانگین هارمونیک $\left(\bar{X}_H\right)$

۱۶ ـ در یک کارگاه 5 ماشین با سرعت 4 دور در ثانیه و 3 ماشین با سرعت 6 دور در ثانیه کار می‌کنند. سرعت متوسط ایـن ماشـین‌هـا چند دور در ثانیه است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۵)

۱) 4.85
۲) 4.75
۳) 4.63
۴) 4.57

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۴ درست است.

با توجه به واحد ترکیبی (دور در ثانیه) از میانگین هارمونیک استفاده می‌کنیم:

$$\bar{x}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} = \frac{5+3}{5 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{6}} = \frac{8}{\frac{21}{12}} = \frac{96}{21} = 4.57$$

۱۷ ـ یک هواپیما فاصله 3 هزار کیلومتری را با سرعت 600 کیلومتر در ساعت، فاصله 5 هزار کیلومتری را با سرعت 750 کیلومتر در ساعت و فاصله 4 هزار کیلومتری را با سرعت 800 کیلومتر در ساعت طی می‌کند. سرعت متوسط آن کدام است؟

(حسابداری و مدیریت۸۸)

۱) 715 ۲) 717 ۳) 720 ۴) 725

حل:گزینه ۳ درست است.

با توجه به واحد ترکیبی کیلومتر در ساعت از میانگین هارمونیک استفاده می‌کنیم. دقت کنید که فاصله طی شده با سرعت معین در واقع وزن سرعت هواپیما محسوب می‌شود.

$$\bar{x}_H = \frac{\sum w_i}{\sum \frac{w_i}{x_i}} = \frac{3+5+4}{\frac{3}{600}+\frac{5}{750}+\frac{4}{800}} = \frac{12}{\frac{1}{200}+\frac{1}{150}+\frac{1}{200}} = \frac{12}{\frac{1}{100}+\frac{1}{150}} = \frac{12\times1500}{15+10}$$

$$= \frac{12\times1500}{25} = 12\times60 = 720$$

۱۸ ـ راننده اتومبیلی $\frac{1}{3}$ مسافت موردنظر را با سرعت ثابت 60 کیلومتر بر ساعت و بقیه مسافت را با سرعت 80 کیلومتر بر ساعت رفته است، سرعت متوسط او در این مسافت چند کیلومتر بر ساعت است؟(مدیریت۸۴)

۱) 70 ۲) 71.5 ۳) 72 ۴) 73

۱۹ ـ گزینه ۳ درست است.

با توجه به واحد ترکیبی (کیلومتر بر ساعت) از میانگین هارمونیک استفاده می‌شود. البته چون سرعت اتومبیل در طی مسافت متغیر بوده از میانگین هارمونیک وزنی استفاده می‌شود.

$$\bar{x}_H = \frac{\sum w_i}{\sum \frac{w_i}{x_i}} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{\frac{\frac{1}{3}}{60}+\frac{\frac{2}{3}}{80}} = \frac{1}{\frac{10}{\frac{3}{240}}} = 72$$

میانگین هندسی $\left(\bar{X}_G\right)$

۲۰ ـ میانگین هندسی اعداد 6 , 12.5 , 9 , 12 , a , b برابر $\frac{9}{2}$ است، میانگین هندسی b , a کدام است؟(حسابداری ۸۴)

۱) $\frac{27}{20}$ ۲) $\frac{27}{40}$ ۳) $\frac{81}{40}$ ۴) $\frac{81}{80}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۴ درست است.

با توجه به رابطه اول میانگین هندسی داریم:

$$\bar{x}_G = \sqrt[6]{a \times b \times 12 \times 9 \times 12.5 \times 6} = \frac{9}{2} \rightarrow \sqrt[6]{8100\,ab} = \frac{9}{2}$$

$$\xrightarrow[\text{توان 6 می‌رسانیم}]{\text{طرفین را به}} \underbrace{8100}_{9^2 \times 10^2}\ ab = \frac{9^6}{2^6} \rightarrow ab = \frac{9^4}{2^6 10^2}$$

میانگین هندسی a و b $\bar{x}_G = \sqrt[2]{a \times b} = \sqrt[2]{\frac{9^4}{2^6 \times 10^2}} = \frac{9^2}{2^3 \times 10} = \frac{81}{80}$

۲۱ ـ فزونی میانگین حسابی از میانگین هندسی داده‌های

x_i	9	12	16
f_i	2	3	2

کدام است؟ (حسابداری و مدیریت۸۶)

۱) 0.24 ۲) 0.25 ۳) 0.27 ۴) 0.28

حل:گزینه ۴ درست است.

توجه: منظور از f_i همان F_i (فراوانی مطلق) بوده است. در بعضی از کتاب‌ها فراوانی مطلق را با f_i و فراوانی تجمعی را با F_i نمایش می‌دهند. البته می‌دانیم که f_i (فراوانی نسبی) عددی بین $(0, 1)$ است بنابراین تشخیص آن ساده است.

باید هر دو میانگین حسابی و هندسی محاسبه شود و سپس تفاضل میانگین حسابی از هندسی را به‌دست آورد.

x_i	9	12	16	
F_i	2	3	2	$N = 7$

$$\bar{X} = \frac{\sum F_i x_i}{N} = \frac{2 \times 9 + 3 \times 12 + 2 \times 16}{7} = \frac{86}{7} = 12.28$$

$$\bar{X}_G = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{n} x_i^{F_i}} = \sqrt[7]{\underbrace{9^2}_{(3^2)^2} \times 12^3 \times \underbrace{16^2}_{(4^2)^2}} = \sqrt[7]{\underbrace{3^4 \times 4^4}_{12^4} \times 12^3} = \sqrt[7]{12^4 \times 12^3} = \sqrt[7]{12^7} = 12$$

فزونی میانگین حسابی از میانگین‌های هندسی: $\bar{X} - \bar{X}_G = 12.28 - 12 = 0.28$

۲۲ ـ تعداد دانشجویان پذیرفته شده در یک دانشکده در پنج سال متوالی به شرح زیر است:

سال‌ها	1380	1381	1382	1383	1384
تعداد	100	280	310	350	400

متوسط درصد (نرخ) رشد سالانه دانشجویان پذیرفته شده در این دانشکده کدام است؟ (اقتصاد۸۶)

۱) %38 ۲) %41 ۳) %50 ۴) %56

حل:گزینه ۲ درست است.

با توجه به رابطه سوم میانگین هندسی داریم:

$$\bar{X}_G = \sqrt[84-80]{\frac{\text{سال آخر}}{\text{سال اول}}} = \sqrt[4]{\frac{400}{100}} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[2]{2} = 1.41 \rightarrow (1.41-1) \times 100 = 41 \text{ درصد}$$

یادداشت:

....

....

....

....

بهتر است مقدار $\sqrt{2}=1.41$, $\sqrt{3}=1.73$ را به خاطر داشته باشیم.

۲۳ ـ فروش یک فروشگاه در سال گذشته 80% افزایش یافته و امسال 80% کاهش داشته است. متوسط نرخ رشد فروش سالانه این فروشگاه در این دو سال چند درصد بوده است؟ (اقتصاد ۸۸)

۱) 40% کاهش ۲) 60% کاهش ۳) 20% افزایش ۴) صفر

حل:گزینه ۱ درست است.

با توجه به این که نرخ رشد فروش بر حسب درصد داده شده است بنا بر رابطه دوم میانگین هندسی داریم:

☜**یادآوری:** «درصد» هر سال را با جمع کردن با عدد یک به «برابر» تبدیل کرده و از رابطه اول میانگین هندسی استفاده می‌کنیم:

$$\bar{X}_G=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}=\sqrt[2]{(+0.8+1)(-0.8+1)}=\sqrt[2]{1.8\times 0.2}=\sqrt[2]{0.36}=0.6 \xrightarrow{\text{«برابر»}} (0.6-1)=-0.4=\text{کاهش } 40\%$$

دقت کنید که در واقع رابطه بالا به‌صورت زیر به‌دست آمده است:

$$\begin{cases} \text{سال اول}: & x \\ \text{سال دوم}: & x+0.8x=1.8x \\ \text{سال سوم}: & 1.8x-0.8(1.8x)=0.36x \end{cases}$$

$$\bar{X}_G=\sqrt[\text{تعداد سال ها}-1]{\frac{\text{سال آخر}}{\text{سال اول}}}=\sqrt[3-1]{\frac{0.36x}{X}}=\sqrt[2]{0.36}=0.6 \xrightarrow{\text{برابر}} (0.6-1)=-0.4=-40\% \text{ کاهش}$$

قضیه چی‌بی‌شف

۲۴ ـ در یک کارخانه کمپوت‌سازی میانگین وزن محصولات 250 گرم و واریانس 2.25 محاسبه شده است. طبق قانون چی‌بی‌شف وزن حداقل 64 درصد از این نوع محصولات در کدام بازه قرار دارد؟ (مدیریت۸۴)

۱) $(245\,,255)$ ۲) $(246,254)$ ۳) $(247.5,252.5)$ ۴) $(247.75,\ 252.5)$

حل:گزینه ۳ درست است.

با توجه به قضیه چی‌بی‌شف:

$$\begin{cases} P\left(\underbrace{\mu-k\sigma}_{a}\le x\le \underbrace{\mu+k\sigma}_{b}\right) \rightarrow \text{حداقل} \left(1-\frac{1}{k^2}\right) \text{درصد} \\ \frac{b-a}{2}=k\sigma \end{cases}$$

بنابراین:

$$\text{اولاً}: 1-\frac{1}{k^2}=\frac{64}{100} \rightarrow \frac{1}{k^2}=\frac{36}{100} \rightarrow k=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

$$\text{ثانیاً}: (\mu-k\sigma\ ,\ \mu+k\sigma) \xrightarrow[k=\frac{5}{3}]{\mu=250\ ,\sigma=\frac{3}{2}} \left(250-\frac{5}{3}\times\frac{3}{2}\ ,\ 250+\frac{5}{3}\times\frac{3}{2}\right) \rightarrow (247.5\ ,\ 252.5)$$

یادداشت:

....

....

....

....

۲۵ ـ در یک آزمون مهارت میانگین و واریانس نمرات به‌ترتیب 75 و 64 بوده است، بنابر قانون چی‌بی‌شف انتظار می‌رود حداقل چند درصد نمرات بین دو عدد 63 و 87 قرار گیرند؟ (حسابداری و مدیریت۸۸)

۱) 45 ۲) 50 ۳) 55 ۴) 65

حل:گزینه ۳ درست است.

با توجه به قضیه چی‌بی‌شف:

$$\begin{cases} P\left(\underbrace{\mu-k\sigma}_{a}<x<\underbrace{\mu+k\sigma}_{b}\right) \text{ درصد } \rightarrow \left(1-\frac{1}{k^2}\right) \text{ حداقل} \\ \frac{b-a}{2}=k\sigma \end{cases}$$

اولاً: $\frac{b-a}{2}=k\sigma \xrightarrow[\sigma^2=64]{a=63\ ,\ b=87} \frac{87-63}{2}=\sqrt{64}k \rightarrow 12=8k \rightarrow k=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

ثانیاً: $1-\frac{1}{k^2}=1-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}=0.55=\%55$

۲۶ ـ طبق قانون چی‌بی‌شف انتظار می‌رود 84 درصد مشاهدات در دامنۀ (88 , 72) قرار گیرند. مقدار انحراف معیار این مشاهدات کدام است؟(حسابداری و مدیریت ۸۶)

۱) 2.4 ۲) 3.2 ۳) 3.6 ۴) 4.2

حل:گزینه ۲ درست است.

با توجه به قضیه چی‌بی‌شف:

$$\begin{cases} P\left(\underbrace{\mu-k\sigma}_{a}\le x\le\underbrace{\mu+k\sigma}_{b}\right) \rightarrow \text{ درصد}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \text{ حداقل} \\ \frac{b-a}{2}=k\sigma \end{cases}$$

بنابراین:

اولاً: $1-\frac{1}{k^2}=\frac{84}{100} \rightarrow \frac{1}{k^2}=\frac{16}{100} \rightarrow k=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

ثانیاً: $\frac{b-a}{2}=k\sigma \rightarrow \frac{88-72}{2}=\frac{5}{2}\sigma \rightarrow 8=\frac{5}{2}\sigma \rightarrow \sigma=\frac{16}{5}=3.2$

۲۷ ـ متوسط دستمزد روزانه کارگران یک کارخانه 10 هزار تومان با انحراف معیار یک هزار تومان است. چه نسبتی از کارگران دارای دستمزد روزانه‌ای بیشتر از 12 هزار تومان یا کمتر از 8 هزار تومان هستند؟(اقتصاد ۸۸)

۱) حداکثر 25% ۲) حداقل 25% ۳) حداکثر 75% ۴) حداقل 75%

حل:گزینه ۱ درست است.

یادداشت:

....

....

....

....

با توجه به نامعلوم بودن توزیع جامعه و همچنین مشاهده گزینه‌ها که احتمال حداقل یا حداکثر را بیان می‌کنند از قضیه چی‌بی‌شف استفاده می‌کنیم:

قضیه چی‌بی‌شف:
$$\begin{cases} P\left(x > \underbrace{\mu + k\sigma}_{b} \quad \text{یا} \quad x < \underbrace{\mu - k\sigma}_{a}\right) \le \left(\dfrac{1}{k^2}\right) \ \text{حداکثر} \\ k\sigma = \dfrac{b-a}{2} \end{cases}$$

در این سؤال نیز:
$$P(x > 12 \quad \text{یا} \quad x < 8) \le \frac{1}{k^2} \ \text{حداکثر}$$

اولاً : $k\sigma = \dfrac{b-a}{2} \xrightarrow[\sigma^2=1]{b=12,a=8} k \times 1 = \dfrac{12-8}{2} \to \boxed{k=2}$

ثانیاً : $\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4} \to P(x > 12 \quad \text{یا} \quad x < 8) \le \dfrac{1}{4} = \%25$ حداکثر

تصحیح شپارد

۲۸ ـ در داده‌های طبقه‌بندی شده با متغیرهای پیوسته و توزیع فراوانی اندکی متقارن، فاصله طبقات 6، تعداد جامعه 2400 و مقدار میانگین و واریانس به ترتیب 25 و 12 محاسبه شده است. واریانس تصحیح شده شپارد، کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۷)

۱) 11.25 ۲) 10.5 ۳) 10 ۴) 9

حل:گزینه ۴ درست است.

واریانس تصحیح شده شپارد عبارت است از:

$$\begin{cases} \sigma^2_{\text{شپارد}} = \sigma^2 - \dfrac{I^2}{12} = 12 - \dfrac{6^2}{12} = 12 - 3 = 9 \\ I = \text{فاصله طبقات} = 6 \ , \ \sigma^2 = 12 \end{cases}$$

۲۹ ـ تصحیح شپارد در مورد واریانس N داده از متغیر پیوسته در مواردی به کار می‌رود که .... <N و تابع توزیع فراوانی .... باشد. (برنامه‌ریزی شهری ۸۵)

۱) 100 ـ اندکی متقارن ۲) 100 ـ غیرمتقارن

۳) 1000 ـ اندکی متقارن ۴) 1000 ـ غیرمتقارن

حل:گزینه ۳ درست است.

با توجه به اینکه شرایط تصحیح شپارد برقرار است یعنی

۱ـ داده‌ها طبقه‌بندی شده پیوسته

۲ـ توزیع فراوانی اندکی متقارن

۳ـ $N > 1000$

۳۰ ـ در داده‌های آماری دسته‌بندی شده با متغیر پیوسته، تعداد داده‌ها خیلی زیاد و تابع توزیع فراوانی اندکی متقارن است، واریانس محاسبه شده با مقایسه واریانس واقعی چگونه است ؟ (GIS ۸۶)

۱) همواره بیشتر ۲) همواره کمتر ۳) دقیقاً برابر ۴) کمتر یا بیشتر

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۱ درست است.

واریانس محاسبه شده به روش معمول در داده‌های آماری دسته‌بندی شده با متغیر پیوسته از واریانس واقعی جامعه بیشتر خواهد شد و در این شرایط از واریانس تصحیح شده شپارد استفاده خواهیم کرد

میانگین و واریانس کل

۳۱ـ واریانس کل داده‌ها، متشکل از سه گروه جدول روبه‌رو کدام است؟(حسابداری و مدیریت ۸۶)

N	100	200	700
μ	14	18	20
σ^2	50	60	40

۱) 48.4 ۲) 47.5

۳) 45.8 ۴) 45

حل:گزینه ۱ درست است.

$$\text{(میانگین کل)}\ \mu=\frac{\sum N_i\mu_i}{\sum N_i}=\frac{100\times 14+200\times 18+700\times 20}{100+200+700}=\frac{19000}{1000}=19$$

$$\text{(واریانس کل)}\ \sigma^2=\frac{\sum N_i\sigma_i^2+\sum N_i\left(\mu_i-\mu\right)^2}{\sum N_i}$$

$$=\frac{100\times 50+200\times 60+700\times 40+\overset{2500}{\cancel{100(14-19)^2}}+\overset{200}{\cancel{200(18-19)^2}}+\overset{700}{\cancel{700(20-19)^2}}}{1000}$$

$$=\frac{48400}{1000}=48.4$$

۳۲ـ اگر سه جامعه با تعداد مشاهدات 25، 30 و 45 با میانگین‌های برابر و واریانس آنها به ترتیب 2.04 و 3.1 و 4 به صورت یک جامعه واحد در نظر گرفته شود. انحراف معیار این جامعه کدام است؟ (GIS ۸۴)

۱) 1.6 ۲) 1.7 ۳) 1.8 ۴) 1.9

حل:گزینه ۳ درست است.

$$\begin{cases}\sigma^2_{\text{کل}}=\dfrac{\sum N_i\sigma_i^2}{\sum N_i}+\cancel{\dfrac{\sum N_i\left(\mu_i-\mu_{\text{کل}}\right)^2}{\sum N_i}}=\dfrac{25\times 2.04+30\times 3.1+45\times 4}{25+30+45}=3.24\rightarrow \sigma_{\text{کل}}=1.8\\ \text{میانگین‌ها برابر}\rightarrow \mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_{\text{کل}}\rightarrow (\mu_i-\mu_{\text{کل}})^2=0\\ N_1=25\ ,N_2=30\ ,N_3=45\ ,\sigma_1^2=2.04\ ,\sigma_2^2=3.1\ ,\sigma_3^2=4\end{cases}$$

دقت کنید که وقتی میانگین جوامع با هم یکسان هستند، واریانس کل عبارت است از : $\sigma^2_{\text{کل}}=\dfrac{\sum N_i\sigma_i^2}{\sum N_i}$

۳۳ـ اگر مشاهداتی به تعداد 100 و 200 و 450 به ترتیب با واریانس‌های 16 و 25 و 20 به صورت جامعه‌ای واحد ترکیب شوند در صورتی که میانگین این مشاهدات متفاوت باشند کدام عدد برای واریانس جامعهٔ کل مورد قبول است؟ (برنامه ریزی شهری ۸۸)

۱) 19.8 ۲) 20.6 ۳) 20.8 ۴) 22.1

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۴ درست است.

$$\sigma^2_{کل} = \frac{\sum N_i\sigma_i^2}{\sum N_i} + \underbrace{\frac{\sum N_i\left(\mu_i - \mu_{کل}\right)^2}{\sum N_i}}_{\text{مقداری بزرگتر از صفر}} = \frac{10\times16+20\times25+45\times20}{10+20+45} + k = \frac{1560}{75} + k = 20.8 + k$$

دقت کنید که وقتی میانگین‌های جوامع متفاوت هستند بنابراین میانگین کل نیز با آن‌ها متفاوت خواهد بود و کسر دوم در محاسبه واریانس کل صفر نخواهد شد و حتماً مقداری بزرگتر از صفر خواهد بود بنابراین در بین گزینه‌های این سؤال گزینه‌ای می‌تواند واریانس کل باشد که از 20.8 بزرگتر باشد و تنها گزینه ۴ است که بزرگتر است $(22.1 > 20.8)$ و جواب سؤال است

نیمه واریانس

۳۴ـ سود 12 **ماهه یک شرکتی به صورت** 3 , 6 , 1 , 8 , 5 , 4 , 0 , 2 , 1 , 7 , 3 , 8 **می‌باشد، نیمه واریانس** (S.V) **برای مقادیر نامطلوب کمتر از میانگین کدام است؟** (GIS ۸۵)

۱) 6 ۲) 6.33 ۳) 6.5 ۴) 6.66

حل:گزینه ۴ درست است.

$$S.V = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i-\mu)^2}{k} = \frac{(0-4)^2+(1-4)^2+(1-4)^2+(2-4)^2+(3-4)^2+(3-4)^2}{6} = \frac{40}{6} = 6.66$$

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{8+3+7+1+2+0+4+5+8+1+6+3}{12} = \frac{48}{12} = 4$$

$\mu = 4$ مقادیر نامطلوب کمتر از: 0 , 1 ,1 , 2 , 3 , 3

کاربرد ضریب تغییرات (CV)

۳۵ـ ضریب تغییرات برای مقایسه پراکندگی دو جامعه‌ای به کار می‌رود که: (حسابداری۷۸ و مدیریت ۷۳)

۱) دارای میانگین‌های متفاوت باشند.

۲) دارای واحدهای اندازه‌گیری مختلف باشند.

۳) دارای مقادیر منفی باشند.

۴) یا واحدهای اندازه‌گیری‌شان مختلف باشد و یا میانگین‌های متفاوت داشته باشند.

حل:گزینه ۴ درست است.

CV (ضریب پراکندگی) برای مقایسه پراکندگی دو جامعه به کار می‌رود وقتی که:

۱ـ $(\mu_1 \neq \mu_2)$ مقدار میانگین‌های دو جامعه متفاوت باشد.

یا

۲ـ واحد اندازه‌گیری دو جامعه یکسان نباشند.

یادداشت:

....

....

....

....

۳۶ـ برای تشخیص آن که در دو هفته گذشته یورو با ثبات‌تر بوده است یا ین ژاپن، کدام شاخص مناسب‌تر است؟ (اقتصاد ۸۷)

۱) واریانس
۲) میانگین وزنی
۳) میانگین مجذور خطا
۴) ضریب پراکندگی (ضریب تغییرات)

حل:گزینه ۴ درست است.

☜ **یادآوری:** موارد کاربرد ضریب تغییرات (CV): ضریب تغییرات برای مقایسه دو جامعه وقتی استفاده می‌شود که یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱- دو جامعه دارای واحد اندازه‌گیری متفاوت باشند. ۲- دو جامعه میانگین متفاوتی داشته باشند.

در این سؤال نیز واحد اندازه‌گیری جامعه اول «یورو» و واحد اندازه‌گیری جامعه دوم «ین» است بنابراین طبق شرط اول ضریب پراکندگی مناسب‌ترین شاخص برای مقایسه است.

محاسبه ضریب تغییرات (CV)

۳۷ـ میانگین حقوق کارکنان بخش فنی و شهرسازی یک شهر 180000 تومان با انحراف معیار 4300 تومان و میانگین حقوق کارکنان بخش مالی آن شهرداری 160000 تومان با انحراف معیار 3200 تومان می‌باشد. ثبات حقوق کدام بخش بیش‌تر است؟ و اختلاف درصد ضریب تغییر چیست؟ (برنامه‌ریزی شهری۸۴)

۱) فنی و 0.21
۲) مالی و 0.21
۳) فنی و 0.39
۴) مالی و 0.39

حل:گزینه ۴ درست است.

با توجه به این‌که میانگین دو بخش متفاوت است از ملاک CV برای مقایسه بین دو بخش استفاده می‌شود:

$$\begin{cases} CV_{\text{فنی}} = \dfrac{\sigma}{\mu}\times 100 = \dfrac{4300}{180000}\times 100 = 0.0239\times 100 = 2.39 \\ CV_{\text{مالی}} = \dfrac{\sigma}{\mu}\times 100 = \dfrac{3200}{160000}\times 100 = 0.02\times 100 = 2 \end{cases}$$

$CV_{\text{مالی}} < CV_{\text{فنی}} \rightarrow$ ثبات حقوق بخش مالی بیشتر است.

اختلاف درصد ضریب تغییرات $= CV_{\text{فنی}} - CV_{\text{مالی}} = 2.39 - 2 = 0.39$

۳۸ـ در 80 داده آماری مجموع تمام داده‌ها برابر 192 و مجموع مجذورات آن‌ها 720 می‌باشد. ضریب پراکندگی (C.V) کدام است؟ (برنامه‌ریزی شهری ۸۵)

۱) 0.25
۲) 0.50
۳) 0.60
۴) 0.75

حل:گزینه ۴ درست است.

$$\sum x = 192 \quad , \quad \sum x^2 = 720 \quad , \quad N = 80$$

$$\begin{cases} CV = \dfrac{\sigma}{\mu} = \dfrac{1.8}{2.4} = \dfrac{3}{4} = 0.75 \\ \sigma^2 = \dfrac{\sum x^2}{N} - \left(\dfrac{\sum x}{N}\right)^2 = \dfrac{720}{80} - (2.4)^2 = 3.24 \rightarrow \sigma = 1.8 \\ \mu = \dfrac{\sum x}{N} = \dfrac{192}{80} = 2.4 \end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....

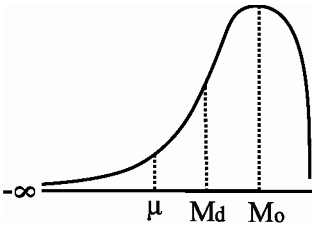
چولگی و کاربرد آن

۳۹ـ در یک توزیع متمایل به راست کدام گزینه صحیح است؟(حسابداری ۷۸)

۱) $\mu_x < Md < Mo$ ۲) $\mu_x < Mo < Md$ ۳) $Mo < Md < \mu_x$ ۴) $Md < Mo < \mu_x$

حل:گزینه ۱ درست است.

چوله به چپ(چولگی منفی)
$Sk < 0$
تمایل به راست
$\mu < Md < Mo$

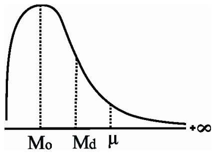


۴۰ـ در حالت چولگی مثبت $(Sk > 0)$، کدام رابطه بین میانگین (μ_x)، مد (Mo) و میانه (Md) برقرار است؟ (مدیریت ۸۱)

۱) $Mo < Md < \mu_x$ ۲) $Mo \le \mu_x < Md$ ۳) $\mu_x < Md < Mo$ ۴) $\mu_x \le Md \le Mo$

حل:گزینه ۱ درست است.

چوله به راست (چولگی مثبت
$Sk > 0$
تمایل به چپ



۴۱ـ میانگین، انحراف معیار و ضریب چولگی سود دو شرکت تجاری A و B در چند سال گذشته به‌صورت زیر بوده است. براین اساس: (اقتصاد ۸۸)

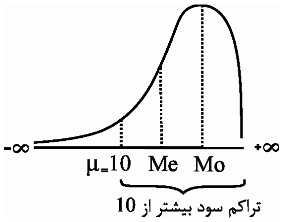
A	B
$\mu_A = 10$	$\mu_B = 10$
$\sigma_A = 2$	$\sigma_B = 2$
$\alpha_3 = -1$	$\alpha_3 = +1$

۱) احتمال سودآوری بیشتر از 10 در شرکت B بیشتر است.
۲) ریسک سرمایه‌گذاری در شرکت B کمتر است.
۳) احتمال سودآوری بیشتر از 10 در شرکت A بیشتر است.
۴) ضریب پراکندگی در شرکت A کمتر است.

حل:گزینه ۳ درست است.

با توجه به این‌که میانگین و انحراف معیار سود در هر دو شرکت یکسان است $\mu_A = \mu_B = 10$ و $\sigma_A = \sigma_B = 2$ بنابراین ضریب پراکندگی آن‌ها نیز یکسان خواهد شد $CV_A = CV_B = \frac{2}{10}$ پس در این وضعیت معیار مقایسه دو شرکت ضریب چولگی آن‌ها خواهد بود.

توزیع سود شرکت A با ضریب چولگی $(\alpha_3 = -1)$ منفی، چوله به چپ خواهد بود، در نتیجه تراکم سود به راست و احتمال سود بیشتر از 10 (میانگین) در آن بیشتر است.



یادداشت:

....

....

....

....

محاسبه ضریب چولگی گشتاوری و تحلیل آن

۴۲ ـ در 50 داده آماری با میانگین 15 و واریانس 4 داریم: $\sum_{i=1}^{50}\left(x_i-15\right)^3=24$، ضریب چولگی و تفاوت جامعه از نظر تقارن با توزیع نرمال چگونه است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۷)

۱) 0.12، تقریباً نرمال
۲) 0.06، تقریباً نرمال
۳) 0.12، تفاوت اندک با نرمال
۴) 0.06، تفاوت اندک با نرمال

حل:گزینه ۲ درست است.

$$\begin{cases} Sk=\dfrac{\dfrac{\sum\left(x_i-\mu\right)^3}{N}}{\sigma^3}=\dfrac{\dfrac{\sum(x_i-15)^3}{50}}{2^3}=\dfrac{\dfrac{24}{50}}{8}=0.06 \\ \mu=15,\ \sigma^2=4\ \rightarrow\ \sigma=2\ ,\ N=50 \end{cases}$$

با توجه به اینکه $|Sk|\le 0.1$ است بنابراین چولگی توزیع تقریباً نرمال است.

۴۳ ـ در 100 داده آماری با میانگین 7 مجموع مربعات تمام داده‌ها 6500 , $\sum_{i=1}^{100}\left(x_i-7\right)^3=192$ ضریب چولگی جامعه چند درصد است؟ (برنامه‌ریزی شهری ۸۶)

۱) 4.6
۲) 3
۳) 2.3
۴) 2

حل:گزینه ۲ درست است.

$$\begin{cases} Sk=\dfrac{\dfrac{\sum\left(x_i-\mu\right)^3}{N}}{\sigma^3}=\dfrac{\dfrac{\sum\left(x_i-7\right)^3}{N}}{\sigma^3}=\dfrac{\dfrac{192}{100}}{4^3}=0.03=\%3 \\ \sigma^2=\dfrac{\sum x^2}{N}-\left(\dfrac{\sum x}{N}\right)^2=\dfrac{6500}{100}-(7)^2=16\rightarrow\sigma=4 \\ N=100\ ,\ \mu=7\ ,\ \sum x^2=6500 \end{cases}$$

۴۴ ـ در جامعه‌ای با حجم $N=20$ کمیت‌های زیر محاسبه شده‌اند. ضریب چولگی توزیع چقدر است؟

$\sum\left(x_i-\mu\right)^2=180\ ,\sum\left(x_i-\mu\right)^3=-180$ **(اقتصاد۸۶)**

۱) -1
۲) -0.33
۳) 0.77
۴) 1

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۲ درست است.

$$\begin{cases} Sk = \dfrac{\dfrac{\sum(x_i-\mu)^3}{N}}{\sigma^3} = \dfrac{\dfrac{-180}{20}}{3^3} = \dfrac{-9}{27} = \dfrac{-1}{3} = -0.33 \\ \sigma^2 = \dfrac{\sum(x_i-\mu)^2}{N} = \dfrac{180}{20} = 9 \to \sigma = 3 \end{cases}$$

۴۵ ـ با توجه به جدول انحراف داده‌ها از میانگین، ضریب چولگی کدام است؟ (۸۸ GIS)

$x-\bar{x}$	-5	-3	-1	1	3	5
f_i	2	5	4	8	2	3

۱) $\frac{2\sqrt{3}}{25}$ ۲) $\frac{5\sqrt{3}}{27}$ ۳) $\frac{3\sqrt{3}}{125}$ ۴) $\frac{6\sqrt{3}}{125}$

حل:گزینه ۴ درست است.

$X-\bar{X}$	-5	-3	-1	1	3	5	
$(X-\bar{X})^2$	25	9	1	1	9	25	
$(X-\bar{X})^3$	-125	-27	-1	1	27	125	
F	2	5	4	8	2	3	$\sum F = N = 24$

$$\text{ضریب چولگی } Sk = \dfrac{\dfrac{\sum F(X-\bar{X})^3}{N}}{\sigma^3} = \dfrac{\dfrac{2(-125)+5(-27)+4(-1)+8(1)+2(27)+3(125)}{24}}{\left(\dfrac{10}{2\sqrt{3}}\right)^3}$$

$$= \dfrac{\dfrac{48}{24}}{\dfrac{1000}{8\times 3\sqrt{3}}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{125}$$

$$\sigma^2 = \dfrac{\sum F(X-\bar{X})^2}{N} = \dfrac{2(25)+5(9)+4(1)+8(1)+2(9)+3(25)}{24} = \dfrac{200}{24} = \dfrac{100}{12} \to \sigma = \sqrt{\dfrac{100}{12}} = \dfrac{10}{2\sqrt{3}}$$

ضریب چولگی پیرسون و چندکی و تحلیل آنها

۴۶ ـ فرض کنید؛ $\mu_x = 37$ ، $Mo = 43.6$ **و واریانس** 144 **باشد؛ ضریب چولگی پیرسون کدام است؟ (حسابداری ۸۳)**

۱) 0.95 ۲) -0.55 ۳) -0.045 ۴) 0.045

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۲ درست است.

$$\begin{cases} (\text{پیرسون})\ Sk = \dfrac{\mu - Mo}{\sigma} = \dfrac{37 - 43.6}{12} = -0.55 \\ \mu = 37\ ,\ Mo = 43.6\ ,\ \sigma^2 = 144 \quad \to \quad \sigma = 12 \end{cases}$$

۴۷ ـ در یک توزیع با میانگین 12.5 و انحراف معیار 3، مقدار میانه 12.7 محاسبه شده است. ضریب چولگی پیرسن و اختلاف آن با نرمال چگونه است؟(حسابداری ۸۴)

۱) 0.2 ـ و تفاوت اندک
۲) 0.2 و تفاوت اندک
۳) 0.1 و تقریباً نرمال
۴) 0.6 و تفاوت زیاد

$$\begin{cases} Sk = \dfrac{3(\mu - Md)}{\sigma} = \dfrac{3(12.5 - 12.7)}{3} = -0.2 \\ \mu = 12.5\ ,\ Md = 12.7\ ,\ \sigma = 3 \end{cases}$$

$0.1 < |Sk| \le 0.5 \leftarrow$ تفاوت اندک با نرمال

۴۸ ـ در یک جدول طبقه‌بندی شده چارک اول، دوم و سوم به ترتیب 12 ,15 و 17 محاسبه شده است، نوع چولگی و از نظر قرینگی، با توزیع نرمال چگونه است؟(حسابداری و مدیریت ـ ۸۸)

۱) چوله به راست ـ تفاوت اندک با نرمال
۲) چوله به راست ـ تفاوت فاحش با نرمال
۳) چوله به چپ ـ تفاوت اندک با نرمال
۴) چوله به چپ ـ تقریبا نرمال

حل:گزینه ۳ درست است.

با توجه به اینکه مقادیر چارک‌ها داده شده است، از فرمول چولگی چندکی استفاده می‌کنیم:

$$Sk = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} = \frac{17 - 2\times 15 + 12}{17 - 12} = \frac{-1}{5} = -0.2$$

چون ضریب چولگی منفی است، توزیع جامعه چوله به چپ بوده و چون $0.1 \le |Sk| = |-0.2| < 0.5$ است، توزیع جامعه تفاوت اندکی با توزیع نرمال دارد.

۴۹ ـ میانه و مد یک جامعه آماری به ترتیب 54 و 72 می‌باشد، توزیع جامعه از نظر چولگی معقول است، میانگین کدام است؟ (GIS ـ ۸۶)

۱) 45
۲) 48
۳) 63
۴) 81

حل:گزینه ۱ درست است.

تنها رابطه میان سه معیار تمرکز وقتی که چولگی جامعه ضعیف (معقول) باشد، به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \mu - Mo = 3(\mu - Md) \quad \to \quad \mu - 72 = 3(\mu - 54) \quad \to \quad 2\mu = 90 \quad \to \quad \mu = 45 \\ Md = 54\ ,\ Mo = 72 \end{cases}$$

یادداشت:

....
....
....
....

کشیدگی

۵۰ ـ برای یک توزیع نرمال استاندارد شده، شاخص کشیدگی یا اوج α_4 دارای چه کمیتی است؟(اقتصاد۸۴)

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

حل:گزینه ۳ درست است.

$\alpha_4 = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} = \dfrac{\dfrac{\sum(x-\mu)^4}{N}}{\sigma^4}$ کشیدگی گشتاوری یا شاخص کشیدگی (اوج) است. این شاخص برای توزیع نرمال برابر عدد 3 است.

۵۱ ـ در یک توزیع نرمال، کشیدگی گشتاوری و کشیدگی صدکی به ترتیب کدام است؟ (از راست به چپ) (GIS ـ ۸۶)

۱) 0.263 و 0.263 ۲) 0.263 و 3 ۳) 3 و 0.263 ۴) 3 و 3

حل: گزینه ۳ درست است

۵۲ ـ اگر $N = 20$ ، $\sum_{i=1}^{20}(x_i-\mu)^4 = 8640$ و واریانس جامعه 12 باشد، ضریب کشیدگی کدام است؟

(حسابداری و مدیریت ـ ۸۶)

۱) صفر ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

حل:گزینه ۱ درست است.

ضریب کشیدگی : $E = \dfrac{\dfrac{\sum (x_i-\mu)^4}{N}}{\sigma^4} - 3 = \dfrac{\dfrac{8640}{20}}{(12)^2} - 3 = \dfrac{432}{144} - 3 = 3 - 3 = 0$

۵۳ ـ در یک توزیع آماری ضریب کشیدگی برابر 0.08- محاسبه شده است، پراکندگی این توزیع و منحنی آن چگونه است؟
(حسابداری و مدیریت ۸۵)

۱) تقریباً نرمال ـ بلندتر از نرمال
۲) تقریباً نرمال ـ کوتاه‌تر از نرمال
۳) تفاوت اندکی با نرمال ـ کوتاه‌تر از نرمال
۴) تفاوت اندکی با نرمال ـ بلندتر از نرمال

حل:گزینه ۲ درست است.

۵۴ ـ با توجه به منفی بودن ضریب کشیدگی، کشیدگی توزیع کوتاه‌تر از نرمال است و چون $0 < |E| \le 0.1$ کشیدگی توزیع تقریباً نرمال است.

در یک توزیع آماری ضریب کشیدگی $E = -0.20$ محاسبه شده است، این توزیع با مقایسه توزیع نرمال چگونه است؟

(برنامه‌ریزی شهری ۸۵)

۱) پراکندگی بیشتر ـ تفاوت اندک
۲) پراکندگی کمتر ـ تفاوت اندک
۳) پراکندگی بیشتر ـ تقریباً نرمال
۴) پراکندگی کمتر ـ تقریباً نرمال

یادداشت:

....

....

....

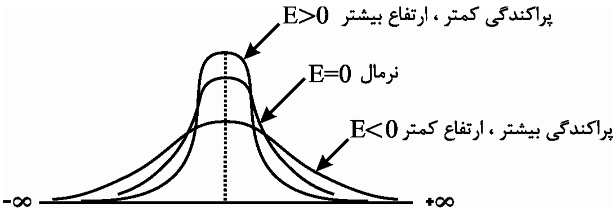
....

حل:گزینه ۱ درست است.

با توجه به دو نکته زیر:

۱ـ هر چه ارتفاع منحنی کمتر باشد، پراکندگی‌اش بیشتر است و هر چه ارتفاع منحنی بیشتر باشد، پراکندگی‌اش کمتر است. در این سؤال چون ضریب کشیدگی منفی است پس ارتفاع منحنی از توزیع نرمال کمتر است و پراکندگی‌اش بیشتر.

۲ـ $0.1 < |E| \le 0.5$ کشیدگی غیرقابل اغماض و تفاوت اندک با نرمال دارد.



۵۵ ـ ضریب کشیدگی یک جامعه -0.6 است. جامعه مورد مطالعه: (مدیریت ۷۷)

۱) دارای چولگی فاحش است.
۲) در مقایسه با جامعه نرمال تفاوتی ندارد.
۳) در مقایسه با جامعه نرمال تفاوت اندکی دارد.
۴) در مقایسه با جامعه نرمال تفاوت فاحشی دارد.

حل:گزینه ۴ درست است.

$|E| > 0.5$ کشیدگی جامعه در مقایسه با نرمال تفاوت فاحشی دارد.

انحراف متوسط از میانگین

هشت نمره 6 ، 3 ، 8 ، 9 ، 2 ، 4 ، 5 ، 3 را در نظر بگیرید:

۵۶ ـ انحراف متوسط آن‌ها نسبت به میانگین برابر است با: (برنامه‌ریزی شهری۸۲)

۱) 2
۲) 3
۳) 4
۴) 12

حل:گزینه ۱ درست است.

$$\begin{cases} A.D_{\mu} = \dfrac{\sum |x_i - \mu|}{N} = \dfrac{|3-5|+|5-5|+|4-5|+|2-5|+|9-5|+|8-5|+|3-5|+|6-5|}{8} \\ \quad = \dfrac{2+0+1+3+4+3+2+1}{8} = 2 \\ \mu = \dfrac{\sum x_i}{N} = \dfrac{3+5+4+2+9+8+3+6}{8} = \dfrac{40}{8} = 5 \end{cases}$$

واریانس

۵۷ ـ واریانس داده‌ها با جدول فراوانی زیر کدام است؟(حسابداری ۷۷)

x_i	-1	0	1	2
F_i	2	3	4	1

۱) 0.76
۲) 0.78
۳) 0.82
۴) 0.84

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۴ درست است.

برای محاسبه واریانس از روی جدول فراوانی بهتر است جدول را به شکل زیر کامل کنید و سپس واریانس را محاسبه کنید.

x_i	F_i	$F_i x_i$	$F_i x_i^2$
-1	2	-2	2
0	3	0	0
1	4	4	4
2	1	2	4
	$\sum F_i = N = 10$	$\sum F_i x_i = 4$	$\sum F_i x_i^2 = 10$

$$\sigma^2 = \frac{\sum F_i x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum F_i x_i}{N}\right)^2 = \frac{10}{10} - \left(\frac{4}{10}\right)^2 = 1 - 0.16 = 0.84$$

۵۸ ـ واریانس اعداد 6 و 5 و 4 و 3 و 2 در جامعه‌ای برابر است با: (مدیریت ۷۰)

۱) 2 ۲) $\sqrt{3}$ ۳) 5.5 ۴) 3

حل:گزینه ۱ درست است.

برای داده‌های خام جامعه از این فرمول واریانس $\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}$ استفاده کنید.

$x: 2 , 3 , 4 , 5 , 6$

$$\begin{cases} \mu = \frac{\sum x}{N} = \frac{2+3+4+5+6}{5} = \frac{20}{5} = 4 \\ \sigma^2 = \frac{\sum (x-\mu)^2}{N} = \frac{(2-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2}{5} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2 \end{cases}$$

راه حل دوم: در هر تصاعد حسابی با N جمله و با قدرنسبت d داریم:

$$\mu = \frac{\text{داده اول + داده آخر}}{2} \quad , \quad \sigma^2 = \frac{d^2 (N^2 - 1)}{12}$$

در این سؤال نیز داده‌ها $2,3,4,5,6$ تشکیل تصاعد حسابی با قدرنسبت 1 داده‌اند بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \mu = \frac{2+6}{2} = 4 \\ \sigma^2 = \frac{1^2 (5^2 - 1)}{12} = 2 \\ N = 5 , d = 1 \end{cases}$$

۵۹ ـ در 100 داده آماری $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 400$ و $\sum_{i=1}^{100} x_i = 120$ است، مقدار $\sum_{i=1}^{100} (x_i - \mu)^2$ کدام است؟ (حسابداری۸۴)

۱) 64 ۲) 144 ۳) 196 ۴) 256

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۴ درست است.

$$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{N}=\frac{\sum x_i^2}{N}-\left(\frac{\sum x_i}{N}\right)^2=\frac{400}{100}-\left(\frac{120}{100}\right)^2=4-1.44=2.56$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{100}(x_i-\mu)^2}{N}=2.56 \;\rightarrow\; \sum_{i=1}^{100}(x_i-\mu)^2=100\times 2.56=256$$

۶۰ ـ اگر واریانس 5 عدد 14 و $\sum x_i^2=390$ باشد، میانگین اعداد برابر است با: (مدیریت ۷۸)

۱) 5.12 ۲) 3.2 ۳) 2.56 ۴) 8

حل:گزینه ۴ درست است.

$$\begin{cases}\sigma^2=\dfrac{\sum x_i^2}{N}-\left(\dfrac{\sum x_i}{N}\right)^2 \;\rightarrow\; 14=\dfrac{390}{5}-\mu^2 \;\rightarrow\; \mu^2=64 \;\rightarrow\; \mu=8\\ \sigma^2=14\,,\ N=5\end{cases}$$

۶۱ ـ اگر میانگین مقادیر x برابر 10 و میانگین مقادیر مجذورات x برابر 1000 باشد، واریانس مقادیر x چقدر است؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) 600 ۲) 700 ۳) 800 ۴) 900

حل:گزینه ۴ درست است.

$$\begin{cases}\sigma^2=\dfrac{\sum x^2}{N}-\left(\dfrac{\sum x}{N}\right)^2=1000-(10)^2=1000-100=900\\ \dfrac{\sum x^2}{N}=1000 \quad \text{(میانگین مقادیر مجذورات)}\\ \dfrac{\sum x}{N}=10 \quad \text{(میانگین مقادیر x)}\end{cases}$$

☜یادآوری:

$$\begin{cases}\sum x & \text{مجموع مقادیر}\\ \dfrac{\sum x}{N} & \text{میانگین مقادیر}\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}\sum x^2 & \text{مجموع مجذورات}\\ \dfrac{\sum x^2}{N} & \text{میانگین مجذورات}\end{cases}$$

۶۲ ـ در یک جدول توزیع فراوانی که شامل 100 مشاهده است، میانگین 6 و $\sum f_i x_i^2=5000$ است. واریانس این مشاهدات چقدر است؟(اقتصاد ۸۵)

۱) 1 ۲) 14 ۳) 44 ۴) 49

حل:گزینه ۲ درست است.

یادداشت:

....

....

....

....

در صورت سؤال منظور از f_i همان فراوانی مطلق (F_i) بوده است.

$$\begin{cases} \sigma^2 = \dfrac{\sum F_i x_i^2}{N} - \left(\dfrac{\sum F_i x_i}{N}\right)^2 = \dfrac{\sum F_i x_i^2}{N} - \mu^2 = \dfrac{5000}{100} - (6)^2 = 50 - 36 = 14 \\ N = 100\ ,\ \mu = 6\ ,\ \sum f_i x_i^2 = 5000 \end{cases}$$

۶۳ـ واریانس نمونه متشکل از سه عدد 567921120 و 567921124 و 567921122 کدام است؟ (اقتصاد ۷۹)

۱) $\frac{8}{3}$　　۲) 4　　۳) $\frac{25124}{3}$　　۴) 25112

حل: گزینه ۲ درست است.

به دو نکته در این سؤال باید دقت کنیم، اول کلمه **واریانس نمونه** و دوم توجه به این خاصیت واریانس که قسمت مشترک اعداد را می‌توان حذف کرد.

$$\begin{cases} x_i = 0\ ,\ 4\ ,\ 2 \\ n = 3 \end{cases} \rightarrow \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{0+4+2}{3} = 2$$

$$\text{(نمونه)}\ S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{(0-2)^2 + (4-2)^2 + (2-2)^2}{3-1} = \frac{4+4+0}{2} = 4$$

خواص واریانس و انحراف‌معیار

۶۴ـ اگر میانگین و واریانس x به ترتیب 3 و 9 باشد، میانگین و انحراف معیار $y = \frac{1}{2}x + 1$ کدام است؟ (مدیریت ۷۶)

۱) $\mu = 1.5$ ،$\sigma = 2.5$　　۲) $\mu = 1.5$ ،$\sigma = 1.5$

۳) $\mu = 2.5$ ،$\sigma = 4.5$　　۴) $\mu = 2.5$ ،$\sigma = 1.5$

حل:گزینه ۴ درست است.

$$\begin{cases} \mu_y = \mu\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{2}\mu_x + 1 = \frac{1}{2} \times 3 + 1 = 2.5 \\ \sigma_y^2 = \sigma^2\left(\frac{1}{2}x + \underset{0}{\cancel{1}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma_x^2 = \frac{1}{4} \times 9 = \frac{9}{4} \quad \rightarrow \quad \sigma_y = \frac{3}{2} = 1.5 \\ \mu_x = 3\ ,\ \sigma_x^2 = 9 \end{cases}$$

۶۵ـ اگر متغیر x دارای میانگین μ و انحراف معیار σ باشد، متغیر $y = x - \frac{\mu}{\sigma}$ به ترتیب دارای چه میانگین و انحراف معیاری خواهد بود؟ (اقتصاد ۷۷)

۱) $1, \mu$　　۲) $1, 0$　　۳) $\sigma, \mu\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)$　　۴) $\sigma, \mu\left(\frac{1}{\sigma} + 1\right)$

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۳ درست است.

$$y = x - \frac{\mu}{\sigma}$$
$$\mu(y) = \mu\left(x - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \mu_{(x)} - \frac{\mu}{\sigma} = \mu - \frac{\mu}{\sigma} = \mu\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)$$
$$\sigma(y) = \sigma\left(x - \underbrace{\cancel{\frac{\mu}{\sigma}}}_{0}\right) = \sigma_x = \sigma$$

۶۶ـ اگر $y_i = \frac{x_i \pm a}{h}$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟ (اقتصاد ۷۹)

۱) $\bar{y} = \bar{x} \pm a \ , \sigma_y^2 = \frac{\sigma_x^2 + a}{h^2}$

۲) $\bar{y} = h(\bar{x} - a) \ , \sigma_y^2 = \frac{\sigma_x^2 + a}{h^2}$

۳) $\bar{y} = h(x + a) , \sigma_y^2 = \frac{\sigma_x^2 + a^2}{h^2}$

۴) $\bar{y} = \frac{(\bar{x} \pm a)}{h} , \sigma_y^2 = \frac{\sigma_x^2}{h^2}$

حل:گزینه ۴ درست است.

با توجه به خواص میانگین و واریانس داریم:

$$y_i = \frac{x_i \pm a}{h}$$
$$\begin{cases} \mu_y = \mu\left(\frac{x \pm a}{h}\right) = \frac{1}{h}\mu(x \pm a) = \frac{\mu_x \pm a}{h} \to \bar{y} = \frac{\bar{x} \pm a}{h} \\ \sigma_y^2 = \sigma^2\left(\frac{x \pm a}{h}\right) = \left(\frac{1}{h}\right)^2 \sigma^2(x \pm \underbrace{\cancel{a}}_{0}) = \frac{\sigma_x^2}{h^2} \to \sigma_y^2 = \frac{\sigma_x^2}{h^2} \end{cases}$$

۶۷ـ انحراف معیار داده‌های آماری $a,b,c,d,12$ برابر صفر است. میانگین داده‌های $2a,2b,2c,2d,24$ کدام است؟ (GIS ۸۰)

۱) 7.2
۲) 12
۳) 18
۴) 24

حل:گزینه ۴ درست است.

خواص انحراف معیار یا واریانس: در صورتی σ^2 یا σ برابر صفر می‌شود که همه داده‌ها با هم برابر باشند

بنابراین در این سؤال:

$$\sigma = 0 \leftrightarrow a = b = c = d = 12$$

حال میانگین داده‌های:

$$2a , 2b , 2c , 2d , 24 = 24 , 24 , 24 , 24 , 24$$

خواص میانگین حسابی: میانگین داده‌های مساوی با خود داده‌ها برابر است بنابراین:

$$\mu = 24$$

یادداشت:

....

....

....

....

کاربرد واریانس

۶۸ـ کدام‌یک از پارامترهای زیر بیشتر تحت تأثیر انحرافات بزرگ است؟ (حسابداری۸۲ و GIS۸۵ و ۸۷)

۱) واریانس　　　۲) نیم دامنه

۳) انحراف چارکی　　　۴) انحراف متوسط از میانگین

حل:گزینه ۱ درست است.

اگر چه انحراف متوسط از میانگین در نمایش پراکندگی داده‌ها با ثبات‌تر از انحراف چارکی و نیمه دامنه بود اما با توجه به مشکلات زیر نمی‌تواند انحرافات بزرگ را به خوبی نمایش دهد.

مشکلات پارامتر پراکندگی انحراف متوسط از میانگین:

۱ـ علامت جبری داده‌ها در نظر گرفته نمی‌شود.

۲ـ تأثیر انحرافات بزرگ در مقابل تعداد زیادی انحراف کوچک قابل نمایش نیست.

در این وضعیت واریانس با توجه به آن‌که مجذور انحرافات را در نظر می‌گیرد، تأثیر انحرافات بزرگ را به خوبی نمایش می‌دهد.

۶۹ـ واریانس کدام‌یک از چهار مجموعه زیر بیشتر است؟(اقتصاد۷۰)

۱) 8، 8، 7، 5، 4، 2، 1، 1　　　۲) 8، 8، 8، 5، 4،1، 1، 1

۳) 8، 8، 8، 8، 1، 1، 1، 1　　　۴) 8، 7، 6، 5، 4، 3، 2، 1

حل: گزینه ۳ درست است.

راه حل اول:

در این سؤال نیازی به محاسبه واریانس نیست. اولاً، در تمام گزینه‌ها مجموع داده‌ها $\sum_{i=1}^{8} x_i = 36$ و میانگین $\mu = \frac{36}{8} = 4.5$ است؛ ثانیاً، چون برای واریانس باید $\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N}$ محاسبه شود و در گزینه ۳ عبارت $(x_i - \mu)^2$ برای تمام مشاهدات یا $(1-4.5)^2$ است یا $(8-4.5)^2$ که نسبت به مشاهدات گزینه‌های دیگر بیشتر است؛ درنتیجه واریانس بیشتری دارد. در گزینه ۴ عبارت $(x_i - \mu)^2$ فقط در دو مشاهده $(1-4.5)^2$ و $(8-4.5)^2$ است و در سایر مشاهدات کمتر از این دو مقدار است؛ بنابراین کمترین واریانس را در بین گزینه‌ها دارد. پس گزینه‌ها به ترتیب بیشترین واریانس تا کمترین واریانس عبارت‌اند از: ۳، ۲، ۱ و ۴.

راه حل دوم:

در گزینه ۳ انحراف داده‌ها از یکدیگر 0 یا 7 است، اما در گزینه‌های دیگر انحراف داده‌ها از یکدیگر بین 0 و 7 است؛ بنابراین گزینه ۳ پراکندگی بیشتر و درنتیجه واریانس بیشتری دارد. درعین‌حال در گزینه ۴ چون داده‌ها به هم نزدیک هستند، کمترین پراکندگی و درنتیجه کمترین واریانس را دارند.

یادداشت:

....

....

....

....

جداول با حدود طبقات بزرگ

برای ساده کردن محاسبات در جداولی که حدود دسته‌های آن‌ها اعداد دورقمی یا بزرگ‌تر هستند، از روش زیر برای محاسبه واریانس استفاده می‌شود:

الف) طبقه‌ای را که دارای بیشترین فراوانی است $(L_k - U_k)$ انتخاب می‌کنیم و جدول فراوانی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$x_i' = \dfrac{x_i - a}{I}$: مرکز طبقات جدید

$a = \dfrac{L_k + U_k}{2}$: مرکز طبقه دارای بیشترین فراوانی

I : فاصله طبقات

x'	$\cdots$	-2	-1	$\boxed{0}$	1	2	$\cdots$
$C-L$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\boxed{L_k - U_k}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
F_i	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\boxed{F_k}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

ب) واریانس را با مرکز طبقات جدید محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma_{X'}^2 = \frac{\sum F_i (x_i')^2}{N} - (\mu_{X'})^2 = \frac{\sum F_i (x_i')^2}{N} - \left(\frac{\sum F_i x_i'}{N}\right)^2$$

ج) با توجه به خواص واریانس، واریانس داده‌های اصلی (σ_X^2) برابر است با:

$$\sigma_{X'}^2 = \sigma^2\left(\frac{x_i - a}{I}\right) = \frac{1}{I^2}\sigma_X^2 \longrightarrow \sigma_X^2 = \sigma_{X'}^2 \times I^2$$

۷۰ ـ انحراف معیار داده‌های جدول زیر کدام است؟

$C-L$	$20-30$	$30-40$	$40-50$
F_i	10	25	15

۱) 0.7 ۲) 7
۳) 0.4 ۴) 4

حل: گزینه ۲ درست است.

برای محاسبه انحراف معیار، ابتدا باید واریانس داده‌ها را به دست آوریم.

الف) طبقه $(30-40)$ دارای بیشترین فراوانی است؛ بنابراین جدول به صورت زیر خواهد بود:

x'	-1	$\boxed{0}$	1
$C-L$	$20-30$	$\boxed{30-40}$	$40-50$
F_i	10	$\boxed{25}$	15

ب) واریانس را با مرکز طبقات جدید محاسبه می‌کنیم:

x'	-1	0	1	
F_i	10	25	15	$N = \sum F_i = 50$
$F_i x_i'$	-10	0	15	$\sum F_i x_i' = 5$
$F_i (x_i')^2$	10	0	15	$\sum F_i (x_i')^2 = 25$

$$\sigma_{X'}^2 = \frac{\sum F_i (x_i')^2}{N} - \left(\frac{\sum F_i x_i'}{N}\right)^2 = \frac{25}{50} - \left(\frac{5}{50}\right)^2 = 0.5 - 0.01 = 0.49$$

یادداشت:

....

....

....

....

ج) واریانس داده‌های اصلی $\left(\sigma_X^2\right)$ برابر است با:

$$\begin{cases} \sigma_X^2 = \sigma_{X'}^2 \times I^2 \quad \rightarrow \quad \sigma_X^2 = (0.49)\times(10)^2 = 49 \\ \sigma_{X'}^2 = 0.49 \ , \ I=10 \end{cases}$$

بنابراین انحراف معیار داده‌ها برابر است با:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{49} = 7$$

یادداشت:

....

....

....

....

فصل دوم

آنالیز ترکیبی و احتمال

آنالیز ترکیبی

۱. شش نفر کارشناس مدیریت را به چند طریق می‌توان به 3 شهر اعزام کرد به طوری که تعداد افراد اعزامی به دو شهر برابر نباشند؟ (حسابداری و مدیریت ــ ۸۸)

۱) 60 ۲) 180 ۳) 240 ۴) 360

حل:گزینه ۴ درست است.

یادآوری: تعداد تقسیمات n شیء در k سلول به طوری که n_1 تای آن‌ها در سلول اول، n_2 تای آن‌ها در سلول دوم، ... و n_k تای آن‌ها در سلول kام قرار گیرد، برابر است با:

$$\binom{n}{n_1 \; n_2 \; \dots \; n_k} = \frac{n!}{n_1! \, n_2! \dots n_k!}$$

تنها حالت تقسیم 6 نفر به 3 شهر به طوری که تعداد افراد دو شهر یکسان نباشند $(1, 2, 3)$ است که البته با جایگشت $3!$ در بین سه شهر 6 حالت امکان‌پذیر است.

بنابراین می‌خواهیم 6 نفر را در 3 شهر تقسیم کنیم به طوری که در یکی از شهرها 1 و در دیگری 2 و در شهر دیگر 3 نفر قرار گیرد:

$$3! \times \binom{6}{1 \; 2 \; 3} = 6 \times \frac{6!}{1! \; 2! \; 3!} = 6 \times 60 = 360$$

یادداشت:

....

....

....

....

۲. تعداد حالات ممکن از تقسیم 10 نفر به سه گروه 5 ,3 و 2 نفری برابر است با: (اقتصاد ـ ۸۶)

۱) 1440 ۲) 2520 ۳) 2630 ۴) 5040

حل:گزینه ۲ درست است.

یادآوری: تعداد کل حالات تقسیم n شیء متمایز در k گروه به طوری که گروه اول شامل n_1 عضو متمایز، ... و گروه kام شامل n_k عضو متمایز باشد برابر است با:

$$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

حال تعداد حالات تقسیم 10 نفر به سه گروه 5 ,3 و 2 نفری برابر است با:

$$\binom{10}{5\ 3\ 2} = \frac{10!}{5!3!2!} = 2520$$

۳. در یک مسابقه دوچرخه‌سواری 43 دوچرخه‌سوار قرار است در یک جاده کمربندی دور شهری مسابقه دهند. در چند مورد یا حالت دوچرخه‌سواران می‌توانند مقام اول، دوم و سوم را کسب نمایند؟(اقتصاد ـ ۸۷)

۱) 129 ۲) 1763 ۳) 12341 ۴) 74046

حل:گزینه ۴ درست است.

کل دوچرخه‌سواران 43 نفر هستند که از بین این 43 نفر، 3 نفر مقام‌های اول و دوم و سوم را کسب می‌کنند. دقت کنید که ترتیب مقام‌ها برای ما مهم است، بنابراین تعداد حالات انتخاب این سه نفر ترتیب 3 از 43 خواهد بود.

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \rightarrow \quad P_{43}^3 = \frac{43!}{(43-3)!} = \frac{43!}{40!} = 41 \times 42 \times 43 = 74046$$

به عبارت دیگر چون ترتیب مقام‌ها مهم است داریم:

$$\underset{\text{رتبه اول}}{41} \times \underset{\text{رتبه دوم}}{42} \times \underset{\text{رتبه سوم}}{43} = 74046$$

۴. از بین حروف کلمه MANAGEMENT به چند طریق می‌توان سه حرف انتخاب کرد؟ (برنامه‌ریزی شهری ـ ۸۷)

۱) 30 ۲) 32 ۳) 36 ۴) 40

حل:گزینه ۴ درست است.

حروف کلمه MANAGEMENT شامل 6 حرف متمایز است که حروف E, N, A, M هر یک 2 بار تکرار شده است.

انتخاب سه حرف از 6 حرف متمایز: $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$

حال چون هیچ محدودیتی در انتخاب این 3 حرف نیست پس این سه حرف می‌توانند مشابه نیز باشند.

اگر هر کدام از چهار حرف E, N, A, M دو بار تکرار شوند می‌توانند با یک حرف از 5 حرف متمایز دیگر 3 حرف بسازند که دو تای آن تکراری است، مثلاً:

$$(M,M,A),(M,M,N),(M,M,E)(M,M,G)(M,M,T)$$

یادداشت:

....

....

....

....

همین تکرارها برای E, N, A نیز وجود دارد، بنابراین:

$4\times5=20$ = انتخاب 3 حرف با 2 حرف تکراری و یک حرف غیر تکراری

بنابراین تعداد کل سه‌حرفی‌های انتخابی برابر است با $20+20=40$.

۵ . با حروف کلمه APPLICATION به چند طریق می‌توان یک رمز عبوری سه‌حرفی ساخت؟

(برنامه‌ریزی شهری ــ ۸۸)

۱) 360 ۲) 378 ۳) 399 ۴) 420

حل:گزینه ۳ درست است.

کلمه APPLICATION شامل 8 حرف متمایز (A,P,L,I,C,T,O,N) است که حروف P, A و I هر یک 2 بار تکرار شده‌اند.

می‌خواهیم رمز عبور سه‌حرفی تشکیل دهیم، بدون هیچ محدودیتی در مشابه بودن حروف رمز؛

تعداد حالات انتخاب 3 حرف متمایز از 8 حرف برابر است با:

$$\binom{8}{3}\times\underbrace{3!}_{\text{جایگشت 3 حرف}}=\frac{8!}{3!5!}\times3!=6\times7\times8=336$$

تعداد حالات انتخاب 2 حرف تکراری A یا P یا I با یک حرف متمایز دیگراز بین 7 حرف متمایز باقی‌مانده برابر است با:

$$\underbrace{3}_{\text{A یا P یا I}}\times\binom{7}{1}\times\underbrace{\frac{3!}{2!\,1!}}_{\text{جایگشت 3 حرف با 2 حرف مشابه}}=3\times7\times3=63$$

بنابراین تعداد کل انتخاب‌ها برابر است با $336+63=399$.

۶ . به چند طریق می‌توان فقط به 10 پرسش از 12 پرسش داده‌شده پاسخ داد به شرط آنکه حداقل 4 پرسش اول از 5 پرسش اجباری باشد؟ (GIS ــ ۸۶)

۱) 56 ۲) 65 ۳) 120 ۴) 140

حل:گزینه ۱ درست است.

یادآوری: انتخاب k شیء از n شیء بدون جایگذاری و بدون توجه به ترتیب انتخاب آن‌ها ترکیب k از n است:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

درکل باید به 10 پرسش از 12تا پاسخ دهیم اما باید این 12 پرسش را به 5تای اول و 7تای بقیه تفکیک کنیم. سپس حداقل 4 تا از 5تای اول را پاسخ دهیم و بقیه پاسخ‌ها باید از 7تای باقی‌مانده باشد:

$$\binom{5}{4}\binom{7}{6}+\binom{5}{5}\binom{7}{5}=5\times7+1\times21=56$$

۷ . از حروف کلمه OPERATOR به چند طریق می‌توان 4 حرف کنار گذاشت؟ (GIS ــ ۸۷)

۱) 32 ۲) 36 ۳) 70 ۴) 72

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۲ درست است.

کلمه OPERATOR شامل 8 حرف است که حروف O و R هر یک 2 بار تکرار شده‌اند.

انتخاب 4 حرف از 6 حرف متمایز (OPERAT) $\binom{6}{4}=15$

از 4 حرف انتخابی، 2 حرف O و 2 حرف دیگر از (PERAT) $\binom{2}{2}\binom{5}{2}=10$

از 4 حرف انتخابی، 2 حرف R، 2 حرف دیگر از (OPEAT) $\binom{2}{2}\binom{5}{2}=10$

4 حرف انتخابی شامل 2 حرف O و 2 حرف R باشد. $\binom{2}{2}\binom{2}{2}=1$

$15+10+10+1=36$:مجموع انتخاب‌ها

۸ . 5 تیم دونفره بدمینتون در یک مسابقه شرکت می‌کنند. فرض کنید این افراد قرار است دور یک میز طوری قرار بگیرند که نفرات هر تیم در کنار هم قرار داشته باشند. این افراد به چند طریق می‌توانند دور این میز قرار بگیرند؟ (محیط زیست ــ ۸۷)

۱) $4!\times 2^4$ ۲) $4!\times 2^5$ ۳) $5!\times 2^4$ ۴) $5!\times 2^5$

حل:گزینه ۲ درست است.

یادآوری: جایگشت n نفر در یک ردیف برابر با $n!$ و جایگشت n نفر دور یک میز برابر است با $(n-1)!$.

در این سؤال ابتدا افراد هر تیم را در کنار هم قرار می‌دهیم $(2!)^5$. حال 5 تیم به صورت $(5-1)!=4!$ می‌توانند دور میز قرار گیرند.

بنابراین کل حالات برابر است با: $4!(2!)^5=4!2^5$

روابط احتمالاتی

۹ . در یک آزمایش مهارت احتمال موفقیت دو نفر به ترتیب $\frac{3}{5}$ و $\frac{1}{2}$ است. با کدام احتمال لااقل یکی از آن دو موفق می‌شوند؟ (حسابداری و مدیریت ــ ۸۷)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{5}{6}$

حل:گزینه ۳ درست است.

با توجه به اینکه موفقیت هر نفر مستقل از دیگری است داریم:

راه حل اول: $P(\text{لااقل یکی موفق})=1-P(\text{هیچ موفق})=1-\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$

راه حل دوم: $P(\text{لااقل یکی موفق})=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{5}+\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

۱۰ . اگر $A\cup B$ برابر فضای نمونه، $P(A)=0.7$ و $P(B)=0.6$ باشد، مقدار $P(B-A')$ چقدر است؟ (اقتصاد ــ ۸۸)

۱) 0.18 ۲) 0.3 ۳) 0.42 ۴) 0.7

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۲ درست است.

یادآوری:

$$P(A-B)=P(A\cap B')$$

بنابراین :

$P(B-A')=P\Big(B\cap(A')'\Big)=P(B\cap A)\rightarrow$ کافی است $P(A\cap B)$ را پیدا کنیم.

حال با توجه به اینکه $A\cup B$ برابر فضای نمونه است یعنی $P(A\cup B)=1$ داریم:

$$P(A)+P(B)-P(A\cap B)=1\ \rightarrow\ 0.7+0.6-P(A\cap B)=1\ \rightarrow\ P(A\cap B)=0.3$$

احتمال

۱۱. اعداد 6, 5, 4, 3, 2, 1 بر روی 6 مهره یکسان نوشته شده‌اند، اگر دو مهره را با هم بیرون آوریم با کدام احتمال مجموع اعداد این دو مهره مضرب 3 خواهد بود؟ (حسابداری و مدیریت ــ ۸۶)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{4}{15}$

حل:گزینه ۱ درست است.

A : مجموع دو عدد مضرب 3 باشد. $A=\{(1,2),(1,5),(2,4),(3,6),(4,5)\}$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5}{\binom{6}{2}}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

۱۲. ارقام 3, 3, 2, 2, 1 و 1 به‌تصادف کنار هم قرار می‌گیرند. با کدام احتمال بین هر دو رقم یکسان دو رقم متمایز قرار می‌گیرند؟ (حسابداری و مدیریت ــ ۸۷)

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{15}$ ۴) $\frac{1}{18}$

حل:گزینه ۳ درست است.

یادآوری: جایگشت n شیء که n_1 تای آن‌ها شبیه هم، n_2 تای آن‌ها شبیه هم، ... و n_k تای آن‌ها شبیه هم باشد برابر است با:

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \dots\ n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

بنابراین جایگشت کل ارقام 1,1,2,2,3,3 برابر است با: $n(s)=\frac{6!}{2!2!2!}=\frac{720}{8}=90$

برای تعداد حالات مساعد بهتر است حالات را بررسی کنیم. می‌خواهیم بین هر دو رقم یکسان، دو رقم متمایز باشد یعنی:

بین دو 2

1 2 3 1 2 3

بین دو 1 بین دو 3

یادداشت:

....

....

....

....

دقت کنید که سه رقم اول در این حالت با سه رقم دوم دقیقاً برابر و در جای یکسان هستند. در تمامی حالات مساعد این اتفاق می‌افتد پس تعداد حالات مساعد برابر جایگشت 3 رقم اول است. به حالات مساعد نگاه کنید:

1	2	3	1	2	3
1	3	2	1	3	2
2	3	1	2	3	1
2	1	3	2	1	3
3	1	2	3	1	2
3	2	1	3	2	1

$$\begin{cases} P(A)=\dfrac{n(A)}{n(s)}=\dfrac{6}{90}=\dfrac{1}{15} \\ n(A)=3!=6 \end{cases}$$

۱۳. شش نفر دانشجو که دو نفر آنان از گروه مدیریت، دو نفر از گروه حسابداری و دو نفر دیگر از گروه آمار می‌باشند دور یک میز گرد می‌نشینند. با کدام احتمال افراد هم‌گروه کاملاً مقابل هم قرار می‌گیرند؟(حسابداری و مدیریت ــ ۸۸)

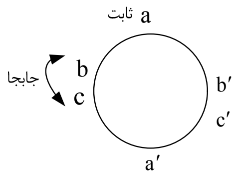
۱) $\frac{1}{15}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{6}$

حل:گزینه ۱ درست است.

یادآوری: جایگشت n نفر دور یک میز (دایره‌ای) برابر $(n-1)!$ است، بنابراین کل این 6 نفر به $(6-1)!$ حالت می‌توانند دور میز قرار گیرند:

کل حالات $=(6-1)!=5!$

حالات مساعد: برای قرار گرفتن افراد هر گروه مقابل یکدیگر ابتدا یک نفر را در جای ثابتی می‌نشانیم، سپس نفر دیگر گروهش را مقابلش قرار می‌دهیم:



حال برای دو گروه باقی‌مانده 2 حالت بیشتر وجود ندارد که مقابل هم باشند و افراد هر گروه نیز به !2 می‌توانند با هم جابجا شوند؛ بنابراین تعداد حالات مساعد برابر است با $2\times(2!)^2$.

$$\text{احتمال مورد نظر}=\frac{\text{حالات مساعد}}{\text{کل حالات}}=\frac{2\times(2!)^2}{5!}=\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$$

۱۴.در یک رمز عبور شش‌رقمی بدون صفر با کدام احتمال دقیقاً سه رقم مضرب 3 و یک رقم مضرب 4 می‌باشد؟

(حسابداری و مدیریت ــ ۸۸)

۱) $\frac{320}{81\times81}$ ۲) $\frac{640}{81\times81}$ ۳) $\frac{80}{27\times27}$ ۴) $\frac{160}{27\times27}$

حل:گزینه ۲ درست است.

می‌خواهیم با ارقام $1, 2, \dots, 9$ یک رمز 6 رقمی بسازیم.

کل حالات $=\boxed{9}\times\boxed{9}\times\boxed{9}\times\boxed{9}\times\boxed{9}\times\boxed{9}=9^6$

حال می‌خواهیم در این رمز فقط 3 رقم مضرب 3 ، یک رقم مضرب 4 و 2 رقم دیگر از بین مابقی ارقام باشد، بنابراین:

ارقام مضرب 3 : 3 , 6 , 9

ارقام مضرب 4 : 4 , 8

مابقی ارقام : 1 , 2 , 5 , 7

یادداشت:

....

....

....

....

ابتدا 3 مکان از 6 مکان را انتخاب می‌کنیم $\binom{6}{3}$ و ارقام مضرب 3 را در آن قرار می‌دهیم، سپس 1 مکان از 3 مکان باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم $\binom{3}{1}$ و ارقام مضرب 4 را در آن قرار می‌دهیم و در آخر 2 مکان باقی می‌ماند که ارقام باقی‌مانده را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$\underbrace{\boxed{3}\boxed{3}\boxed{3}}_{\text{مضرب 3}}\quad \underbrace{\boxed{2}}_{\text{مضرب 4}}\quad \underbrace{\boxed{4}\boxed{4}}_{\text{مابقی}}$$

حالات مساعد: $\underbrace{\binom{6}{3}\times 3^3}_{\text{3 مکان مضرب 3}} \times \underbrace{\binom{3}{1}\times 2}_{\text{1 مکان مضرب 4}} \times \underbrace{\binom{2}{2}\times 4^2}_{\text{2 مکان مابقی}}$

$$\text{احتمال مورد نظر} = \frac{\text{حالات مساعد}}{\text{کل حالات}} = \frac{\binom{6}{3}3^3\times\binom{3}{1}2\times 4^2}{9^6} = \frac{20\times\cancel{3^4}\times 2\times 4^2}{\cancel{9^6}\,9^4} = \frac{640}{81\times 81}$$

۱۵. ارقام 3 ,2 ,2 ,1 و 1 را تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم با کدام احتمال سه رقم متوالی به ترتیب صعودی، در عدد 5 رقمی حاصل دیده می‌شوند؟ (GIS ـ ۸۶)

۱) $\frac{4}{15}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{3}$

حل:گزینه ۳ درست است.

یادآوری: جایگشت n شیء با n_1 شیء مشابه، n_2 شیء مشابه، ... و n_k شیء مشابه برابر است با: $\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$

تعداد اعداد 5 رقمی حاصل از ارقام 3 ,2 ,2 ,1 ,1 : $n(s)=\frac{5!}{2!2!1!}=30$

حال برای به دست آوردن تعداد حالات مساعد باید سه رقم متوالی صعودی 123 را در یک دسته کنار هم قرار دهیم؛ حال جایگشت این دسته را با دو رقم باقی‌مانده و 2 محاسبه کنیم: $123\ ,1\ ,2 \rightarrow n(A)=3!=6$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$$

۱۶ .شش نفر کارمند را به طور تصادفی در اتاق‌های 1 نفره، 2 نفره و 3 نفره جای می‌دهیم. با کدام احتمال دو فرد مورد نظر در یک اتاق جای می‌گیرد؟ (GIS ـ ۸۷)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{2}{15}$ ۴) $\frac{4}{15}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۴ درست است.

یادآوری: تعداد حالت تقسیم n شیء متمایز در k سلول به طوری که در سلول اول n_1 شیء، در سلول دوم n_2 شیء و ...در سلول kام n_k شیء قرار گیرد برابر است با: $\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$

حالات ممکن: تقسیم 6 نفر در اتاق‌های 1 ,2 و 3 نفره: $n(s)=\frac{6!}{3!2!1!}=60$

حالات مساعد: یک بار 2 نفر را در اتاق دونفره قرار می‌دهیم و 4 نفر باقی‌مانده را در اتاق سه‌نفره و یک‌نفره تقسیم می‌کنیم $\left(\frac{4!}{3!1!}\right)$. بار دیگر 2 نفر را در اتاق سه‌نفره قرار می‌دهیم و 4 نفر باقی‌مانده را در اتاق یک‌نفره و دونفره و 1 نفره باقی‌مانده از اتاق سه‌نفره جای می‌دهیم $\left(\frac{4!}{1!2!1!}\right)$.

$$n(A)=\frac{4!}{3!1!}+\frac{4!}{2!1!1!}=4+12=16$$

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(s)}=\frac{16}{60}=\frac{4}{15}$$

۱۷.با حروف کلمه ABADAN یک کلمه رمز عبور 4 حرفی می‌سازیم. با کدام احتمال هر سه حرف A به کار رفته است؟ (GIS ــ ۸۸)

۱) $\frac{1}{3}$　　۲) $\frac{1}{4}$　　۳) $\frac{1}{6}$　　۴) $\frac{1}{9}$

حل:گزینه ۳ درست است.

حروف کلمه ABADAN شامل 6 حرف است با 4 حرف متمایز (A ,B ,D ,N) و 3 تکرار A

کل حالات: تمام حالاتی که می‌توان یک رمز 4حرفی ساخت عبارت‌اند از:

انتخاب 4 حرف از بین 4 حرف متمایز: $\binom{4}{4}\times\underbrace{4!}_{\text{جایگشت 4 حرف متمایز}}=24$

انتخاب 2 حرف A و 2 حرف متمایز از بین سه حرف B, D, N: $\binom{3}{2}\times\underbrace{\frac{4!}{2!1!1!}}_{\text{جایگشت 4 حرف با 2 حرف تکراری}}=3\times12=36$

انتخاب 3 حرف A و یک حرف متمایز از بین سه حرف B, D, N: $\binom{3}{1}\times\underbrace{\frac{4!}{3!1!}}_{\text{جایگشت 4 حرف با 3 حرف تکراری}}=3\times4=12$ **(حالات مساعد)**

$$\text{احتمال مورد نظر}=\frac{\text{حالات مساعد}}{\text{کل حالات}}=\frac{12}{24+36+12}=\frac{12}{72}=\frac{1}{6}$$

یادداشت:

....

....

....

....

احتمال باجایگذاری و بدون جایگذاری

۱۸. از بین 5 دانشجوی دختر و 3 دانشجوی پسر، سه دانشجو را برای شرکت در یک سمینار به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه حداقل یک دانشجوی دختر انتخاب شود، برابر است با: (اقتصاد ــ ۸۶)

۱) $\frac{3}{56}$ ۲) $\frac{5}{56}$ ۳) $\frac{54}{56}$ ۴) $\frac{55}{56}$

حل:گزینه ۴ درست است.

$$P(\text{حداقل یک دختر}) = 1 - P(\text{هیچ دختر}) = 1 - \frac{\binom{5}{0}\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = 1 - \frac{1}{56} = \frac{55}{56}$$

۱۹. ظرفی شامل 4 مهره سفید و n مهره سیاه است $(n>1)$. دو مهره پی‌درپی بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. n چقدر باشد تا احتمال اینکه مهره اول سفید و مهره دوم سیاه باشد، برابر $\frac{1}{5}$ شود؟ (اقتصاد ــ ۸۷)

۱) 1 ۲) 4 ۳) 5 ۴) 12

حل:گزینه ۴ درست است.

جعبه شامل 4 مهره سفید و n مهره سیاه است بنابراین کل مهره‌های جعبه برابر $n+4$ است. دقت کنید که انتخاب مهره‌ها بدون جایگذاری است؛ بنابراین در هر بار انتخاب، یک مهره از کل مهره‌های جعبه کم خواهد شد. همچنین چون ترتیب رنگ مهره‌ها مهم است بنابراین تک تک حالات را بررسی می‌کنیم:

$$P(\text{اولی سفید، دومی سیاه}) = \frac{\text{تعداد سفیدها}}{\text{کل مهره‌ها}} \times \frac{\text{تعداد سیاه‌ها}}{\text{کل مهره‌ها} - 1} = \frac{4}{4+n} \times \frac{n}{4+n-1} = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow 20n = (4+n)(3+n) \rightarrow n^2 - 13n + 12 = 0 \rightarrow (n-12)(n-1) = 0 \begin{cases} n = 12 \checkmark \\ n = 1 \end{cases}$$

$n=12$ قابل قبول است زیرا $n>1$ است (اگر حل معادله برایتان سخت بود می‌توانید گزینه‌ها را در معادله جایگزین کنید).

۲۰. از 10 پست در یک اداره، می‌خواهند 3 پست را به‌علت کمی مراجعه‌کننده حذف کنند. احتمال اینکه پست به‌خصوصی حذف نشود، چقدر است؟ (اقتصاد ــ ۸۸)

۱) $\frac{7}{9}$ ۲) $\frac{7}{10}$ ۳) $\frac{3}{9}$ ۴) $\frac{3}{10}$

حل:گزینه ۲ درست است.

کل حالات: انتخاب 3 پست از 10 پست: $\binom{10}{3}$

یادداشت:

....

....

....

....

حالات مساعد: پستی را که می‌خواهیم حذف نشود کنار می‌گذاریم و 3 پست را از بین 9 تای باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم $\binom{9}{3}$.

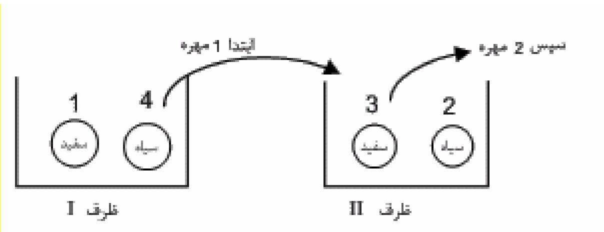
$$P(A)=\frac{\text{حالات مساعد}}{\text{کل حالات}}=\frac{\binom{9}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{\frac{9!}{3!\,6!}}{\frac{10!}{3!7!}}=\frac{7}{10}$$

احتمال متوسط

۲۱ .در ظرف اول 1 مهره سفید و 4 مهره سیاه و در ظرف دوم 3 مهره سفید و 2 مهره سیاه وجود دارد. به‌تصادف یک مهره از ظرف اول برداشته بدون رؤیت در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس از ظرف دوم دو مهره با هم خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو مهره خارج‌شده سفید است؟(حسابداری و مدیریت ــ ۸۸)

۱) 0.12 ۲) 0.18 ۳) 024 ۴) 0.36

حل:گزینه ۳ درست است.



با شرط بر روی سفید یا سیاه بودن مهره خارج‌شده از ظرف اول (I) و با استفاده از فرمول احتمال متوسط داریم:

$$P(\text{هر دو مهره سفید})=P(\text{اولی سفید})P(\text{2 مهره سفید | اولی سفید})+P(\text{اولی سیاه})P(\text{2 مهره سفید | اولی سیاه})$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}}+\frac{4}{5}\times\frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}}=\frac{1}{5}\times\frac{6}{15}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{15}=\frac{6+12}{5\times15}=\frac{18}{5\times15}=\frac{6}{25}=0.24$$

دقت کنید که ظرف (II) با اضافه شدن مهره خارج‌شده از ظرف (I)، 6 مهره خواهد داشت.

۲۲. احتمال وجود سفره زیرزمینی نفتی در مناطق مختلف یک استان 0.4 است. احتمال برخورد چاه حفرشده به نفت حتی در حالت وجود سفره نفتی تنها 0.3 است. اگر یک چاه در این استان به‌تصادف حفر شود، احتمال عدم برخورد آن به نفت چقدر است؟ (اقتصاد ــ ۸۸)

۱) 0.12 ۲) 0.28 ۳) 0.30 ۴) 0.88

یادداشت:

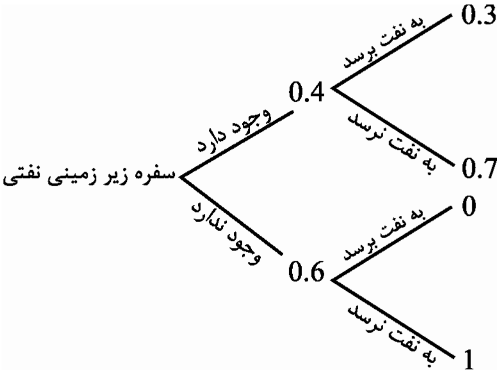
....

....

....

....

حل:گزینه ۴ درست است.



E : چاه به نفت نرسد

A : وجود سفره زیر زمینی

با توجه به فرمول احتمال متوسط با شرط بر روی وجود سفره زیر زمینی داریم:

$$P(E)=P(E|A)P(A)+P(E|A')P(A')=0.7\times 0.4+1\times 0.6=0.28+0.6=0.88$$

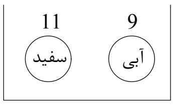
۲۳. در کیسه A، 4 مهره سفید و 6 مهره آبی و در کیسه B، 7 مهره سفید و 3 مهره آبی وجود دارد. به‌تصادف از یکی از دو کیسه، مهره‌ای بیرون آورده شده و کنار گذاشته می‌شود (بدون نگاه کردن به رنگ آن). مهره دومی را بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه این مهره سفید باشد، چقدر است؟ (محیط زیست ـ ۸۷)

۱) $\frac{4}{20}$ ۲) $\frac{7}{20}$ ۳) $\frac{11}{20}$ ۴) $\frac{5}{39}$

حل:گزینه ۳ درست است.

راه حل تستی: با توجه به اینکه از رنگ مهره اول اطلاعی نداریم بنابراین مهره دوم مستقل از مهره اول انتخاب شده و احتمال آن همانند خارج شدنش در دفعه اول محاسبه می‌شود.

دقت کنید که چون انتخاب هر جعبه با شانس مساوی است می‌توانیم دو جعبه را روی هم ریخته یک جعبه با 11 مهره سفید و 9 مهره آبی (جمعاً 20 مهره) در نظر بگیریم:



$$P(\text{سفید})=\frac{\text{تعداد مهره‌های سفید}}{\text{تعداد کل مهره‌ها}}=\frac{11}{20}$$

روش شرطی: با توجه به اینکه احتمال سفید بودن مهره دوم را می‌خواهیم باید بر روی رنگ مهره اول شرط بگذاریم؛ از فرمول احتمال متوسط داریم:

$$P(\text{دومی سفید})=P(\text{دومی سفید}\mid\text{اولی سفید})P(\text{اولی سفید})+P(\text{دومی سفید}\mid\text{اولی آبی})P(\text{اولی آبی})$$
$$=\frac{11}{20}\times\frac{10}{19}+\frac{9}{20}\times\frac{11}{19}=\frac{209}{380}=\frac{11}{20}$$

یادداشت:

....

....

....

....

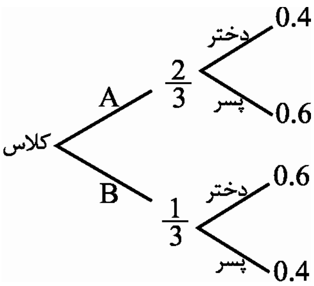
قضیه بیز

۲۴. تعداد دانشجویان کلاس A دو برابر دانشجویان کلاس B است و نسبت دختران در این دو کلاس به ترتیب 0.4 و 0.6 است. اگر دختری به‌تصادف از این دو کلاس انتخاب شود، احتمال اینکه متعلق به کلاس A باشد چقدر است؟ (اقتصاد ــ ۸۶)

۱) 0.4　　۲) 0.6　　۳) 0.57　　۴) 0.86

حل:گزینه ۳ درست است.

تعداد دانشجویان کلاس A دو برابر کلاس B است $\leftarrow$ $P(\text{B انتخاب کلاس}) = \frac{1}{3}$, $P(\text{A انتخاب کلاس}) = \frac{2}{3}$



$$P(\text{A کلاس} \mid \text{دختر}) = \frac{P(\text{دختر} \mid \text{A کلاس})P(\text{A کلاس})}{P(\text{دختر} \mid \text{A کلاس})P(\text{A کلاس}) + P(\text{دختر} \mid \text{B کلاس})P(\text{B کلاس})} = \frac{0.4\times\frac{2}{3}}{0.4\times\frac{2}{3}+0.6\times\frac{1}{3}} = \frac{8}{14} = 0.57$$

۲۵. اگر $P(A_1)=0.4$ و $P(A_2)=0.6$ ، $P(B|A_1)=0.2$ و $P(B|A_2)=0.05$ باشد، احتمال $P(A_1|B)$ عبارت است از: (اقتصاد ــ ۸۷)

۱) 0.72　　۲) 0.27　　۳) 0.11　　۴) 0.03

حل:گزینه ۱ درست است.

با توجه به قضیه بیز داریم:

$$\begin{cases} P(A_1|B) = \dfrac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)} = \dfrac{0.2\times 0.4}{0.2\times 0.4 + 0.05\times 0.6} = \dfrac{8}{11} = 0.72 \\ P(B|A_1)=0.2\ ,\ P(A_1)=0.4\ ,\ P(B|A_2)=0.05\ ,\ P(A_2)=0.6 \end{cases}$$

۲۶. در ظرفی 4 مهره سفید و 5 مهره سیاه قرار دارد. یک مهره از ظرف خارج کرده و مهره‌ای با رنگ دیگر به داخل ظرف می‌اندازیم؛ بار دوم مهره دیگری از ظرف خارج می‌کنیم. اگر هر دو مهره خارج‌شده همرنگ باشند با کدام احتمال هر دو سفید هستند؟ (برنامه‌ریزی شهری ــ ۸۸)

۱) $\frac{1}{4}$　　۲) $\frac{1}{3}$　　۳) $\frac{3}{8}$　　۴) $\frac{5}{16}$

یادداشت:

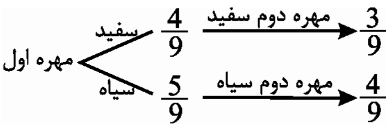
....

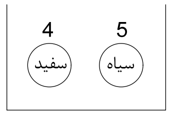
....

....

....

حل:گزینه ۳ درست است.





با توجه به قضیه بیز داریم:

$$P(\text{هر دو سفید} \mid \text{هر دو همرنگ}) = \frac{P(\text{هر دو سفید} \cap \text{هر دو همرنگ})}{P(\text{هر دو همرنگ})} = \frac{P(\text{هر دو سفید})}{P(\text{هر دو سفید}) + P(\text{هر دو سیاه})}$$

$$= \frac{P(\text{اولی سفید} \mid \text{دومی سفید}) \times P(\text{اولی سفید})}{P(\text{اولی سفید} \mid \text{دومی سفید}) \times P(\text{اولی سفید}) + P(\text{اولی سیاه} \mid \text{دومی سیاه}) \times P(\text{اولی سیاه})} = \frac{\frac{4}{9}\times\frac{3}{9}}{\frac{4}{9}\times\frac{3}{9}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}} = \frac{12}{12+20} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$$

دقت کنید که وقتی مهره اول با احتمال $\frac{4}{9}$ سفید خارج می‌شود یک مهره سیاه به‌جای آن مهره سفید خارج‌شده به ظرف برمی‌گردد یعنی الان در ظرف 3 سفید و 6 سیاه موجود است که احتمال سفید خارج شدنش در این مرحله (بار دوم) $\frac{3}{9}$ است.

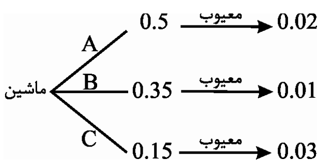
همچنین وقتی مهره اول با احتمال $\frac{5}{9}$ سیاه خارج می‌شود یک مهره سفید به‌جای آن مهره سیاه خارج‌شده به ظرف برمی‌گردد یعنی الان در ظرف 4 سیاه و 5 سفید موجود است که احتمال سیاه خارج شدنش در این مرحله $\frac{4}{9}$ است.

۲۷ . سه ماشین A, B و C به ترتیب 50 ,35 و 15 درصد محصولات کارخانه‌ای را تولید می‌کنند. محصولات آن‌ها به ترتیب 2 ,1 و 3 درصد معیوب هستند. از میان محصولات این کارخانه یک محصول به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر این محصول معیوب باشد با کدام احتمال با ماشین C تولید شده است؟ (GIS ـ ۸۷)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{6}$

حل:گزینه ۲ درست است.

E : معیوب بودن



با توجه به قضیه بیز داریم:

$$P(C \mid E) = \frac{P(E \mid C)P(C)}{P(E \mid A)P(A) + P(E \mid B)P(B) + P(E \mid C)P(C)}$$

$$= \frac{0.03 \times 0.15}{0.02 \times 0.5 + 0.01 \times 0.35 + 0.03 \times 0.15} = \frac{45}{180} = \frac{1}{4}$$

۲۸ . دستگاه فشارسنج در 90% اوقات روزهای بارانی را درست پیش‌بینی می‌کند. همچنین در 70% موارد روزهای آفتابی را درست پیش‌بینی می‌کند. می‌دانیم در یک شهر 40% روزها هوا بارانی است. فرض کنید دستگاه فشارسنج روز شنبه را بارانی پیش‌بینی کند، احتمال اینکه واقعاً باران ببارد چقدر خواهد بود؟ (محیط زیست ـ۸۶)

۱) 40% ۲) 90% ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

یادداشت:

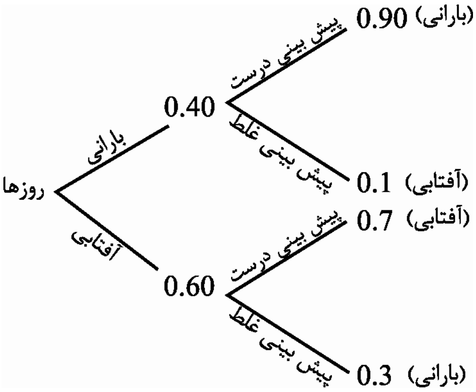
....

....

....

....

حل:گزینه ۴ درست است.



A : پیش‌بینی بارانی

E : واقعاً باران ببارد

با توجه به قضیه بیز داریم:

$$P(\text{واقعاً بارانی} \mid \text{پیش‌بینی بارانی}) = P(E\mid A) = \frac{P(A\cap E)}{P(A)} = \frac{P(A\mid E)P(E)}{P(A\mid E)P(E)+P(A\mid E')P(E')}$$

$$= \frac{0.9\times 0.4}{0.9\times 0.4 + 0.3\times 0.6} = \frac{36}{36+18} = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}$$

یادداشت:

....

....

....

....

فصل سوم

متغیرهای تصادفی

تابع احتمال (گسسته)

۱ ـ به ازای کدام مقدار α، جدول مقابل می‌تواند توزیع احتمال متغیر تصادفی x باشد؟ (حسابداری۸۴)

x	0	1	2	3
$f(X=x)$	0.1	0.26	α	$3\alpha-1$

۱) 0.32　　۲) 0.41　　۳) 0.44　　۴) 0.56

حل:گزینه ۲ درست است.

شرایط تابع احتمال بودن $\begin{cases} 1)\ \sum f(x)=1 \\ 2)\ P(x)=f(x)\geq 0 \end{cases}$ (گسسته) و $\int f(x)dx=1$ (پیوسته)

$$(1)\sum_{x=0}^{3} f(X=x)=1 \rightarrow 0.1+0.26+\alpha+3\alpha-1=1 \rightarrow 4\alpha=1.64 \rightarrow \alpha=0.41$$

۲ ـ در یک تاس ناسالم احتمال آمدن هر شماره متناسب با وارون عدد آن است، با کدام احتمال در پرتاب ایـن تـاس عـدد زوج ظـاهر می‌شود؟ (حسابداری و مدیریت۸۸)

۱) $\frac{29}{60}$　　۲) $\frac{31}{60}$　　۳) $\frac{45}{147}$　　۴) $\frac{55}{147}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۴ درست است.

x	1	2	3	4	5	6	
$P(x)$	$\frac{1}{1}x$	$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{3}x$	$\frac{1}{4}x$	$\frac{1}{5}x$	$\frac{1}{6}x$	$\sum P(x)=1$

$$\sum P(x)=1 \to x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x+\frac{1}{6}x=1 \to \frac{(60+30+20+15+12+10)x}{60}=1$$

$$\to x=\frac{60}{147}$$

$$P(x=\text{زوج})=P(x=2)+P(x=4)+P(x=6)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}x=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)x$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)\times\frac{60}{147}=\frac{6+3+2}{12}\times\frac{60}{147}=\frac{55}{147}$$

دقت کنید: چون احتمال هر شماره متناسب با وارون آن شماره است داریم:

ضریب ثابت x تناسب را ایجاد می‌کند. $\qquad$ احتمال هر عدد تاس $=\frac{1}{\text{عدد}}\times x$

۳ـ به ازای کدام مقدار a تابع $f(X=x)=\frac{1}{100}\left[2(10-x)+a\right]\ ;\ x=1,2,\dots,10$ یک تابع احتمال است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) -1 $\qquad$ ۲) 0 $\qquad$ ۳) 1 $\qquad$ ۴) 2

گزینه ۳صحیح است.

با توجه به گسسته بودن تابع احتمال، رابطه روبه رو باید برقرار باشد.

$$\sum_{x=1}^{10} f(x)=1$$

$$\sum_{x=1}^{10}\frac{1}{100}\left[2(10-x)+a\right]=1 \to \frac{1}{100}\left[2\sum_{x=1}^{10}(10-x)+\sum_{x=1}^{10}a\right]=1$$

$$\frac{1}{100}\left[2(9+8+\dots+1+0)+10a\right]=1 \to \frac{1}{100}\left[2\times\frac{9(9+1)}{2}+10a\right]=1 \to a=1$$

☜**یادآوری:** $\sum_{i=1}^{n} i=1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

۴ـ در بررسی 5 پروژه مطالعاتی x تعداد پروژه‌های مورد قبول است که توزیع احتمال آن به صورت زیر پیش‌بینی شده است، $P(x\geq 2)$ کدام است؟ (برنامه‌ریزی شهری۸۴)

x	0	1	2	3	4	5
$P(x)$	0.1	0.2	0.25	0.1	0.2	α

۱) 0.45 $\qquad$ ۲) 0.55

۳) 0.6 $\qquad$ ۴) 0.7

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۴ درست است.

x	0	1	2	3	4	5	
$P(x)$	0.1	0.2	0.25	0.1	0.2	$\boxed{\alpha = 0.15}$	$\sum P(x)=1$

$$\begin{cases} \sum P(x)=1 \;\rightarrow\; 0.1+0.2+0.25+0.1+0.2+\alpha=1 \;\rightarrow\; \alpha=0.15 \\ P(x\ge 2)=0.25+0.1+0.2+0.15=0.7 \end{cases}$$

توجه: بدون دانستن مقدار α هم می‌توانستیم $P(x\ge 2)$ را پیدا می‌کنیم.

$$P(x\ge 2)=1-P(x<2)=1-P(x=1)-P(x=0)=1-0.2-0.1=0.7$$

۵ ـ به ازای کدام مقدار k تابع $f(x)=\frac{2x+k}{25}\ ;\ x=1,2,3,4,5$ می‌تواند تابع احتمال این متغیر تصادفی باشد؟ (GIS ۸۵)

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

حل:گزینه ۱ درست است.

☜**یادآوری:** مجموع احتمال‌ها در تابع احتمال گسسته برابر یک است.

$$\sum P(x)=\sum f(x)=1$$

$$\sum f(x)=1 \rightarrow \sum_{x=1}^{5}\frac{2x+k}{25}=1 \rightarrow \frac{1}{25}\sum_{x=1}^{5}(2x+k)=1 \rightarrow \frac{1}{25}\left(2\sum_{x=1}^{5}x+\sum_{x=1}^{5}k\right)=1$$

$$\rightarrow \frac{1}{25}\left(2\frac{n(n+1)}{2}+nk\right)=1 \xrightarrow{n=5} \frac{1}{25}\left(2\times\frac{5\times 6}{2}+5k\right)=1 \rightarrow 30+5k=25 \rightarrow \boxed{k=-1}$$

☜**یادآوری:** قوانین $\sum$:

$$\begin{cases} \sum(ax+b)=a\sum x+\sum b \\ \sum_{x=1}^{n} a = na \end{cases}$$

۶ ـ در یک تاس ناسالم احتمال آمدن هر عدد متناسب با خود آن عدد است. در پرتاب این تاس احتمال ظاهر شدن عدد زوج کدام است؟ (GIS ۸۶)

۱) $\frac{7}{12}$ ۲) $\frac{5}{12}$ ۳) $\frac{4}{7}$ ۴) $\frac{3}{7}$

حل:گزینه ۳ درست است.

بهتر است ابتدا جدول توزیع احتمال پرتاب تاس ناسالم را رسم کنیم.

عدد تاس: x	1	2	3	4	5	6	
احتمال: $P(x)$	x	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$	$6x$	$\sum P(x)=1$
	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$	

یادداشت:

....

....

....

....

$$\sum P(x)=1 \rightarrow x+2x+3x+4x+5x+6x=1 \rightarrow x=\frac{1}{21}$$

$$P\ (\text{عدد زوج})=P(x=2)+P(x=4)+P(x=6)=\frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$$

۷ـ اگر $P(X=x)=\dfrac{1}{x^2+x},\ x\in N$ **تابع احتمال متغیر تصادفی** X **باشد** $P(2\le X\le 19)$**، کدام است؟ (GIS ۸۶)**

۱) 0.36 ۲) 0.45 ۳) 0.54 ۴) 0.63

حل:گزینه ۲ درست است.

توجه: بهتر است ابتدا تابع احتمال را کمی ساده‌تر کنیم و سپس به محاسبه احتمال‌ها در نقطه بپردازیم.

$$P(X=x)=\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

با توجه به اینکه تابع احتمال متغیر گسسته است داریم:

$$P(2\le x\le 19)=P(x=2)+P(x=3)+...+P(x=18)+P(x=19)$$
$$=\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{18}-\cancel{\frac{1}{19}}+\cancel{\frac{1}{19}}-\frac{1}{20}=\frac{1}{2}-\frac{1}{20}=\frac{9}{20}=0.45$$

تابع چگالی (پیوسته)

۸ـ به ازای کدام مقدار k **تابع:**

$$f(x)=\begin{cases} ke^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

تابع چگالی احتمال برای کمیت تصادفی X **خواهد بود؟ (حسابداری ۷۷)**

۱) 1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

حل:گزینه ۱ درست است.

$$\int_{\text{حدپایین}}^{\text{حدبالا}} f(x)dx=1$$

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx=1 \ \rightarrow\ \int_0^{+\infty} ke^{-x}dx=\left[-ke^{-x}\right]_0^{+\infty}=0-(-k)=1\rightarrow k=1$$

در فصل بعد خواهیم دید که تابع فوق، تابع چگالی توزیع نمایی با $\lambda=1$ است.

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}\ \ x>0$$

۹ـ تابع چگالی متغیر تصادفی x **به صورت** $f(x)=\begin{cases} 6x(1-x) & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{در جای دیگر} \end{cases}$ **است** $P\left(x>\frac{1}{2}\right)$ **کدام است؟ (حسابداری ۸۴)**

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۱ درست است.

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

$$P\left(x > \frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{1}{2} < x < 1\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 6x(1-x)dx = \left[3x^2 - 2x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = 3 - 2 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

۱۰ ـ کمیت تصادفی X در جامعه‌ای بر طبق قانون نمایی توزیع شده است:

$$f(x) = \frac{1}{20}e^{-\frac{x}{20}} \quad 0 < x < \infty$$

احتمال این که کمیت تصادفی X، مقداری مساوی با 125 اختیار کند، چقدر است؟ (مدیریت ۷۱)

۱) $\frac{1}{20}$ ۲) 1 ۳) 0 ۴) 0.1

حل:گزینه ۳ درست است.

مقدار احتمال در یک نقطه در تابع چگالی احتمال پیوسته صفر است.

$$P(x = 125) = 0$$

۱۱ ـ تابع چگالی احتمال برای کمیت تصادفی X به صورت:

$$f(x) = \frac{1}{2}x \qquad 0 < x < 2$$

تعریف شده است. مقدار میانه را حساب کنید. (مدیریت ۷۲)

۱) $-\sqrt{2}$ ۲) 1 ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\pm\sqrt{2}$

حل:گزینه ۳ درست است.

$$\int_{\text{حد پایین}}^{x} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \quad , \quad x = me$$

$$\int_0^x \frac{1}{2}x\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^x = \frac{1}{2} \ \rightarrow \ \frac{x^2}{4} = \frac{1}{2} \ \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = me = \sqrt{2}$$

توجه شود چون $-\sqrt{2}$ در فاصله $2 > x > 0$ (محدوده تابع) نیست، غیرقابل قبول است.

۱۲ ـ اگر $\{f(x) = 0.20 \mid 0 \le x \le b\}$ باشد، مقدار c را چنان پیدا کنید که $P(x \le c) = 0.6$ باشد؟ (مدیریت ۷۹)

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

حل:گزینه ۳ درست است.

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

$$P(X \le c) = P(0 < x < c) = \int_0^c 0.2\,dx = [0.2x]_0^c = 0.2c = 0.6 \quad \rightarrow \quad c = 3$$

یادداشت:

....

....

....

....

در فصل بعد خواهیم دید که تابع فوق، تابع چگالی توزیع یکنواخت پیوسته بوده و مقدار b برابر:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{b-a} = \dfrac{1}{b-0} = \dfrac{2}{10} \\ b = 5 \end{cases}$$

نکته: هرگاه تابع چگالی پیوسته برابر یک عدد باشد، نشان‌دهنده تابع چگالی توزیع یکنواخت پیوسته است.

۱۳ ـ متغیر تصادفی X با تابع $\left\{ f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}k \mid 0 \le x \le 1 \right\}$ تعریف شده است. مقدار k چقدر است؟ (مدیریت ۸۰)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

حل:گزینه ۳ درست است.

$$\int_{\text{حدپایین}}^{\text{حدبالا}} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1 \to \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}k\right) dx = \left[\frac{2}{6}x^2 + \frac{1}{3}kx\right]_0^1 = 1 \to \frac{2}{6} + \frac{k}{3} = 1 \to \frac{k}{3} = \frac{2}{3} \to k = 2$$

۱۴ ـ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر داده شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ k-x & 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{برای سایر مقادیر } x \end{cases}$$

مقدار k چقدر است؟ (اقتصاد ۷۶)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

حل:گزینه ۳ درست است.

$$\int_{\text{حدپایین}}^{\text{حدبالا}} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 1 \to \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (k-x)\,dx = 1 \to \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[kx - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = 1$$

$$\to \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(2k - \frac{4}{2} - k + \frac{1}{2}\right) = 1 \to k = 2$$

۱۵ ـ مقدار m در تابع $f(x) = \frac{m}{\sqrt{x}}$ برای $0 \le x \le 1$ چقدر باشد تا $f(x)$ یک تابع چگالی احتمال باشد؟ (اقتصاد ۸۸)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) 2

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۱ درست است.

$$\int_{\text{حد پایین}}^{\text{حد بالا}} f(x)dx = 1$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1 \rightarrow \int_0^1 \frac{m}{\sqrt{x}}dx = 1 \rightarrow \int_0^1 mx^{-\frac{1}{2}}\,dx = 1 \rightarrow m\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = 1 \rightarrow 2m = 1 \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

امید ریاضی (گسسته)

۱۶ ـ جدول احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است.

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	a

امید ریاضی X کدام است؟ (حسابداری ۷۷)

۱) 1　　۲) $\frac{4}{3}$　　۳) $\frac{5}{3}$　　۴) 2

حل:گزینه ۳ درست است.

$$\begin{cases}\sum P(x) = 1 \rightarrow \frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{4}\\ E(x) = \sum x_i P(x_i) = 0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{4} = \frac{5}{3}\end{cases}$$

۱۷ ـ تابع احتمال (قانون توزیع احتمال)، به صورت زیر تعریف شده است:

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	0.3	0.3	0.3	0.1

$E(X^2)$ کدام است؟ (مدیریت ۷۵)

۱) 0.04　　۲) 0.2　　۳) 1　　۴) 2

حل:گزینه ۳ درست است.

$$E(x^2) = \sum x^2 P(x) = (-1)^2 \times 0.3 + 0^2 \times 0.3 + 1^2 \times 0.3 + 2^2 \times 0.1 = 1$$

۱۸ ـ متغیر تصادفی x می‌تواند یکی از سه مقدار 5 و 4 و x_3 را انتخاب کند که احتمال آن‌ها به ترتیب 0.2، 0.5 و p_3 است. اگر میانگین متغیر تصادفی x برابر 6 باشد مقدار x_3 چقدر است؟ (مدیریت ۸۳)

۱) 2　　۲) 5　　۳) 7　　۴) 10

حل:گزینه ۴ درست است.

x_i	5	4	x_3	
$p_i = f_i$	0.2	0.5	P_3	$\sum p_i = 1$

یادداشت:

....

....

....

....

$$\begin{cases}\sum p_i = 1 \rightarrow 0.2+0.5+p_3 = 1 \rightarrow p_3 = 0.3 \\ E(x) = \sum x_i P(x_i) = 6 \rightarrow 5\times 0.2 + 4\times 0.5 + x_3 \times 0.3 = 6 \rightarrow 0.3x_3 = 3 \rightarrow x_3 = 10\end{cases}$$

امید ریاضی (پیوسته)

۱۹ ـ تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر داده شده است:

$$f(x) = \begin{cases}\dfrac{2x+1}{12} & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

امید ریاضی X کدام است؟ (اقتصاد ۸۱)

۱) 1.5 ۲) 1.66 ۳) 1.73 ۴) 1.875

حل:گزینه ۴ درست است.

$$E(X) = \int_0^3 x\ f(x)\,dx = \int_0^3 \frac{2x^2+x}{12}\,dx = \left[\frac{1}{12}\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\right]_0^3 = \frac{1}{12}\left(18+\frac{9}{2}\right) = 1.875$$

۲۰ ـ اگر تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته X به صورت زیر باشد، $E(X)$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۲)

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

حل:گزینه ۳ درست است.

$$\int_{\text{حد پایین}}^{\text{حدبالا}} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1 \quad \rightarrow \quad \int_0^1 k(1-x)\,dx = \left[k\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ k = 1 \rightarrow k = 2$$

$$f(x) = 2(1-x) \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

$$E(X) = \int_0^1 x\ \ f(x)\,dx = \int_0^1 2\left(x - x^2\right)dx = \left[2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

۲۱ ـ تابع چگالی مربوط به طول عمر یک قطعه الکترونیکی به صورت زیر می‌باشد، میانگین طول عمر این قطعه چقدر است؟

(اقتصاد ۸۵)

$$f(x) = \begin{cases}\dfrac{10}{x^2} & x > 10 \\ 0 & x \le 10\end{cases}$$

۱) ∞ ۲) صفر ۳) 1 ۴) 20

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۱ درست است.

$$E(x)=\int_{10}^{\infty} x\,f(x)\,dx=\int_{10}^{\infty} x.\frac{10}{x^2}\,dx=\int_{10}^{\infty}\frac{10}{x}\,dx=[10\ln x]_{10}^{\infty}=\infty$$

۲۲ ـ امید ریاضی متغیر تصادفی x با تابع چگالی احتمال زیر چقدر است؟ (اقتصاد ۸۶)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{برای سایر مقادیر } x\end{cases}$$

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

حل:گزینه ۴ درست است.

$$E(x)=\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1 x.\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=\int_0^1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

۲۳ ـ تابع چگالی متغیر تصادفی x به صورت $f(x)=\begin{cases}x & 0<x<1\\ 2-x & 1\le x<2\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$ **است،** $E\left(x^2\right)$ **چقدر است؟ (محیط زیست۸۵)**

۱) $\frac{7}{6}$ ۲) $\frac{6}{7}$ ۳) $\frac{1}{7}$ ۴) 1

حل:گزینه ۱ درست است.

$$E\left(x^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,dx=\int_0^1 x^2.x\,dx+\int_1^2 x^2(2-x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_1^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{2\times 8}{3}-\frac{16}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{14}{3}-\frac{14}{4}=\frac{28-21}{6}=\frac{7}{6}$$

خواص امید ریاضی

۲۴ ـ اگر $Z=ax+by+c$ باشد در این صورت: (مدیریت ۷۰)

۱) $E(Z)=aE(X)+bE(Y)$

۲) $E(Z)=a^2E(X)+b^2E(Y)+c$

۳) $E(Z)=a^2E(X)+b^2E(Y)$

۴) $E(Z)=aE(X)+bE(Y)+c$

حل:گزینه ۴ درست است.

$$E(Z)=E(ax+by+c)=E(ax)+E(by)+E(c)=aE(x)+bE(y)+c$$

یادداشت:

....

....

....

....

۲۵ـ در تابع احتمال مقابل امیدریاضی $(2x-1)$ چقدر است؟ (مدیریت ۸۴)

x	0	1	2	3
f(x)	0.2	0.3	0.4	0.1

۱) 1.4 ۲) 1.6 ۳) 2.4 ۴) 1.8

حل:گزینه ۴ درست است.

$$E(x)=\sum xf(x)=0\times0.2+1\times0.3+2\times0.4+3\times0.1=1.4$$
$$E(2x-1)=2E(x)-1=2\times1.4-1=2.8-1=1.8$$

۲۶ـ کدام تساوی در مورد عمل‌کننده امیدریاضی غلط است. (a و c مقادیر ثابت هستند)؟ (اقتصاد ۷۰)

۱) $E(c(a+x))=a+cE(x)$ ۲) $E(a+x)=a+E(x)$

۳) $E[(cx)]=cE(x)$ ۴) $E(a)=a$

حل:گزینه ۱ درست است.

$$E[c(a+x)]=E(ca+cx)=E(ca)+E(cx)=ca+cE(x)$$

۲۷ـ اگر امید ریاضی توزیع متغیر تصادفی X برابر با 15 و $E(X^2)=40$ باشد، امید ریاضی متغیر $Y=2X^2+5X-1$ چقدر است؟ (GIS ۸۱)

۱) 154 ۲) 155 ۳) 156 ۴) 234

حل:گزینه ۱ درست است.

☜**یادآوری:** خواص امید ریاضی:

$$E(ax^2+bx+c)=aE(x^2)+bE(x)+c$$
$$\begin{cases}E(2x^2+5x-1)=2E(x^2)+5E(x)-1=2\times40+5\times15-1=154\\ E(x)=15\ ,\ E(x^2)=40\end{cases}$$

۲۸ـ در تابع

x	−1	0	1	2
f(x)	0.1	0.15	0.5	0.25

امید ریاضی $(x-1)^2$ کدام است ؟ (GIS ۸۷)

۱) 0.65 ۲) 0.7 ۳) 0.75 ۴) 0.8

حل:گزینه ۴ درست است.

راه حل اول:

x	−1	0	1	2	
f(x)	0.1	0.15	0.5	0.25	$\sum P(x)=1$

$$E(x-1)^2=E(x^2-2x+1)=E(x^2)-2E(x)+1=1.6-2(0.9)+1=0.8$$
$$E(x^2)=\sum x^2P(x)=(-1)^2\times0.1+0^2\times0.15+1^2\times0.5+2^2\times0.25=1.6$$
$$E(x)=\sum xP(x)=(-1)\times0.1+0\times0.15+1\times0.5+2\times0.25=0.9$$

یادداشت:

....

....

....

....

راه حل دوم:

$(x-1)$	-2	-1	0	1	
$f(x)$	0.1	0.15	0.5	0.25	$\sum P(x)=1$

$$E(x-1)^2=\sum(x-1)^2 f(x)=(-2)^2\times 0.1+(-1)^2\times 0.15+0^2\times 0.5+1^2\times 0.25=0.8$$

واریانس

۲۹ ـ در جدول توزیع احتمال زیر، $Var\left(\frac{1}{2}x-2\right)$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت۸۸)

x	-2	0	2	4	5
$f(x)$	0.1	0.15	0.3	0.25	0.2

۱) 1.21 ۲) 1.25 ۳) 1.35 ۴) 1.41

حل:گزینه ۱ درست است.

X	-2	0	2	4	5	
$f(x)$	0.1	0.15	0.3	0.25	0.2	$\sum P(x)=1$

$$Var\left(\frac{1}{2}x-\underset{0}{\cancel{2}}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2 var(x)=\frac{1}{4}var(x)=\frac{1}{4}\times 4.84=1.21$$

$$Var(x)=E\left(x^2\right)-E(x)^2=10.6-(2.4)^2=10.6-5.76=4.84$$

$$E\left(x^2\right)=\sum x^2P(x)=(-2)^2\times 0.1+0^2\times 0.15+2^2\times 0.3+4^2\times 0.25+5^2\times 0.2=$$
$$=0.4+0+1.2+4+5=10.6$$

$$E(x)=\sum xP(x)=(-2)\times 0.1+0\times 0.15+2\times 0.3+4\times 0.25+5\times 0.2=$$
$$=-0.2+0+0.6+1+1=2.4$$

۳۰ ـ تابع چگالی احتمال x به صورت $f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{c^2} & 0\le x\le c\\ 0 & \text{جای دیگر}\end{cases}$ است. c چه مقدار باشد تا این که $\sigma_X^2=2$ گردد. (مدیریت ۸۱)

۱) c=2 ۲) c=4 ۳) c=6 ۴) c=9

حل:گزینه ۳ درست است.

$$\sigma_x^2=E\left(x^2\right)-\left(E(x)\right)^2=\int_0^c x^2\frac{2x}{c^2}dx-\left(\int_0^c x\frac{2x}{c^2}dx\right)^2=2$$

$$\sigma_x^2=\left[\frac{2x^4}{4c^2}\right]_0^c-\left(\left[\frac{2x^3}{3c^2}\right]_0^c\right)^2=2\ \to\ \frac{c^2}{2}-\left(\frac{2}{3}c\right)^2=2\to\frac{c^2}{2}-\frac{4c^2}{9}=2\to\frac{c^2}{18}=2$$

$$\to\ c^2=36\ \to\ c=6$$

توجه $c=-6$ غیرقابل قبول است چون $0\le x\le c$

یادداشت:

....

....

....

....

۳۱ـ در صورتی‌که $x=-1,0,1$ برای $P(x)=\frac{|x|+1}{5}$ تابع احتمال متغیر تصادفی ناپیوسته x باشد. آنگاه امید ریاضی و واریانس x به ترتیب از راست به چپ برابر چیست؟ (اقتصاد ۸۳)

۱) $\frac{4}{5},0$ ۲) $\frac{1}{5},1$ ۳) $\frac{2}{5},0$ ۴) $\frac{4}{25},\frac{4}{5}$

حل:گزینه ۱ درست است.

x	-1	0	1	
P(x)	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\sum P(x)=1$

$$E(x)=\sum xP(x)=-1\times\frac{2}{5}+0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{2}{5}=0$$

$$\sigma^2(x)=E(x^2)-(E(x))^2$$

$$=\sum x^2P(x)-\left(\sum xP(x)\right)^2$$

$$=\left[(-1)^2\times\frac{2}{5}+0^2\times\frac{1}{5}+1^2\times\frac{2}{5}\right]-(0)^2=\frac{4}{5}$$

۳۲ـ تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر داده شده است. واریانس X کدام است؟

(برنامه ریزی شهری ۸۷)

X	-1	1	3	5
F(x)	0.2	0.3	α	0.1

۱) 1.26 ۲) 2.46 ۳) 3.12 ۴) 3.36

حل:گزینه ۴ درست است.

x	-1	1	3	5	
$P(x)=f(x)$	0.2	0.3	$\boxed{\alpha=0.4}$	0.1	$\sum P(x)=1$

دقت کنید که به اشتباه در صورت سؤال به جای f از F استفاده کرده است. همچنین می‌دانیم که در تابع احتمال گسسته $P(x)=f(x)$ است و مجموع احتمال‌ها در تابع احتمال گسسته برابر یک است بنابراین α عبارت است از:

$$\sum P(x)=\sum f(x)=1 \rightarrow 0.2+0.3+\alpha+0.1=1 \rightarrow \boxed{\alpha=0.4}$$

$$\begin{cases} Var(x)=E(x^2)-E(x)^2=6.6-(1.8)^2=3.36 \\ E(x^2)=\sum x^2P(x)=(-1)^2\times0.2+1^2\times0.3+3^2\times0.4+5^2\times0.1=6.6 \\ E(x)=\sum xP(x)=(-1)\times0.2+1\times0.3+3\times0.4+5\times0.1=1.8 \end{cases}$$

خواص واریانس

۳۳ـ اگر $E(X)=10$ و $E(X^2)=109$ باشد، واریانس $\left(\frac{X-4}{3}\right)$ کدام است؟ (اقتصاد ۷۸)

۱) 1 ۲) 3 ۳) 9 ۴) $\frac{13}{2}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۱ درست است.

$$Var\left(\frac{X-4}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2 Var(X-\underset{0}{\cancel{4}})=\frac{1}{9}Var(X)=\frac{1}{9}\left[E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2\right]=\frac{1}{9}\left(109-10^2\right)=1$$

۳۴ـ اگر $V(-2x+1)=5$ و $E(x)=1.5$ باشند، $E(x-2)^2$ کدام است؟ (برنامه ریزی شهری ۸۸)

۱) 1.25 ۲) 1.5 ۳) 1.75 ۴) 2.25

حل:گزینه ۲ درست است.

$$E(x-2)^2=E\left(x^2-4x+4\right)=E\left(x^2\right)-4E(x)+4=3.5-4\times1.5+4=1.5$$

$$Var\left(-2x\overset{0}{\cancel{+1}}\right)=5 \rightarrow (-2)^2 Var(x)=5 \rightarrow Var(x)=\frac{5}{4}$$

$$Var(x)=E\left(x^2\right)-\left(E(x)\right)^2 \rightarrow \frac{5}{4}=E\left(x^2\right)-(1.5)^2 \rightarrow E\left(x^2\right)=1.25+2.25=3.5$$

تابع توزیع تجمعی

۳۵ـ تابع توزیع کمیت تصادفی X ، به صورت زیر نمایان شده است:

$$F(x)=\frac{3x^2+2x}{16} \qquad 0<x<2$$

امید ریاضی کمیت تصادفی X ، کدام است؟ (مدیریت ۷۱)

۱) 1 ۲) 1.5 ۳) 2 ۴) 1.25

حل:گزینه ۴ درست است.

$$f(x)=F'(x)$$

$$f(x)=F'_x(x)=\frac{6x+2}{16}=\frac{3x+1}{8} \qquad 0<x<2$$

$$E(x)=\int_0^2 x.f(x)dx=\int_0^2 x.\frac{3x+1}{8}dx=\frac{1}{8}\left[x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2=\frac{1}{8}(8+2)=\frac{10}{8}=1.25$$

۳۶ـ تابع چگالی احتمال برای کمیت تصادفی X به صورت زیر بیان شده است:

$$f(x)=\frac{2x+3}{18} \qquad 0<x<3$$

تابع توزیع کمیت تصادفی X ، کدام است؟ (مدیریت ۷۱ و اقتصاد ۷۴)

۱) $F(x)=\frac{2x^2+3x}{18}$ ۲) $F(x)=\frac{x^2+3x}{18}$ ۳) $F(x)=\frac{x^2}{18}$ ۴) $F(x)=\frac{x^2+3x}{54}$

حل:گزینه ۲ درست است.

$$F(x)=\int_{\text{حدپایین}}^{x} f(x)dx$$

$$F(x)=\frac{1}{18}\int_0^x (2x+3)dx=\frac{1}{18}\left[\left(x^2+3x\right)\right]_0^x=\frac{x^2+3x}{18} \quad 0<x<3$$

یادداشت:

....

....

....

....

راه حل تستی: با توجه به این‌که $F'(x)=f(x)$ است، بنابراین اگر از گزینه‌ها مشتق بگیریم، گزینه‌ای که مشتق‌اش با تابع چگالی احتمال داده شده در صورت سؤال برابر شد جواب خواهد بود.

(گزینه۱) $F'(x)=f(x)=\frac{4x+3}{18}$ (گزینه۲) $F'(x)=f(x)=\frac{2x+3}{18}$ ✓

(گزینه۳) $F'(x)=f(x)=\frac{2}{18}x=\frac{1}{9}x$ (گزینه۴) $F'(x)=f(x)=\frac{2x+3}{54}$

۳۷ـ تابع توزیع متغیر تصادفی X به صورت زیر است:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x\le -2\\ \frac{x}{4}+\frac{1}{2} & -2<x\le 2\\ 1 & x>2\end{cases}$$

تابع چگالی احتمال آن کدام است؟ (اقتصاد ۷۰ و ۷۲)

۱) $f(x)=\frac{1}{4}$ ۲) $f(x)=\frac{x^2}{8}+\frac{x}{2}-\frac{12}{8}$

۳) $f(x)=\frac{x}{4}$ ۴) $f(x)=\frac{x^2}{8}$

حل:گزینه ۱ درست است.

$$f(x)=F'(x)$$

$$f(x)=F'_X(x)\to f(x)=\frac{1}{4}\qquad -2<x\le 2$$

☜**یادآوری:** تابع توزیع (تابع توزیع تجمعی) را با $F_X(x)=P(X\le x)$ نمایش می‌دهیم و رابطه زیر همیشه برقرار است: F (حدبالا) $=1$ و F (حدپایین) $=0$

۳۸ـ اگر تابع توزیع کمیت تصادفی ناپیوسته X به صورت زیر باشد:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{2}{10} & 1\le x<4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}$$

تابع احتمال آن کدام است؟ (اقتصاد ۷۲)

۱)

x	1	4
$P_X(x)$	0.2	0.8

۲)

x	1	4
$P_X(x)$	0.8	0.4

۳)

x	0	1	4
$P_X(x)$	0.2	0.5	0.3

۴)

x	0	1	4
$P_X(x)$	0.3	0.5	0.2

حل:گزینه ۱ درست است.

با توجه به رابطه:

$$\begin{cases}f(x_1)=F(x_1)\\ f(x_i)=F(x_i)-F(x_{i-1}) & i=2,3,\dots\end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....

داریم:

$$\begin{cases} f(X=1)=F(X=1)=0.2 \\ f(X=4)=F(X=4)-F(X=1)=1-0.2=0.8 \end{cases}$$

بنابراین تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته x عبارت است از:

x	1	4
$P_X(x)$	0.2	0.8

۳۹ ـ تابع توزیع کمیت تصادفی X به صورت زیر بیان شده است:

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x\le 2 \\ \dfrac{x-2}{3} & 2<x\le 5 \\ 1 & x>5 \end{cases}$$

میانه توزیع کدام است؟ (اقتصاد ۷۲)

۱) 3.5 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 4.5

حل:گزینه ۱ درست است.

$$F(me)=\frac{1}{2}$$
$$F(x)=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ \frac{x-2}{3}=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ 2x=7\ \rightarrow\ x=me=3.5$$

۴۰ ـ اگر تابع توزیع کمیت تصادفی X به صورت زیر باشد:

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \dfrac{x}{10} & 0<x\le 10 \\ 1 & x>10 \end{cases}$$

احتمال $P(2<x<8)$ کدام است؟ (اقتصاد ۷۲)

۱) 0.2 ۲) 0.4 ۳) 0.6 ۴) 0.8

حل:گزینه ۳ درست است.

$$P(\alpha<x<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)$$
$$P(2<X<8)=F(8)-F(2)=\frac{8}{10}-\frac{2}{10}=0.6$$

۴۱ ـ تابع توزیع $F(x)=\frac{1}{3}\left(-\frac{x^3}{3}+3x^2-5\right)$ در دامنه $0\le x\le 3$ تعریف شده است. نما (مد) آن برابر است با: (اقتصاد ۷۳)

۱) 0.6 ۲) 6 ۳) 3 ۴) 4

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۳ درست است.

$$F''(Mo)=0$$

$$F'(x)=\frac{1}{3}\left(-x^2+6x\right)\rightarrow F''(x)=\frac{1}{3}(-2x+6)=0\ \rightarrow\ -2x+6=0\rightarrow x=Mo=3$$

۴۲ ـ اگر تابع توزیع (احتمال تجمعی) متغیر تصادفی x به صورت زیر باشد، مقدار k چقدر است؟ (اقتصاد۸۲)

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{1}{k}(x-1)^3 & 1\le x<3\\ 1 & 3\le x\end{cases}$$

۱) 1 ۲) 2 ۳) 4 ۴) 8

حل: گزینه ۴ درست است.

راه حل اول:

$$f(x)=F'(x)$$

$$f(x)=F'_x(x)=\frac{3}{k}(x-1)^2 \qquad 1\le x<3$$

حال داریم:

$$\int_{\text{حدپایین}}^{\text{حدبالا}} f(x)\,dx=1$$

$$\int_1^3 f(x)\,dx=1 \quad\rightarrow\quad \int_1^3 \frac{3}{k}(x-1)^2\,dx=\left[\frac{3}{k}.\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^3=\frac{1}{k}(8-0)=1\rightarrow k=8$$

راه حل دوم: با توجه به این‌که تابع توزیع تجمعی پیوسته است بنابراین در نقاط مرزی نیز پیوستگی باید برقرار باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}F(1^-)=0=F(1^+)=F(1)=\frac{1}{k}(1-1)^3=0\\ F(3^-)=\frac{1}{k}(3-1)^3=F(3^+)=F(3)=1 \ \rightarrow\ \frac{1}{k}(2)^3=1 \ \rightarrow\ k=8\end{cases}$$

۴۳ ـ تابع توزیع کمیت تصادفی پیوسته x (طول زمان کار دستگاه تا وقتی که از کار بیفتد) به قرار ذیل می باشد. احتمال اینکه دستگاه در طول زمان $X\ge T$ از کار بیفتد چقدر است؟ (اقتصاد ۸۷)

$$F(x)=1-\exp\left(-\frac{x}{T}\right) \qquad 0<x\le\infty$$

۱) e ۲) e^{-1} ۳) $1-e^{-1}$ ۴) $\frac{e^{-1}}{T}$

حل:گزینه ۲ درست است.

☜**یادآوری:** تابع توزیع تجمعی x عبارت است از:

$$\begin{cases}F_x(x)=P(X\le x)=\int_{\text{حدپایین}}^{x} f(x)\,dx\\ F'_x(x)=f(x)\end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....

راه حل اول:

$$P(X \geq T) = 1 - P(X < T) = 1 - F(T) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{T}{T}}\right) = e^{-1}$$

راه حل دوم:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{T}e^{-\frac{X}{T}} \quad ; \quad x > 0$$

احتمال در فاصله برابر انتگرال در فاصله است پس داریم:

$$P(X \geq T) = \int_T^{\infty} \frac{1}{T}e^{-\frac{x}{T}}dx = \left[-e^{-\frac{x}{T}}\right]_T^{\infty} = \left(0 - \left(-e^{-\frac{T}{T}}\right)\right) = e^{-1}$$

تابع احتمال شرطی

۴۴ ـ با توجه به جدول توزیع مشترک X , Y مقدار $f(X|Y) = f(4|3)$ برابر است با: (اقتصاد ۷۵)

Y \ X	0	3	4
1	0.1	0.2	0
3	0.3	0.1	0.3

۱) 0.3 ۲) $\frac{3}{7}$

۳) $\frac{4}{7}$ ۴) 0.7

حل:گزینه ۲ درست است.

توجه: در مسائل توزیع احتمال توأم گسسته ابتدا جدول را کامل کنید.

y \ x	0	3	4	f(y)
1	0.1	0.2	0	0.3
3	0.3	0.1	0.3	$\boxed{0.7}$
f(x)	0.4	0.3	0.3	1

$$f(4|3) = \frac{f(x=4, y=3)}{f(y=3)} = \frac{0.3}{0.7} = \frac{3}{7}$$

۴۵ ـ اگر در فواصل $0 \leq y \leq 1$ و $0 \leq x \leq 2$ تابع توزیع مشترک این دو متغیر $f(x,y) = \frac{1}{3}(x+y)$ باشد، $f(y|x)$ در همین فواصل برابر است با: (اقتصاد ۷۹)

۱) $\frac{2+3y}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}(x+y^2)$ ۳) $\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}$ ۴) $\frac{x+2y}{3}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۳ درست است.

$$f(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}=\frac{\frac{x+y}{3}}{\frac{x+\frac{1}{2}}{3}}=\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}$$

$$f(x)=\int_y f(x,y)dy=\int_0^1\frac{x+y}{3}dy=\left[\frac{xy+\frac{y^2}{2}}{3}\right]_0^1=\frac{x+\frac{1}{2}}{3}$$ (تابع چگالی کناری x)

امید شرطی

۴۶ـ توزیع احتمال مشترک دو متغیره X و Y به صورت جدول زیر است:

X \ Y	0	1	2
0	0.20	0.15	0.05
1	0.05	0.20	0.05
2	0.05	0.05	0.20

$E(Y\mid X=1)$ **برابر است با: (اقتصاد۷۴)**

۱) 2　　۲) 1　　۳) 0.5　　۴) 1.5

حل:گزینه ۲ درست است.

$$E(Y|X=1)=\frac{\sum yf(x=1,y)}{f(x=1)}=\frac{0\times f(x=1,y=0)+1\times f(x=1,y=1)+2\times f(x=1,y=2)}{0.3}$$

$$=\frac{0\times 0.05+1\times 0.20+2\times 0.05}{0.3}=\frac{0.3}{0.3}=1$$

X \ Y	0	1	2	f(x)
0	0.20	0.15	0.05	0.4
1	**0.05**	**0.20**	**0.05**	$\boxed{0.3}$
2	0.05	0.05	0.20	0.3
f(y)	0.3	0.4	0.3	1

محاسبه کواریانس

۴۷ـ در توزیع احتمال توأم روبه‌رو، $Cov(x,y)$ کدام است؟　　(حسابداری و مدیریت ۸۶)

y \ x	0	1	2
1	0	0.1	0.2
3	0.3	0.4	0

۱) -0.56　　۲) -0.46

۳) صفر　　۴) 0.64

حل:گزینه ۲ درست است.

یادداشت:

....

....

....

....

نکته: هرگاه در جدول توزیع احتمال توأم مقدار احتمال صفر وجود داشته باشد کواریانس x, y صفر نیست.

y \ x	0	1	2	$f(y)$
1	0	0.1	0.2	0.3
3	0.3	0.4	0	0.7
$f(x)$	0.3	0.5	0.2	1

$$\begin{cases} Cov(x,y) = E(xy) - E(x)E(y) = 1.7 - 0.9 \times 2.4 = -0.46 \\ E(xy) = \sum xyf(x,y) = 0 \times 1 \times 0 + 0 \times 3 \times (0.3) \\ +1 \times 1 \times 0.1 + 1 \times 3 \times 0.4 + 2 \times 1 \times 0.2 + 2 \times 3 \times 0 = 1.7 \\ E(x) = \sum xf(x) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.2 = 0.9 \\ E(y) = \sum yf(y) = 1 \times 0.3 + 3 \times 0.7 = 2.4 \end{cases}$$

۴۸ ـ جدول توزیع احتمال مشترک زیر را در نظر بگیرید. ضریب همبستگی X و Y برابر است با: (اقتصاد ۸۱)

Y \ X	-1	0
-1	0.15	0.15
1	0.35	0.35

۱) -1 ۲) صفر

۳) 0.5 ۴) 1

حل:گزینه ۲ درست است.

راه حل اول: بهتر است برای محاسبه کواریانس ابتدا به استقلال دو متغیر توجه کنیم زیرا در صورت مستقل بودن دو متغیر، دیگر نیازی به محاسبه نیست و کواریانس صفر است. در این سوال دو متغیر y, x از هم مستقل‌اند زیرا به ازاء تمامی y, x ها رابطه $f(x\,,\,y) = f_x(x)f_y(y)$ برقرار است. در نتیجه کواریانس $y\,,\,x$ صفر است.

Y \ X	-1	0	f(y)
-1	0.15	0.15	0.30
1	0.35	0.35	0.70
f(x)	0.50	0.50	1

$$\begin{cases} f(-1\,,-1) = 0.15 = f_x(-1)f_y(-1) = 0.5 \times 0.3 \\ f(-1\,,1) = 0.35 = f_x(-1)f_y(1) = 0.5 \times 0.7 \\ f(0\,,-1) = 0.15 = f_x(0)f_y(-1) = 0.5 \times 0.3 \\ f(0\,,1) = 0.35 = f_x(0)f_y(1) = 0.5 \times 0.7 \end{cases}$$

راه حل دوم: اگر از فرمول کواریانس هم استفاده کنیم مقدار به‌دست آمده صفر خواهد شد:

$$\begin{cases} Cov(x\,,\,y) = E(x\,y) - E(x)E(y) = -0.2 - (-0.5)(0.4) = 0 \\ E(xy) = (-1)(-1) \times 0.15 - 1 \times 0 \times 0.15 + 1 \times (-1) \times 0.35 + 1 \times 0 \times 0.35 = -0.2 \\ E(x) = -1 \times 0.5 + 0 \times 0.5 = -0.5 \\ E(y) = -1 \times 0.3 + 1 \times 0.7 = 0.4 \end{cases}$$

۴۹ ـ فرض کنید متغیر تصادفی x در فاصله $(-1\,,1)$ دارای تابع چگالی $f(x) = \frac{1}{2}$ باشد. اگر $y = x^2$ باشد، کواریانس $y\,,x$ برابر است با: (اقتصاد ۸۶)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) 1

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۱ درست است.

$$\begin{cases} Cov(x,y)=Cov(x,x^2)=E(xx^2)-E(x)E(x^2)=E(x^3)-E(x)E(x^2)=0-0\times E(x^2)=0 \\ E(x)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x\,dx=\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{4}\left(1-(-1)^2\right)=0 \\ E(x^3)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^3dx=\left[\frac{1}{8}x^4\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{8}\left(1-(-1)^4\right)=0 \end{cases}$$

نکته: اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، آن‌گاه: $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

توجه: هرگاه تابع چگالی پیوسته یک عدد باشد، x دارای توزیع یکنواخت پیوسته است که در این‌جا:

$$f(x)=\frac{1}{b-a}=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\,,a=-1\,,b=1\rightarrow E(x)=\frac{a+b}{2}=\frac{-1+1}{2}=0$$

۵۰ـ اگر x و y دو متغیر تصادفی و $E(xy)=100$ و $\mu_x=4$ و $\mu_y=20$ باشد، کواریانس x و y برابر است با:

(برنامه‌ریزی شهری۷۹)

۱) 20   ۲) 10   ۳) 40   ۴) 60

حل:گزینه ۱ درست است.

$$\begin{cases} Cov(x,y)=E(xy)-E(x)E(y)=100-4\times 20=20 \\ E(xy)=100,\mu_x=E(x)=4,\ \mu_y=E(y)=20 \end{cases}$$

۵۱ـ تابع احتمال توأم دو متغیر تصادفی $y\,,x$ در جدول مقابل است:

x \ y	2	4	6
0	0.2	0.08	0.12
1	0.3	0.12	0.18

Cov (x , y) **برابر کدام است؟ (برنامه‌ریزی شهری ۸۵)**

۱) -0.5 ۲) -0.4 ۳) 0   ۴) 0.5

حل:گزینه ۳ درست است.

راه حل اول: برای محاسبه کواریانس بهتر است ابتدا مستقل بودن دو متغیر را با کامل کردن جدول و چک کردن رابطه $f(x,y)=f_x(x)f_y(y)$ به ازای تمامی y,x ها، به‌صورت ذهنی امتحان کنیم. زیرا در صورت مستقل بودن، $Cov(x,y)$ صفر است و دیگر نیازی به محاسبه نیست.

x \ y	2	4	6	f(x)
0	0.2	0.08	0.12	0.4
1	0.3	0.12	0.18	0.6
f(y)	0.5	0.2	0.3	1

$$\begin{cases} f(0,2)=0.2=f_x(0)f_y(2)=0.4\times 0.5 \\ f(0,4)=0.08=f_x(0)f_y(4)=0.4\times 0.2 \\ f(0,6)=0.12=f_x(0)f_y(6)=0.4\times 0.3 \\ f(1,2)=0.3=f_x(1)f_y(2)=0.6\times 0.5 \\ f(1,4)=0.12=f_x(1)f_y(4)=0.6\times 0.2 \\ f(1,6)=0.18=f_x(1)f_y(6)=0.6\times 0.3 \end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....

در این سوال نیز y , x مستقل‌اند، در نتیجه: $\mathrm{Cov}(x,y)=0$.

راه حل دوم: محاسبه کواریانس از طریق فرمول

$$\begin{cases} \mathrm{Cov}(x,y)=E(xy)-E(x)E(y)=2.16-0.6\times 3.6=0 \\ E(xy)=0\times2\times0.2+0\times4\times0.08+0\times6\times0.12+1\times2\times0.3+1\times4\times0.12+1\times6\times0.18=2.16 \\ E(x)=0\times0.4+1\times0.6=0.6 \\ E(y)=2\times0.5+4\times0.2+6\times0.3=3.6 \end{cases}$$

خواص کواریانس

۵۲ ـ اگر $\sigma_x^2=\frac{1}{2}$ و $\sigma_y^2=\frac{2}{3}$ و $\sigma_{x+y}^2=\frac{5}{6}$ باشد، مقدار کواریانس y , x کدام است؟ (حسابداری ۷۸ و ۸۱)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{3}$

حل:گزینه ۲ درست است.

$$\sigma^2_{(X+Y)}=\sigma_x^2+\sigma_y^2+2\,\mathrm{Cov}(X,Y) \rightarrow \frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+2\mathrm{Cov}(X,Y)$$
$$\rightarrow 2\mathrm{Cov}(X,Y)=-\frac{2}{6} \rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y)=-\frac{1}{6}$$

۵۳ ـ واریانس‌های متغیرهای تصادفی X و Y هر دو 50 است. اگر X و Y مستقل باشند، انحراف معیار $(X-Y)$ عبارت است از: (مدیریت ۷۸)

۱) 0 ۲) 10 ۳) 50 ۴) 100

حل:گزینه ۲ درست است.

$$\mathrm{Var}(X-Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)-2\mathrm{Cov}(x,y)\xrightarrow[\mathrm{Cov}(x,y)=0]{\text{مستقل } y\,,\,x}50+50-0=100$$
$$\sigma_{(X-Y)}=\sqrt{\mathrm{Var}(X-Y)}=\sqrt{100}=10$$

۵۴ ـ اگر V(X)=9 ، $V(Y)=2$ و $\mathrm{Cov}(X,Y)=-3$ باشد، واریانس $Z=-\frac{1}{3}X-2Y+18$ برابر است با: (اقتصاد ۷۵)

۱) 5 ۲) 77 ۳) 85 ۴) 87

حل:گزینه ۱ درست است.

$$\sigma_z^2=\sigma^2\left(-\frac{1}{3}X-2Y+\overset{0}{\cancel{18}}\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)^2\sigma_x^2+(-2)^2\sigma_y^2+2\left(\frac{-1}{3}\right)(-2)\mathrm{Cov}(X,Y)$$
$$=\frac{1}{9}\times9+4\times2+\frac{4}{3}\times(-3)=5$$

۵۵ ـ کدام یک از موارد زیر برای V(X-Y) صحیح است؟ (اقتصاد ۷۸)

۱) $V(X)+V(Y)-2\mathrm{Cov}(X,Y)$ ۲) $V(X)-V(Y)-\mathrm{Cov}(X,Y)$

۳) $V(X)+V(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$ ۴) $V(X)+V(Y)-\mathrm{Cov}(X,Y)$

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۱ درست است.

$$V(x-y)=V(x)+V(y)+2(1)(-1)Cov(x\ ,\ y)=V(x)+V(y)-2Cov(x\ ,\ y)$$

۵۶ ـ چنانچه $W=a+bx$ و $Z=c+dy$ باشد، $Cov\ (Z\ ,\ W)$ بر حسب X و Y عبارت است از: (اقتصاد ۷۹)

۱) $(a+b)(c+d)Cov(x,y)$ ۲) $bd\,Cov(x,y)$ ۳) $(ac+bd)Cov(x,y)$ ۴) $Cov(x,y)$

حل:گزینه ۲ درست است.

بنابر قاعده پخشی: $Cov(z,w)=Cov\left(\overset{0}{\cancel{c}}+dy,\overset{0}{\cancel{a}}+bx\right)=bd\ \ Cov(x,y)$

۵۷ ـ اگر x یک متغیر تصادفی و a یک مقدار ثابت باشد آن‌گاه: (اقتصاد ۸۵)

۱) $Cov(x\ ,\ x)=\left[E(x)\right]^2\ ,\ Cov(x\ ,\ a)=a^2Cov(x)$ ۲) $Cov(x\ ,\ x)=E\left(x^2\right),\ Cov(x\ ,\ a)=a^2S_x^2$

۳) $Cov(x\ ,\ x)=\sigma_x^2\ ,\ Cov(x\ ,\ a)=a\,Cov(x)$ ۴) $Cov(x\ ,\ x)=\sigma_x^2\ ,\ Cov(x\ ,\ a)=0$

حل:گزینه ۴ درست است.

$$Cov(x\ ,\ y)=E(xy)-E(x)E(y)$$

$$\begin{cases}Cov(x\ ,\ x)=E(x.x)-E(x)E(x)=E\left(x^2\right)-\left(E(x)\right)^2=\sigma_x^2\\ Cov(x\ ,\ a)=E(x.a)-E(x)E(a)=aE(x)-aE(x)=0\end{cases}$$

۵۸ ـ مقدار Cov(X-Y,X+Y) کدام است؟ (محیط زیست۸۷)

۱) $Var(X)-Var(Y)$ ۲) $Var(X+Y)-Var(X-Y)$

۳) $Var(X-Y)-Var(X+Y)$ ۴) $Var(X)+Var(Y)$

حل:گزینه ۱ درست است.

$$Cov(x-y,x+y)=Cov(x,x)\cancel{+Cov(x,y)-Cov(y,x)}-Cov(y,y)=Var(x)-Var(y)$$

استقلال متغیرهای تصادفی

۵۹ ـ اگر $E(x)=2$ ، $E(y)=1$ و x و y مستقل باشند، کدام مورد صحیح است؟ (حسابداری ۸۳)

۱) $Cov(x\ ,\ y)=0$ ۲) $E(xy)=2$

۳) $E(x+y)=3$ ۴) موارد ۱ و ۲ و ۳ صحیح است.

حل:گزینه ۴ درست است.

مستقل‌اند $x\ ,\ y\ \ \rightarrow\ \ Cov(x\ ,\ y)=0$

توجه: اما عکس عبارت بالا ممکن است برقرار نباشد.

✓ این عبارت در شرایط استقلال صحیح است. $Cov(x,\ y)=0$ (گزینه۱

✓این عبارت در شرایط استقلال صحیح است. $E(xy)\overset{\text{به دلیل استقلال}}{\underset{x,y}{=\!=\!=}}E(x)E(y)=2\times1=2$ (گزینه۲

یادداشت:

....

....

....

....

✓این عبارت در هر شرایطی صحیح است. $E(x+y)=E(x)+E(y)=2+1=3$ (گزینه۳

۶۰ ـ دو متغیر مستقل x و y با توزیع توأم جدول مقابل داده شده است. $E(xy)$ کدام است؟(حسابداری۸۴)

y \ x	−1	0	1
1	0.1	0.2	0.3
2	0.25	0.15	0

۱) -0.3   ۲) -0.2   ۳) 0.2   ۴) 0.3

حل:گزینه ۱ درست است.

y \ x	−1	0	1	$f(y)$
1	0.1	0.2	0.3	0.6
2	0.25	0.15	0	0.4
$f(x)$	0.35	0.35	0.3	1

$$E(xy)=\sum\sum xyf(x,y)$$
$$=(-1)\times 1\times 0.1+(-1)\times 2\times 0.25+0\times 1\times 0.2$$
$$+0\times 2\times 0.15+1\times 1\times 0.3+1\times 2\times 0=-0.3$$

اشتباه طراح سؤال: دو متغیر x و y مستقل نیستند، با توجه به این نکته که: اگر حداقل یک تقاطع در جدول توزیع احتمال صفر باشد، y و x وابسته‌اند.

$f(1,2)=0\neq f_x(1)f_y(2)=0.3\times 0.4$

در صورتی که اگر y , x مستقل بودند باید $E(xy)=E(x)E(y)$ باشد اما :

$$\begin{cases}E(x)=-0.05\ ,\ E(y)=1.4\ ,\ E(xy)=-0.3\\(-0.05)\times(1.4)\neq -0.3\rightarrow E(xy)\neq E(x)E(y)\end{cases}$$

۶۱ ـ اگر $Cov(x\ ,\ y)=0$ باشد، کدام بیان برای رابطه x و y صحیح است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۵)

۱)رابطه خطی   ۲)رابطه غیرخطی   ۳) رابطه غیرخطی یا مستقل   ۴) الزاماً مستقل

حل:گزینه ۳صحیح است.

با توجه به آن‌که کواریانس دو متغیر جهت و نوع ارتباط آن دو (خطی یا غیرخطی بودن)را بیان می‌کند، داریم:

$$Cov(x\ ,\ y)=0\ \rightarrow\ x,y\begin{cases}\text{یا مستقل‌اند (۱}\\\text{یا رابطه غیرخطی دارند (۲}\end{cases}$$

۶۲ ـ دو متغیر مستقل x و y با تابع احتمال مقابل داده شده‌اند، α کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۵)

x \ y	1	2	3
0	0.12	0.2	0.08
2	0.18	α	β

۱) 0.12   ۲) 0.2

۳) 0.25   ۴) 0.3

حل:گزینه ۴ درست است.

با توجه به استقلال دو متغیر x و y باید به ازاء تمام x و y های جدول داشته باشیم:

$f(x\ ,\ y)=f(x)f(y)$

یادداشت:

....

....

....

....

بنابراین برای $f(x=0, y=2)$ نیز رابطه بالا باید برقرار باشد.

$$f(x=0\,,\,y=2)=f(x=0)f(y=2)$$

$$0.2=0.4\times(0.2+\alpha)$$
$$\rightarrow 0.2=0.08+0.4\alpha$$
$$\rightarrow\ 0.12=0.4\alpha$$
$$\rightarrow\ \alpha=0.3$$

x \ y	1	2	3	$f(x)$
0	0.12	0.2	0.08	0.4
2	0.18	α	β	$\alpha+\beta+0.18$
$f(y)$	0.3	$\boxed{0.2+\alpha}$	$0.08+\beta$	1

۶۳ـ در مورد دو متغیر تصادفی X و Y و صحت رابطه امید ریاضی $E\left(\frac{X}{Y}\right)=\frac{E(X)}{E(Y)}$ می‌توان گفت: (اقتصاد ۸۱)

۱) وقتی صادق است که X و Y مستقل باشند.
۲) وقتی صادق است که X و Y کواریانس صفر داشته باشند.
۳) وقتی صادق است که ناهمبسته باشند.
۴) هیچ وقت صادق نیست.

حل:گزینه ۴ درست است.

اگر x , y از هم مستقل باشند، x و $\frac{1}{y}$ نیز مستقل هستند. $\leftarrow E\left(\frac{x}{y}\right)=E(x)E\left(\frac{1}{y}\right)$

اما هیچ‌گاه $\frac{1}{E(y)}=E\left(\frac{1}{y}\right)$ نیست، بنابراین تحت هیچ شرایطی $\frac{E(x)}{E(y)}=E\left(\frac{x}{y}\right)$ نیست.

ضریب همبستگی

۶۴ـ ضریب همبستگی بین دو متغیر در جدول روبه‌رو، کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۶)

x	2	3	4	5	6
y	3	5	1	4	2

۱) 0.3
۲) -0.3
۳) -0.2
۴) 0.2

حل:گزینه ۲ درست است.

با توجه به آنکه $\bar{x}$ و $\bar{y}$ در جدول مورد نظر اعداد صحیحی هستند :

$$\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{\sum x_i}{n}=\dfrac{20}{5}=4\\[2mm]\bar{y}=\dfrac{\sum y_i}{n}=\dfrac{15}{5}=3\end{cases}$$

به‌کارگیری فرمول زیر از نظر سادگی در محاسبه مناسب‌تر خواهد بود:

x	y	$(x-\bar{x})$	$(y-\bar{y})$
2	3	-2	0
3	5	-1	2
4	1	0	-2
5	4	1	1
6	2	2	-1

$\longrightarrow$

$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
0	4	0
-2	1	4
0	0	4
1	1	1
-2	4	1
$\sum=-3$	$\sum=10$	$\sum=10$

$$r_{xy}=\frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2\sum(y-\bar{y})^2}}=\frac{-3}{10}$$

یادداشت:

....

....

....

....

۶۵ـ اگر $Cov(x\,,\,y)=10$، $\sigma_x=5$ و $\sigma_y=3$ باشد، ضریب همبستگی کدام است؟ (مدیریت ۸۳)

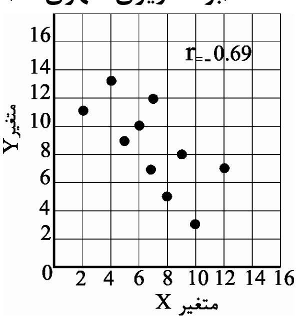
۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) هیچ‌کدام

حل:گزینه ۳ درست است.

$$r=\frac{Cov(x\,,\,y)}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{10}{5\times 3}=\frac{2}{3}$$

۶۶ـ شکل روبه‌رو که نمایشی از پراکنش نمره‌های یک آزمون است در نظر بگیرید. رابطه بین دو متغیر x و y:

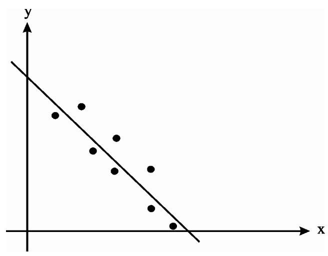
(برنامه‌ریزی شهری۸۲)



۱) بین x و y ارتباطی وجود ندارد.
۲) مبین همبستگی کامل است.
۳) مبین همبستگی منفی و ناکامل است.
۴) یک همبستگی مثبت و کامل وجود دارد.

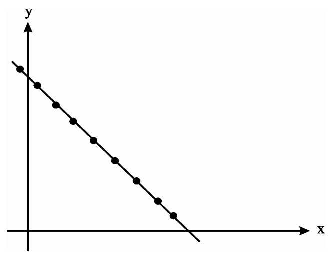
حل:گزینه ۳ درست است.

شکل نشان‌دهنده یک رابطه خطی و معکوس است و همچنین مقدار $r=-0.69$ نیز بیان‌کننده رابطی خطی و منفی (معکوس) است. می‌دانیم که اگر نقاط همه درست روی یک خط باشند مقدار $|r|=1$ رابطه‌ای خواهد شد و همبستگی کامل خواهد بود. اما در این شکل نه مقدار $r=-1$ است و نه نقاط به‌طور دقیق روی یک خط واقع شده‌اند. بنابراین شکل مبین همبستگی منفی و ناکامل (ناقص) است.



$-1<\rho<0$

بین x و y رابطه معکوس و ناقص



$\rho=-1$

بین x و y رابطه معکوس و کامل

ضریب تعیین (تشخیص)

۶۷ـ فرض کنید که کواریانس بین دو متغیر X و Y مساوی 32 است. اگر $\sigma_X^2=64$ و $\sigma_Y^2=25$ باشد، چند درصد تغییرات Y توسط متغیر مستقل بیان می‌شود؟ (حسابداری ۸۰)

۱) 0.02 ۲) 0.04 ۳) 0.64 ۴) 0.80

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۳صحیح است.

R^2: درصد تغییرات متغیر وابسته (y) که توسط متغیر مستقل (x) توضیح داده می‌شود.

$$R^2 = \frac{\left(Cov(x\,,\,y)\right)^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = \frac{(32)^2}{64 \times 25} = 0.64$$

۶۸ ـ اگر ضریب همبستگی بین دو متغیر 0.6 و دو متغیر دیگر 0.3 باشد، می‌توان گفت همبستگی دو متغیر اول «چند برابر قوی‌تر» از دو متغیر دوم است؟ (مدیریت ۸۳)

۱) دو برابر ۲) سه برابر ۳) چهاربرابر ۴) نه برابر

حل:گزینه ۳صحیح است.

با توجه به این‌که ضریب همبستگی شدت ارتباط خطی را فقط از جهت کامل یا ناقص بودن بیان می‌کند از ضریب تعیین (تشخیص) برای چند برابر قوی‌تر بودن رابطه‌ها استفاده می‌شود:

همبستگی دو متغیر اول 4 برابر قوی‌تر از دو متغیر دوم است.

$$\frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{\left(r_1\right)^2}{\left(r_2\right)^2} = \frac{(0.6)^2}{(0.3)^2} = \frac{0.36}{0.09} = 4$$

۶۹ ـ در تحلیل رگرسیونی ساده، ضریب تعیین $\left(R^2\right)$ بیانگر چیست؟(برنامه‌ریزی شهری۸۲)

۱) ضریب تعیین درصد تغییرات متغیر مستقل که توسط متغیر وابسته توضیح داده می‌شود را نشان می‌دهد.

۲) ضریب تعیین میزان همبستگی بین متغیر وابسته و متغیر مستقل را نشان می‌دهد.

۳) ضریب تعیین درصد تغییرات متغیر وابسته که توسط متغیر مستقل توضیح داده می‌شود را نشان می‌دهد.

۴) ضریب همبستگی بین متغیر وابسته و متغیر مستقل است.

حل:گزینه ۳ درست است.

R^2 (ضریب تعیین): درصد تغییرات متغیر وابسته (y) که توسط متغیر مستقل (x) بیان می‌شود.

$\left(1-R^2\right)$: درصد تغییرات متغیر وابسته (y) که توسط متغیر مستقل (x) بیان نمی‌شود.

رگرسیون

۷۰ ـ در جدول مقابل شیب خط رگرسیون y نسبت به x کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۵)

x	y
5	8
6	3
10	4
7	5

۱) 0.5

۲) 0.4

۳) -0.4

۴) -0.5

یادداشت:

....

....

....

....

حل:گزینه ۴ درست است.

با توجه به آنکه $\overline{x}$ و $\overline{y}$ در جدول مورد نظر اعداد صحیحی هستند :

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\sum x_i}{n} = \dfrac{28}{4} = 6 \\ \overline{y} = \dfrac{\sum y_i}{n} = \dfrac{20}{4} = 5 \end{cases}$$

به‌کارگیری فرمول زیر از نظر سادگی در محاسبه مناسب‌تر خواهد بود:

x	y	$(x-\overline{x})$	$(y-\overline{y})$
5	8	-2	3
6	3	-1	-2
10	4	3	-1
7	5	0	0

$\longrightarrow$

$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$	$(x-\overline{x})^2$
-6	4
2	1
-3	9
0	0
$\sum = -7$	$\sum = 14$

شیب خط : $b = \dfrac{\sum (x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sum (x-\overline{x})^2} = \dfrac{-7}{14} = -0.5$

یادداشت:

....

....

....

....

فصل چهارم

توزیع‌های گسسته و پیوسته

یکنواخت گسسته

۱ ـ اگر کمیت تصادفی x به صورت مقابل توزیع شده باشد: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9} & x=1,2,3,4,5,6,7,8,9\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$ **میانگین و واریانس آن برابر است با: (اقتصاد ۸۴)**

۱) $V(x)=\frac{81}{12}\,,\,E(x)=\frac{9}{2}$

۲) $V(x)=\frac{20}{3}\,,\,E(x)=5$

۳) $V(x)=\frac{12}{3}\,,\,E(x)=5$

۴) $V(x)=\frac{9}{12}\,,\,E(x)=\frac{71}{10}$

حل: گزینه ۲ درست است.

با توجه به این‌که توزیع x یکنواخت گسسته است با تابع چگالی

$$f(x)=\frac{1}{N}\qquad x=1\,,\,2\,,\,...\,,\,N$$

$$\begin{cases}E(x)=\frac{N+1}{2}=\frac{9+1}{2}=5\\ V(x)=\frac{N^2-1}{12}=\frac{9^2-1}{12}=\frac{80}{12}=\frac{20}{3}\end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....

برنولی

۲ ـ اگر کمیت تصادفی x بر طبق قانون دو نقطه‌ای با تابع احتمال زیر توزیع شده باشد:

$$P_x(x) = p^x q^{1-x} \qquad \begin{matrix} x = 0, 1 \\ q = 1 - p \end{matrix}$$

امید ریاضی آن کدام است؟ (اقتصاد ۷۲)

۱) $\frac{pq}{n}$ ۲) $p(1-p)$ ۳) p ۴) np

حل: گزینه ۳ درست است.

توزیع دونقطه‌ای همان توزیع برنولی است و مقدار امیدریاضی آن برابر p است. $E(x) = p$

محاسبه از روش مستقیم:

$$E(x) = \sum x f(x) = \sum xp^x q^{1-x} = 0 \times p^0 q^{1-0} + 1 \times p^1 q^{1-1} = p$$

۳ ـ فرض کنید x_1, x_2 متغیرهای تصادفی مستقل با تابع چگالی احتمال زیر باشند،

$$P(X = x) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} \quad ; \quad x = 0,1 \quad ; \quad 0 < \theta < 1$$

در آن صورت $E\left(x_1^4 . x_2^4\right)$ برابر است با : (محیط زیست۸۸)

۱) θ^2 ۲) θ^4 ۳) $(1-\theta)^4$ ۴) $\theta^2(1-\theta)^2$

حل: گزینه ۱ درست است.

x_2, x_1 دارای توزیع برنولی با پارامتر $p = \theta$ هستند پس $E(x_1) = E(x_2) = \theta$ و داریم :

x_1	0	1
$P(x)$	$1-\theta$	θ

$\rightarrow$

x_1^4	0^4	1^4
$P(x_1^4)$	$1-\theta$	θ

$\rightarrow$

x_1^4	0	1
$P(x_1^4)$	$1-\theta$	θ

بنابراین در توزیع برنولی هر توانی از x هم دارای توزیع برنولی با همان پارامتر است.

$$E\left(x_1^4 . x_2^4\right) = E(x_1 . x_2) \overset{x_1 \text{ و } x_2 \text{ مستقل}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} E(x_1)E(x_2) = \theta . \theta = \theta^2$$

دوجمله‌ای

۴ ـ به ازای کدام مقدار a، تابع $x = 0$ و 1، 2، 3، 4، $P(X = x) = \frac{\binom{4}{x}}{3a+1}$، یک تابع احتمال است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۷)

۱) 6 ۲) 5 ۳) 4 ۴) 3

یادداشت:

....

....

....

....

حل: گزینه ۲ درست است.

یادآوری: مجموع احتمال‌ها در تابع احتمال گسسته برابر یک است یعنی:

$$\sum P(x)=1 \rightarrow \sum_{x=0}^{4}\frac{\binom{4}{x}}{3a+1}=1 \rightarrow \frac{\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}}{3a+1}=1$$

$$\rightarrow 1+4+6+4+1=3a+1 \rightarrow 3a=15 \rightarrow \boxed{a=5}$$

توجه:

$$\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}=2^n \rightarrow \sum_{x=0}^{4}\binom{4}{x}=2^4=16$$

۵ ـ شصت درصد افراد شرکت‌کننده در یک آزمون قبول شده‌اند. اگر X تعداد افراد قبول شده در هر انتخاب 96 نفری باشد، انحراف معیار X کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۷)

۱) 4.8 ۲) 3.6 ۳) 5.4 ۴) 7.2

حل: گزینه ۱ درست است.

با توجه به اینکه احتمال موفقیت (قبول شدن) $(p=0.6)$ ثابت است توزیع تعداد موفقیت در نمونه $(n=96)$ دوجمله‌ای است با:

$n=96\ ,\ p=0.6\ ,q=0.4$

می‌دانیم که در توزیع دوجمله‌ای واریانس عبارت است از:

$$\sigma^2=npq=96\times0.6\times0.4=\frac{16\times6\times6\times4}{100} \rightarrow \sigma=\frac{4\times6\times2}{10}=4.8$$

۶ ـ در یک توزیع دو جمله‌ای اگر $\mu_x=3$ $\sigma_x=\sqrt{\frac{6}{5}}$ باشد، تعداد آزمایش‌ها (n) کدام است؟ (اقتصاد ۷۶)

۱) 3 ۲) 4 ۳) 5 ۴) 6

حل: گزینه ۳ درست است.

$$x\sim Bin(n,p) \rightarrow E(x)=np\ ,\ Var(x)=npq$$

$$\begin{cases}\mu_X=E(X)=np=3\\ \sigma_X=\sqrt{npq}=\sqrt{\frac{6}{5}} \rightarrow npq=\frac{6}{5}\xrightarrow{np=3}3q=\frac{6}{5}\rightarrow q=\frac{2}{5},p=\frac{3}{5}\rightarrow n\times\frac{3}{5}=3\rightarrow n=5\end{cases}$$

۷ ـ واریانس تعداد شماره فرد در 12 بار پرتاب یک تاس سالم چقدر است؟ (اقتصاد ۷۷)

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) 3 ۳) 4 ۴) 9

یادداشت:

....

....

....

....

حل: گزینه ۲ درست است.

جامعه نامحدود و احتمال ثابت است. بنابراین توزیع تعداد موفقیت (فردآمدن تاس) در $n = 12$ بار تکرار آزمایش (پیروزی/شکست) دوجمله‌ای است با:

$p = P\ (\text{فرد}) = \frac{1}{2}$ ، $q = P\ (\text{زوج}) = \frac{1}{2}$ ، $n = 12$

$$Var(X) = npq = 12 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 3$$

۸ ـ اگر در توزیع دو جمله‌ای $n = 20$ و $p = 0.3$ باشد، نمودار تابع احتمال آن به چه شکلی خواهد بود؟ (اقتصاد ۸۱)

۱) یک‌نمایی ۲) چوله به راست ۳) چوله به چپ ۴) متقارن

حل: گزینه ۲ درست است.

به‌طور کلی در توزیع دو جمله‌ای اگر $p > 0.5$ باشد، نمودار احتمال مربوطه چوله به چپ است و اگر $P < 0.5$ باشد، نمودار احتمال مربوطه چوله به راست و اگر $p = 0.5$ ، نمودار احتمال مربوطه متقارن است.

۹ ـ احتمال این‌که در 2 بار تیراندازی، حداقل یک تیر به هدف اصابت کند، مساوی 0.84 است. احتمال اصابت تیر به هدف در هر بار چقدر است؟ (اقتصاد ۸۱)

۱) 0.4 ۲) 0.6 ۳) 0.16 ۴) 0.42

حل: گزینه ۲ درست است.

با توجه به جمله «احتمال اصابت تیر به هدف در هر بار تیراندازی» متوجه می‌شویم جامعه نامحدود و احتمال ثابت است. بنابراین توزیع تعداد موفقیت (اصابت به هدف) در $n = 2$ بار تکرار آزمایش (پیروزی/شکست) دوجمله‌ای است با: $n = 2, p = ?$

$$P\ (\text{حداقل یک تیر اصابت کند}) = P(x \geq 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = 1 - \binom{n}{0} p^0 q^{n-0}$$

$$= 1 - q^n = 1 - q^2 = 0.84 \rightarrow q^2 = 0.16 \rightarrow q = 0.4\ ,\ p = 0.6 \rightarrow$$

$p = 0.6$ احتمال اصابت تیر به هدف در هر بار تیراندازی است.

۱۰ ـ در یک توزیع دوجمله‌ای میانگین برابر 6 و انحراف معیار برابر 2 است. مقدار $P(x > 0)$ برابر است با:(اقتصاد ۸۵)

۱) 1 ۲) $\left(\frac{1}{3}\right)^{18}$ ۳) $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{18}$ ۴) $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{18}$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$x \sim Bin(n,p) \rightarrow E(x) = np\ ,\ Var(x) = npq$$

$$\begin{cases} \mu = np = 6 \\ \sigma = \sqrt{npq} = 2 \rightarrow npq = 4 \xrightarrow{np=6} 6q = 4 \rightarrow q = \frac{2}{3}\ ,\ p = \frac{1}{3}\ ,\ n = 18 \end{cases}$$

$$P(x > 0) = 1 - P(x = 0) = 1 - \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = 1 - \binom{18}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{18} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{18}$$

یادداشت:

....

....

....

....

۱۱ ـ ظرفیت هواپیمایی 360 نفر است ولی برای 400 نفر جا رزرو می‌شود. تعداد مسافرانی که جا رزرو کرده ولی برای پرواز حاضر نمی‌شوند به طور متوسط 40 نفر در هر پرواز است. احتمال اینکه همه 400 نفر برای پرواز حاضر شوند چقدر است؟ (اقتصاد ۸۷)

۱) 0.1^{400} ۲) 0.9^{400} ۳) 0.1^{360} ۴) 0.9^{360}

حل: گزینه ۲ درست است.

در هر پرواز احتمال موفقیت (مسافری جا رزرو کند و حاضر نشود) ثابت است $(p=?)$ بنابراین توزیع تعداد موفقیت در نمونه $(n=400)$ دوجمله‌ای است با: $n=400$ و $p=?$ که میانگین آن:

$$\mu = np = 40 \;\to\; 400p = 40 \;\to\; p = 0.1$$ (احتمال رزرو کردن و حاضر نشدن)

دقت کنید که وقتی همه 400 نفر برای پرواز حاضر شوند یعنی تعداد مسافرانی که جا رزور کرده و حاضر نشدند برابر صفر است.

$$\begin{cases} P(x=0)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=\binom{400}{0}(0.1)^0(0.9)^{400}=(0.9)^{400} \\ x:(n=400) \text{ تعداد مسافرانی که رزرو کرده و حاضر نشدند در } \end{cases}$$

چندجمله‌ای

۱۲ ـ وزنه‌برداری در هر آزمون می‌تواند سه نوع امتیاز A ، B و C را به ترتیب با احتمالات 0.5، 0.3 و 0.2 کسب نماید. احتمال این‌که در هفت بار آزمون امتیازات وی 2 بار A، 2 بار B و 3 بار C باشد، کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۶)

۱) 0.0378 ۲) 0.0756 ۳) 0.168 ۴) 0.378

حل: گزینه ۱ درست است.

نکته: هرگاه آزمایش دارای بیش از دو نتیجه ممکن باشد، به‌طوری که نتایج دو به دو ناسازگار بوده و مجموع نتایج ممکن برابر یک شود، توزیع تعداد موفقیت‌ها در هر بار تکرار مستقل آزمایش، چندجمله‌ای است و تابع چگالی احتمال آن به‌صورت زیر است:

$$\binom{n}{x_1\ x_2 \cdots x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x} \quad , \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

$$\begin{cases} \binom{7}{2\ 2\ 3} P(A)^2 P(B)^2 P(C)^3 = \frac{7!}{2!2!3!}(0.5)^2(0.3)^2(0.2)^3 = 210\times0.25\times0.09\times0.008 = 0.0378 \\ P(A)=0.5 \,,\, P(B)=0.3 \,,\, P(C)=0.2 \end{cases}$$

۱۳ ـ اظهارنظر حسابرسان راجع به حساب‌های شرکتی ممکن است، قبول، مردود و مشروط باشد، در سال پیش 0.30،0.20 و 0.50 نظرها به ترتیب قبول، مردود، مشروط بوده‌اند. شش شرکت به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند. میانگین و واریانس شرکت‌های مشروط به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ (مدیریت۸۲)

۱) (1.2 , 1.2) ۲) (1.2 , 1.8) ۳) (1.5 , 3) ۴) (3 , 4)

حل: گزینه ۳ درست است.

نکته: هرگاه آزمایش دارای بیش از دو نتیجه ممکن باشد، به‌طوری که نتایج دو به دو ناسازگار بوده و مجموع نتایج ممکن برابر یک شود، توزیع تعداد موفقیت‌ها در هر بار تکرار مستقل آزمایش، چندجمله‌ای است و تابع چگالی احتمال آن به‌صورت زیر است:

$$\binom{n}{x_1\ x_2 \cdots x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x} \quad , \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

یادداشت:

....

....

....

....

$$\begin{cases} p = P\,(\text{مشروط}) = 0.5\ , q = 1 - P\,(\text{مشروط}) = P\,(\text{قبول و مردود}) = 0.5, n = 6 \\ E(x) = np = 6 \times 0.5 = 3 \\ Var(x) = npq = 6 \times 0.5 \times 0.5 = 1.5 \end{cases}$$

۱۴ ـ احتمال انتخاب دو شاغل و یک بازنشسته در انتخاب تصادفی 5 نفر از اعضای شهری که 0.40 اهالی شاغل و 0.10 بازنشسته هستند چقدر است؟ (اقتصاد ۷۴)

۱) 0.12 ۲) 0.5 ۳) 0.6 ۴) 0.9

حل: گزینه ۱ درست است.

نکته: هرگاه آزمایش دارای بیش از دو نتیجه ممکن باشد، به‌طوری که نتایج دو به دو ناسازگار بوده و مجموع نتایج ممکن برابر یک شود، توزیع تعداد موفقیت‌ها در هر بار تکرار مستقل آزمایش، چندجمله‌ای است و تابع چگالی احتمال آن به‌صورت زیر است:

$$\binom{n}{x_1\ x_2 \cdots x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x} \quad , \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

$$\begin{cases} A : \text{شاغل} \quad \rightarrow \quad P(A) = 0.4 \\ B : \text{بازنشسته} \quad \rightarrow \quad P(B) = 0.1 \\ C : \text{سایر افراد} \quad \rightarrow \quad P(C) = 1 - (0.4 + 0.1) = 0.5 \end{cases}$$

$$\binom{5}{2\quad 1\quad 2} P(A)^2\, P(B)^1\, P(C)^2 = \frac{5!}{2!1!\underbrace{2!}_{\text{بقیه}}} (0.4)^2 (0.1)^1 \underbrace{(0.5)^2}_{\text{بقیه}} = 30 \times 0.16 \times 0.1 \times 0.25 = 0.12$$

دوجمله‌ای منفی

۱۵ ـ در یک توزیع پاسکال احتمال شکست 0.6 است. اگر x تعداد آزمایش‌های برنولی در این توزیع باشد، $E(x)$ برای پیشامد دوازدهمین موفقیت کدام است؟(حسابداری و مدیریت ۸۵)

۱) 20 ۲) 24 ۳) 25 ۴) 30

حل: گزینه ۴ درست است.

جامعه نامحدود و احتمال ثابت است. بنابراین توزیع تعداد تکرار آزمایش (پیروزی/شکست) برای رسیدن به r امین (دوازدهمین) موفقیت، دوجمله‌ای منفی است با:

$$\begin{cases} q = 0.6\ (\text{شکست}) \text{ و } p = 0.4 \text{ و } r = 12 \\ E(x) = \dfrac{r}{p} = \dfrac{12}{0.4} = 30 \end{cases}$$

توجه: در توزیع دوجمله‌ای منفی به دنبال جای موفقیت هستیم به همین دلیل از پسوند (امین) استفاده می‌کنیم.

یادداشت:

....

....

....

....

۱۶ ـ احتمال این‌که هر پرتاب بازیکنی به هدف اصابت کند $\frac{2}{3}$ است، احتمال اینکه سومین پرتابی که به هدف اصابت می‌کند پنجمین پرتاب وی باشد، کدام است؟ (مدیریت ۸۴)

۱) $\frac{16}{81}$ ۲) $\frac{8}{81}$ ۳) $\frac{16}{27}$ ۴) $\frac{8}{27}$

حل: گزینه ۱ درست است.

جامعه نامحدود و احتمال ثابت است. بنابراین توزیع تعداد تکرار آزمایش (پیروزی/شکست) (پنجمین) برای رسیدن به r امین (سومین) موفقیت، دوجمله‌ای منفی است با:

راه حل اول:

$$\begin{cases} p=\frac{2}{3}, q=\frac{1}{3}, \ r=3, x=5 \\ P(x=5)=\binom{x-1}{r-1}p^r q^{x-r}=\binom{5-1}{3-1}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^{5-3}=\binom{4}{2}\frac{8}{243}=\frac{6\times 8}{243}=\frac{16}{81} \end{cases}$$

توجه: در توزیع دوجمله‌ای منفی به دنبال جای موفقیت هستیم به همین دلیل از پسوند (امین) استفاده می‌کنیم.

راه حل دوم: این مسئله را بدون در نظر گرفتن جای موفقیت با توزیع دوجمله‌ای نیز می‌توان حل کرد و در آخر از اعداد قسمت ترکیب مسئله یک واحد کم کرد.

x : دوجمله‌ای (سه موفقیت در 5 بار تکرار آزمایش)

$$\begin{cases} p=\frac{2}{3}, q=\frac{1}{3}, n=5 \\ P(x=3)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=\binom{\overset{4}{\cancel{5}}}{\underset{2}{\cancel{3}}}p^3 q^{5-3}=\binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{16}{81} \end{cases}$$

هندسی

۱۷ ـ احتمال این‌که هر پرتاب بازیکنی به هدف اصابت کند، 0.8 است. احتمال این‌که اولین پرتابی که به هدف می‌خورد سومین پرتاب وی باشد، چقدر است؟ (مدیریت۷۹)

۱) 0.032 ۲) 0.2048 ۳) 0.231 ۴) 0.321

حل: گزینه ۱ درست است.

جامعه نامحدود و احتمال ثابت است. بنابراین توزیع تعداد تکرار آزمایش (پیروزی/شکست) برای رسیدن به اولین موفقیت، هندسی است با:

راه حل اول:

$$\begin{cases} p=0.8, q=0.2 \\ P(x=3)=q^{x-1}p=(0.2)^2(0.8)=0.032 \end{cases}$$

راه حل دوم: بدون در نظر گرفتن جای موفقیت از طریق توزیع دوجمله‌ای نیز می‌توان مسئله را حل کرد و در آخر از اعداد قسمت ترکیب یک واحد کم کرد.

یادداشت:

....

....

....

....

x: دوجمله‌ای: یک موفقیت در 3 بار تکرار آزمایش

$$\begin{cases} p = 0.8, q = 0.2, n = 3 \\ P(x=1) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{3}{1} p^1 q^{3-1} = q^2 p = (0.2)^2 (0.8) = 0.032 \end{cases}$$

۱۸ ـ در یک ظرف 10 توپ سفید و 5 توپ سیاه داریم، یک توپ به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. پس از مشاهده رنگ آن، مجدداً آن را به داخل ظرف باز می‌گردانیم و این عمل را آن‌قدر تکرار می‌کنیم تا توپ سیاه انتخاب شود، متوسط تعداد انتخاب (تکرار) کدام است؟ (اقتصاد ۷۱)

۱) 3 ۲) 5 ۳) 6 ۴) 2

حل: گزینه ۱ درست است.

جامعه محدود، انتخاب با جایگذاری و احتمال ثابت است. بنابراین توزیع تعداد تکرار آزمایش (پیروزی/شکست) برای رسیدن به اولین موفقیت، هندسی است. در صورتی که اگر تعداد موفقیت در n بار تکرار را می‌خواست توزیع دوجمله‌ای بود.

$$\begin{cases} p = P(\text{سیاه}) = \frac{5}{15} \quad , \quad q = P(\text{سفید}) = \frac{10}{15} \\ E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{5}{15}} = 3 \end{cases}$$

توجه: در صورتی که جامعه محدود باشد، فقط اگر انتخاب با جایگذاری باشد توزیع تعداد موفقیت‌ها دوجمله‌ای و توزیع اولین موفقیت هندسی است. در غیر این صورت وقتی انتخاب بدون جایگذاری باشد توزیع تعداد موفقیت‌ها فوق‌هندسی خواهد بود. همچنین می‌دانیم پیش‌فرض، انتخاب بدون جایگذاری است. مگر در صورت سؤال باجایگذاری بودن ذکر شود.

فوق هندسی

۱۹ ـ از جوراب‌های بسته‌بندی شده در جعبه‌ای 9 عدد سالم و 3 عدد معیوب است. یک مشتری به طور تصادفی 4 عدد را خریداری می‌کند. میانگین و واریانس تعداد جوراب‌های معیوب در این خرید به ترتیب از چپ به راست چقدر است؟ (اقتصاد ۷۳)

۱) $\frac{6}{11}$ و 1 ۲) $\frac{3}{4}$ و 1 ۳) $\frac{27}{12}$ و 1 ۴) $\frac{9}{12}$ و 2

حل: گزینه ۱ درست است.

جامعه محدود است و پیش فرض، انتخاب بدون جایگذاری است بنابراین توزیع تعداد موفقیت (معیوب بودن) در n بار تکرار آزمایش (پیروزی/شکست)، فوق‌هندسی است.

$$\begin{cases} N = 12 \quad , \quad n = 4 \quad , \quad k = 3 \\ E(X) = np = n \times \frac{k}{N} = 4 \times \frac{3}{12} = 1 \\ Var(x) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 4 \times \frac{3}{12} \times \frac{9}{12} \times \frac{12-4}{12-1} = \frac{6}{11} \end{cases}$$

توجه: در توزیع دوجمله‌ای مقدار احتمال را بدون گفتن تعداد جامعه ذکر می‌کنند. بنابراین در توزیع دوجمله‌ای جامعه نامحدود است و اگر جامعه محدود باشد فقط در صورتی که انتخاب با جایگذاری ذکر شده باشد توزیع را دوجمله‌ای می‌دانیم و در غیراین‌صورت توزیع فوق‌هندسی است.

یادداشت:

....

....

....

....

۲۰ ـ کیسه‌ای حاوی 5 مهره قرمز و 4 مهره سفید است. سه مهره بدون جایگذاری از کیسه خارج می‌شود، توزیع احتمال تعداد مهره‌های قرمز کدام یک است؟ (اقتصاد ۷۵)

۱) پواسون ۲) دو جمله‌ای ۳) فوق هندسی ۴) یکنواخت

حل: گزینه ۳ درست است.

جامعه محدود و پیش فرض، انتخاب بدون جایگذاری است. بنابراین توزیع تعداد موفقیت (قرمز بودن مهره) در n بار تکرار آزمایش (پیروزی/شکست)، فوق‌هندسی است:

$$\begin{cases} N=9, n=3, k=5 \ (\text{قرمز}) \\ f_X(x)=\dfrac{\binom{5}{x}\binom{4}{3-x}}{\binom{9}{3}} \quad , \ x=0,1,2,3 \end{cases}$$

توجه: در توزیع دوجمله‌ای مقدار احتمال را بدون گفتن تعداد جامعه ذکر می‌کنند. بنابراین در توزیع دوجمله‌ای جامعه نامحدود است و اگر جامعه محدود باشد فقط در صورتی که انتخاب با جایگذاری ذکر شده باشد توزیع را دوجمله‌ای می‌دانیم و در غیراین‌صورت توزیع فوق‌هندسی است.

تقریب فوق‌هندسی به دوجمله‌ای

۲۱ ـ از یک جامعه 4000 نفره یک نمونهٔ تصادفی 40 تایی انتخاب شده است. در این حالت تابع احتمال متغیر تصادفی X، کدام است؟ (حسابداری ۸۱)

۱) هندسی ۲) دوجمله‌ای

۳) فوق هندسی ۴) هم فوق هندسی و هم دو جمله‌ای

حل: گزینه ۴ درست است.

در صورتی‌که در توزیع فوق‌هندسی $\frac{n}{N} \le 0.05$ باشد توزیع فوق‌هندسی تقریبی از توزیع دو جمله‌ای است.

$$\frac{n}{N}=\frac{40}{4000}=0.01<0.05$$

پواسون

۲۲ ـ بطور متوسط با توزیع پوآسون در هر ساعت دوازده اتومبیل برای زدن بنزین مراجعه می‌کنند. احتمال این‌که در 15 دقیقه 3 اتومبیل مراجعه کنند، چقدر است؟ (حسابداری ۸۳)

۱) e^{-3} ۲) e^{-12} ۳) $12e^{-3}$ ۴) $4.5e^{-3}$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$x \sim P(\lambda) \quad \rightarrow \quad E(x)=Var(x)=\lambda$$

$\mu=\lambda=12$ اتومبیل در هر ساعت $\rightarrow$ $\lambda=\frac{12}{4}=3$ در 15 دقیقه

$$P(x=3)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^3}{3!}=\frac{e^{-3}3^3}{6}=\frac{27}{6}e^{-3}=4.5\,e^{-3}$$

یادداشت:

....

....

....

....

۲۳ ـ در یک توزیع پواسون اگر $P(X=1)=P(X=2)$ باشد، آن‌گاه مقدار $P(X=0)$ برابر است با: (اقتصاد ۸۱)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $2e^{-2}$ ۳) e^{-1} ۴) e^{-2}

حل: گزینه ۴ درست است.

$$x \sim P(\lambda)\ ,\ P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$P(X=1)=P(X=2) \rightarrow \frac{\cancel{e^{-\lambda}}\lambda^1}{1!}=\frac{\cancel{e^{-\lambda}}\lambda^2}{2!} \rightarrow 2\lambda=\lambda^2 \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم.}]{\text{طرفین را به } \lambda} \lambda=2$$

(باتوجه به این‌که λ عدد بزرگ‌تر از صفراست)

$$P(X=0)=\frac{e^{-2}2^0}{0!}=e^{-2}$$

۲۴ ـ به طور متوسط در هر شبانه‌روز 12 تصادف در یک شهر اتفاق می‌افتد. احتمال این‌که در 6 ساعت حداکثر یک تصادف اتفاق بیفتد، چند است؟(اقتصاد ۸۶)

۱) $1-e^{-3}$ ۲) $1-3e^{-3}$ ۳) $4e^{-3}$ ۴) $3e^{-3}$

حل: گزینه ۳ درست است.

تعداد اتفاقات در هر فاصله زمانی یا مکانی (تعداد تصادفات در روز) دارای توزیع پواسون با پارامتر λ است.

$$x \sim P(\lambda) \rightarrow E(x)=Var(x)=\lambda$$

$\mu=\lambda=12$ در روز: 24 ساعت $\rightarrow \lambda=\frac{12}{24}\times 6=3$ در 6 ساعت

$$P(x\le 1)=P(x=0)+P(x=1)=\sum_{x=0}^{x=1}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=\frac{e^{-3}(3)^0}{0!}+\frac{e^{-3}(3)^1}{1!}=e^{-3}+3e^{-3}=4e^{-3}$$

۲۵ ـ به طور متوسط در هر 2 دقیقه یک نفر وارد کتابخانه مرکزی می‌شود. احتمال اینکه در 5 دقیقه بعد، حداقل یک نفر وارد کتابخانه شود برابر است با: (اقتصاد ۸۷)

۱) $e^{-2.5}$ ۲) e^{-10} ۳) $1-e^{-10}$ ۴) $1-e^{-2.5}$

حل: گزینه ۴ درست است.

☜**یادآوری:** توزیع تعداد اتفاقات در واحد زمان پواسون است.

$\lambda=1$ متوسط نفر در دو دقیقه $\rightarrow \lambda=\frac{5}{2}$ متوسط نفر در 5 دقیقه

$$\begin{cases} P(x\ge 1)=1-P(x=0)=1-\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=1-\frac{e^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{5}{2}\right)^0}{0!}=1-e^{-\frac{5}{2}} \\ \text{X: تعداد افراد وارد شده در 5 دقیقه}\ ,\ \lambda=\frac{5}{2} \end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....

تقریب دوجمله‌ای به پواسون

۲۶ ـ بر اساس تجربه، مشخص شده است که یک تلفنچی 4 درصد از تلفن‌ها را اشتباه وصل می‌کند. اگر روزی 150 تلفن وصل کرده باشد احتمال این‌که بیش از یک شماره را اشتباه وصل کرده باشد، کدام است؟ (مدیریت ۸۱)

۱) $6e^{-6}$ ۲) $1-7e^{-6}$ ۳) $1-e^{-6}$ ۴) $1-5e^{-6}$

حل: گزینه ۲ درست است.

در توزیع دو جمله‌ای هرگاه $(n \ge 20, p \le 0.05)$ یا $(n \ge 100, p \le 0.1)$ می‌توانیم از تقریب پواسون استفاده کنیم($\lambda = np$ در نظر گرفته می‌شود).

$p=0.04$ و $n=150 \rightarrow \lambda = np = 150 \times 0.04 = 6 \le 10 \rightarrow$ تقریب پواسون مناسب است.

$$P(X>1) = 1-P(X \le 1) = 1-\left(P(X=1)+P(X=0)\right) = 1-\left(\frac{e^{-6}.\,6^1}{1!}+\frac{e^{-6}.\,6^0}{0!}\right) = 1-7e^{-6}$$

۲۷ ـ در کدام‌یک از موارد زیر توزیع پواسون تقریب خوبی برای توزیع دوجمله‌ای است؟ (اقتصاد ۸۰)

۱) $n = 25$ و $p = 0.04$ ۲) $n = 50$ و $p = 0.28$

۳) $n = 60$ و $p = 0.58$ ۴) $n = 150$ و $p = 0.93$

حل: گزینه ۱ درست است.

در توزیع دوجمله‌ای در دو وضعیت زیر می‌توانیم از تقریب توزیع پواسون استفاده کنیم.

$n \ge 20\,,\ p \le 0.05$ یا $n \ge 100\,,\ p \le 0.01$

(گزینه ۱) $p = 0.04\,,\ n = 25 \xrightarrow{n \ge 20\,,\ p \le 0.05}$ تقریب پواسون مناسب است. ✓

(گزینه ۲) $p = 0.28\,,\ n = 50 \xrightarrow{n \ge 20\,,\ p \not\le 0.05}$ تقریب پواسون مناسب نیست.

(گزینه ۳) $p = 0.58\,,\ n = 60 \xrightarrow{n \ge 20\,,\ p \not\le 0.05}$ تقریب پواسون مناسب نیست.

(گزینه ۴) $p = 0.93\,,\ n = 150 \xrightarrow{n \ge 100\,,\ p \not\le 0.1}$ تقریب پواسون مناسب نیست.

یکنواخت پیوسته

۲۸ ـ میانگین متغیر تصادفی X با این تابع چگالی احتمال چقدر است؟ (مدیریت ۷۸)

$$f(x) = \frac{2}{3} \qquad -1 \le x \le \frac{1}{2}$$

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

حل: گزینه ۲ درست است.

یادداشت:

....

....

....

....

نکته: هرگاه تابع چگالی پیوسته یک عدد باشد، توزیع x یکنواخت پیوسته است. در این سؤال هم x دارای توزیع یکنواخت پیوسته با: $a=-1\ ,\ b=\frac{1}{2}$

راه حل اول:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{b-a}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}-(-1)}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3} & -1\le x\le \dfrac{1}{2} \\ E(x)=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{-1+\frac{1}{2}}{2}=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

راه حل دوم: محاسبه امیدریاضی از روش مستقیم است:

$$E(x)=\int_a^b xf(x)dx=\int_{-1}^{\frac{1}{2}} x\cdot\frac{2}{3}dx=\left[\frac{1}{3}x^2\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-1\right)=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{4}$$

۲۹ ـ واریانس متغیر تصادفی x با چگالی $\left\{f(x)=\frac{2}{3}\ \middle|\ -1<x<\frac{1}{2}\right\}$ کدام است؟ (مدیریت ۸۳)

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{3}{16}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{9}{4}$

حل: گزینه ۲ درست است.

نکته: هرگاه تابع چگالی پیوسته یک عدد باشد، توزیع x یکنواخت پیوسته است. در این سؤال هم x دارای توزیع یکنواخت پیوسته با: $a=-1\ ,\ b=\frac{1}{2}$

راه حل اول:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{b-a}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}-(-1)}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3} & -1< x< \dfrac{1}{2} \\ \sigma_x^2=\dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{\left(\frac{1}{2}-(-1)\right)^2}{12}=\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{12}=\dfrac{\frac{9}{4}}{12}=\dfrac{3}{16} \end{cases}$$

راه حل دوم: محاسبه واریانس از روش مستقیم:

$$\sigma_x^2=E\left(x^2\right)-\left(E(x)\right)^2=\int_{-1}^{\frac{1}{2}} x^2.\frac{2}{3}dx-\left(\int_{-1}^{\frac{1}{2}} x.\frac{2}{3}dx\right)^2=\left[\frac{2}{9}x^3\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}-\left(\left[\frac{2}{6}x^2\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}\right)^2=\frac{3}{16}$$

۳۰ ـ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی x به صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{4} & 1\le x\le 5 \\ 0 & \text{برای سایر مقادیر } x \end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....

اگر واریانس x برابر $\frac{4}{3}$ باشد، ضریب تغییرات x کدام است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) $\frac{2}{3\sqrt{3}} \times 100$ ۲) $\frac{4}{\sqrt{3}} \times 100$ ۳) $\frac{2\sqrt{3}}{4} \times 100$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{6} \times 100$

حل: گزینه ۱ درست است.

نکته: هرگاه تابع چگالی پیوسته یک عدد باشد، توزیع x یکنواخت پیوسته است. در این سؤال هم x دارای توزیع یکنواخت پیوسته با:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{5-1} = \frac{1}{4} \text{ و } a = 1 \ , \ b = 5$$

راه حل اول:

$$E(x) = \frac{a+b}{2} = \frac{1+5}{2} = 3 \quad , \quad \sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(5-1)^2}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \to \sigma = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{(ضریب تغییرات) } CV = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{3} \times 100 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \times 100$$

اگر چه مقدار واریانس در صورت مسئله داده شده اما به‌دست آوردن آن هم ساده بود.

راه حل دوم: به‌دست آوردن امید ریاضی از طریق مستقیم است.

$$E(x) = \int_1^5 xf(x)dx = \int_1^5 x.\frac{1}{4}dx = \left[\frac{1}{8}x^2\right]_1^5 = \frac{1}{8}(25-1) = \frac{24}{8} = 3$$

نرمال

۳۱ـ در یک توزیع نرمال با میانگین 32 و واریانس 4 تقریباً چند درصد داده‌ها بین دو عدد 38 و 26 قرار می‌گیرند؟ $\left(S_{-\infty}^{-3} = 0.0013\right)$ **(حسابداری و مدیریت ۸۵)**

۱) 89.6 ۲) 92.3 ۳) 95.4 ۴) 99.7

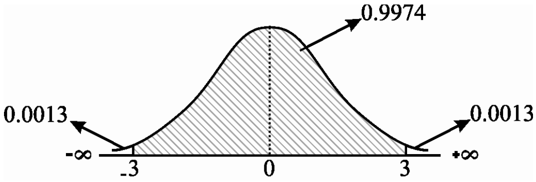
حل: گزینه ۴ درست است.

$$x \sim N\left(\mu = 32 \ , \ \sigma^2 = 4\right)$$

$$P(26 < x < 38) = P\left(\frac{26-32}{\sqrt{4}} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{38-32}{\sqrt{4}}\right) = P(-3 < Z < 3) = 0.9974 \to 99.7 \text{ درصد}$$

$$S_{-\infty}^{-3} = P(Z < -3) = P(Z > 3) = 0.0013$$

$$P(-3 < Z < 3) = 1 - 2 \times 0.0013 = 0.9974$$



یادداشت:

....

....

....

....

۳۲ ـ اگر توزیع X نرمال با میانگین 100 و انحراف معیار 10 باشد، و $P(X \le a) = 0.0668$ باشد، مقدار a کدام است؟ (راهنمایی: $\int_{-5}^{1.5} f(z)dz = 0.9332$) (مدیریت ۷۷)

۱) 50　　۲) 85　　۳) 115　　۴) 150

حل: گزینه ۲ درست است.

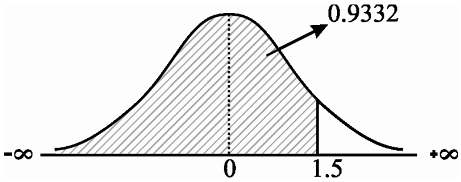
با توجه به نوع چهارم سؤالات نرمال:

$$X \sim N\left(\mu = 100\ ,\ \sigma^2 = 10^2\right)$$

$$(1)\ P(X \le a) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{a-100}{10}\right) = P\left(Z \le \frac{a-100}{10}\right) = 0.0668$$

$$(2) \int_{\cancel{-5}\ -\infty}^{1.5} f(z)dz = P(Z < 1.5) = 0.9332 \to$$

$$P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$



با توجه به نکته:

$$P(Z < A) = P(Z > B) \to A = -B$$

$$(1)\ ,\ (2)\ \frac{a-100}{10} = -(1.5) \quad \to \quad a = 85$$

$$(1),(2)\ \ \frac{100-\mu}{10} = -(1.96) \ \to\ \mu = 119.6$$

۳۳ ـ توزیع نمرات دانشجویان یک دانشکده با میانگین 14 و واریانس 2.25 یک توزیع نرمال است. اگر یک دانشجو از بین آنان به تصادف انتخاب شود با کدام احتمال نمره بالاتر از 17 خواهد داشت؟ $\left(S_0^2 = 0.4772\right)$ (مدیریت ۸۴)

۱) 0.2886　　۲) 0.0456　　۳) 0.0114　　۴) 0.0228

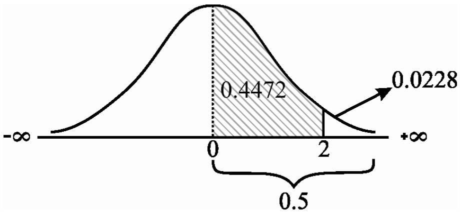
حل: گزینه ۴ درست است.

$$x \sim N\left(\mu = 14\ ,\sigma^2 = 2.25\right)$$

$$P(x > 17) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{17-14}{\sqrt{2.25}}\right) = P\left(Z > \frac{3}{1.5}\right) = P(Z > 2) = 0.0228$$

$$S_0^2 = P(0 < Z < 2) = 0.4772$$

$$\to \quad P(Z > 2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$



یادداشت:

....

....

....

....

۳۴ـ اگر x دارای توزیع $N(\mu\ ,\ 100)$ باشد و داشته باشیم $P(x>124)=0.05$ و $Z_{0.05}=1.65$ آن‌گاه مقدار μ برابر است با: (اقتصاد ۸۵)

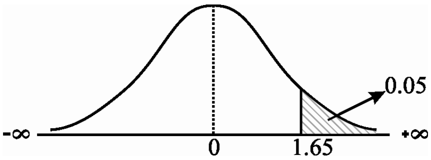
۱) 140.5   ۲) 121.9   ۳) 107.5   ۴) 104.5

حل: گزینه ۳ درست است.

$$x \sim N\left(\mu\ ,\ \sigma^2=100\right)$$

$$(1)\ P(x>124)=P\left(\frac{x-\mu}{\sigma}>\frac{124-\mu}{\sqrt{100}}\right)=P\left(Z>\frac{124-\mu}{10}\right)=0.05$$

$(2)\ Z_{0.05}=1.65\rightarrow$



$\rightarrow\ P(Z>1.65)=0.05$

با توجه به رابطه $P(Z>A)=P(Z>B)\rightarrow A=B$ داریم:

$$(1),(2)\ \frac{124-\mu}{10}=1.65\ \rightarrow\ \mu=107.5$$

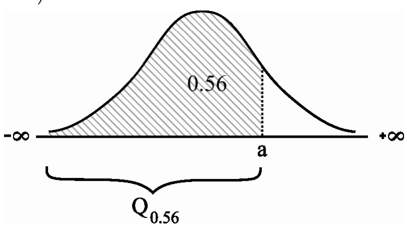
۳۵ـ در یک توزیع نرمال با میانگین 17.2 و واریانس 16، دادهٔ نظیر پنجاه و شش امین صدک آن کدام است؟ $\left(P(Z<-0.15)=0.44\right)$ (برنامه‌ریزی شهری ۸۶)

۱) 18.4   ۲) 16.6   ۳) 18.2   ۴) 17.8

حل: گزینه ۴ درست است.

$$X \sim N\left(\mu=17.2\ ,\ \sigma^2=16\right)$$

$P(x\le a)=0.56\rightarrow$

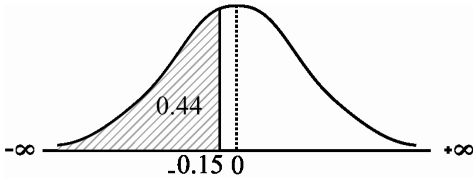


پنجاه و شش‌امین صدک: $Q_{0.56}$

$$(1)P(x\le a)=0.56\ \rightarrow P\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\le\frac{a-17.2}{4}\right)=0.56$$

$(2)P(Z<-0.15)=0.44\rightarrow$

$P(Z>-0.15)=1-0.44=0.56$



با توجه به نکته:

$$P(Z<A)=P(Z>B)\rightarrow A=-B$$

$$(1),(2)\frac{a-17.2}{4}=-(-0.15)\rightarrow a=17.8$$

یادداشت:

....

....

....

....

تقریب دوجمله‌ای به نرمال

۳۶ـ تعداد 100 متقاضی به فروشگاهی مراجعه می‌کنند. احتمال آنکه هر یک خریدی را انجام دهند 0.8 است. احتمال آنکه حداقل 84 نفر خریدی را انجام دهند تقریباً چقدر است؟ (اقتصاد ۸۸)

۱) %3 ۲) %16 ۳) %34 ۴) %47

حل: گزینه ۲ درست است.

احتمال موفقیت (خرید کردن) ثابت است $(p=0.8)$ بنابراین توزیع تعداد موفقیت در نمونه $(n=100)$ دو جمله‌ای است با :

$n=100 \quad , \quad p=0.8 \quad , \quad q=0.2$

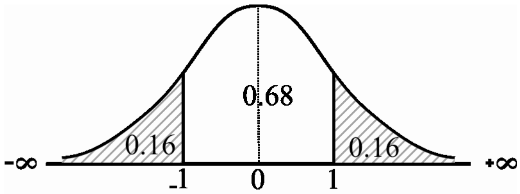
یادآوری: هرگاه در توزیع دو جمله‌ای $5<(nq,nq)$ باشند، تقریب آن به نرمال با $\mu=np$, $\sigma^2=npq$ مناسب خواهد بود. در این سئوال نیز $np=100\times0.8=80>5 \quad , \quad nq=100\times0.2=20>5$ است بنابراین تقریب آن به نرمال مناسب خواهد بود با :

$$\begin{cases}\mu=np=100\times0.8=80\\ \sigma^2=npq=100\times0.8\times0.2=16\end{cases}$$

$$P(x\geq84)=P\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\geq\frac{84-80}{\sqrt{16}}\right)=P(Z\geq1)=0.16=\%16$$

یادآوری:

$$P(Z\leq-1)=P(Z\geq1)=0.16$$



یادداشت:

....

....

....

....

فصل پنجم

توزیع‌های نمونه‌ای و برآورد

توزیع‌های نمونه‌ای

توزیع میانگین نمونه $(\bar{X})$

۳۷ ـ تعداد اتومبیل‌های فروخته شده توسط یک شرکت در ماه دارای میانگین 50 و انحراف معیار 10 دستگاه است. احتمال اینکه میانگین به دست آمده از یک نمونه تصادفی 100 تایی کمتر از 48 دستگاه باشد، چقدر است؟ (اقتصاد ۸۷)

۱) %2.5 ۲) %5 ۳) %45 ۴) %47.5

حل: گزینه ۱ درست است.

توزیع جامعه نامعلوم(چون از نرمال بودن چیزی گفته نشده)، واریانس جامعه معلوم و $n > 30$ است پس بنابر قضیه حد مرکزی (مورد ۳ـ الف) توزیع $\bar{x}$ نرمال است.

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\begin{cases} P(\bar{x} < 48) = P\left(\dfrac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \dfrac{48-50}{\frac{10}{\sqrt{100}}}\right) = P(Z < -2) = 0.025 = \%2.5 \\ \mu = 50 \ , \ \sigma = 10 \ , \ n = 100 \end{cases}$$

یادداشت:

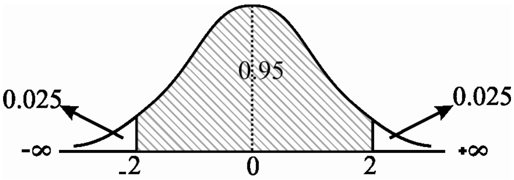
....

....

....

....

☜ **یادآوری:**



۳۸ ـ طول عمر باطری‌های تولیدی کارخانه آلفا دارای توزیع نرمال با میانگین 200 ساعت و انحراف معیار 30 ساعت است. احتمال اینکه میانگین طول عمر باطری‌ها در یک نمونه تصادفی 36تایی بین 190 تا 210 ساعت باشد، تقریباً چقدر است؟ (اقتصاد ۸۸)

۱) %25 ۲) %32 ۳) %68 ۴) %95

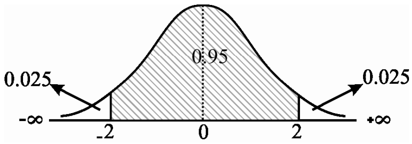
حل: گزینه ۴ درست است.

طول عمر باطری $X \sim N\left(\mu = 200 \ , \ \sigma^2 = 30^2\right)$

$$P\left(190 < \bar{x} < 210\right) = P\left(\frac{190-200}{\frac{30}{\sqrt{36}}} < \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{210-200}{\frac{30}{\sqrt{36}}}\right) = P\left(-2 < z < 2\right) = 0.95$$

☜ **یادآوری:**

$$P\left(-2 < z < 2\right) = 0.95$$



محاسبه n از روی توزیع $\bar{X}$

۳۹ ـ اگر بخواهیم انحراف معیار میانگین نمونه‌ای $\left(\sigma_{\bar{x}}\right)$ براساس حجم نمونه $n = 64$ تایی از جامعه‌ای که دارای انحراف معیار 6 است به نصف کاهش یابد، حجم نمونه باید چند تاشود؟ (اقتصاد ۸۲)

۱) 128 ۲) 182 ۳) 256 ۴) 320

حل: گزینه ۳ درست است.

$$\begin{cases} \sigma_{\bar{x}} \to \frac{1}{2}\sigma_{\bar{x}} \ \to \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \to \frac{1}{2}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{4n}} \to \text{n باید 4 برابر شود.} \to \ n = 64 \times 4 = 256 \\ n = 64, \sigma_x = 6 \end{cases}$$

در صورتی انحراف معیار میانگین نمونه‌ای نصف خواهد شد که حجم نمونه چهار برابر شود

توزیع تفاضل یا مجموع میانگین دو نمونه $\left(\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2\right)$

۴۰ ـ دو متغیر تصادفی مستقل x , y دارای توزیع نرمال با میانگین‌های یکسان و واریانس‌های به ترتیب برابر با 8 و 4 می‌باشند. براساس دو نمونه تصادفی به اندازه‌های 16 از جامعه (متغیر) x و 8 از جامعه (متغیر) y برآوردکننده‌های میانگین دوجامعه به ترتیب $\bar{x}$ و $\bar{y}$ به دست آمده، توزیع $\left(\bar{x}-\bar{y}\right)$ کدام است؟ (اقتصاد۸۳)

۱) $\left(\bar{x}-\bar{y}\right) \sim N\left(0,12\right)$ ۲) $\left(\bar{x}-\bar{y}\right) \sim N\left(0,1\right)$ ۳) $\left(\bar{x}-\bar{y}\right) \sim N\left(0,4\right)$ ۴) $\left(\bar{x}-\bar{y}\right) \sim N\left(0,8\right)$

یادداشت:

....

....

....

....

حل: گزینه ۲ درست است.

جوامع نرمال، واریانس‌ها معلوم و $n_1, n_2 \ge 1$ است پس، توزیع $\bar{x} - \bar{y}$ بنابر **مورد اول از توزیع‌های نمونه‌ای $\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2$** نرمال است با:

$$\bar{x}-\bar{y} \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right) \to \begin{cases} E(\bar{x}-\bar{y})=\mu_1-\mu_2 \xrightarrow{\mu_1=\mu_2} 0 \\ Var(\bar{x}-\bar{y})=\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}=\frac{8}{16}+\frac{4}{8}=1 \end{cases} \to \bar{x}-\bar{y} \sim N(0,1)$$

توزیع نسبت نمونه $(\bar{p})$

۴۱ ـ از جمعیت فعال یک شهر بزرگ، یک نمونه تصادفی 1600 تایی انتخاب شده است و معلوم شده که 320 نفر از آن‌ها بیکارند. برآورد نرخ بیکاری در این شهر و انحراف معیار آن به ترتیب کدام است؟(اقتصاد ۸۱)

۱) 0.20 ، 0.0001 ۲) 0.15، 0.16 ۳) 0.20، 0.01 ۴) 0.15، 0.001

حل: گزینه ۳ درست است.

$$\begin{cases} \bar{p} = \frac{x}{n} = \frac{320}{1600} = 0.2 \text{ نرخ بیکاری} \\ \sigma(\bar{p}) = \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{1600}} = 0.01 \\ n = 1600,\ x = 320 \text{ (تعداد افراد دارای صفت موردنظر)} \end{cases}$$

توجه: وقتی نمونه‌گیری بدون جایگذاری است و N جامعه هم داده شده ضریب تصحیح $\frac{N-n}{N-1}$ در واریانس $\bar{p}$ ضرب می‌شود.

۴۲ ـ برای تخمین نسبت موفقیت‌ها در جامعه‌ای، دو نمونه تصادفی مستقل به حجم‌های n_1 و n_2 از جامعه گرفته و برآوردکننده $\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$ پیشنهاد شده است که در آن x_1 و x_2 تعداد موفقیت‌ها در نمونه اول و دوم است. کمیت انتظاری (امیدریاضی) این برآوردکننده کدام است؟ (اقتصاد ۸۵)

۱) p ۲) $\frac{2\mu_x}{n_1+n_2}$ ۳) $\frac{p_1+p_2}{n_1+n_2}$ ۴) $\frac{2p}{n_1+n_2}$

حل: گزینه ۱ درست است.

هرگاه در جامعه‌ای دوجمله‌ای به دنبال نسبت یا درصد موفقیت هستیم روابط زیر همیشه برقرار است:

$$\bar{p}_i = \frac{x_i}{n_i} \to \begin{cases} E(\bar{p}_i) = p \\ E(x_i) = n_i p \end{cases}$$

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} \to E(\hat{p}) = E\left(\frac{x_1+x_2}{n_1+n_2}\right) = \frac{E(x_1)+E(x_2)}{n_1+n_2}$$

$$= \frac{n_1 p + n_2 p}{n_1 + n_2} = \frac{(n_1+n_2)p}{n_1+n_2} = p$$

یادداشت:

....

....

....

....

۴۳ ـ برای تخمین نسبت موفقیت‌ها در جامعه‌ای دو نمونه تصادفی مستقل به حجم‌های n_1 و n_2 از جامعه گرفته شده و برآوردکننده زیر پیشنهاد شده است که در آن x_1 و x_2 تعداد موفقیت‌ها در نمونه اول و دوم است. کمیت انتظاری این برآوردکننده کدام است؟

$\hat{p} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{n_1} + \frac{x_2}{n_2}\right)$ **(اقتصاد ۸۷)**

۱) p　　۲) μ_x　　۳) $\frac{p}{2n_1n_2}$　　۴) $\frac{(n_1+n_2)\mu_x}{n_1+n_2}$

حل: گزینه ۱ درست است.

منظور از کمیت انتظاری همان امید ریاضی برآوردکننده است بنابراین:

$$\begin{cases} E(\hat{p}) = E\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{n_1}+\frac{x_2}{n_2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{E(x_1)}{n_1}+\frac{E(x_2)}{n_2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{n_1p}{n_1}+\frac{n_2p}{n_2}\right) = \frac{1}{2}(p+p) = p \\ E(x_1) = n_1p \ , \ E(x_2) = n_2p \end{cases}$$

توجه: دقت کنید که x_2, x_1 هر دو دارای توزیع دوجمله‌ای هستند

۴۴ ـ در آزمون فرضیه مربوط به یک نسبت خاص در جامعه، توزیع نمونه‌گیری $\overline{p}$ در نمونه‌های کوچک چیست؟ (اقتصاد ۸۷)

۱) نمایی　　۲) نرمال　　۳) دوجمله‌ای　　۴) پواسون

حل: گزینه ۳ درست است.

☜**یادآوری:** در نمونه‌های کوچک $(n < 30)$ توزیع $\overline{p}$ دوجمله‌ای و برای نمونه‌های بزرگ $(n > 30)$ توزیع $\overline{p}$ بنابر قضیه حد مرکزی نرمال خواهد بود.

توزیع واریانس نمونه $\left(S^2\right)$

۴۵ ـ احتمال این‌که واریانس یک نمونه تصادفی 36 تایی از جامعه نرمالی کمتر از واریانس مربوط به آن جامعه باشد، کدام است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) $P\left(F_{(1,35)} < 6\right)$　　۲) $P\left(F_{(1,36)} < 5\right)$　　۳) $P\left(\chi^2_{(35)} < 36\right)$　　۴) $P\left(\chi^2_{(35)} < 35\right)$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$P\left(S^2 < \sigma^2\right) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \frac{(n-1)\sigma^2}{\sigma^2}\right) = P\left(\chi^2_{(n-1)} < n-1\right) = P\left(\chi^2_{(35)} < 35\right)$$

توزیع آماره نسبت واریانس‌های دو نمونه $\left(S_1^2/S_2^2\right)$

۴۶ ـ برای توزیع F کدام تعریف را می‌پذیرید؟(اقتصاد ۷۴)

۱) توزیع نسبت واریانس دو جامعه اصلی می‌باشد.
۲) توزیع نسبت واریانس نمونه به واریانس جامعه اصلی می‌باشد.
۳) توزیع نسبت واریانس جامعه اصلی به واریانس نمونه با درجه آزادی معلوم است.
۴) توزیع نسبت واریانس دو نمونه می‌باشد.

یادداشت:

....

....

....

....

حل: گزینه ۴ درست است.

توزیع F توزیع نسبت واریانس دو نمونه به واریانس جامعه‌هایشان است. در واقع نسبت دو توزیع χ^2 به درجه آزادی‌هایشان است. در شرایطی که واریانس دو جامعه با هم برابر باشند نسبت واریانس دو نمونه توزیع F با n_1 و n_2 درجه آزادی است.

$$F_{n_1-1,n_2-1}=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\xrightarrow{\sigma_1^2=\sigma_2^2}F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$$

توجه: همیشه پیش‌فرض واریانس دو جامعه را برابر می‌دانیم مگر در صورت سؤال ذکر شود که واریانس‌ها نابرابر است.

خواص برآوردکننده‌های نقطه‌ای

نااریبی

۴۷ ـ برآورد کننده $\hat{\theta}$ از پارامتر θ یک برآوردکننده نااریب است اگر: (اقتصاد ۷۰)

۱) $\sigma^2(\hat{\theta})=\theta^2$ ۲) $P(|\hat{\theta}-\theta|\geq\varepsilon)=0$ ۳) $E(\theta)=\hat{\theta}$ ۴) $E(\hat{\theta})=\theta$

حل: گزینه ۴ درست است.

هرگاه پارامتر=(آماره) E باشد یعنی: $E(\hat{\theta})=\theta$، $\hat{\theta}$ تخمین‌زن نااریب یا بدون تورش یا ناتور برای θ است.

۴۸ ـ اگر کمیت‌های $X_1, X_2, \dots, X_n$ نمونه تصادفی با حجم n از جامعه نرمال باشد، کدام‌یک از توابع نمونه‌ای (آماره) یا (Statistic) زیر تخمین با تورش (اریب) از واریانس σ^2 می‌باشد؟ (اقتصاد ۷۱)

۱) $f(X_1,\dots,X_n)=\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$

۲) $f(X_1,\dots,X_n)=\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n}$

۳) $f(X_1,\dots,X_n)=\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{n}$

۴) $f(X_1,\dots,X_n)=\frac{\sum X_i^2}{n}-\mu^2$

حل: گزینه ۲ درست است.

تنها آماره‌های نااریب برای σ^2 گزینه ۱ و ۳ اند و هر آماره‌ای جز این دو برای σ^2 اریب است.

توجه: آماره‌های گزینه‌های ۳ و ۴ با هم برابرند:

$$S^2=\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{n}=\frac{\sum x_i^2}{n}-\mu^2$$

۴۹ ـ اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ نمونه تصادفی به حجم n از جامعه نرمال با امید ریاضی μ و واریانس σ^2 باشد، کدام‌یک از توابع نمونه‌ای (Statistic) زیر، تخمین‌زنی ناتور برای واریانس σ^2 توزیع فوق می‌باشد؟ (اقتصاد ۷۲)

۱) $\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$ ۲) $(x_{max}-x_{min})^2$ ۳) $\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ ۴) $\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n+1}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل: گزینه ۳ درست است.

تنها آماره‌های ناریب برای واریانس جامعه عبارتند از:

$$E\left(S_1^2\right)=E\left(S_2^2\right)=\sigma^2$$

هرگاه μ جامعه معلوم باشد (برآوردکننده بهتری است)

$$S_1^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2}{n}=\frac{\sum x_i^2}{n}-(\mu)^2$$

هرگاه μ جامعه نامعلوم باشد.(پیش‌فرض است.)

$$S_2^2=\frac{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n-1}=\frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2-\frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}\right]$$

۵۰ ـ برای چه مقداری از k برآوردکننده $\hat{\theta}=kX$ برآوردکننده بدون تورشی (ناریبی) از پارامتر θ جامعه‌ای است که دارای تابع چگالی احتمال زیر است؟(اقتصاد ۷۳)

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{\theta} & 0<x<\theta \\ f(x)=0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

۱) 6 ۲) 4 ۳) 2 ۴) 1

حل: گزینه ۳ درست است.

باتوجه به این‌که $f(x)$ دارای توزیع یکنواخت پیوسته است با $a=0\ ,\ b=\theta$ داریم:

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\quad a\le x\le b \ \text{و}\ E(x)=\frac{a+b}{2}$$

$$f(x)=\frac{1}{b-a}=\frac{1}{\theta-0}=\frac{1}{\theta}\quad 0<x<\theta,\ E(x)=\frac{a+b}{2}=\frac{\theta+0}{2}=\frac{\theta}{2}$$

حال برای این‌که $\hat{\theta}$ ناریب باشد باید $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$ شود:

$$E\left(\hat{\theta}\right)=E(kx)=kE(x)=k\frac{\theta}{2}=\theta\rightarrow k=2$$

اگر تشخیص ندهیم که توزیع یکنواخت پیوسته است ناچار به محاسبه امیدریاضی هستیم.

$$E(x)=\int_0^{\theta}x.f(x)dx=\int_0^{\theta}x.\frac{1}{\theta}dx=\frac{1}{\theta}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\theta}=\frac{1}{\theta}.\frac{1}{2}\theta^2=\frac{\theta}{2}$$

۵۱ ـ یک برآوردکننده بدون تورش (ناریب) برای واریانس جامعه $\left(\sigma_x^2\right)$ کدام است؟(اقتصاد ۸۰)

۱) $\sigma_x^2=\dfrac{\sum\left(X-\mu_x\right)^2}{n}$ ۲) $\sigma_x^2=\dfrac{\sum\left(X-\bar{X}\right)^2}{n}$ ۳) $\sigma_x^2=\dfrac{\sum\left(X-\sigma_x\right)^2}{n-1}$ ۴) $\sigma_x^2=\dfrac{\sum\left(X-\mu_x\right)^2}{n-1}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل: گزینه ۱ درست است.

اشتباه طراح سؤال: منظور از σ_x^2 در گزینه‌ها S_x^2 است.

تنها آماره‌های نااریب برای واریانس جامعه عبارتند از:

$$E\left(S_1^2\right)=E\left(S_2^2\right)=\sigma^2$$

هرگاه μ جامعه معلوم باشد (برآوردکننده بهتری است)

$$S_1^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2}{n}=\frac{\sum x_i^2}{n}-(\mu)^2$$

هرگاه μ جامعه نامعلوم باشد.(پیش‌فرض است.)

$$S_2^2=\frac{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n-1}=\frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2-\frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}\right]$$

۵۲ـ برآوردکننده بدون تورشی از پارامتر θ جامعه‌ای که دارای توزیع چگالی احتمال زیر است کدام است؟(اقتصاد ۸۲)

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{2}{\theta} & 0\le x\le\theta \\ f(x)=0 & \text{برای سایر مقادیر } x \end{cases}$$

۱) $\hat{\theta}=X-2$ ۲) $\hat{\theta}=\frac{1}{2}X$ ۳) $\hat{\theta}=2X$ ۴) $\hat{\theta}=X$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$f(x)=\frac{2}{\theta}\qquad 0\le x\le\theta\ \rightarrow E(x)=\int_0^\theta x.\frac{2}{\theta}\,dx=\left[\frac{x^2}{\theta}\right]_0^\theta=\theta$$

حال باید از تک تک آماره‌ها در گزینه‌ها امید بگیریم و گزینه‌ای را که امیدش با θ برابر شد به عنوان جواب انتخاب کنیم چون برای نااریب بودن باید $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$ باشد.

گزینه۱: $E\left(\hat{\theta}\right)=E(x-2)=E(x)-2=\theta-2\neq\theta$ اریب

گزینه ۲: $E\left(\hat{\theta}\right)=E\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{E(x)}{2}=\frac{\theta}{2}\neq\theta$ اریب

گزینه ۳: $E\left(\hat{\theta}\right)=E(2x)=2E(x)=2\theta\neq\theta$ اریب

گزینه ۴: $E\left(\hat{\theta}\right)=E(x)=\theta$ نااریب

۵۳ـ به ازای چه مقداری از k برآوردکننده $\hat{\theta}=\frac{x}{k}$ برآوردکننده بدون تورشی (نااریبی) از پارامتر θ جامعه‌ای است که دارای تابع احتمال گسسته مقابل است؟ (اقتصاد ۸۵)

$$\begin{cases} f(x)=\theta^x(1-\theta)^{1-x} & x=0,1 \\ f(x)=0 & \text{برای سایر مقادیر } x \end{cases}$$

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) 2 ۴) 5

یادداشت:

....

....

....

....

حل: گزینه ۲ درست است.

با توجه به این‌که تابع بالا، تابع چگالی توزیع برنولی با پارامتر θ است داریم:

$$x \sim \text{برنولی} \rightarrow E(x) = \theta$$

حال اگر بخواهیم $\hat{\theta}$ برای θ ناریب باشد باید $E(\hat{\theta}) = \theta$ شود بنابراین:

$$E(\hat{\theta}) = \theta \rightarrow E\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{E(x)}{k} = \frac{\theta}{k} = \theta \quad \rightarrow k = 1$$

اگر تشخیص ندهیم که تابع چگالی بالا، تابع چگالی توزیع برنولی است باید امید X را محاسبه کنیم.

$$E(x) = \sum_{x=0}^{1} xf(x) = \sum_{x=0}^{1} x\theta^x (1-\theta)^{1-x} = 0 \times \theta^0 \times (1-\theta)^{1-0} + 1 \times \theta^1 \times (1-\theta)^{1-1} = \theta$$

۵۴ ـ اگر $\hat{\theta}$ برآوردکننده پارامتر θ با اریب (تورش) $k\theta + 5$ باشد، کدام برآوردکننده زیر ناریب (بدون تورش) است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) $\frac{\hat{\theta} - 5}{k}$ ۲) $\frac{\hat{\theta} - 5}{k+1}$ ۳) $\frac{\hat{\theta}}{k} - \frac{5}{k+1}$ ۴) $(k+1)\hat{\theta} + \frac{5}{k+1}$

حل: گزینه ۲ درست است.

ابتدا رابطه مربوط به اریبی را در نظر می‌گیریم:

$$\text{اریبی}: E(\hat{\theta}) - \theta = k\theta + 5$$

حال از آنجاکه شرط ناریبی برآوردکننده دلخواه T برای پارامتر θ برابر با $E(T) = \theta$ است، کافی است در رابطه بالا θ را به سمت راست تساوی منتقل کرده و بقیه مقادیر را به سمت چپ، داخل امید ریاضی قرار دهیم تا برآوردکننده ناریب T مشخص شود.

$$E(\hat{\theta}) - \theta = \theta k + 5 \rightarrow E(\hat{\theta}) - 5 = \theta k + \theta \rightarrow E(\hat{\theta} - 5) = (k+1)\theta \rightarrow E\left(\frac{\hat{\theta} - 5}{k+1}\right) = \theta$$

سازگاری

۵۵ ـ فرمول $\lim_{n \to \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) = 1$ بیان کننده کدام‌یک از موارد زیر است؟ (اقتصاد ۷۱)

۱) سازگاری (پایداری) در برآورد نقطه‌ای (Consistency)

۲) ناتور بودن (ناریب بودن) برآورد نقطه‌ای (Unbiased)

۳) کافی بودن برآورد نقطه‌ای (Efficiency)

۴) کافی بودن (Sufficiency)

حل: گزینه ۱ درست است.

یادداشت:

....

....

....

....

$$\left\{\begin{array}{l} E(\hat{\theta}) = \theta \text{ یا } (\text{آماره}) \ \hat{\theta} \to \theta \ (\text{پارامتر}) \\ \text{آماره نااریب یا مقدار اریبی صفر باشد} \end{array}\right.$$

آماره $\hat{\theta}$ برای θ سازگار است، اگر وقتی $n \to \infty$:

(1) ↖ شرط بالا

(2) ← $Var(\hat{\theta}) = 0$

(3) ↙ $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to \infty} p\left(\left|\theta - \hat{\theta}\right| < \varepsilon\right) = 1 \\ \lim\limits_{n \to \infty} p\left(\left|\theta - \hat{\theta}\right| > \varepsilon\right) = 0 \end{array}\right.$ با استفاده ا ز قضیه چی‌بی‌شف

کارایی

۵۶ ـ برای تخمین میانگین μ در جامعه‌ای با واریانس σ^2 نمونه‌ای تصادفی به حجم 3 را انتخاب کرده و سه تخمین‌زن زیر را در نظر می‌گیریم:

$$i)\ W_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{6}$$

$$ii)\ W_2 = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{6}$$

$$iii)\ W_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

که x_1, x_2, x_3 مقادیر مشاهده شده در نمونه می‌باشند. آن‌گاه: (اقتصاد ۸۲)

۱) W_2 و W_3 تخمین‌زن‌های بدون تورش برای μ هستند و W_2 نسبت به W_3 کارآتر است.

۲) W_2 و W_3 تخمین‌زن‌های بدون تورش برای μ هستند و W_3 نسبت به W_2 کارآتر است.

۳) W_1 و W_2 و W_3 تخمین‌زن‌های بدون تورش برای μ هستند.

۴) W_1 و W_3 تخمین‌زن‌های بدون تورش برای μ بوده و W_3 نسبت به W_1 کارآتر است.

حل: گزینه ۲ درست است.

نکته: آماره T برای μ نااریب است، هرگاه:

$$T = \frac{\sum a_i x_i}{d} \xrightarrow[\sum a_i = d]{\text{در شرایطی که}} E(T) = \mu$$

راه حل اول:

$$\left.\begin{array}{l} w_1: 1+1+1 \neq 6 \ \text{اریب} \\ w_2: 1+2+3 = 6 \ \text{نااریب} \\ w_3: 1+1+1 = 3 \ \text{نااریب} \end{array}\right\} \to \text{نااریبند } w_3, w_2$$

یادآوری: برآوردکننده $\overline{x} = \frac{\sum_{i=a}^{b} x_i}{b-a+1}$ همیشه کاراترین برآوردکننده برای μ است. دراین سؤال هم $\overline{x} = w_3 = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i}{3}$ است بنابراین از w_2 کاراتر است.

یادداشت:

....

....

....

....

راه حل دوم: از w_i ها امید و واریانس بگیریم و ببینیم کدام نااریب است و از بین نااریب‌ها کدام واریانس کمتری دارد. (می‌دانیم که در بین چند برآوردکننده نااریب، برآوردکننده‌ای کاراتر است که واریانس کمتری دارد).

۵۷ ـ براساس نمونه‌ای تصادفی شامل 2 مشاهده دو برآوردکننده μ (میانگین جامعه) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$w = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2$ $\quad$ $\tilde{x} = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ **آن‌گاه: (اقتصاد ۸۳)**

۱) $\tilde{x}$ و w نااریب (بدون تورش) اند و $Var(\tilde{x}) > Var(w)$ است. ۲) $\tilde{x}$ و w اریب‌اند و $Var(\tilde{x}) > Var(w)$ است.

۳) $\tilde{x}$ و w نااریب‌اند و $Var(\tilde{x}) < Var(w)$ است. ۴) $\tilde{x}$ اریب و w نااریب است و $Var(\tilde{x}) < Var(w)$ است.

حل: گزینه ۳ درست است.

بررسی ناااریبی:

راه حل اول: با توجه به مورد پنجم از آماره‌های ناااریب برای μ داریم:

$$T = \sum a_i x_i \xrightarrow[\sum a_i = 1]{\text{در شرایطی که}} E(T) = \mu$$

$$\left.\begin{array}{l} w: \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \ \text{ناااریب} \\ \tilde{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \ \text{ناااریب} \end{array}\right\} \rightarrow \quad \text{هر دو آماره ناااریبند}$$

راه حل دوم:

$$\begin{cases} E(w) = \frac{1}{3}\mu + \frac{2}{3}\mu = \mu & \text{ناااریب} \\ E(\tilde{x}) = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\mu = \mu & \text{ناااریب} \end{cases}$$

بررسی کارایی:

راه حل اول: برآوردکننده $\bar{x} = \frac{\sum_{i=a}^{b} x_i}{b-a+1}$ همیشه کاراترین برآوردکننده برای μ است. در این سؤال هم $\bar{x} = \tilde{x} = \frac{\sum_{i=1}^{2} x_i}{2}$ است. بنابراین $\tilde{x}$ کاراتر است.

پس از تشخیص ناااریب بودن دو آماره، واریانس آنها را حساب می‌کنیم. آماره‌ای که واریانس کمتری دارد، کاراتر است.

$$\begin{array}{l} Var(w) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sigma^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \sigma^2 = \frac{5}{9}\sigma^2 \\ Var(\tilde{x}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma^2 = \frac{2}{4}\sigma^2 \end{array} \rightarrow \quad \frac{1}{2}\sigma^2 < \frac{5}{9}\sigma^2 \quad \rightarrow \quad \tilde{x} \ \text{کاراتر است.}$$

توجه: در صورتی که یکی از آماره‌ها اریب بود، باید از ملاک MSE برای تشخیص کاراتر بودن استفاده کنیم.

۵۸ ـ فرض کنید $\hat{\mu}, \hat{\hat{\mu}}$ دو برآوردگر مستقل ناااریب از پارامتر μ می‌باشند. بعلاوه انحراف معیار $\hat{\hat{\mu}}$ پنج برابر $\hat{\mu}$ است. با ترکیب $\hat{\mu}$ و $\hat{\hat{\mu}}$ سه برآوردگر بصورت زیر برای برآورد μ پیشنهاد شده است

$w_1 = \frac{1}{2}(\hat{\mu} + \hat{\hat{\mu}})$ $\qquad$ $w_2 = \frac{4}{5}\hat{\mu} + \frac{1}{5}\hat{\hat{\mu}}$ $\qquad$ $w_3 = \hat{\mu}$

یادداشت:

....

....

....

....

این برآوردگرها به ترتیب کارایی (از راست به چپ) عبارتند از: (اقتصاد ۸۷)

۱) w_1, w_2, w_3 ۲) w_2, w_1, w_3 ۳) w_3, w_1, w_2 ۴) w_1, w_3, w_2

حل: گزینه ۱ درست است.

$\hat{\mu}$ و $\hat{\hat{\mu}}$ دو برآوردگر نااریب برای μ و مستقل‌اند بنابراین:

$$E(\hat{\mu}) = E(\hat{\hat{\mu}}) = \mu$$

ابتدا نااریبی برآوردگرها را بررسی می‌کنیم:

$$E(w_1) = E\left(\frac{1}{2}(\hat{\mu}+\hat{\hat{\mu}})\right) = \frac{1}{2}E(\hat{\mu}) + \frac{1}{2}E(\hat{\hat{\mu}}) = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\mu = \mu \quad \text{نااریب}$$

$$E(w_2) = E\left(\frac{4}{5}\hat{\mu} + \frac{1}{5}\hat{\hat{\mu}}\right) = \frac{4}{5}E(\hat{\mu}) + \frac{1}{5}E(\hat{\hat{\mu}}) = \frac{4}{5}\mu + \frac{1}{5}\mu = \mu \quad \text{نااریب}$$

$$E(w_3) = E(\hat{\mu}) = \mu \quad \text{نااریب}$$

☜ **یادآوری:** در بین چند برآوردکننده نااریب، برآوردکننده‌ای کاراتر است که واریانس کمتری داشته باشد بنابراین باید واریانس برآوردگرها را محاسبه کنیم.

$$\sigma_{\hat{\hat{\mu}}} = 5\sigma_{\hat{\mu}} \quad \rightarrow \quad \sigma^2_{\hat{\hat{\mu}}} = 25\sigma^2_{\hat{\mu}}$$

$$Var(w_1) = Var\left(\frac{1}{2}(\hat{\mu}+\hat{\hat{\mu}})\right) = \frac{1}{4}\left(\sigma^2_{\hat{\mu}} + \sigma^2_{\hat{\hat{\mu}}}\right) = \frac{1}{4}\left(\sigma^2_{\hat{\mu}} + 25\sigma^2_{\hat{\mu}}\right) = \frac{26}{4}\sigma^2_{\hat{\mu}}$$

$$Var(w_2) = Var\left(\frac{4}{5}\hat{\mu} + \frac{1}{5}\hat{\hat{\mu}}\right) = \frac{16}{25}\sigma^2_{\hat{\mu}} + \frac{1}{25}\sigma^2_{\hat{\hat{\mu}}} = \frac{16}{25}\sigma^2_{\hat{\mu}} + \frac{1}{25}25\sigma^2_{\hat{\mu}} = \frac{41}{25}\sigma^2_{\hat{\mu}}$$

$$Var(w_3) = Var(\hat{\mu}) = \sigma^2_{\hat{\mu}}$$

$\sigma^2_{\hat{\mu}} < \frac{41}{25}\sigma^2_{\hat{\mu}} < \frac{26}{4}\sigma^2_{\hat{\mu}} \quad \leftarrow \quad \sigma^2(w_3) < \sigma^2(w_2) < \sigma^2(w_1)$ بنابراین کارایی آن‌ها به ترتیب w_1, w_2, w_3 خواهد بود. بنابراین به ترتیب

☜ **یادآوری:** هرگاه y , x دو متغیر تصادفی مستقل باشند.

$$Var(ax+by) = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\underbrace{\cancel{Cov(x,y)}}_{0} = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2$$

۵۹ـ اگر توزیع x نرمال بوده و دو تخمین زننده $S^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ **و** $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{n}$ **برای تخمین** σ_x^2 **مورد نظر باشد، بـه ازاء** $n = 10$ **ضریب کارایی (نسبت واریانس** $\hat{\sigma}^2$ **به** S^2**) چیست؟ (اقتصاد ۸۷)**

۱) 0.19 ۲) 0.81 ۳) 0.9 ۴) 1.1

یادداشت:

....

....

....

....

حل: گزینه ۳ درست است.

☜یادآوری:

۱) $\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n)} \quad ; \quad \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$

۲) امید و واریانس توزیع χ^2 با k درجه آزادی عبارت است از: $E\left(\chi^2_{(k)}\right)=k \ , \ Var\left(\chi^2_{(k)}\right)=2k$

نسبت واریانس $\hat{\sigma}^2$ به واریانس S^2 عبارت است از: $\frac{Var\left(\hat{\sigma}^2\right)}{Var\left(S^2\right)}=\frac{\frac{2\sigma^4}{n}}{\frac{2\sigma^4}{n-1}}=\frac{(n-1)}{n}\overset{n=10}{=\!=}\frac{9}{10}=0.9$

۶۰ ـ سه‌تخمین‌زننده

$T_1=\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3$ ، $T_2=\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{4}x_2+\frac{2}{4}x_3$ و $T_3=\frac{1}{8}x_1+\frac{2}{8}x_2+\frac{5}{8}x_3$.

وجود دارند. کدام رابطه بین واریانس آن‌ها برقرار است؟ (محیط زیست۸۶)

۱) $Var(T_1)<Var(T_2)<Var(T_3)$

۲) $Var(T_2)<Var(T_3)<Var(T_1)$

۳) $Var(T_2)<Var(T_1)<Var(T_3)$

۴) $Var(T_3)<Var(T_2)<Var(T_1)$

حل: گزینه ۱ درست است.

نکته تستی: می‌دانیم همواره $Var(\bar{x})=\frac{\sigma^2}{n}$ از واریانس هر برآورد کننده دیگر میانگین کمتر است. بنابراین در این سؤال که $T_1=\frac{\sum_{i=1}^{3}x_i}{3}=\bar{x}$ است. از T_2 و T_3 واریانس کمتری خواهد داشت و تنها در گزینه (۱) $Var(T_1)$ از بقیه کوچکتر است که حتماً جواب مسئله است.

$$Var(T_1)=\frac{1}{9}\left(Var(x_1)+Var(x_2)+Var(x_3)\right)=\frac{1}{9}\left(\sigma^2+\sigma^2+\sigma^2\right)=\frac{\sigma^2}{3}$$

$$Var(T_2)=\frac{1}{16}Var(x_1)+\frac{1}{16}Var(x_2)+\frac{4}{16}Var(x_3)=\frac{6}{16}\sigma^2=\frac{3}{8}\sigma^2$$

$$Var(T_3)=\frac{1}{64}Var(x_1)+\frac{4}{64}Var(x_2)+\frac{25}{64}Var(x_3)=\frac{30}{64}\sigma^2=\frac{15}{32}\sigma^2$$

$$Var(T_1)=\frac{\sigma^2}{3}<Var(T_2)=\frac{3}{8}\sigma^2<Var(T_3)=\frac{15}{32}\sigma^2$$

دقت کنید که به‌طور پیش فرض در این گونه مسائل x_iها مستقل و از یک جامعه با میانگین μ و واریانس σ^2 انتخاب شده‌اند.

یادداشت:

....

....

....

....

میانگین مجذور خطا (MSE)

۶۱ ـ کدام‌یک از تعاریف زیردرمورد میانگین مجذور خطا (MSE) صحیح است؟(اقتصاد ۷۵)

۱) مجذور تورش یک برآوردکننده
۲) مجذور انحرافات از میانگین یک برآوردکننده اریب
۳) واریانس به اضافه اریب برآورد کننده
۴) واریانس یک برآوردکننده نااریب.

حل: گزینه ۴ درست است.

برای آماره دلخواه: (MSE) میانگین مجذور خطا = واریانس + ^{2}(اریبی)

برای آماره نااریب : (MSE) میانگین مجذور خطا = واریانس + ^{2}(اریبی) = واریانس برآوردکننده نااریب

۶۲ ـ چنانچه $\hat{\theta} = \bar{X} + \frac{1}{n}$ برآوردکننده‌ای از میانگین جامعه باشد، MSE این برآوردکننده برابر است با: (اقتصاد ۷۵)

۱) $\frac{n\sigma_x^2 + 1}{n^2}$
۲) $\frac{\sigma_x^2 + 1}{n}$
۳) $\frac{\sigma_x^2 - 1}{n}$
۴) $\frac{n\sigma_x^2 + 1}{n}$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$MSE = var\left(\hat{\theta}\right) + (\text{اریبی})^2 = Var\left(\hat{\theta}\right) + \left[\underbrace{E\left(\hat{\theta}\right) - \theta}_{\text{اریبی}}\right]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{n\sigma^2 + 1}{n^2}$$

$$Var\left(\hat{\theta}\right) = Var(\bar{x} + \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{n}}}_{0}) = Var\left(\bar{x}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\text{اریبی} = E\left(\hat{\theta}\right) - \theta = E\left(\bar{x} + \frac{1}{n}\right) - \mu = E\left(\bar{x}\right) + \frac{1}{n} - \mu = \mu + \frac{1}{n} - \mu = \frac{1}{n}$$

۶۳ ـ اگر بخواهیم بهترین برآوردکننده را از بین برآوردکننده‌های اریب ونااریب انتخاب کنیم، معیار گزینش عبارت خواهد بود از: (اقتصاد ۷۶)

۱) کم‌ترین واریانس
۲) کم‌ترین میانگین مجذوز خطا (MSE)
۳) نااریب بودن
۴) نااریب بودن به علاوه نااریب بودن مجانبی

حل: گزینه ۲ درست است.

☜ **یادآوری:** در بین دوبرآوردکننده دلخواه (اریب و نااریب) برآوردکننده‌ای بهتر (کاراتر) است که MSE (میانگین مجذور خطا) کمتری داشته باشد یعنی دارای حداقل واریانس و اریبی باشد.

۶۴ ـ به منظور برآورد میانگین جامعه براساس یک نمونه تصادفی 2 تایی، برآوردکننده‌های A و B زیر پیشنهاد شده‌اند. برای تشخیص آن که کدام‌یک مناسب‌تر است چه ملاکی کفایت می‌کند؟(اقتصاد ۸۵)

$$A = \frac{2x_1 + 3x_2}{5} \quad , \quad B = \frac{x_1 + x_2}{2} + 2$$

۱) تورش
۲) واریانس
۳) واریانس + ^{2}(تورش)
۴) واریانس + تورش

یادداشت:

....

....

....

....

حل: گزینه ۳ درست است.

می‌دانیم در بین دو برآوردکننده دلخواه (اریب یا نااریب) برآوردکننده‌ای بهتر (کاراتر) است که MSE (میانگین مجذور خطا) کمتری داشته باشد. در این سؤال نیز برآوردکننده A نااریب و B اریب است، بنابراین ملاک MSE مناسب است. اگر هر دو نااریب بودند، ملاک واریانس کفایت می‌کرد.

$$E(A)=E\left(\frac{2x_1+3x_2}{5}\right)=\frac{2\mu+3\mu}{5}=\mu \text{ نااریب}$$

$$E(B)=E\left(\frac{x_1+x_2}{2}+2\right)=\frac{\mu+\mu}{2}+2=\mu+2 \text{ اریب} \rightarrow \text{اریبی}=E(B)-\mu=\mu+2-\mu=2$$

$$MSE(\hat{\theta})=var(\hat{\theta})+\left[\underbrace{E(\hat{\theta})-\theta}_{\text{اریبی}}\right]^2 \quad \text{یا} \quad \text{میانگین مجذور خطا} = \text{واریانس} + (\text{اریبی})^2$$

۶۵ـ دو برآوردکننده $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ با ویژگی‌های زیر برای برآورد پارامتر θ پیشنهاد شده است: $Var(\hat{\theta}_2)=50$ و $E(\hat{\theta}_2-\theta)=6$ و $Var(\hat{\theta}_1)=90$ و $E(\hat{\theta}_1-\theta)=0$ آن‌گاه: (اقتصاد ۸۶)

۱) $\hat{\theta}_2$ مناسب‌تر است چون کاراتر است.

۲) $\hat{\theta}_1$ مناسب‌تر است زیرا یک برآوردکننده نااریب (بدون تورش) است.

۳) $\hat{\theta}_1$ مناسب‌تر است چون میانگین مجذور خطای آن (MSE) کمتر است.

۴) $\hat{\theta}_2$ مناسب‌تر است چون میانگین مجذور خطای آن (MSE) کمتر است.

حل: گزینه ۴ درست است.

می‌دانیم در بین دو برآوردکننده دلخواه (اریب یا نااریب) برآوردکننده‌ای بهتر (کاراتر) است که MSE کمتری داشته باشد. در این سؤال با توجه به این‌که $\hat{\theta}_1$ نااریب است و $\hat{\theta}_2$ اریب است معیار MSE برای انتخاب مناسب بودن آماره به کار می‌رود.

$$E(\hat{\theta}_1-\theta)=0 \rightarrow E(\hat{\theta}_1)=\theta \rightarrow \hat{\theta}_1 \text{ نااریب است} \rightarrow \text{اریبی}(\hat{\theta}_1)=0$$

$$E(\hat{\theta}_2-\theta)=6 \rightarrow E(\hat{\theta}_2)=\theta+6 \rightarrow \text{اریبی}(\hat{\theta}_2)=E(\hat{\theta}_2)-\theta=\theta+6-\theta=6$$

$$MSE(\hat{\theta}_1)=var(\hat{\theta}_1)+(\text{اریبی})^2=90+0=90$$

$$MSE(\hat{\theta}_2)=var(\hat{\theta}_2)+(\text{اریبی})^2=50+6^2=86$$

با توجه به این‌که $MSE(\hat{\theta}_2)$ کمتر است در نتیجه $\hat{\theta}_2$ مناسب‌تر است.

$$MSE(\hat{\theta}_2)=86<MSE(\hat{\theta}_1)=90$$

توجه: با این‌که $\hat{\theta}_1$ نااریب است اما کارایی‌اش از $\hat{\theta}_2$ کمتر است چون برآوردکننده‌ای کاراتر است که حداقل واریانس و اریبی را با هم داشته باشد. یعنی همان MSE کمتری داشته باشد.

یادداشت:

....

....

....

....

۶۶ـ برای تشخیص مناسب بودن برآوردکننده $\hat{\theta}$ برای پارامتر θ کدام‌یک از موارد زیر ملاک عمل است؟(اقتصاد ۸۸)

۱) $E(\hat{\theta})$ ۲) $E\left(\hat{\theta}-E(\hat{\theta})\right)^2$ ۳) $E(\hat{\theta}-\theta)^2$ ۴) $E(\hat{\theta})+Var(\hat{\theta})$

حل: گزینه ۳ درست است.

یادآوری: برای تشخیص مناسب بودن برآورد کننده های دلخواه (اریب یا نااریب)، بهترین ملاک سنجش، میانگین مجذور خطا (MSE) است.

$$MSE = E(\hat{\theta}-\theta)^2 = var(\hat{\theta}) + \left(\underbrace{E(\hat{\theta})-\theta}_{\text{اریبی}}\right)^2$$

در این سؤال نیز برآورد کننده $\hat{\theta}$ بدون هیچ اطلاع دیگر به شما داده شده(دلخواه) پس بهترین معیار برای تشخیص مناسب بودن آن «MSE» خواهد بود.

دقت کنید که گزینه ۲ همان واریانس $\hat{\theta}$ است.

برآوردهای فاصله‌ای

فاصله اطمینان میانگین جامعه (μ)

۶۷ـ در یک نمونه تصادفی 3 تایی از کارمندان یک شرکت، حقوق ماهیانه پرداختی 91، 89 و 90 هزار تومان بوده است. فاصله اطمینان 90% برای میانگین حقوق ماهیانه کارمندان این شرکت کدام است؟ $(t = 2.9)$. (اقتصاد ۸۰)

۱) $90 \pm \frac{2.9}{\sqrt{3}}$ ۲) $91 \pm \frac{0.97}{3\sqrt{3}}$ ۳) 90 ± 0.97 ۴) $90 \pm \frac{5.8}{3\sqrt{3}}$

حل: گزینه ۱ درست است.

جامعه غیرنرمال، واریانس نامعلوم و $n \le 30$ است چون هیچ آماره‌ای برای توزیع $\bar{x}$ با این شرایط وجود ندارد به ناچار جامعه را نرمال فرض کرده و بنابر **مورد (دوم ـ ب) از برآورد فاصله‌ای μ** داریم:

$$t_{(n-1)} = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \rightarrow \mu : \bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

با توجه به داده‌ها $\bar{x}$ و S باید از نمونه برآورد شوند

نکته: هرگاه تعداد نمونه $n = 3$ باشد و اعداد نمونه متوالی باشند واریانس نمونه یک است و میانگین اعداد برابر با عدد وسط است در این سؤال نیز $n = 3$ و اعداد نمونه متوالی‌اند پس داریم:

$$89, 90, 91 \xrightarrow[\text{داده‌ها متوالی}]{n=3} \bar{x} = \text{داده وسط} = 90 \;,\; S^2 = 1 \rightarrow S = 1$$

اگر از طریق فرمول نیز محاسبه کنیم به همین اعداد می‌رسیم:

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{89+90+91}{3} = \frac{270}{3} = 90 \\ S^2 = \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{(89-90)^2+(90-90)^2+(91-90)^2}{3-1} = \frac{1+0+1}{2} = 1 \quad \rightarrow \quad S = 1 \end{cases}$$

$$\mu : \bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} = 90 \pm 2.9 \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

یادداشت:

....

....

....

....

۶۸ـ در سطح اعتماد $\gamma = 1 - \alpha$ کدام‌یک از فواصل اعتماد ذیل کوتاه‌تر است؟(اقتصاد۸۴)

۱) $\bar{x} - z_{\frac{3\alpha}{4}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{4}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
۲) $\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{3}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{2\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
۳) $\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{3}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{3}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
۴) $\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

حل: گزینه ۴ درست است.

اگر فاصله اطمینان برای μ را به‌صورت $\left(\bar{x} - a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ در نظر بگیریم با استفاده از قضیه لاگرانژ به این اثبات می‌رسیم که کوتاه‌ترین فاصله اطمینان فاصله‌ای است که $a = -b$ شود. بنابراین با توجه به تقارن توزیع نرمال به ازاء $a = Z_{\frac{\alpha}{2}}, b = -Z_{\frac{\alpha}{2}}$ کوتاه‌ترین فاصله را خواهیم داشت. توجه کنید که در گزینه ۳ چون $\frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} \neq 1$ است، جواب صحیح نیست.

۶۹ـ یک نمونه تصادفی از 64 لامپ نشان می‌دهد که عمر متوسط نمونه 350 ساعت است. یک فاصله اطمینان 95 درصد برای متوسط طول عمر واقعی لامپ‌ها با فرض $\sigma_X = 100$ عبارت است از: (اقتصاد ۸۵)

۱) 150 تا 550
۲) 154 تا 546
۳) 250.5 تا 449.5
۴) 325.5 تا 374.5

حل: گزینه ۴ درست است.

جامعه غیرنرمال (چون نرمال بودن ذکر نشده)، واریانس جامعه معلوم و $n = 64 > 30$ است پس بنابر **مورد (سوم ـ الف) از برآورد فاصله‌ای μ (قضیه حد مرکزی)** داریم:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightarrow \mu : \bar{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\begin{cases} \bar{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 350 \pm 2 \times \frac{100}{\sqrt{64}} = 350 \pm 25 \rightarrow (325, 375) \xrightarrow[\text{گزینه}]{\text{نزدیک‌ترین}} (325.5\ ,\ 374.5) \\ \bar{x} = 350\ , \sigma = 100\ , n = 64\ , \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \rightarrow Z_{0.025} = 1.96 \simeq 2 \end{cases}$$

توجه: برای راحتی در محاسبه همیشه $Z_{0.025} \simeq 2$ در نظر بگیرید و در آخر نزدیک‌ترین گزینه به اعداد به‌دست آمده را به عنوان جواب انتخاب کنید. در این سؤال نزدیک‌ترین گزینه به اعداد (375 , 325) گزینه ۴ است. (374.5 , 325.5) در واقع نزدیک‌ترین گزینه، گزینه‌ای است که حد پایین آن کمی بیشتر و حد بالای آن کمی کمتر است.

۷۰ـ از 500 مشتری یک فروشگاه، دو نفر که به تصادف انتخاب شده‌اند، یکی 30 و دیگری 50 هزار تومان خرید کرده است. فاصله اطمینان 95% برای کل فروش این فروشگاه چقدر است؟ $(t = 3)$. (اقتصاد ۸۸)

۱) $15000 - 25000$
۲) $10000 - 30000$
۳) $7000 - 33000$
۴) $5000 - 35000$

یادداشت:

....

....

....

....

حل: گزینه ۴ درست است.

با توجه به راهنمایی مسئله $(t=3)$ ، در صورتی که پیش فرض توزیع جامعه را نرمال در نظر بگیریم؛ واریانس جامعه نامعلوم و تعداد نمونه $n=2<30$ است. بنابراین توزیع $\overline{x}$ (میانگین نمونه) t استیودنت خواهد بود.

μ فاصله اطمینان : $\overline{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\dfrac{S}{\sqrt{n}} = 40 \pm 3\dfrac{\sqrt{200}}{\sqrt{2}} = 40 \pm 30 = (10,70)$

$x_i = 30 \quad , \quad 50$

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{30+50}{2} = \frac{80}{2} = 40$$

$$S_x^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{(30-40)^2 + (50-40)^2}{2-1} = \frac{100+100}{1} = 200$$

دقت کنید که فاصله اطمینان میانگین جامعه $\mu = \dfrac{\sum x_i}{N}$ خواسته نشده بلکه فاصله اطمینان کل فروش جامعه خواشته شده یعنی $\left(\sum x_i\right)$ بنابراین کافی است فاصله اطمینان میانگین جامعه را در N=500 ضرب کنیم تا به فاصله اطمینان $\left(\sum x_i\right)$ کل فروش برسیم.

$$\sum x_i : N \times (10,70) = 500 \times (10,70) = (5000 \quad , \quad 35000)$$

محاسبه n از روی فاصله μ

۷۱ ـ برای برآورد میانگین یک جامعه نرمال، حجم نمونه چقدر باید باشد تا حداکثر خطای برآورد برابر $\frac{1}{4}$ انحراف معیار جامعه باشد؟ $\left(Z_{0.025} \simeq 2\right)$ (اقتصاد ۸۶)

۱) 16   ۲) 32   ۳) 52   ۴) 64

حل: گزینه ۴ درست است.

$$\begin{cases} e = Z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow \dfrac{1}{4}\sigma = Z_{0.025}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow \dfrac{1}{4}\cancel{\sigma} = 2\dfrac{\cancel{\sigma}}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = 8 \rightarrow n = 64 \\ e = \dfrac{1}{4}\sigma \quad , \quad \alpha = 0.05 \rightarrow Z_{0.025} \simeq 2 \end{cases}$$

روابط بین 2e , e , n

۷۲ ـ کدام‌یک از موارد زیر در مورد فاصله اطمینان یک پارامتر آماری مصداق ندارد؟ هر قدر ....، طول فاصله اطمینان کم‌تر می‌شود؟

(اقتصاد ۸۰)

۱) حجم نمونه بیش‌تر باشد.
۲) واریانس تخمین‌زننده نقطه‌ای کم‌تر شود.
۳) واریانس جامعه آماری کم‌تر شود.
۴) ضریب اطمینان بالاتر رود.

حل: گزینه ۴ درست است.

یادداشت:

....

....

....

....

طول فاصله با σ و $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ رابطه مستقیم و با n رابطه معکوس دارد. $\qquad$ طول فاصله $= 2e = 2Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

بنابراین در شرایط زیر طول فاصله کم می‌شود:

۱ـ حجم نمونه (n) افزایش یابد.

۲ـ واریانس جامعه یا تخمین آن واریانس نمونه کمتر شود.

۳ـ ضریب اطمینان $(1-\alpha)$ کمتر شود و یا α (سطح خطا) بیشتر شود، که در دو صورت $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ کمتر می‌شود.

فاصله اطمینان تفاضل یا مجموع میانگین دو جامعه $(\mu_1 \pm \mu_2)$

۷۳ ـ وزن مسافران و بار همراه آنان در یک پرواز دارای توزیع نرمال است. براساس اطلاعات در مورد میانگین و واریانس از یک نمونه تصادفی n_1 تایی از وزن مسافران و یک نمونه تصادفی n_2 تایی مستقل از بار مسافران، فاصله اطمینان $(1-\alpha)$ درصد برای مجموع میانگین وزن مسافر و بار همراه وی $(\mu_1 + \mu_2)$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۳)

۱) $(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

۲) $(\mu_1 + \mu_2) \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$

۳) $(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \pm t_{\frac{\alpha}{2},(n_1+n_2-2)} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$

۴) $(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \pm t_{\frac{\alpha}{2},r} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$

حل: گزینه ۴ درست است.

توزیع جامعه‌ها نرمال است و چون از واریانس جامعه‌ها چیزی نگفته ما پیش فرض، آن‌ها را نامعلوم می‌دانیم و همچنین از تعداد نمونه‌ها صحبتی نشده، پیش فرض، آن‌ها را کمتر از 30 می‌دانیم. پس از مورد (سوم ـ ب) برآورد فاصله‌ای $\mu_1 \pm \mu_2$ یعنی t_r استفاده می‌کنیم. اگر در صورت سؤال $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$ ذکر می‌شد گزینه ۳ صحیح می‌بود.

مورد (سوم ـ ب) برآورد فاصله‌ای $\mu_1 \pm \mu_2$: جوامع نرمال، واریانس دو جامعه نامعلوم با فرض عدم برابری واریانس‌ها $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ امید توزیع مجموع میانگین‌های جامعه $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$ و واریانس توزیع $\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}$ است:

$$t_{(r)} = \frac{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) - (\mu_1 + \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \rightarrow \mu_1 + \mu_2 : \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \pm t_{\frac{\alpha}{2},r} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

فاصله اطمینان نسبت جامعه (p)

۷۴ ـ یک نمونه تصادفی 100 نفری از بین رأی‌دهندگان یک شهر انتخاب و مشخص شده است که 80% آنها به کاندیدای A رأی می‌دهند. یک فاصله اطمینان 90% برای نسبت افراد در جامعه که به A رأی خواهند داد برابر است با: $(Z_{0.05} = 1.65)$ (اقتصاد ۸۷)

۱) (0.4 تا 1) $\qquad$ ۲) (0.83 تا 0.97) $\qquad$ ۳) (0.895 تا 0.905) $\qquad$ ۴) (0.88 تا 0.92)

یادداشت:

....

....

....

....

حل: گزینه ؟ صحیح است.

$$\begin{cases} p \in \hat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0.8 \pm 1.65\sqrt{\frac{0.8\times 0.2}{100}} = 0.8 \pm 0.066 = (0.734\ ,\ 0.866) \\ \hat{p} = 0.8\ ,\ n = 100\ ,\ \alpha = 0.1\ , Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.05} = 1.65 \end{cases}$$

البته چون جواب در گزینه‌ها نبوده این سؤال پس از برگزاری کنکور حذف شده است.

محاسبه n از روی فاصله p

۷۵ ـ اگر بخواهیم نسبت افراد باسواد یک جامعه را با خطای ± 0.02 و ضریب اطمینان 95% برآوردکنیم، تقریباً چه حجم نمونه‌ای مناسب است؟ (اقتصاد ۸۷)

۱) 1000 ۲) 2500 ۳) 5000 ۴) 7500

حل: گزینه ۲ درست است.

چون هیچ اطلاعی از نسبت افراد باسواد در جامعه نداریم بنابراین به‌طور پیش‌فرض $p = q = \frac{1}{2}$ در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} e = Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} \to 0.02 = 2\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{n}} \to \sqrt{n} = 50 \to n = 2500 \\ p = q = \frac{1}{2}\,(\text{پیش‌فرض})\ ,\ e = 0.02\ ,\ \alpha = 0.05\ , Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} \simeq 2 \end{cases}$$

فاصله اطمینان واریانس جامعه (σ^2)

۷۶ ـ فاصله اطمینان $1-\alpha$ برای واریانس جامعه‌ای با توزیع نرمال چیست؟ (α برای دنباله راست توزیع تعریف شده است.)(اقتصاد ۸۵)

۱) $\frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)S^2} < \sigma^2 < \frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)S^2}$

۲) $\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)S^2} < \sigma^2 < \frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)S^2}$

۳) $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}$

۴) $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}$

حل: گزینه ۴ درست است.

همان‌طور که می‌دانیم در جامعه نرمال با پارامترهای نامعلوم داریم:

$$\chi^2_{(n-1)} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

یادداشت:

....

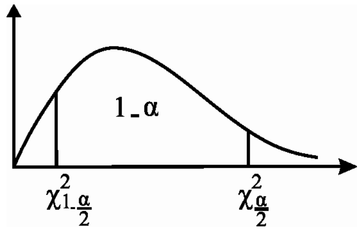
....

....

....

با توجه به این‌که توزیع χ^2 چوله به راست است و α برای دنباله راست توزیع تعریف شده $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ سمت راست و عدد بزرگ‌تری است پس در مخرج حد پایین قرار می‌گیرد. اگر α را برای دنباله چپ تعریف می‌کرد گزینه ۳ درست می‌بود.

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}$$



فاصله اطمینان نسبت واریانس‌های دو جامعه $\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)$

۷۷ ـ فاصله اطمینان $1-\alpha$ برای نسبت واریانس دو جامعه با فرض نرمال بودن جوامع عبارتست از:(اقتصاد۸۴)

۱) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}}$

۲) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}}$

۳) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}$

۴) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F_{1-\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1}$

حل: گزینه ۲ درست است.

با توجه به این‌که:

$$F_{n_1-1,n_2-1} = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \rightarrow \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{1}{F}\frac{S_1^2}{S_2^2}$$

پیش فرض α را برای دنباله راست توزیع می‌دانیم بنابراین $F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}$ سمت راست است و مقدار بیشتری دارد پس در مخرج حد پایین قرار می‌گیرد. بنابراین:

$$1)\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}}$$

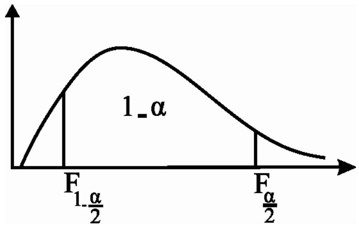
یادداشت:

....

....

....

....



اما با توجه به نکته $F_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}=\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1}}$ سه فاصله زیر نیز درست است.

2) $S_1^2/S_2^2\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}}\le\sigma_1^2/\sigma_2^2\le S_1^2/S_2^2 . F_{\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1}$

3) $S_1^2/S_2^2 . F_{1-\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1}\le\sigma_1^2/\sigma_2^2\le S_1^2/S_2^2\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}}$

4) $S_1^2/S_2^2 . F_{1-\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1}\le\sigma_1^2/\sigma_2^2\le S_1^2/S_2^2 . F_{\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1}$

یادداشت:

....

....

....

....

فصل ششم

آزمون فرض‌های آماری

تعریفی

۷۸ ـ کمیت آماره آزمون Z (تابع نمونه‌ای Z) که براساس یک دامنه در سطح 5% معنی‌دار است:

(اقتصاد ۷۷)

۱) به احتمال 95% متمایز از صفر است.

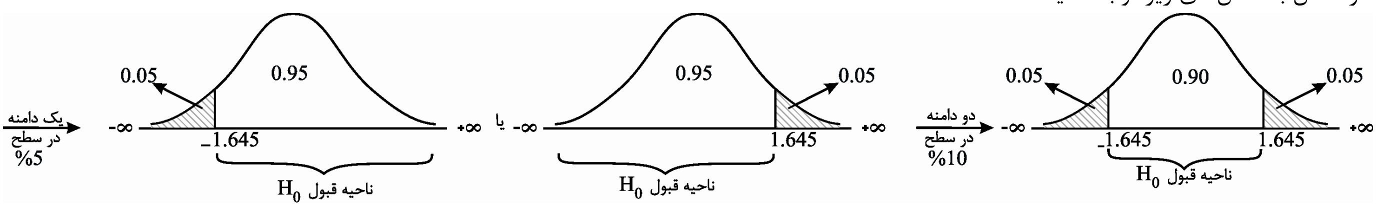
۲) با افزایش حجم نمونه سطح معنی‌دار بودن آن افزایش خواهد یافت.

۳) براساس یک آزمون دو دامنه در سطح 10% معنی‌دار است.

۴) می‌باید بزرگ‌تر از 2 یا کوچک‌تر از 2- باشد.

حل: گزینه ۳ درست است.

توجه: «براساس یک دامنه در سطح 5% معنی‌دار است» یعنی در سطح خطای 0.05 فرض H_0 رد شده و مقدار آماره آزمون در ناحیه بحرانی قرار دارد حال به شکل‌های زیر توجه کنید.



یادداشت:

....

....

....

....

همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنیم وقتی در سطح 5% آماره آزمون یک دامنه در ناحیه بحرانی قرار دارد چون فرضیه‌ها را دقیق بیان نکرده مقدار آماره به‌دست آمده یا کمتر از 1.645- شده $H_1: \mu < \mu_0$ و یا بیشتر از 1.645 است $H_1: \mu > \mu_0$ که در هر صورت در ناحیه بحرانی آزمون دو دامنه $H_1: \mu \neq \mu_0$ در سطح 10% قرار می‌گیرد بنابراین هرگاه آزمون یک دامنه در سطح 0.05 معنی‌دار شود آزمون دو دامنه نیز در سطح 10% معنی‌دار خواهد بود.

نکته: این مورد فقط برای نتیجه معنی‌دار بودن (یعنی رد کردن فرض H_0 و قبول فرض H_1) صدق می‌کند و برای پذیرش H_0 چنین موردی صادق نیست.

همچنین توجه کنید که نتیجه‌گیری برای معنی‌دار بودن آزمون فقط از آزمون یک دامنه به دو دامنه صدق می‌کند و عکس آن صادق نیست.

۷۹ ـ در یک فرآیند بسته‌بندی زعفران، برای آزمون این که میانگین وزن بسته‌ها کمتر از 3 گرم است. فرضیه صفر و مقابل کدام است؟ (اقتصاد ۸۷)

۱) $\begin{cases} H_0: \mu \leq 3 \\ H_1: \mu > 3 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} H_0: \mu \geq 3 \\ H_1: \mu < 3 \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} H_0: \mu = 3 \\ H_1: \mu < 3 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} H_0: \mu > 3 \\ H_1: \mu < 3 \end{cases}$

حل: گزینه ۲ درست است.

با توجه به این نکات که:

۱) فرض H_0 باید شامل تساوی باشد.

۲) ادعا در هر دو می‌تواند باشد.

۳) H_1, H_0 نقیض یکدیگرند داریم:

ادعا: میانگین وزن بسته‌ها کمتر از 3 گرم است: $(\mu < 3)$

چون ادعا شامل تساوی نیست در H_1 قرار گرفته و نقیض آن $(\mu \geq 3)$ در H_0 است. $\begin{cases} H_0: \mu \geq 3 \\ H_1: \mu < 3 \end{cases}$

روابط خطاها

۸۰ ـ در آزمون فرضیه های آماری هر چه اختلاف بین مقدار پیشنهادی در H_0 و مقدار واقعی آن بیشتر باشد، توان آزمون: (اقتصاد ۸۸)

۱) کمتر است. ۲) بیشتر است.

۳) فقط در آزمون‌های دوطرفه کمتر است. ۴) فقط در آزمون‌های یک‌طرفه بیشتر است.

حل: گزینه ۲ درست است.

با توجه به اینکه اختلاف بین مقدار پیشنهادی و واقعی H_0 زیاد است یعنی H_0 به واقع نادرست است.

بنابراین داریم:

$\beta^* = P(H_0\ \text{رد} \mid H_0\ \text{به واقع غلط}) = 1$

یادداشت:

....

....

....

....

آزمون مقایسه میانگین دو جامعه

۸۱ ـ تحقیقی برای مقایسه دو روش آموزش دانشجویان با روش متداول یا سنتی و روش آموزش الکترونیکی یا جدید در دست مطالعه است دو نمونه مستقل انتخاب و اطلاعات زیر به دست آمده است:

روش جدید	روش سنتی
$n_2 = 15$	$n_1 = 13$
$\bar{x}_2 = 48$	$\bar{x}_1 = 52$
$S_2 = 16$	$S_1 = 8$

۱ ـ مقدار آماره آزمون t استودنت برای مقایسه میانگین نمرات (وقتی فرض تساوی واریانس دو جامعه پذیرفته نشده باشد) چند است؟ (اقتصاد ۸۲)

۱) 0.15 ۲) 0.85 ۳) 4 ۴) 100

حل: گزینه ۲ درست است.

$$(1)\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases} \leftarrow \text{مقایسه میانگین نمرات دو روش تدریس}$$

توجه: برای توزیع $\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2$ آماره‌ای که جوامع غیرنرمال باشند وجود ندارد بنابراین در مواقعی که در صورت سؤال هم نرمال بودن ذکر نشد ما پیش فرض جوامع را نرمال فرض می‌کنیم.

پیش‌فرض دو جامعه را نرمال می‌دانیم، واریانس‌ها نامعلوم و نابرابر و $n_1, n_2 < 30$ است پس بنابر **مورد (سوم ـ ب) آماره آزمون** $(\mu_1 = \mu_2)$ داریم:

$$(2)\begin{cases} t_{(r)} = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} = \dfrac{(52 - 48) - 0}{\sqrt{\dfrac{(8)^2}{13} + \dfrac{(16)^2}{15}}} = 0.85 \\ \bar{x}_1 = 52, S_1 = 8, n_1 = 13, \bar{x}_2 = 48, S_2 = 16, n_2 = 15 \end{cases}$$

۸۲ ـ به منظور بررسی میزان تأثیر داروی کاهش فشار خون، این دارو به 15 نفر تجویز گردیده است و فشار خون آنان قبل از مصرف دارو و سپس 2 ساعت بعد از مصرف دارو اندازه‌گیری شده است که نتایج حاصل به شرح جدول زیر می‌باشد. آیا براساس این نتایج می‌توان یک برآوردکننده فاصله‌ای برای میزان تأثیر دارو در کاهش فشار خون به دست آورد؟ (اقتصاد ۸۳)

	$\bar{x}$	S^2
قبل از مصرف دارو	15	4.5
دو ساعت بعد از مصرف دارو	16	3.1

۱) بله، به شرط آن که بدانیم واریانس‌ها با هم برابرند.
۲) بله، به شرط آن‌که افراد نمونه با جایگذاری انتخاب شده باشند.
۳) بله، به شرط آن‌که بدانیم توزیع جامعه نرمال است.
۴) خیر، چون دو نمونه مستقل نیستند.

یادداشت:

....

....

....

....

حل: گزینه ۴ درست است.

چون نمونه‌های انتخاب شده برای ارزشیابی، قبل و بعد از دوره یکسان‌اند پس مستقل نیستند بنابراین نمی‌توانیم از کمیت‌های محوری تفاضل میانگین برای این نمونه‌ها استفاده کنیم. همان‌طور که به یاد داریم در آزمون‌های تفاضل میانگین برای دو جامعه فرض اساسی مستقل بودن نمونه‌های دو جامعه نسبت به هم است. در چنین مواردی که نمونه‌ها مستقل نیستند از آزمون مقایسات زوجی استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} \text{(آماره آزمون)}\ t_{(n-1)} = \dfrac{\bar{d}-0}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\bar{d}}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} \\ d_i = x_{i_{\text{قبل}}} - x_{i_{\text{بعد}}} \quad , \bar{d} = \dfrac{\sum d_i}{n} \, , S_d^2 = \dfrac{\sum\left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1} \end{cases}$$

۸۳ـ برای آزمون برابری میانگین‌های دوجامعه نرمال مستقل با واریانس‌های برابر، نتایج زیر از نمونه‌های انتخاب شده از این دو جامعه به دست آمده‌اند.

جامعه اول	$n_1 = 18$	$\bar{x}_1 = 170$	$S_1^2 = 15$
جامعه دوم	$n_2 = 18$	$\bar{x}_2 = 153$	$S_2^2 = 17$

مقدار آماره آزمون برابر است با: (اقتصاد ۸۶)

۱) 12.75 ۲) $\frac{17\sqrt{17}}{4}$ ۳) $\frac{34\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{17}{4}$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$1)\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \leftarrow \text{برابری میانگین‌های دوجامعه} \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

با توجه به این‌که دو جامعه نرمال، واریانس‌ها نامعلوم اما برابر و $n_1, n_2 \leq 30$ است پس بنابر **مورد (سوم ـ الف) آماره آزمون** $(\mu_1 = \mu_2)$، توزیع $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$، t با درجه آزادی $n_1 + n_2 - 2$ است و داریم:

$$2)\begin{cases} t_{n_1+n_2-2} = \dfrac{\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \dfrac{(170-153)-0}{4\sqrt{\frac{1}{18}+\frac{1}{18}}} = \dfrac{17}{4\sqrt{\frac{1}{9}}} = \dfrac{51}{4} = 12.75 \\ n_1 = n_2 = 18 \quad \rightarrow \quad S_p^2 = \dfrac{S_1^2 + S_2^2}{2} = \dfrac{15+17}{2} = 16 \quad \rightarrow \quad S_p = 4 \\ \bar{x}_1 = 170, S_1^2 = 15, \bar{x}_2 = 153 \, , S_2^2 = 17 \end{cases}$$

توجه: اگر $n_1 = n_2 = n$ باشد،

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{\underbrace{\cancel{n+n-2}}_{2(n-1)}} = \frac{S_1^2 + S_2^2}{2}$$

یادداشت:

....

....

....

....

۸۴ـ برای آزمون برابری میانگین‌های دو جامعه مستقل نرمال با واریانس‌های نامعلوم، نتایج زیر از نمونه‌های مستقل به‌دست آمده است. مقدار آماره این آزمون برابر است با:(اقتصاد ۸۸)

$n_1 = 5 \qquad n_2 = 7$

$\bar{x}_1 = 171 \qquad \bar{x}_2 = 162$

$S_1^2 = 70 \qquad S_2^2 = 120$

۱) $\frac{9\sqrt{35}}{\sqrt{1090}}$ ۲) $\frac{9}{10\sqrt{12}}$ ۳) $\frac{9}{\sqrt{1090}}$ ۴) $\frac{9\sqrt{35}}{10\sqrt{12}}$

حل: گزینه ۱ درست است.

دو جامعه نرمال، واریانس جوامع نامعلوم و پیش فرض نابرابر و $n_1, n_2 < 30$ هستند. بنابراین آماره آزمون برابری میانگین‌های دو جامعه، t استودنت با درجه آزادی r خواهد بود.

$$\begin{cases} H_0 = \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

$$t_r = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{171 - 162}{\sqrt{\frac{70}{5} + \frac{120}{7}}} = \frac{9}{\sqrt{\frac{490 + 600}{35}}} = \frac{9\sqrt{35}}{\sqrt{1090}}$$

آزمون نسبت جامعه

۸۵ـ صاحب یک کارخانه ادعا می‌کند حداقل 80% مردم، محصول کارخانه او را ترجیح می‌دهند. در یک نمونه تصادفی 100 تایی، بیش از چند نفر باید کالای وی را ترجیح دهند تا در سطح $\alpha = 0.05$ ادعای صاحب کارخانه پذیرفته شود؟ $\left(Z_{0.05} = 1.65\right)$ (اقتصاد ۸۵)

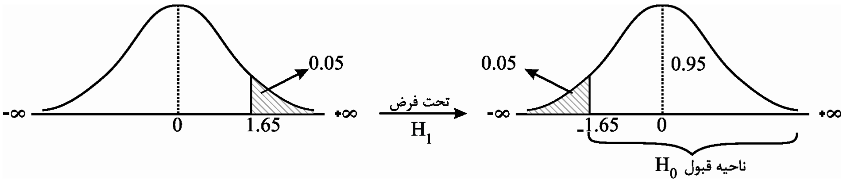
۱) 64 ۲) 73 ۳) 79 ۴) 86

حل: گزینه ۲ درست است.

$$(1)\begin{cases} H_0 : p \geq 0.8 \leftarrow \text{ادعا: حداقل 80\% مردم محصول او را ترجیح می‌دهند.} \\ H_1 : p < 0.8 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} Z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{\frac{x}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0 q_0}} = \frac{x - 100 \times 0.8}{\sqrt{100 \times 0.8 \times 0.2}} = \frac{x - 80}{4} \\ \bar{p} = \frac{x}{n}, n = 100, \quad x: \text{تعداد افراد دارای صفت موردنظر} \end{cases}$$

$(3)\ \alpha = 0.05, Z_{0.05} = 1.65 \rightarrow$



یادداشت:

....

....

....

....

با توجه به شکل برای پذیرفتن ادعا یعنی همان فرض H_0 باید: $\frac{x-80}{4} \geq -1.65 \rightarrow x \geq 73.4$ (4)

در بین گزینه‌ها به ازاء $x = 79$ و $x = 86$ در ناحیه پذیرش H_0 (ادعای صاحب کارخانه) هستیم. اما در واقع می‌توان گفت بیش از 73 نفر $(x > 73)$ باید کالای وی را ترجیح دهند. یعنی به ازاء $x \geq 74$ نفر ادعا پذیرفته می‌شود.

توجه: آماره آزمون نسبت (p) در هر شرایطی z است و همیشه برای مخرج کسر آن یعنی انحراف معیار $\bar{p}$ $(\sigma_{\bar{p}})$ از p_0 ادعا شده استفاده می‌کنیم چون در حقیقت p ادعا شده برای جامعه است

۸۶ ـ مدیر یک بانک ادعا کرده است 50 درصد مشتریان او علاوه بر حساب پس‌انداز، دارای حساب‌های دیگری نیز هستند. در نمونه‌ای تصادفی به حجم $n = 100$، 45 درصد مشتریان حساب‌های دیگر داشته‌اند. مقدار آماره آزمون برابر است با: (اقتصاد ۸۷)

۱) -10 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 10

حل: گزینه ۲ درست است.

آماره آزمون نسبت برای $n > 30$ نرمال است:
$$\begin{cases} H_0 : p = 0.5 \\ H_1 : p \neq 0.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}} = \dfrac{0.45 - 0.5}{\sqrt{\dfrac{0.5 \times 0.5}{100}}} = \dfrac{-0.05}{0.05} = -1 \\ \bar{p} = \dfrac{x}{n} = \dfrac{45}{100} = 0.45,\ p_0 = q_0 = 0.5 \\ x = 45 \text{ (تعداد افراد دارای صفت خاص) و } n = 100 \end{cases}$$

آزمون مقایسه نسبت دو جامعه

۸۷ ـ ادعا شده است که در شهر (الف) افرادی که از فروشگاه‌های زنجیره‌ای خرید می‌کنند، بیشتر از افراد خریدکننده از فروشگاه‌های زنجیره‌ای در شهر (ب) هستند. آماره آزمون این فرضیه کدام است؟ (اقتصاد ۸۱)

۱) $\dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{pq\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$ ۲) $\dfrac{n_1 - n_2}{\sqrt{\dfrac{p_1 q_1}{n_1} + \dfrac{p_2 q_2}{n_2}}}$ ۳) $\dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{S_p^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$ ۴) $\dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$(1)\begin{cases} H_0 : p_1 \leq p_2 \\ H_1 : p_1 > p_2 \end{cases}$$
$\leftarrow$ ادعا: نسبت افراد خریدکننده از فروشگاه الف بیشتر از فروشگاه ب است.

$$(2)\ Z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{\bar{p}_1 \bar{q}_1}{n_1} + \dfrac{\bar{p}_2 \bar{q}_2}{n_2}}} \xrightarrow[p_1 - p_2 = 0]{\text{تحت فرض}} Z = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{\dfrac{\bar{p}_1 \bar{q}_1}{n_1} + \dfrac{\bar{p}_2 \bar{q}_2}{n_2}}}$$

توجه: هرگاه نمونه‌های مورد مطالعه هر دو از یک جامعه انتخاب شده باشند از نسبت ترکیبی p استفاده می‌کنیم. در این سؤال نمونه‌ها از دو شهر مختلف انتخاب شده‌اند اما چون گزینه دیگری به جز گزینه (1) مربوط به تفاضل نسبت نیست به ناچار آن را انتخاب می‌کنیم.

یادداشت:

....

....

....

....

$$(2)\begin{cases} Z=\dfrac{\left(\overline{p}_1-\overline{p}_2\right)-0}{\sqrt{pq\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}} \\ p=\dfrac{x_1+x_2}{n_1+n_2} \quad \text{(نسبت ترکیبی)} \end{cases}$$

۸۸ـ به منظور بررسی عدم تفاوت در نسبت طرفداران نظریه‌های کینزی بین دانشجویان کارشناسی و دانشجویان کارشناسی ارشد رشته اقتصاد، دو نمونه تصادفی مستقل به حجم‌های 64 و 36 از هر یک انتخاب گردیده است. تعداد طرفداران در هر کدام از نمونه‌ها به ترتیب 14 و 6 نفر بوده است. اگر $\alpha = 0.05$ باشد، کمیت آماره آزمون و نتیجه آزمون چیست؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) 2.06 و H_0 رد می‌شود. ۲) 1.8 و H_0 را نمی‌توان رد کرد.

۳) 1.78 و H_0 رد می‌شود. ۴) 0.6 و H_0 را نمی‌توان رد کرد.

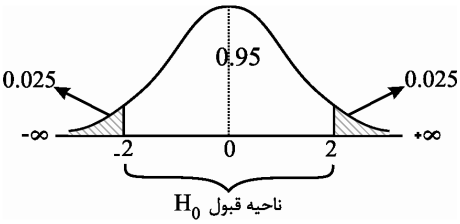
حل: گزینه ۴ درست است.

بررسی عدم تفاوت در نسبت طرفداران نظریه‌ای در دانشجویان کارشناسی و کارشناسی ارشد

$$(1)\begin{cases} H_0: p_1 = p_2 \\ H_1: p_1 \neq p_2 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} Z=\dfrac{\left(\overline{p}_1-\overline{p}_2\right)-\left(p_1-p_2\right)}{\sqrt{\dfrac{\overline{p}_1\overline{q}_1}{n_1}+\dfrac{\overline{p}_2\overline{q}_2}{n_2}}}=\dfrac{(0.22-0.17)-0}{\sqrt{\dfrac{0.22\times 0.78}{64}+\dfrac{0.17\times 0.83}{36}}}=0.6 \\ \overline{p}_1=\dfrac{x_1}{n_1}=\dfrac{14}{64}\simeq 0.22,\ \overline{p}_2=\dfrac{x_2}{n_2}=\dfrac{6}{36}\simeq 0.17,\ \alpha=0.05\rightarrow Z_{0.025}\simeq 2 \end{cases}$$

(3)



(4) چون مقدار آماره آزمون به‌دست آمده در ناحیه اطمینان (قبول H_0) قرار دارد بنابراین فرض H_0 را نمی‌توان رد کرد.

آزمون واریانس جامعه

۸۹ـ برای $n = 14$ و $S^2 = 75$، فرضیه $H_0: \sigma^2 \geq 100$ را در مقابل فرضیه $H_1: \sigma^2 < 100$ در سطح تشخیص $\alpha = 0.01$ آزمون می‌کنیم. در صورتی که فرض شود جامعه‌ای که نمونه تصادفی از آن انتخاب می‌شود نزدیک به نرمال است. کدام‌یک از موارد زیر درست است؟ (کمیت بحرانی از جدول 4.107 است). (اقتصاد ۸۳)

۱) $\chi^2 = 0.75$ و در نتیجه فرضیه H_0 رد نمی‌شود. ۲) $\chi^2 = 9.75$ و در نتیجه فرضیه H_0 رد می‌شود.

۳) $\chi^2 = 9.75$ و در نتیجه فرضیه H_0 رد نمی‌شود. ۴) $F = 0.75$ و در نتیجه فرضیه H_0 رد می‌شود.

یادداشت:

....

....

....

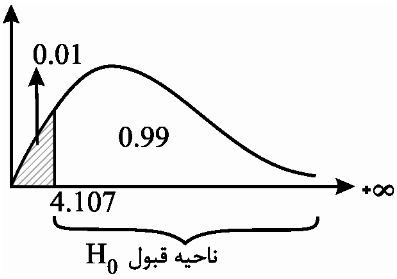
....

حل: گزینه ۳ درست است.

$$(1)\begin{cases} H_0 : \sigma^2 \geq 100 \\ H_1 : \sigma^2 < 100 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} \chi^2_{(n-1)} = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \to \chi^2_{(13)} = \dfrac{(14-1)\times 75}{100} = 9.75 \\ n = 14, S^2 = 75, \sigma_0^2 = 100, \alpha = 0.01, \chi^2_{0.99,13} = 4.107 \end{cases}$$

(3)



(4) چون مقدار آماره آزمون به‌دست آمده در ناحیه اطمینان (قبول H_0) قرار دارد بنابراین فرض H_0 رد نمی‌شود.

۹۰ ـ در یک جامعه نرمال با میانگین معلوم μ **می‌خواهیم فرضیه** $H_0 : \sigma^2 = 0.05$ **را در مقابل** $H_1 : \sigma^2 \neq 0.05$ **براساس اطلاعات** $n = 19$, $S = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}} = 0.3$ **آزمون کنیم. مقدار عددی آماره آزمون عبارتست از: (اقتصاد ۸۴)**

۱) 2.1　　۲) 2.3　　۳) 32.4　　۴) 34.2

حل: گزینه ۴ درست است.

$$(1)\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 0.05 \\ H_1 : \sigma^2 \neq 0.05 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} \chi^2_{(n)} = \dfrac{nS^2}{\sigma_0^2} \to \chi^2_{(19)} = \dfrac{19\times(0.3)^2}{0.05} = 34.2 \\ n = 19, S^2 = (0.3)^2, \sigma_0^2 = 0.05 \end{cases}$$

☜**یادآوری:** هرگاه در صورت سؤال ذکر شود μ جامعه معلوم است آماره آزمون $\chi^2_{(n)} = \dfrac{nS^2}{\sigma_0^2}$ است و مقدار واریانس نمونه از رابطه $S^2 = \dfrac{\sum(x_i-\mu)^2}{n}$ به‌دست می‌آید

آزمون مقایسه واریانس دوجامعه

یادداشت:

....

....

....

....

۹۱ ـ در جوامع نرمال برای آزمون فرضیه‌های زیر براساس اطلاعات نمونه در صورتی که $n_1 + n_2 < 30$ (مجموع اندازه‌های دو نمونه کمتر از 30) باشد، به ترتیب از راست به چپ از کدام ملاک‌های آزمون استفاده می‌شود؟ $\begin{matrix} i) H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ ii) H'_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \end{matrix}$ **(اقتصاد ۸۳)**

۱) F , t ۲) F , z ۳) χ^2 , t ۴) χ^2 , z

حل: گزینه ۱ درست است.

(i) با توجه به این‌که جوامع نرمال، واریانس‌ها نامعلوم، و $n_1 + n_2 < 30$است. آماره آزمون بسته به این‌که $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ است یا خیر $t_{n_1+n_2-2}$ یا t_r است. اما، چون فرضیه برابری واریانس‌های دوجامعه را ذکر نکرده بنابراین طبق **مورد (سوم ـ ب) آماره آزمون** $(\mu_1 = \mu_2)$ داریم:

$$t_{(r)} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

(ii) آماره آزمون برابری واریانس دو جامعه همیشه F است.

$$F_{n_1-1, n_2-1} = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \xrightarrow{H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

۹۲ ـ فرض کنید شما به‌عنوان یک تحلیل‌گر مالی بخواهید سود سهام دو بورس زیر را با توجه به داده‌های آن‌ها مقایسه کنید. برای آزمون تفاوت بین واریانس‌ها، مقدار آماره آزمون چقدر است؟ (اقتصاد ۸۸)

بورس	تهران	مشهد
تعداد سهام	5	10
میانگین	3.0	3.25
انحراف معیار	5.0	3.0

۱) $\chi^2 = 0.36$ ۲) $F = 2.8$ ۳) $F = 1.6$ ۴) $\chi^2 = 2.12$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

آماره آزمون : $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9} = 2.77 \simeq 2.8$

محاسبه خطاهای آماری و توان آزمون

۹۳ ـ اگر میانگین واقعی مقدار قهوه ریخته شده به داخل شیشه‌ها توسط یک دستگاه اتوماتیک 596.7 گرم با انحراف معیار 14 گرم باشد، خطای نوع دوم آزمون فرضیه زیر براساس یک نمونه تصادفی 49 تایی با خطای نوع اول 5 درصد کدام است؟ $(Z_{0.05} = 1.65)$

$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 600 \\ H_1 : \mu < 600 \end{cases}$ **(اقتصاد ۸۴)**

۱) 0.45 ۲) 0.5 ۳) 0.05 ۴) 0.95

یادداشت:

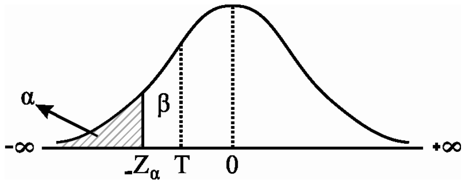
....

....

....

....

حل: گزینه ۲ درست است.



$$\begin{cases} H_0: \mu \geq 600 \\ H_1: \mu < 600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = P\left(Z<T-\left(-z_\alpha\right)\right)=P\left(Z<-1.65+1.65\right)=P\left(Z<0\right)=0.5 \\ T = \dfrac{\mu-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{596.7-600}{\dfrac{14}{\sqrt{49}}} = \dfrac{-3.3}{2} = -1.65 \\ \mu = 596.7\ ,\mu_0 = 600, \sigma=14, n=49, \alpha=0.05, Z_{0.05}=1.65 \end{cases}$$

۹۴ ـ در انجام آزمون فرضیه:

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq 240 \\ H_1: \mu < 240 \end{cases}$$

با ضریب اطمینان 0.95 و براساس یک نمونه تصادفی 100 تایی، وقتی که بدانیم مقدار واقعی میانگین و انحراف معیار به ترتیب 230 و 10 می‌باشد، توان آزمون کدام است؟ (اقتصاد ۷۷)

۱) 0 ۲) 0.05 ۳) 0.95 ۴) 1

حل: گزینه ۴ درست است.

$$\begin{cases} \beta = P\left(Z< T-\left(-z_\alpha\right)\right) = P\left(Z<-10+1.65\right) = P\left(Z<-8.35\right) = 0 \rightarrow \beta^* = 1-\beta = 1 \\ T = \dfrac{\mu-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{230-240}{\dfrac{10}{\sqrt{100}}} = -10 \\ \mu = 230\ ,\mu_0=240,\ \sigma = 10\ ,\ n = 100,\ \alpha = 0.05 \rightarrow\ Z_{0.05} = 1.65 \end{cases}$$

آزمون نیکویی برازش (χ^2ساده)

۹۵ ـ یک قنادی آجیل موردنیاز خود را با ترکیب 40 درصد بادام $(p_1 = 0.4)$ و 40 درصد پسته $(p_2 = 0.4)$ و 20 درصد گردو $(p_3 = 0.2)$ سفارش داده است. خریدار به هنگام تحویل محموله آجیل، نمونه‌ای به حجم $n = 200$ را بطور تصادفی انتخاب می‌کند. این نمونه حاوی 60 بادام، 120 پسته و 20 گردو است. مقدار عددی آماره آزمون برای قبول محموله (خوبی برازش) عبارت است از: (اقتصاد ۸۴)

۱) 9 ۲) 20 ۳) 35 ۴) 50

حل: گزینه ۳ درست است.

یادداشت:

....

....

....

....

آماره آزمون برای خوبی برازش (نیکویی برازش) در یک نمونه n تایی با k دسته (گروه) به‌صورت $\chi^2_{(k-1)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(F_{o_i} - F_{e_i}\right)^2}{F_{e_i}}$ است. در این مسئله در یک نمونه $n = 200$ تایی، فراوانی‌های مشاهده شده $\left(F_{o_i}\right)$ برای $k = 3$ دسته بادام، پسته و گردو داده شده است. اما فراوانی مورد انتظار $\left(F_{e_i}\right)$ برای هر دسته با توجه به احتمال‌های داده شده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$F_{e_i} = np_i = \begin{cases} F_{e\,(\text{بادام})} = 200 \times 0.4 = 80 \\ F_{e\,(\text{پسته})} = 200 \times 0.4 = 80 \\ F_{e\,(\text{گردو})} = 200 \times 0.2 = 40 \end{cases}$$

x_i	بادام	پسته	گردو	
F_{o_i}	60	120	20	$n = \sum F_{o_i} = 200$
F_{e_i}	80	80	40	

$$\chi^2_{(k-1)} = \chi^2_{(2)} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\left(F_{o_i} - F_{e_i}\right)^2}{F_{e_i}} = \frac{(60-80)^2}{80} + \frac{(120-80)^2}{80} + \frac{(20-40)^2}{40} = 35$$

۹۶ ـ آماره آزمون برای آزمون این ادعا که فروش اتومبیل‌های سمند، پژو و زانتیا در یک فروشگاه اتومبیل یکسان است، با توجه به اطلاعات حاصل از نمونه تصادفی زیر کدام است؟ (اقتصاد ۸۵)

اتومبیل	سمند	پژو	زانتیا
تعداد فروش	195	200	205

۱) $\chi^2_{(2)} = 0.25$
۲) $\chi^2_{(3)} = 0.25$
۳) $\chi^2_{(2)} = 0.75$
۴) $F_{2,2} = 0.75$

حل: گزینه ۱ درست است.

برای بررسی فرضیه یکسان بودن احتمال فروش k نوع اتومبیل از آزمون (نیکویی برازش) χ^2 ساده به‌صورت $\chi^2_{(k-1)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(F_{o_i} - F_{e_i}\right)^2}{F_{e_i}}$ استفاده می‌کنیم. در این مسئله با توجه به نمونه $n = 600$ تایی برای $k = 3$ نوع اتومبیل سمند و پژو و زانتیا، فراوانی‌های مشاهده شده $\left(F_{o_i}\right)$ که همان تعداد فروش در هر نوع است داده شده است. در عین حال فراوانی‌های موردانتظار $\left(F_{e_i}\right)$ با در نظر گرفتن احتمال یکسان $\left(p_i = \frac{1}{k} = \frac{1}{3}\right)$ به‌صورت $F_{e_i} = np_i = \frac{n}{k} = \frac{600}{3} = 200$ به‌دست می‌آید بنابراین خواهیم داشت:

اتومبیل	سمند	پژو	زانتیا	
F_{o_i}	195	200	205	$n = \sum F_{o_i} = 600$
F_{e_i}	200	200	200	

یادداشت:

....

....

....

....

$$\chi^2_{(k-1)}=\chi^2_{(2)}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\left(F_{o_i}-F_{e_i}\right)^2}{F_{e_i}}=\frac{(195-200)^2}{200}+\frac{(200-200)^2}{200}+\frac{(205-200)^2}{200}=0.25$$

آزمون استقلال (χ^2 مضاعف)

۹۷ ـ برای آزمون استقلال سطوح A و B، از دو متغیر در یک آزمایش، جدول توافقی زیر حاصل شده است. مقدار آماره آزمون برابر است با: (اقتصاد ۸۲)

A \ B	B_1	B_2
A_1	30	20
A_2	20	30

۱) 20
۲) 5
۳) 4
۴) 0.8

حل: گزینه ۳ درست است.

آماره آزمون استقلال دومتغیر، χ^2 با درجه آزادی $(r-1)(c-1)$ به‌صورت زیر است:

$$\chi^2_{(2-1)(2-1)}=\sum\frac{\left(F_{o_{ij}}-F_{e_{ij}}\right)^2}{F_{e_{ij}}}=\frac{(30-25)^2}{25}+\frac{(20-25)^2}{25}+\frac{(20-25)^2}{25}+\frac{(30-25)^2}{25}=\frac{100}{25}=4$$

تعداد ستون = c و تعداد سطر= r : $r=2\ ,\ c=2$

$F_{o_{ij}}=$ عناصر جدول $\quad F_{e_{ij}}=\frac{50\times 50}{100}=25$

$F_{e_{ij}}=\frac{\text{جمع ستون } j \times \text{جمع سطر } i}{\text{جمع کل}}$

A \ B	B_1	B_2	
A_1	30	20	50
A_2	20	30	50
	50	50	100

توجه: در این سؤال اتفاقی تمامی $F_{e_{ij}}$ها برابر شدند.

آنالیز واریانس (آزمون برابری میانگین چندجامعه)

۹۸ ـ به منظور بررسی برابری میانگین مصرف مواد اولیه در سه کارخانه تولیدی که یک نوع محصول تولید می‌کنند، در 5 روز، میزان مصرف مواد اولیه اندازه‌گیری شده و نتایج به صورت:

$$\sum\left(X_{1j}-\bar{X}_1\right)^2=12\ ,\ \sum\left(X_{2j}-\bar{X}_2\right)^2=21\ ,\ \sum\left(X_{3j}-\bar{X}_3\right)^2=25$$

و $SST=\sum\sum\left(X_{ij}-\bar{\bar{X}}\right)^2=90$

به دست آمده است. به فرض این که مصرف مواد اولیه بر طبق قانون نرمال توزیع شده باشد، مقدار عددی ملاک آزمون‌کننده (آماره آزمون) کدام است؟ (اندیس i متعلق به کارخانه و اندیس j مربوط به روز است).(اقتصاد ۷۸)

۱) $F=0.33$ ۲) $F=0.58$ ۳) $F=1.67$ ۴) $F=3.33$

یادداشت:

....

....

....

....

حل: گزینه ۴ درست است.

برای آزمون یکسان بودن میانگین چندجامعه (سه جامعه) از آنالیز واریانس (آماره آزمونF) استفاده می‌کنیم و با توجه به داده‌های مسئله رابطه اول آنالیز واریانس مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$\begin{cases} F_{k-1,k(n-1)} = \dfrac{\frac{SS(tr)}{k-1}}{\frac{SSE}{k(n-1)}} \to F_{2,12} = \dfrac{\frac{32}{3-1}}{\frac{58}{3(5-1)}} = \dfrac{16\times 12}{58} = 3.33 \\ SSE = \sum\sum\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)^2 = 12+21+25 = 58 \\ SST = \sum\sum\left(x_{ij}-\bar{\bar{x}}\right)^2 = 90 \\ SST = SS(tr) + SSE \to SS(tr) = 90-58 = 32 \\ k=3,\ n=5 \end{cases}$$

۹۹ ـ برای آزمون برابری متوسط هزینه‌های خانوارها در پنج منطقه از هر یک از این مناطق، نمونه‌ای به حجم 6 خانوار بطور تصادفی انتخاب شده و براساس آن $SSE = 62.5$ و $SST = 68.9$ به دست آمده است. مقدار عددی آماره آزمون عبارتست از: (اقتصاد ۸۴)

۱) 0.10 ۲) 0.64 ۳) 1.56 ۴) 9.76

حل: گزینه ۲ درست است.

برای آزمون برابری میانگین در چند جامعه (5 منطقه) از آنالیز واریانس (آماره آزمون F) استفاده می‌کنیم و با توجه به داده‌های مسئله رابطه اول آنالیز واریانس مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$\begin{cases} F_{k-1,k(n-1)} = \dfrac{\frac{SS(tr)}{k-1}}{\frac{SSE}{k(n-1)}} \to F_{4,25} = \dfrac{\frac{6.4}{5-1}}{\frac{62.5}{5(6-1)}} = \dfrac{1.6}{2.5} = 0.64 \\ SST = SSE + SS(tr) \to SS(tr) = 68.9-62.5 = 6.4 \\ SST = 68.9,\ SSE = 62.5,\ k=5,\ n=6 \end{cases}$$

۱۰۰ ـ به منظور بررسی اختلاف بین میانگین بهره‌وری پنج واحد تولیدی نمونه‌هایی به حجم 25 استخراج شده و نتایج ذیل به دست آمده است. کمیت آماره آزمون کدام است؟ (اقتصاد ۸۵)

$$n\sum_{i=1}^{k}\left(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}}\right)^2 = 200\ ,\ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)^2 = 500$$

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) 12 ۴) 2

حل: گزینه ۳ درست است.

برای آزمون مقایسه میانگین چند جامعه (5 جامعه) از آنالیز واریانس (آماره آزمون F) استفاده می‌کنیم و با توجه به داده‌های مسئله رابطه اول آنالیز واریانس مورد استفاده قرار می‌گیرد:

یادداشت:

....

....

....

....

$$\begin{cases} F_{k-1,k(n-1)}=\dfrac{\dfrac{SS(tr)}{k-1}}{\dfrac{SSE}{k(n-1)}} \rightarrow F_{4,120}=\dfrac{\dfrac{200}{5-1}}{\dfrac{500}{5\times(25-1)}}=\dfrac{50\times 24}{100}=12 \\ SS(tr)=n\sum(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2=200 \quad \text{بین‌گروهی} \\ SSE=\sum\sum(x_{ij}-\bar{x}_i)^2=500 \quad \text{درون‌گروهی} \\ k=5\ ,\ n=25 \end{cases}$$

۱۰۱ ـ به منظور مقایسه هزینه خوراک خانوارها در 3 منطقه، از هر یک از این مناطق نمونه‌ای به حجم 10 خانوار به طور تصادفی انتخاب می‌شود و براساس نتایج مشاهدات جدول تحلیل واریانس به صورت زیر به دست می‌آید. مقدار عددی آماره آزمون کدام است؟

(اقتصاد ۸۶)

منبع تغییرات	درجه آزادی	مجموع مجذور انحرافات
رویه	−	−
خطا	−	54
جمع	−	60.4

۱) 1.3
۲) 1.8
۳) 1.6
۴) 2.5

حل: گزینه ۳ درست است.

برای آزمون مقایسه میانگین چند جامعه (3 منطقه) از آنالیز واریانس (آماره آزمون F) استفاده می‌کنیم و با توجه به داده‌های مسئله رابطه اول آنالیز واریانس مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\begin{cases} F_{k-1,k(n-1)}=\dfrac{\dfrac{SS(tr)}{k-1}}{\dfrac{SSE}{k(n-1)}} \rightarrow F_{2,27}=\dfrac{\dfrac{6.4}{3-1}}{\dfrac{54}{3(10-1)}}=1.6 \\ SST=SSE+SS(tr) \rightarrow SS(tr)=60.4-54=6.4 \\ SSE=54\ ,\ SST=60.4\ ,\ k=3\ ,\ n=10 \end{cases}$$

۱۰۲ ـ به منظور آزمون برابری میانگین هزینه‌های مصرفی خانوارها در سه شهر مختلف، یک نمونه تصادفی 4 تایی از هر شهر انتخاب شده و اطلاعات زیر به دست آمده است. کمیت آماره آزمون چقدر است؟ (اقتصاد ۸۷)

$\bar{x}_1=110 \quad \bar{x}_2=100 \quad \bar{x}_3=120$

$S_1^2=180 \quad S_2^2=220 \quad S_3^2=200$

۱) $\chi^2_{(2)}=3$
۲) $F_{2,9}=3$
۳) $F_{2,9}=2$
۴) $F_{2,3}=2$

حل: گزینه ۳ درست است.

چون مقایسه میانگین بین سه شهر (بیش از دو جامعه) است از آنالیز واریانس و آماره آزمون F استفاده می‌کنیم. با توجه به داده‌های مسئله رابطه دوم آنالیز واریانس مورد استفاده قرار می‌گیرد.

یادداشت:

....

....

....

....

$$\begin{cases} F_{k-1,k(n-1)} = \dfrac{\dfrac{n\sum\left(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}\right)^2}{k-1}}{\dfrac{\sum S_i^2}{k}} \rightarrow F_{2,9} = \dfrac{\frac{4}{3-1}\left[(110-110)^2 + (100-110)^2 + (120-110)^2\right]}{\frac{180+220+200}{3}} = 2 \\ \bar{\bar{x}} = \dfrac{\sum x_i}{k} = \dfrac{110+100+120}{3} = 110 \ , k = 3 \ , n = 4 \end{cases}$$

مبانی رگرسیون و آزمون فرض‌های رگرسیون و همبستگی

۱۰۳ـ براساس نمونه تصادفی 27 تایی، مدل رگرسیون زیر بـرآورد شـده اسـت. آزمـون فرضـیه $H_0 : \beta = 0$ در سـطح معنـی‌داری $\alpha = 0.05$: $\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X, R^2 = 0.36$ (اقتصاد ۸۰)

۱) قابل رد نیست.

۲) رد نمی‌شود زیرا مقدار t محاسبه شده 1.5388 و کم‌تر از 2 می‌باشد.

۳) رد می‌شود زیرا مقدار t محاسبه شده 3.5388 و بیش‌تر از 2 می‌باشد.

۴) براساس اطلاعات فوق قابل انجام نیست.

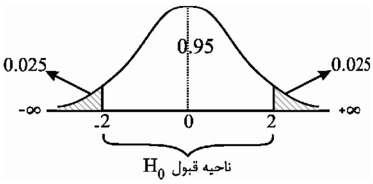
حل: گزینه ۳ درست است.

$$(1)\begin{cases} H_0 : \beta = 0 \\ H_1 : \beta \neq 0 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} t_{(n-2)} = \dfrac{r}{\sqrt{\dfrac{1-r^2}{n-2}}} \rightarrow t_{(25)} = \dfrac{0.6}{\sqrt{\dfrac{1-0.36}{27-2}}} = 3.75 \\ R^2 = 0.36 \rightarrow |r| = 0.6 \ , n = 27 \end{cases}$$

(3) **توجه:** هرگاه مقدار بحرانی t داده نشد، با عدد بحرانی 2 مقایسه کنید و تصمیم بگیرید.

(4) چون مقدار عددی آماره آزمون در ناحیه رد H_0 قرار می‌گیرد بنابراین فرض $\beta = 0$ رد می‌شود.



توجه: در بعضی موارد مثل این سؤال برای تصمیم‌گیری در مورد آزمون نیازی به دانستن سطح خطا α نیست. زیرا کمترین مقدار α برابر $\alpha = 0.01$ است که مقدار $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ آن برابر $Z_{0.005} = 2.58$ است. پس وقتی مقدار آماره آزمون ما بزرگ‌تر از 3 یا کوچک‌تر از 3- باشد بدون دانستن α و Z_α یا $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ هم می‌توانیم تصمیم بگیریم.

یادداشت:

....

....

....

....

۱۰۴ـ براساس یک نمونه تصادفی به حجم $n=5$ از جامعه‌ای نرمال (دو متغیره) (x,y) نتایج زیر به دست می‌آید:

$$\sum x = 20\ ,\ \sum x^2 = 90\ ,\ \sum xy = 180$$
$$\sum y = 40\ ,\ \sum y^2 = 370$$

آماره (ملاک) آزمون برای آزمون معنی‌دار بودن ضریب رگرسیون خطی y روی x کدام است؟(اقتصاد۸۳)

۱) $t = 3.46$ ۲) $t = 1.9$ ۳) $t = 0.35$ ۴) $t = 5.93$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$\begin{cases} H_0 : \beta = 0 \\ H_1 : \beta \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{(n-2)} = \dfrac{r}{\sqrt{\dfrac{1-r^2}{n-2}}} \to t_3 = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\sqrt{\dfrac{1-\frac{4}{5}}{5-2}}} = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\sqrt{\frac{1}{15}}} = 2\sqrt{3} \xrightarrow[\text{1.7 بگیرید.}]{\text{همیشه } \sqrt{3} \text{ را}} t_3 = 3.46 \\ r = \dfrac{\frac{\sum xy}{n} - \frac{\sum x}{n}\frac{\sum y}{n}}{\sqrt{\left(\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2\right)\left(\frac{\sum y^2}{n} - \left(\frac{\sum y}{n}\right)^2\right)}} = \dfrac{\frac{180}{5} - \frac{20}{5}\times\frac{40}{5}}{\sqrt{\left(\frac{90}{5} - \left(\frac{20}{5}\right)^2\right)\left(\frac{370}{5} - \left(\frac{40}{5}\right)^2\right)}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

۱۰۵ـ با توجه به آمار مربوط به واردات کل کشور (y) و درآمدهای ارزی حاصل از صادرات نفت (x) در طی 21 سال گذشته رگرسیون زیر برآورد شده است. آماره آزمون برای آزمون معنی‌دار بودن رابطه خطی بین واردات و درآمدهای ارزی کدام است؟

(اقتصاد ۸۳)

$$y = 3.2 + 0.9x + e\ ,\ R^2 = 0.81$$

۱) $z = 2.5$ ۲) $\chi^2_{20} = 4.6$ ۳) $F_{1,19} = 82.2$ ۴) $t_{19} = 9$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$(1)\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} t_{(n-2)} = \dfrac{r}{\sqrt{\dfrac{1-r^2}{n-2}}} \to t_{19} = \dfrac{0.9}{\sqrt{\dfrac{1-0.81}{21-2}}} = 9 \\ n = 21\ , R^2 = 0.81 \to |r| = 0.9 \xrightarrow[\text{شیب خط رگرسیون}]{\text{با توجه به مثبت بودن}} r = +0.9 \end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....

۱۰۶ـ رابطه بین مصرف (c) و درآمد قابل تصرف (y_d) براساس یک نمونه تصادفی 32 تایی به صورت روبه‌رو برآورد شده است:

$\hat{c} = 2.6 + 0.85\, y_d$, $R^2 = 0.9$

آماره آزمون برای آزمون معنی‌دار بودن رگرسیون کدام است؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) $F_{1,30} = 270$ ۲) $F_{1,30} = 150$ ۳) $\chi^2_{(30)} = 15$ ۴) $t_{(30)} = 7.2$

حل: گزینه ۱ درست است.

نکته: هرگاه آزمون معنی‌داری رگرسیون خواسته شود منظور آنالیز واریانس رگرسیون و آماره آزمون F است.

$$\begin{cases} F_{1,n-2} = \left(t_{(n-2)}\right)^2 = \left(\dfrac{r}{\sqrt{\dfrac{1-r^2}{n-2}}}\right)^2 = \dfrac{r^2}{\dfrac{1-r^2}{n-2}} \rightarrow F_{1,30} = \dfrac{0.9}{\dfrac{1-0.9}{32-2}} = \dfrac{27}{0.1} = 270 \\ r^2 = 0.9 \quad , n = 32 \end{cases}$$

۱۰۷ـ در یک رگرسیون دو متغیره اگر آماره t مربوط به شیب در ناحیه بحرانی قرار گیرد در خصوص آماره F و نتیجه آزمون کدام گزینه صحیح است؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) مقدار آماره F نیز در ناحیه بحرانی قرار گرفته و H_0 رد می‌شود.
۲) آماره F در ناحیه بحرانی قرار گرفته و H_a رد می‌شود.
۳) آماره F در ناحیه بحرانی قرار نگرفته و بین متغیرهای مستقل و وابسته رابطه وجود دارد.
۴) آماره F در ناحیه بحرانی قرار نگرفته و بین متغیرهای مستقل و وابسته رابطه وجود ندارد.

حل: گزینه ۱ صحیح است.

از آن‌جا که آماره t در ناحیه بحرانی قرار گرفته بنابراین فرضیه $H_0: \beta_1 = 0$ رد شده و شیب خط رگرسیونی معنی‌دار است. چون شیب خط معنی‌دار است بنابراین فرضیه کل معادله رگرسیونی نیز معنی‌دار خواهد بود یعنی آماره F هم در ناحیه بحرانی قرار می‌گیرد. (منظور از H_a همان فرض مخالف H_1 است.)

آماره t برای معنی‌دار بودن شیب خط $\begin{cases} H_0: \beta_1 = 0 \\ H_1: \beta_1 \neq 0 \end{cases}$

آماره F برای معنی‌دار بودن کل معادله رگرسیون: $\begin{cases} H_0: \beta_0 = \beta_1 = 0 \\ H_1: \text{حداقل یکی مخالف صفر} \end{cases}$

۱۰۸ـ فرض کنید در یک مسئله برازش رگرسیونی، مقادیر زیر براساس یک نمونه تصادفی $n = 7$ به دست آمده‌اند. برآورد حداقل مربعات مقادیر b , a در معادله رگرسیونی $y = a + bx + \varepsilon$ به ترتیب کدامند؟ (اقتصاد ۸۵)

$\sum x_i = 0$, $\sum x_i^2 = 28$, $\sum y_i = 21$, $\sum x_i y_i = 56$

۱) 2 , 3 ۲) 2 , 21 ۳) 5 , 3 ۴) 5 , 21

یادداشت:

....

....

....

....

حل: گزینه ۱ درست است.

$$b(\text{شیب خط})=\frac{\sum xy-\frac{\sum x\sum y}{n}}{\sum x^2-\frac{\left(\sum x\right)^2}{n}}=\frac{56-\frac{0\times 21}{7}}{28-\frac{(0)^2}{7}}=\frac{56-0}{28-0}=\frac{8}{4}=2$$

با توجه به این‌که خط رگرسیون برآورد شده همیشه از نقطه $(\bar{x}\,,\,\bar{y})$ عبور می‌کند، مقدار a (عرض از مبدأ) از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\bar{y}=a+b\bar{x}\ \rightarrow\ a=\bar{y}-b\bar{x}=\frac{21}{7}-2\times 0=3$$

۱۰۹ ـ براساس یک نمونه تصادفی $n=18$ تایی، ضریب همبستگی بین $y\ ,\ x$ برابر $r=0.8$ محاسبه شده است. مقدار آماره آزمون برای آزمون صفر بودن ضریب همبستگی جامعه برابر است با: (اقتصاد۸۵)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) 1.39 ۴) 5.3

حل: گزینه ۴ درست است.

$$(1)\begin{cases}H_0:\rho=0\\ H_1:\rho\neq 0\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}t_{n-2}=\dfrac{r}{\sqrt{\dfrac{1-r^2}{n-2}}}\rightarrow t_{16}=\dfrac{0.8}{\sqrt{\dfrac{1-0.64}{18-2}}}=5.3\\ n=18,\ r=0.8\end{cases}$$

۱۱۰ ـ در یک نمونه‌گیری به حجم $n=4$، نتایج زیر حاصل شده‌اند:

$$\sum x_iy_i=43\ ,\ \sum x_i=8\ ,\ \sum y_i=16\ ,\sum x_i^2=30\ ,\ \sum y_i^2=74$$

در معادله رگرسیون $y=\beta_0+\beta_1x+\varepsilon$، برآوردهای حداقل مربعات β_0 و β_1 به ترتیب عبارتند از: (اقتصاد۸۶)

۱) $\frac{23}{7}\,,\,\frac{11}{14}$ ۲) $\frac{17}{7}\,,\frac{11}{14}$ ۳) $\frac{35}{26},\frac{17}{13}$ ۴) $\frac{17}{13}\,,\,\frac{52}{13}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$(\text{شیب خط})\ \beta_1=\frac{\sum xy-\frac{\sum x\sum y}{n}}{\sum x^2-\frac{\left(\sum x\right)^2}{n}}=\frac{43-\frac{8\times 16}{4}}{30-\frac{(8)^2}{4}}=\frac{43-32}{30-16}=\frac{11}{14}$$

با توجه به این‌که خط رگرسیون برآورد شده همیشه از نقطه $(\bar{x},\bar{y})$ عبور می‌کند، مقدار عرض از مبدأ به‌دست می‌آید:

$$\bar{y}=\beta_0+\beta_1\bar{x}\ \rightarrow\ (\text{عرض از مبدأ})\ \beta_0=\bar{y}-\beta_1\bar{x}=\frac{16}{4}-\frac{11}{14}\times\frac{8}{4}=\frac{34}{14}=\frac{17}{7}$$

یادداشت:

....

....

....

....

۱۱۱ ـ رابطه بین y , x براساس یک نمونه تصادفی 18 تایی به صورت زیر برآورد شده است:

$\hat{y} = 15 + 1.7x\ ,\ R^2 = 0.64$

آماره آزمون t برای آزمون فرضیه $\beta = 0$، یعنی عدم وجود رابطه بین y , x، کدام است؟ (اقتصاد ۸۶)

۱) 2.46 ۲) 3.12 ۳) 5.33 ۴) 6.05

حل: گزینه ۳ درست است.

$$(1)\begin{cases} H_0 : \beta = 0 \\ H_1 : \beta \neq 0 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} t_{n-2} = \dfrac{r}{\sqrt{\dfrac{1-r^2}{n-2}}} = \dfrac{0.8}{\sqrt{\dfrac{1-0.64}{18-2}}} = 5.33 \\ R^2 = 0.64 \to |r| = 0.8 \xrightarrow[\text{شیب خط رگرسیون}]{\text{با توجه به مثبت بودن}} r = +0.8\ ,\ n = 18 \end{cases}$$

۱۱۲ ـ در معادله رگرسیون $E(Y|X) = \alpha + \beta X$ تخمین حداقل مربعات از پارامتر β عبارتست از:

(اقتصاد ۸۷)

۱) $b = \dfrac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}$ ۲) $b = \dfrac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum X_i^2}$ ۳) $b = \dfrac{\sum X_i Y_i}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$ ۴) $b = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i (Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}$

حل: گزینه ۴ درست است.

ضرایب معادله خط رگرسیون به دو روش حداقل مربعات و حداکثر درستنمایی برآورد می‌شوند که نتیجه هر دو تخمین با هم برابر و عبارت است از:

$$\begin{cases} \text{شیب خط}: b = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \dfrac{\sum x_i (y_i - \bar{y}) - \bar{x} \overset{0}{\cancel{\sum (y_i - \bar{y})}}}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \dfrac{\sum x_i (y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \\ \text{عرض از مبدأ}: a = \bar{y} - b\bar{x} \end{cases}$$

☜ **یادآوری:** خاصیت مهم میانگین: مجموع انحرافات داده‌ها از میانگین همواره صفر است $\sum (y_i - \bar{y}) = 0$ دقت کنید که رابطه بالا می‌توانست به‌صورت زیر هم باشد:

$$b = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum y_i (x_i - \bar{x}) - \bar{y} \overset{0}{\cancel{\sum (x_i - \bar{x})}}}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum y_i (x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

نکته: در صورتی‌که در صورت سؤال ذکر می‌شد $E(y|X = x) = \beta x$ یعنی خط از مبدأ مختصات می گذرد (عرض از مبدأ صفر $\alpha = 0$) آنگاه برآورد شیب خط به‌صورت زیر بود و گزینه۱صحیح بود.

$$b = \frac{\sum y_i x_i}{\sum x_i^2}$$

یادداشت:

....

....

....

....

۱۱۳ـ تابع تولید $\underset{(0.02)}{\log Q_t = 0.12} + \underset{(0.9)}{0.7\log L_t} + e_t$ **، در کوتاه مدت با استفاده از 22 مشاهده برآورده شده است. اعداد داخل پرانتز انحراف معیار ضرایب است. در این‌صورت می‌توان گفت: (اقتصاد ۸۸)**

۱) یک‌درصد افزایش در L سبب 0.7 درصد افزایش در تولید می‌شود.

۲) یک واحد افزایش در L سبب 0.7 واحد افزایش در تولید می‌شود.

۳) با اطمینان 95% رگرسیون برآورد شده معنی‌دار نیست.

۴) با اطمینان 95% سطح تولید متأثر از مقدار L است.

حل: گزینه ۳ درست است.

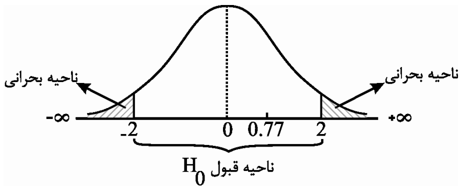
ابتدا باید معنی‌دار بودنِ شیب خط رگرسیون آزمون شود تا ارتباط خطی بین L و Q رد یا اثبات شود. آن‌گاه در صورت اثبات می‌توان راجع به تأثیر یک واحد افزایش یا کاهش در L صحبت کرد.

☜ ***یادآوری:*** با توجه به داده‌های مسئله از آزمون t استیودنت زیر جهت معنی دار بودن شیب خط رگرسیون استفاده می کنیم:

$$\begin{cases} H_0: \beta = 0 \\ H_1: \beta \neq 0 \end{cases}$$

$$t_{(n-2)} = \frac{b}{S_b} \rightarrow t_{20} = \frac{0.7}{0.9} = \frac{7}{9} = 0.77$$

در سطح 95% مقدار t در جدول t استیودنت برای درجات آزادی مختلف حدود 2 است. $t_{20,0.975} = 2.09$



پس با توجه به شکل و مقدار آماره آزمون فرض H_0 پذیرفته خواهد شد. یعنی ثابت می‌شود که ارتباط خطی بین L و Q وجود ندارد و یا به عبارت دیگر با اطمینان 95% شیب خط رگسیون برآورد شده معنی دار نیست. بنابراین کل خط رگرسیون نیز معنا دار نیست.

دقت کنید: در صورتی‌که شیب خط رگرسیون معنی دار بود یعنی فرض H_0 رد می شد، جمله زیر در مورد تفسیر خط رگرسیون برآورد شده صحیح بود :

به ازای یک واحد افزایش در متغیر مستقل L مقدار متغیر وابسته Q به میزان 0.7 واحد افزایش می یابد.(گزینه۲ صحیح می بود)

یادداشت:

....

....

....

....

سوالات سراسری سال ۸۹

مدیریت و حسابداری

۱. سود شرکتی در 12 ماه سال به ترتیب $0,9,5,8,12,7,4,5,6,2,4,10$ می‌باشد. واریانس داده‌های نامطلوب کدام است؟

۱) 10.33 ۲) 10.82 ۳) 11.63 ۴) 13.20

۲. در 75 داده آماری $\sum_{i=1}^{75}(x_i-15)=0$ و $\sum_{i=1}^{75}(x_i-15)^2=432$ می‌باشد. اگر ضریب پراکندگی داده‌های $y_i=\frac{1}{2}x_i+a$ برابر 0.2 باشد، a کدام است؟

۱) 1.5 ۲) -1.5 ۳) 2 ۴) -2

۳. متغیرهای پیوسته در جدول زیر گروه‌بندی شده‌اند. متغیر 80 درصدی داده‌ها کدام است؟

حدود دسته	$27-30$	$24-27$	$21-24$	$18-21$	$15-18$	$12-15$
فراوانی	7	8	11	9	10	5

۱) 25.875 ۲) 25.625 ۳) 26.125 ۴) 26.225

۴. در 40 داده آماری مقدار انحراف معیار برابر 2.5 و $\sum(x_i-\bar{x})^3$ برابر 60 می‌باشد. نوع چولگی آن کدام است؟

۱) چوله به راست ـ تقریباً نرمال ۲) چوله به راست ـ تفاوت زیاد با نرمال

۳) چوله به چپ ـ تقریباً نرمال ۴) چوله به چپ ـ تفاوت زیاد با نرمال

۵. با حروف کلمه "SUCCESS" چند رمز عبور چهارحرفی می‌توان ساخت؟

۱) 114 ۲) 124 ۳) 141 ۴) 142

۶. هر یک از ارقام $1,2,3,4,5,6$ را بر روی شش کارت باریک نوشته به طور تصادفی در کنار هم قرار می‌دهیم تا عدد شش رقمی حاصل شود. با کدام احتمال عدد حاصل، مضرب 6 یا مضرب 5 می‌باشد؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۷. تابع احتمال توأم دو متغیر X و Y به صورت زیر است. مقدار کوواریانس کدام است؟

Y \ X	-1	2	5
2	0.2	0.3	0
4	0.1	0.15	0.25

۱) 1.05 ۲) 1.25

۳) 1.45 ۴) 1.65

۸. تیمی 5 مسابقه دارد، احتمال برد و باخت و مساوی در هر بازی به ترتیب 0.4، 0.25 و 0.35 است. با کدام احتمال این تیم 3 برد و یک باخت و یک مساوی ممکن است داشته باشد؟

۱) 0.108 ۲) 0.112 ۳) 0.124 ۴) 0.128

یادداشت:

۹. سه کارگر A، B و C به ترتیب 40 درصد، 36 درصد و 24 درصد ظروف سرامیک فروشگاهی را تولید می‌کنند. درصد صنایع دستی معیوب این کارگران به ترتیب 3، 2 و 1 می‌باشد. اگر یک ظرف تولیدی معیوب باشد، با کدام احتمال این ظرف معیوب را کارگر C تولید کرده است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $\frac{2}{9}$

۱۰. هشت مورد از حساب‌های شرکتی دارای اشتباه است. احتمال اینکه حسابرسی داخلی متوجه هر اشتباه باشد 0.6 است. با کدام احتمال، ممکن است پنجمین حساب اشتباه دومین حسابی باشد که وی متوجه شده است؟

۱) 0.09216 ۲) 0.0512 ۳) 0.0532 ۴) 0.01152

۱۱. در توزیع پواسون، انحراف معیار برابر 2 می‌باشد. در این توزیع احتمال اگر $P(X=0)=0.018$ باشد، آن‌گاه $P(X=3)$، کدام است؟

۱) 0.108 ۲) 0.186 ۳) 0.192 ۴) 0.204

۱۲. واریانس متغیر تصادفی X با تابع چگالی یکنواخت $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6} & ; -1<x<5 \\ 0 & ; \text{جای دیگر}\end{cases}$ کدام است؟

۱) 2 ۲) 2.5 ۳) 3 ۴) 3.6

۱۳. از یک جامعه 97 عضوی با واریانس 6، نمونه‌های 16 تایی انتخاب می‌کنیم. انحراف معیار توزیع میانگین نمونه، کدام است؟

۱) 0.5625 ۲) 0.5675 ۳) 0.6525 ۴) 0.6575

۱۴. ضریب همبستگی بین دو صفت x و y در جدول زیر کدام است؟

۱) 0.25 ۲) −0.25 ۳) 0.3 ۴) −0.3

x	2	3	4	5	6
y	4	2	5	1	3

۱۵. در یک کارگاه تولیدی از 40 نفر کارگر و 10 نفر کارمند در مورد وضع بهداشت محل کار به طور تصادفی سؤال شده است. با استفاده از فراوانی مورد انتظار، آماره «کای دو» کدام است؟

۱) 2 ۲) 2.25 ۳) 2.75 ۴) 3

	کارگر	کارمند
راضی	18	7
ناراضی	22	3

یادداشت:

علوم اقتصادی

۱ . مقدار r^2 از کدام فرمول به دست می‌آید؟ ($\hat{\beta}_2$ شیب خط رگرسیون و داده‌ها برحسب انحراف از میانگین می‌باشند.)

۱) $r^2=\hat{\beta}_2^2\dfrac{\sum x_t y_t}{\sum y_t^2}$
۲) $r^2=\hat{\beta}_2^2\dfrac{\sum x_t^2}{\sum y_t^2}$
۳) $r^2=\dfrac{\sum x_t^2 y_t^2}{\sum x_t^2 \sum y_t^2}$
۴) $r^2=\hat{\beta}_2\left(\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}\right)$

۲ . منظور از میانگین مجذور خطا $\left[\mathrm{MSE}\left(\hat{\beta}\right)\right]$ چیست؟

۱) $\mathrm{MSE}\left(\hat{\beta}\right)=E\left(\hat{\beta}-\beta\right)^2$
۲) $\left[\mathrm{MSE}\left(\hat{\beta}\right)\right]=\mathrm{Var}\,\hat{\beta}+($ تورش $\hat{\beta})$
۳) $\mathrm{MSE}\left(\hat{\beta}\right)=\mathrm{Var}\left(\hat{\beta}\right)-($ اریبی $\hat{\beta})^2$
۴) $\mathrm{MSE}\left(\hat{\beta}\right)=E\left[\beta-E\left(\hat{\beta}\right)\right]^2$

۳ . اگر واریانس داده‌های آماری $x_1, x_2, \ldots, x_n$ برابر 15 باشد، واریانس داده‌های آماری زیر کدام است؟

$3x_1+2, 3x_2+2, \ldots, 3x_n+2$

۱) 135
۲) 220
۳) 155
۴) 225

۴ . به منظور مقایسه هزینه مواد غذایی خانوارها در 4 منطقه، از هر یک از این مناطق نمونه‌ای تصادفی به حجم $n=5$ خانوار انتخاب شده است. بر اساس نتایج مشاهدات، مجموع مربعات بین‌گروهی (تیمارها) برابر 12 و مجموع مربعات درون گروهی (خطاها) برابر با 32 به دست آمده است. مقدار عددی آماره آزمون عبارت است از:

۱) $F_{16,3}=\dfrac{3}{10}$
۲) $F_{16,3}=0.5$
۳) $F_{3,16}=\dfrac{10}{3}$
۴) $F_{3,16}=2$

۵ . میانگین و انحراف معیار حقوق در یک سازمان به‌ترتیب برابر 50 و 20 هزار تومان است. اگر حقوق‌ها در این سازمان به‌اندازه 25 درصد افزایش یابد، در آن صورت ضریب تغییرات حقوق:

۱) بیش از 25 درصد افزایش خواهد داشت.
۲) 25 درصد افزایش می‌یابد.
۳) کمتر از 25 درصد افزایش می‌یابد.
۴) هیچ تغییری نخواهد کرد.

۶ . اگر آماره $T(X)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ یک تابع خطی از نتایج مشاهدات و $\sum_{i=1}^{n} a_i=1$ برقرار باشد، واریانس با کدام‌یک از شرایط ذیل حداقل می‌شود؟

۱) $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_n$
۲) $a_1>a_2>a_3>\ldots>a_n$
۳) $a_1=a_2=\ldots=a_n=\dfrac{1}{n}$
۴) $a_1=a_2=\ldots=a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

۷ . اگر سه قطعه زمین مربعی شکل A، B و C به ابعاد 7، 5 و 1 متر با سه قطعه زمین مربعی یکسان تعویض شود، ابعاد زمین‌های مساوی چقدر است؟

۱) 2
۲) 4
۳) 2.5
۴) 5

۸ . اگر کمیت تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال به صورت $f(x)=5e^{-5x}\ ;\ x>0$ باشد، دهک هشتم توزیع کدام است؟

۱) $5e^{-5}$
۲) $\dfrac{1}{8}\ln(8)$
۳) $\dfrac{1}{5}\ln(5)$
۴) $8e^{-8}$

یادداشت:

....
....
....
....

۹. در صورتی که متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت به صورت ذیل باشد، مقدار α و $E(X)$ به‌ترتیب برابراست با:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \alpha & 0\le x\le 7\\ 0 & x>7\end{cases}$$

۱) $E(X)=3.5 \quad , \quad \alpha=\frac{1}{7}$
۲) $E(X)=171.5 \quad , \quad \alpha=7$
۳) $E(X)=2.5 \quad , \quad \alpha=7$
۴) $E(X)=2.5 \quad , \quad \alpha=\frac{1}{7}$

۱۰. برای هر سطح معنی‌دار و اندازه نمونه‌ای، مقدار بحرانی توزیع t:

۱) برابر صفر است.
۲) همیشه بزرگ‌تر از مقدار بحرانی توزیع Z می‌باشد.
۳) برابر با مقدار بحرانی توزیع Z می‌باشد.
۴) همیشه کوچک‌تر از مقدار بحرانی توزیع Z می‌باشد.

۱۱. با تغییر مدیریت در یک کارخانه، فروش در سال اول 2 برابر سال قبل، در سال دوم، سه برابر سال قبل و در سال سوم، چهار برابر سال قبل شده است. به طور متوسط، مقدار فروش از شروع مدیریت جدید چند برابر شده است؟

۱) 2.5
۲) $\frac{36}{13}$
۳) $2\sqrt[3]{3}$
۴) 3

۱۲. سه‌کتاب ریاضی و چهار کتاب اقتصاد را در یک ردیف کنار هم قرار می‌دهیم. احتمال اینکه کتاب‌های ریاضی کنار هم و کتاب‌های اقتصاد نیز کنار هم قرار بگیرند، برابر است با:

۱) $\frac{2}{35}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{12}{7!}$
۴) $\frac{1}{6!}$

۱۳. برای دو مقدار x_1 و x_2، کمترین مقدار عبارت $\sum_{i=1}^{2}(x_i-a)^2$ برابر است با:

۱) $x_1^2+x_2^2$
۲) صفر
۳) $\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2$
۴) $\frac{1}{2}(x_1-x_2)^2$

۱۴. اگر تخمین نقطه‌ای واریانس قیمت نفت در 100 روز گذشته $S^2=10$ باشد، فاصله اعتماد 95 درصدی برای واریانس جامعه کدام است؟ (مقادیر بحرانی $X^2_{0.975,d.f}=73.361$, $X^2_{0.025,d.f}=128.422$ می‌باشند.)

۱) $\left(\frac{990}{128.422}, \frac{990}{73.361}\right)$
۲) $\left(\frac{73.361}{990}, \frac{128.422}{990}\right)$
۳) $\left(\frac{99}{1284.22}, \frac{99}{733.61}\right)$
۴) $\left(\frac{733.61}{99}, \frac{1284.22}{99}\right)$

۱۵. اگر اختلاف بین مقدار μ_0 و μ_1 که به ترتیب در فرضیه صفر و یک بیان شده‌اند $(H_0:\mu=\mu_0 \quad , \quad H_1:\mu=\mu_1)$ با $\Delta\mu$ بیان شود، توان آزمون:

۱) با افزایش $\Delta\mu$ کاهش می‌یابد.
۲) مستقل از $\Delta\mu$ است.
۳) با افزایش $\Delta\mu$ افزایش می‌یابد.
۴) با $\sqrt{\Delta\mu}$ متناسب است.

۱۶. اگر تخمین زننده $\widetilde{X}=\frac{X_{min}+X_{max}}{2}$ و میانگین نمونه‌ای $\overline{X}$ در نمونه‌ای به حجم n با توزیع نرمال با امید ریاضی μ و واریانس σ^2 تعریف شده باشد، نسبت کارایی $\left(Var(\overline{X})/Var(\widetilde{X})\right)$ عبارت است از:

۱) $\frac{n}{2}$
۲) $\frac{2}{n}$
۳) $\frac{\sqrt{n}}{2}$
۴) $\frac{n}{\sqrt{2}}$

یادداشت:

....
....
....
....

۱۷ . تخمین حداکثر درستنمایی واریانس $\left(\sigma^2\right)$ در جامعه‌ای با توزیع نرمال مبتنی بر نمونه‌ای به حجم n برابر است با:

۱) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n}$ ۲) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n-1}$ ۳) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n-2}$ ۴) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n+1}$

۱۸ . در یک توزیع پواسون داریم $P(X=0)=\frac{1}{2}P(X=2)$ مقدار $P(X>0)$ برابر است با:

۱) $1-e^{-1}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $1-e^{-2}$ ۴) $1-e^{-4}$

۱۹ . محصولات کارخانه‌ای به تساوی توسط دو خط تولید A و B تولید می‌شوند. ده درصد محصولات خط A و 30 درصد محصولات خط B معیوب هستند. اگر کالایی به طور تصادفی انتخاب شود و سالم باشد، احتمال اینکه این محصول از خط تولید B باشد چیست؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{7}{16}$ ۳) $\frac{7}{8}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۲۰ . متغیر تصادفی X دارای توزیع کای ـ دو $\left(\chi^2\right)$ با امید ریاضی 15 است. ضریب تغییرات این متغیر کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) $\sqrt{2}$

یادداشت:

....
....
....
....

مدیریت و حسابداری

۱. گزینه ۱ درست است.

واریانس سودهای نامطلوب (نیمه‌واریانس) برای شرکت عبارت است از واریانس سودهایی که از میانگین سود کمتر باشند. بنابراین:

ابتدا میانگین داده‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\mu=\frac{\sum x_i}{N}=\frac{0+9+5+8+12+7+4+5+6+2+4+10}{12}=\frac{72}{12}=6$$

سپس داده‌های نامطلوب $\left(x_i<\mu\right)$ را مشخص می‌کنیم:

داده‌های نامطلوب ; $x_i<6 \quad \rightarrow \quad 0\ ,\ 2\ ,\ 4\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 5$

در انتها واریانس داده‌های نامطلوب را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{نیمه‌واریانس}: S.V=\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-\mu\right)^2}{k}=\frac{(0-6)^2+(2-6)^2+(4-6)^2+(4-6)^2+(5-6)^2+(5-6)^2}{6}$$

$$=\frac{36+16+4+4+1+1}{6}=\frac{62}{6}=10.33$$

۲. گزینه ۲ درست است.

یادآوری: خواص میانگین (μ):

$$\sum\left(x_i-\mu\right)=0 \quad , \quad \sum\left(x_i-\mu\right)^2: \min$$

بنابراین:

$$\sum_{i=1}^{75}\left(x_i-15\right)=0 \quad \rightarrow \quad \mu=15$$

$$\sigma^2=\frac{\sum\left(x_i-\mu\right)^2}{N}=\frac{432}{75}=5.76 \quad \rightarrow \quad \sigma=\sqrt{5.76}=2.4$$

حال ازآنجاکه ضریب تغییرات y_i برابر 0.2 است، داریم:

$$CV_{Y_i}=\frac{\sigma_{Y_i}}{\mu_{Y_i}}=\frac{\sigma_{\frac{1}{2}X_i+a}}{\mu_{\frac{1}{2}X_i+a}}=\frac{\frac{1}{2}\sigma_X}{\frac{1}{2}\mu_X+a}=\frac{\frac{1}{2}(2.4)}{\frac{1}{2}(15)+a}=0.2$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{2}\times 2.4=\frac{15}{2}\times 0.2+0.2a \quad \rightarrow \quad 1.2=1.5+0.2a \quad \rightarrow \quad 0.2a=-0.3 \quad \rightarrow \quad a=-1.5$$

یادداشت:

....

....

....

....

۳ . گزینه ۱ درست است.

منظور از متغیر 80 درصدی همان صدک 80ام است؛ بنابراین:

الف) F_{c_i} را در جدول محاسبه می‌کنیم:

$C-L$	$12-15$	$15-18$	$18-21$	$21-24$	$24-27$	$27-30$	
F_i	5	10	9	11	8	7	$N=\sum F_i=50$
F_{c_i}	5	15	24	35	43	50	

ب) صدک در اولین طبقه‌ای است که $F_{c_i} \geq \frac{aN}{100} = \frac{80\times 50}{100} = 40$ باشد؛ بنابراین طبقه $(24-27)$ طبقه صدک‌دار است.

ج) طبقه پیوسته است.

د) مقدار صدک هشتادم برابر است با:

$$P_a = L_i + \frac{\frac{aN}{100} - F_{c_{i-1}}}{F_i} \times I \xrightarrow[N=50]{a=80} P_{80} = 24 + \frac{\frac{80\times 50}{100} - 35}{8} \times 3 = 24 + \frac{5}{8}\times 3 = 25.875$$

۴ . گزینه ۱ درست است.

با توجه به داده‌های مسئله ابتدا مقدار چولگی را به کمک رابطه گشتاوری به دست می‌آوریم:

راه حل اول:

$$Sk = \frac{\frac{\sum (x_i-\mu)^3}{N}}{\sigma^3} = \frac{\frac{60}{40}}{(2.5)^3} = \frac{1.5}{15.625} = 0.096$$

اولاً، ازآنجاکه $Sk > 0$، توزیع چوله به راست است.

ثانیاً، ازآنجاکه $|Sk| \leq 0.1$، توزیع تقریباً نرمال است.

راه حل دوم (تستی):

اولاً، ازآنجاکه مقدار $\sum (x_i-\mu)^3$ مثبت است پس چولگی مثبت و به سمت راست است.

ثانیاً، با جایگذاری مقادیر در کسر چولگی گشتاوری مشخص است که صورت خیلی کوچک‌تر از مخرج است و مقدار چولگی نمی‌تواند بزرگ‌تر از 0.5 باشد، پس اختلاف زیادی با نرمال ندارد.

یادآوری:

$|Sk| \leq 0.1 \rightarrow$ تقریباً نرمال

$0.1 < |Sk| \leq 0.5 \rightarrow$ تفاوت اندک با نرمال

$|Sk| > 0.5 \rightarrow$ تفاوت فاحش با نرمال

۵ . گزینه ۱ درست است.

کلمه SUCCESS شامل حروف S، U، C و E است که حرف S، 3 بار و حرف C، 2 بار در آن تکرار شده است.

برای ساختن رمزهای چهارحرفی باید حالات زیر را بررسی کنیم:

ـ تمام کلمات چهارحرفی با 4 حرف غیر تکراری S، U، C و E: $\binom{4}{4}\times 4! = 24$

یادداشت:

....

....

....

....

ـ تمام کلمات چهارحرفی با 2 حرف C و انتخاب 2 حرف دیگر از حروف S، U و E: $\binom{3}{2}\times\frac{4!}{2!}=36$

ـ تمام کلمات چهارحرفی با 2 حرف S و انتخاب 2 حرف دیگر از حروف C، U و E: $\binom{3}{2}\times\frac{4!}{2!}=36$

ـ تمام کلمات چهارحرفی با 3 حرف S و انتخاب 1 حرف دیگر از حروف C، U و E: $\binom{3}{1}\times\frac{4!}{3!}=12$

ـ تمام کلمات چهارحرفی با 2 حرف C و 2 حرف S: $\frac{4!}{2!2!}=6$

بنابراین، تعداد کل رمزهای چهارحرفی برابر است با: $24+36+36+12+6=114$

۶. گزینه ۲ درست است.

کل حالات $=6\times5\times\cdots\times1=6!$

حالات مساعد: اولاً، برای آنکه عدد مضرب 5 باشد رقم یکان باید 5 باشد:

تعداد اعداد مضرب 5 : $\underbrace{\boxed{5\text{ حالت}}\boxed{4\text{ حالت}}\boxed{3\text{ حالت}}\boxed{2\text{ حالت}}\boxed{1\text{ حالت}}}_{\text{اعداد 1، 2، 3، 4 و 6}}\underbrace{\boxed{1\text{ حالت}}}_{\text{عدد 5}}=5\times4\times3\times2\times1\times1=5!\times1$

ثانیاً، برای آنکه عدد مضرب 6 باشد باید هم مضرب 3 باشد (مجموع ارقام بر 3 بخش‌پذیر باشد که هست زیرا $1+2+3+\cdots+6=21$) و هم مضرب 2 (رقم یکان زوج باشد یعنی یکی از اعداد 2، 4 و 6)؛ بنابراین:

تعداد اعداد مضرب 6 : $\underbrace{\boxed{5\text{ حالت}}\boxed{4\text{ حالت}}\boxed{3\text{ حالت}}\boxed{2\text{ حالت}}\boxed{1\text{ حالت}}}_{\text{5 عدد باقی‌مانده}}\overset{\text{یکان}}{\underbrace{\boxed{3\text{ حالت}}}_{\text{یکی از اعداد 2، 4 یا 6}}}=5\times4\times3\times2\times1\times3=5!\times3$

تعداد حالات مساعد $=5!\times1+5!\times3=5!\times4$

و احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\text{احتمال}=\frac{\text{حالات مساعد}}{\text{حالات ممکن}}=\frac{5!\times4}{6!}=\frac{\cancel{5!}\times4}{6\times\cancel{5!}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

۷. گزینه ۱ درست است.

Y \ X	−1	2	5	f(y)
2	0.2	0.3	0	0.5
4	0.1	0.15	0.25	0.5
f(x)	0.3	0.45	0.25	

$$\begin{cases}\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=6.6-1.85\times3=1.05\\ E(XY)=\sum\sum xy\,f(x,y)=2\times(-1)\times0.2+2\times2\times0.3+2\times5\times0+4\times(-1)\times0.1+4\times2\times0.15+4\times5\times0.25=6.6\\ E(X)=\sum x\,f(x)=-1\times0.3+2\times0.45+5\times0.25=1.85\\ E(Y)=\sum y\,f(y)=2\times0.5+4\times0.5=3\end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....

۸ . گزینه ۲ درست است.

نعداد برد، باخت و مساوی دارای توزیع چندجمله‌ای است؛ بنابراین:

$$P(X_1=3\ ,\ X_2=1\ ,\ X_3=1)=\frac{5!}{3!\,1!\,1!}\times(0.4)^3\times(0.25)^1\times(0.35)^1=0.112$$

برای سادگی محاسبات بهتر است موارد زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}\dfrac{5!}{3!1!1!}=20\\[2mm] (0.4)^3=\left(\dfrac{4}{10}\right)^3=\left(\dfrac{2}{5}\right)^3=\dfrac{8}{125}\\[2mm] 0.25=\dfrac{25}{100}=\dfrac{1}{4}\\[2mm] 0.35=\dfrac{35}{100}=\dfrac{7}{20}\end{cases}\longrightarrow\quad 20\times\frac{8}{125}\times\frac{1}{4}\times\frac{7}{20}=\frac{1120}{10000}=0.112$$

۹ . گزینه ۳ درست است.

با بررسی مسئله و اطلاعات آن مشخص می‌شود که شرایط قضیه بیز برقرار است:

	تولید		معیوب
A:	0.40	$\rightarrow$	0.03
B:	0.36	$\rightarrow$	0.02
C:	0.24	$\rightarrow$	0.01

$$P(\text{کارگر } C \mid \text{کالا معیوب})=\frac{P(\text{کالا معیوب و کارگر } C)}{P(\text{کالا معیوب})}=\frac{\frac{24}{100}\times\frac{1}{100}}{\frac{40}{100}\times\frac{3}{100}+\frac{36}{100}\times\frac{2}{100}+\frac{24}{100}\times\frac{1}{100}}=\frac{24}{120+72+24}=\frac{24}{216}=\frac{1}{9}$$

۱۰ . گزینه ۱ درست است.

وقوع rامین موفقیت در xامین آزمایش برنولی با احتمال p در هر آزمایش دارای توزیع دوجمله‌ای منفی است که در آن:

$$P(x)=\binom{x-1}{r-1}p^r q^{x-r}$$

در این سؤال احتمال آنکه دومین اشتباهی که حسابرسی متوجه می‌شود $(r=2)$، پنجمین اشتباه باشد $(x=5)$، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P(x)=\binom{5-1}{2-1}(0.6)^2(0.4)^3=4\times\frac{36}{100}\times\frac{64}{1000}=0.09216$$

۱۱ . گزینه ۳ درست است.

در هر توزیع پواسون با پارامتر λ داریم:

$$\begin{cases}P(x)=\dfrac{e^{-\lambda}\ \lambda^x}{x!}\\ \mu=\lambda\\ \sigma^2=\lambda\ \rightarrow\ \sigma=\sqrt{\lambda}\end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....

حال با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$\begin{cases} P(X=0)=\dfrac{e^{-\lambda}\ \lambda^0}{0!}=0.018 \quad \to \quad e^{-\lambda}=0.018 \\ \sigma=\sqrt{\lambda}=2 \quad \to \quad \lambda=4 \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} P(X=3)=\dfrac{e^{-\lambda}\ \lambda^3}{3!}=\dfrac{0.018\times 4^3}{3!}=\dfrac{18}{1000}\times\dfrac{64}{6}=\dfrac{192}{1000}=0.192 \\ \lambda=4\ ;\ e^{-\lambda}=0.018 \end{cases}$$

۱۲. گزینه ۳ درست است.

برای یک متغیر تصادفی $\alpha < x < \beta$ با توزیع یکنواخت داریم:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{\beta-\alpha} \\ E(X)=\dfrac{\alpha+\beta}{2}\ ,\ \sigma_X^2=\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{12} \end{cases}$$

بنابراین، واریانس متغیر $-1 < x < 5$ با توزیع یکنواخت برابر است با:

$$\sigma_X^2=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}=\frac{(5-(-1))^2}{12}=\frac{36}{12}=3$$

۱۳. گزینه ۱ درست است.

ازآنجاکه جامعه محدود و انتخاب بدون جایگذاری است و داریم $\frac{n}{N}=\frac{16}{97}\simeq 0.15 > 0.05$، برای محاسبه انحراف معیار توزیع میانگین نمونه از ضریب تصحیح استفاده می‌کنیم؛ بنابراین:

$$\begin{cases} \sigma_{\overline{X}}=\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}\times\dfrac{\sigma_X}{\sqrt{n}}=\sqrt{\dfrac{97-16}{97-1}}\times\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{16}}=\sqrt{\dfrac{81\times 6}{96\times 16}}=\sqrt{\dfrac{81}{16\times 16}}=\dfrac{9}{16}=0.5625 \\ n=16\ ;\ N=97\ ;\ \sigma_X^2=6 \end{cases}$$

۱۴. گزینه ۴ درست است.

$$\begin{cases} \overline{x}=\dfrac{\sum x}{n}=\dfrac{20}{5}=4 \\ \overline{y}=\dfrac{\sum y}{n}=\dfrac{15}{5}=3 \end{cases} ;$$

x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$
2	4	-2	1
3	2	-1	-1
4	5	0	2
5	1	1	-2
6	3	2	0

$\longrightarrow$

$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
4	1	-2
1	1	1
0	4	0
1	4	-2
4	0	0
$\sum=10$	$\sum=10$	$\sum=-3$

$$r=\frac{\sum (x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sqrt{\sum (x-\overline{x})^2 \sum (y-\overline{y})^2}}=\frac{-3}{\sqrt{10\times 10}}=-0.3$$

یادداشت:

....

....

....

....

۱۵. گزینه ۱ درست است.

$F_{o_{ij}}$

	کارمند	کارگر	
راضی	7	18	25
ناراضی	3	22	25
	10	40	N = 50

$\longrightarrow$

$F_{e_{ij}}$

	کارمند	کارگر
راضی	$\frac{25\times10}{50}=5$	$\frac{25\times40}{50}=20$
ناراضی	$\frac{25\times10}{50}=5$	$\frac{25\times40}{50}=20$

$$\chi^2=\frac{\sum\sum\left(F_{o_{ij}}-F_{e_{ij}}\right)^2}{F_{e_{ij}}}=\frac{(7-5)^2}{5}+\frac{(18-20)^2}{20}+\frac{(3-5)^2}{5}+\frac{(22-20)^2}{20}=\frac{4}{5}+\frac{4}{20}+\frac{4}{5}+\frac{4}{20}=\frac{10}{5}=2$$

یادداشت:

....

....

....

....

علوم اقتصادی

۱ . گزینه ۲ درست است.

ازآنجاکه داده‌های مسئله برحسب انحراف از میانگین هستند، داریم:

$$\begin{cases} \sum(x-\bar{x})^2 = \sum x_t^2 \\ \sum(y-\bar{y})^2 = \sum y_t^2 \\ \sum(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = \sum x_t y_t \end{cases}$$

با توجه به رابطه r (ضریب همبستگی نمونه) داریم:

$$r = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2\sum(y-\bar{y})^2}} \rightarrow r^2 = \frac{\left[\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})\right]^2}{\sum(x-\bar{x})^2\sum(y-\bar{y})^2} = \frac{\left(\sum x_t y_t\right)^2}{\sum x_t^2 \sum y_t^2}$$

که در گزینه‌ها نیست (در گزینه ۳ اشتباهاً به‌جای $\left(\sum x_t y_t\right)^2$ از $\sum x_t^2 y_t^2$ استفاده شده است).

اگر معادله خط رگرسیون به صورت $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x$ باشد، $\hat{\beta}_2$ شیب خط رگرسیون است و داریم:

$$\hat{\beta}_2 = r\frac{S_Y}{S_X} \rightarrow r = \hat{\beta}_2\frac{S_X}{S_Y} \rightarrow r^2 = \hat{\beta}_2^2\frac{S_X^2}{S_Y^2} = \hat{\beta}_2^2\frac{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{\cancel{n-1}}}{\frac{\sum(y-\bar{y})^2}{\cancel{n-1}}} = \hat{\beta}_2^2\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{\sum(y-\bar{y})^2} = \hat{\beta}_2^2\frac{\sum x_t^2}{\sum y_t^2}$$

که رابطه آخر در گزینه ۲ وجود دارد و پاسخ سؤال است.

در گزینه ۴ نیز اشتباهاً به‌جای $\hat{\beta}^2$ از $\hat{\beta}$ استفاده شده است.

۲ . گزینه ۱ درست است.

$$MSE(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta}-\beta)^2 = Var(\hat{\beta}) + \left(E(\hat{\beta})-\beta\right)^2 = \hat{\beta}\ \text{واریانس} + (\hat{\beta}\ \text{اریبی یا تورش})^2$$

همان‌طورکه دیده می‌شود:

گزینه ۳ نادرست است، زیرا به‌جای« + » از « − » استفاده شده است.

گزینه ۲ نادرست است، زیرا به‌جای ^{2}(تورش $\hat{\beta}$) از (تورش $\hat{\beta}$) استفاده شده است.

۳ . گزینه ۱ درست است.

$$\begin{cases} \sigma^2_{(3X+2)} = 9\sigma_X^2 = 9\times15 = 135 \\ \sigma_X^2 = 15 \end{cases}$$

۴ . گزینه ۴ درست است.

برای مقایسه میانگین k جامعه $(k \geq 2)$ از آزمون تحلیل واریانس آماره فیشر به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{cases} F_{k-1,k(n-1)} = \frac{\frac{SS(Tr)}{k-1}}{\frac{SSE}{k(n-1)}} \rightarrow F_{3,16} = \frac{\frac{12}{3}}{\frac{32}{16}} = \frac{4}{2} = 2 \\ SS(Tr) = 12 : \text{مربعات بین گروهی} \\ SSE = 32 : \text{مربعات درون گروهی} \\ n=5\ ,\ k=4 \end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....

۵ . گزینه ۴ درست است.

$$CV_{X+0.25X}=CV_{1.25X}=\frac{\sigma_{(1.25X)}}{\mu_{(1.25X)}}=\frac{1.25\sigma_X}{1.25\mu_X}=\frac{\sigma_X}{\mu_X}=CV_X$$

دقت کنید، وقتی ضریب تغییرات $\left(CV_X=\frac{\sigma_X}{\mu_X}\right)$ تغییر نمی‌کند دیگری نیازی به مقادیر $\mu=50$ و $\sigma=20$ نیست.

۶ . گزینه ۳ درست است.

$$T=\sum_{i=1}^{n}a_i x_i \xrightarrow{a_1=a_2=\dots=a_n=\frac{1}{n}} T(X)=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\overline{X}\rightarrow \text{کمترین واریانس}$$

۷ . گزینه ۴ درست است.

همان‌طورکه می‌دانیم مساحت هر مربع به ضلع a برابر با a^2 است، بنابراین مجموع مساحت سه قطعه A ، B و C برابر است با:

C و B ، A مجموع مساحت سه قطعه $=7^2+5^2+1^2=75$

حال اگر بخواهیم این مجموع را بین سه قطعه مربع با ضلع یکسان a تقسیم کنیم، باید مجموع آن‌ها $3a^2$ شود؛ پس:

مجموع مساحت سه قطعه یکسان $=3a^2=75 \quad\rightarrow\quad a^2=25\rightarrow a=5$

۸ . گزینه ۳ درست است.

$$P(X<\alpha)=0.8 \;\rightarrow\; \int_0^{\alpha}5e^{-5x}dx=0.8 \;\rightarrow\; \left[-e^{-5x}\right]_0^{\alpha}=0.8 \;\rightarrow\; 1-e^{-5\alpha}=0.8$$

$$\rightarrow\; e^{-5\alpha}=0.2=\frac{1}{5} \xrightarrow{\ln} -5\alpha=\ln\frac{1}{5} \;\rightarrow\; -5\alpha=-\ln 5 \;\rightarrow\; \alpha=\frac{\ln 5}{5}$$

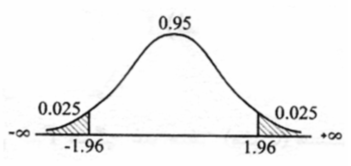
۹ . گزینه ۱ درست است.

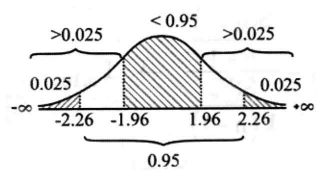
برای هر متغیر تصادفی $\alpha<x<\beta$ با توزیع یکنواخت داریم:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{\beta-\alpha} \\ E(X)=\dfrac{\alpha+\beta}{2}\end{cases} \xrightarrow{\alpha=0\ ,\ \beta=7} \begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{7} \\ E(X)=\dfrac{7}{2}=3.5\end{cases}$$

۱۰ . گزینه ۲ درست است.

ازآنجاکه توزیع t متقارن و از توزیع نرمال کوتاه‌تر است (پراکندگی بیشتر)، با توجه به شکل، مقدار ناحیه بحرانی برای سطوح برابر در آن از نرمال بیشتر است.





یادداشت:

....

....

....

....

۱۱ . گزینه ۳ درست است.

$$x_1 = \frac{\text{سال اول}}{\text{سال قبل}} = 2$$

$$x_2 = \frac{\text{سال دوم}}{\text{سال اول}} = 3 \qquad \Rightarrow \quad \bar{x}_G = \sqrt[3]{2 \times 3 \times 4} = \sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$$

$$x_3 = \frac{\text{سال سوم}}{\text{سال دوم}} = 4$$

۱۲ . گزینه ۱ درست است.

کل حالات: اگر کتاب‌های ریاضی را با R_3, R_2, R_1 و کتاب‌های اقتصاد را با E_4, E_3, E_2, E_1 نمایش دهیم، آن‌گاه:

$$\text{حالات جایگشت کل کتاب‌ها} = 7!$$

حالات مساعد: حال اگر بخواهیم کتاب‌های ریاضی کنار هم و کتاب‌های اقتصاد نیز کنار هم باشند، داریم:

$$\underset{R}{\boxed{R_1\ R_2\ R_3}} \quad \underset{E}{\boxed{E_1\ E_2\ E_3\ E_4}}$$

$$\text{حالات مساعد} = 2! \times 3! \times 4!$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\text{احتمال} = \frac{\text{حالات مساعد}}{\text{حالات ممکن}} = \frac{2! \times 3! \times 4!}{7!} = \frac{2! \times \cancel{3!} \times \cancel{4!}}{7 \times \cancel{6} \times 5 \times \cancel{4!}} = \frac{2}{35}$$

۱۳ . گزینه ۴ درست است.

کمترین مقدار $\sum_{i=1}^{2}(x_i - a)^2$ زمانی است که $a = \mu = \frac{x_1 + x_2}{2}$ باشد، بنابراین:

$$\min = \sum_{i=1}^{2}\left(x_i - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 = \left(x_1 - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 = \frac{(x_1-x_2)^2}{4} + \frac{(x_2-x_1)^2}{4} = 2\frac{(x_1-x_2)^2}{4} = \frac{(x_1-x_2)^2}{2}$$

یادآوری: همواره $(a-b)^2 = (b-a)^2$ است.

۱۴ . گزینه ۱ درست است.

$$\begin{cases} \chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \rightarrow \sigma^2 = \left[\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}}\right] = \left[\dfrac{99 \times 10}{128.422}, \dfrac{99 \times 10}{73.361}\right] \\ n = 100 \ ; \ S^2 = 10 \end{cases}$$

یادآوری: ازآنجاکه در یک بازه همواره حد پایین کوچک‌تر است، عدد بزرگ‌تر در مخرج کسر حد پایین گذاشته می‌شود تا مقدار آن کوچک‌تر شود.

۱۵ . گزینه ۳ درست است.

همان‌طورکه می‌دانیم، توان آزمون عبارت است از:

احتمال رد کردن فرض H_0 وقتی نادرست باشد $= P(\text{رد } H_0 \mid H_0 \text{ نادرست})$

یادداشت:

حال اگر اختلاف میان مقدار بیان شده در فرض صفر (H_0) و فرض مقابل (H_1) زیاد شود، در صورت نادرست بودن H_0، آن را با احتمال بیشتری رد می‌کنیم. برای مثال، در فرض‌های زیر:

$$(1)\begin{cases}H_0: \mu = 8\\ H_1: \mu = 12\end{cases} \rightarrow \Delta\mu = 4 \qquad (2)\begin{cases}H_0: \mu = 8\\ H_1: \mu = 8.5\end{cases} \rightarrow \Delta\mu = 0.5$$

فرض H_0 در حالت (1) با اطمینان بیشتری رد می‌شود؛ بنابراین، توان آزمون بیشتر خواهد بود.

۱۶ . گزینه ۲ درست است.

ابتدا واریانس هر یک از تخمین‌زننده‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}Var(\bar{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}\\ Var(\tilde{X}) = \dfrac{\overset{\sigma^2}{\cancel{Var(x_{min})}} + \overset{\sigma^2}{\cancel{Var(x_{max})}}}{4} = \dfrac{2\sigma^2}{4} = \dfrac{\sigma^2}{2}\end{cases}$$

حال نسبت کارایی را به دست می‌آوریم:

$$\bar{X} \text{ به } \tilde{X} \text{ کارایی} = \frac{Var(\bar{X})}{Var(\tilde{X})} = \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\frac{\sigma^2}{2}} = \frac{2}{n}$$

۱۷ . گزینه ۱ درست است.

اگر X دارای توزیع نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس مجهول σ^2 باشد، در این صورت برآورد MLE این پارامترها مانند روش گشتاوری عبارت است از:

$$\begin{cases}\hat{\mu} = \bar{X}\\ \hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n} = \overline{X^2} - \bar{X}^2\end{cases}$$

۱۸ . گزینه ۳ درست است.

در توزیع پواسون با پارامتر λ (متوسط تعداد اتفاقات) داریم:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad ; \quad x = 0,1,2,...$$

ازآنجاکه $P(X=0) = \frac{1}{2}P(X=2)$، داریم:

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = \frac{1}{2}\times\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} \rightarrow \lambda^2 = 4 \rightarrow \lambda = \pm 2 \xrightarrow{\lambda\geq 0} \lambda = 2$$

بنابراین $P(X>0)$ برابر است با:

$$\begin{cases}P(X>0) = 1 - P(X=0) = 1 - \dfrac{e^{-2}2^0}{0!} = 1 - e^{-2}\\ \lambda = 2\end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....

۱۹ . گزینه ۲ درست است.

$$\text{تولید}\begin{cases} A:\frac{1}{2} \begin{cases} 0.1 & \text{معیوب} \\ 0.9 & \text{سالم} \end{cases} \\ \\ B:\frac{1}{2} \begin{cases} 0.3 & \text{معیوب} \\ 0.7 & \text{سالم} \end{cases} \end{cases}$$

بنا بر قضیه بیز داریم:

$$P(\text{B خط} \mid \text{کالا سالم}) = \frac{P(\text{B خط و کالا سالم})}{P(\text{کالا سالم})} = \frac{\frac{1}{2}\times 0.7}{\frac{1}{2}\times 0.9+\frac{1}{2}\times 0.7} = \frac{7}{16}$$

۲۰ . گزینه ۴ درست است.

اگر متغیر X دارای توزیع کای- دو با n درجه آزادی باشد، داریم:

$$\begin{cases} E(X)=\mu_X=n \\ \sigma_X^2=2n \\ \sigma_X=\sqrt{2n} \end{cases} \xrightarrow{n=15} \begin{cases} E(X)=15 \\ \sigma_X^2=30 \\ \sigma_X=\sqrt{30} \end{cases}$$

حال می‌توانیم ضریب تغییرات X را محاسبه کنیم:

$$CV_X=\frac{\sigma_X}{\mu_X}=\frac{\sqrt{30}}{15}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{15}}{15}$$

احتمالاً طراح سؤال هنگام ساده کردن صورت و مخرج کسر آخر، به اشتباه $\sqrt{15}$ را با 15 ساده کرده است که جواب $\sqrt{2}$ یعنی گزینه ۴ در کلید سنجش انتخاب شده است.

یادداشت:

....

....

....

....