

به نام خدا



پاسخنامه آزمون آزمایشی مرحله دوم

۵ اردیبهشت ۱۳۹۲ خورشیدی

گروه چلنجر

- سوال یکم پاسخ‌های دیگری هم دارد و این یکی از پاسخ‌های آن است.
- هدف از این پاسخنامه، آشنایی شما با ایده‌های حل آن‌هاست پس ممکن است دقیق نوشته نشده باشد.

.: Challenger.blog.ir .:

پاسخ پرسش نخست:

ابتدا این الگوریتم را تا مادامی که به دو سکه با وزن نابرابر برسیم تکرار می‌کنیم:

۱. دو سکه را که قبلن با هم انتخاب نکرده باشیم برمی‌گزینیم و هر یک را در یک دست زلتار می‌دهیم تا مورد مقایسه قرار دهد.

چون حداکثر $\binom{14}{2}$ جفت متمایز سکه داریم و هر دو جنس سکه را در کل داریم این الگوریتم پایان می‌پذیرد. حال در اولین مرحله که به سکه‌های متمایز برمی‌خوریم اگر زلتار سکه‌ی سبک‌تر یا قلبی را بردارد، به هدف خود می‌رسیم. حال فرض می‌کنیم که سکه‌ی اصلی را بردارد. اکنون متمعن یک سکه داریم که می‌دانیم قلبی است و آن را x می‌نامیم و فعلن کنار می‌گذاریم. حال 12 سکه داریم که 6 تای آن اصل است. حال این الگوریتم را پیاده‌سازی می‌کنیم:

۱. سکه‌ها را به دو دسته شش تایی تقسیم می‌کنیم طوری که قبلن این گونه دسته‌بندی نکرده باشیم. اگر این دودسته وزنشان برابر نبود این الگوریتم را دوباره تکرار می‌کنیم.

از آن جا که حداکثر $\binom{12}{6}$ بار دست‌بالا الگوریتم اجرا می‌شود پس به جایی خواهیم رسید که الگوریتم تمام شود. حال آن دسته سنگین‌تر را در نظر می‌گیریم که شامل دست کم 4 سکه‌ی اصلی است. این دسته را مجموعه S می‌نامیم. اگر زلتار سکه‌ی خود را ازین دسته بردارد باز هم تعداد سکه‌های اصل این دسته از قلبی‌اش بیشتر است. حال این الگوریتم را بر روی اعضای S پیاده‌سازی می‌کنیم:

۱. دو سکه دلخواه ازین دسته برمی‌گزینیم.

۲. اگر وزن این دو سکه نابرابر بود:

۲,۲. هر دو را حذف می‌کنیم از S .

۳. اگر وزن این دو سکه برابر بود:

۳,۳. آن دو سکه را a و b نامیده و a را با x مورد مقایسه قرار می‌دهیم. اگر نابرابر بودند b سکه‌ای

اصل است و به آرمان خود رسیدیم وگرنه هر دو سکه قلبی‌اند و آن دو را از S دور می‌اندازیم.

طی اجرا این الگوریتم این ویژگی که همواره تعداد سکه‌های اصل از قلبی بیشتر است برقرار می‌ماند. درضمن در هر مرحله اگر به آرمان خود نرسیم دو سکه از این مجموعه کم می‌شود. پس یا طی اجرا الگوریتم به آرمان

خود می‌رسیم یا یک سکه در S می‌ماند که طبق خاصیت S که سکه‌های اصلش بیشتر است این سکه نیز اصل خواهد بود و در نتیجه به آرمان خود خواهیم رسید

پاسخ پرسش دوم:

ثابت می‌کنیم حکم به ازای $n \geq 8$ حکم سوال برقرار است. این کار را با استقرا ثابت می‌کنیم.

پایه: $n = 8$ در این حالت اگر یک سیاه بود 1,2,3 سپس اگر دو سیاه بود 2,3,4 سپس اگر سه سیاه بود 3,4,5 ... این گونه اعداد یک تا شش سفید خواهد شد. اکنون اگر هفت سیاه بود این مراحل را اجرا می‌کنیم:

1,2,3

2,3,4

1,4,7

اگر هم هشت سیاه بود:

2,3,4

3,4,5

2,5,8

طی این دو کار عدد دیگری تغییر رنگ نمی‌دهد. پس برای این حالت حکم برقرار است.

گام: اگر حکم به ازای $n = x$ برقرار باشد ثابت می‌کنیم به ازای $x + 1$ نیز صحیح است.

در این حالت اگر رنگ عدد $x + 1$ سیاه بود با حرکت $x - 1, x, x + 1$ درست می‌کنیم و سپس x عدد اول را طبق فرض استقرا تمام سفید کرده و بدین ترتیب حکم به ازای $n = x + 1$ نیز برقرار است.

حال می‌خواهیم ثابت کنیم حکم به ازای $n < 8$ برقرار نیست. هر حرکت را زوج بار انجام دهیم تغییری در روند رنگ اعداد ندارد و اگر فرد بار انجام دهیم همان تاثیری را دارد که یک بار انجام آن دارد. پس فرض می‌کنیم هر حرکت را حداکثر یک بار انجام می‌دهیم. همچنین سه حرکت 1,2,3 و 2,3,4 و 3,4,5 اگر هر سه اجرا شوند تاثیر حرکت 1,3,5 را دارند پس می‌توانیم این حرکت را حذف کنیم. به همین ترتیب حرکت‌های 2,4,6 و 3,5,7 نیز حذف می‌شوند. اکنون به ازای هر i که $0 < i < 8$ در حالت اعداد یک تا i ، تعداد حرکت‌های ممکن کمتر از i است پس از حالت تمام سفید به همه‌ی حالات که 2^i است نمی‌توان رسید و طبق پسر و از آن‌ها نیز به تمام سفید نمی‌توان رسید. پس حکم به ازای $n < 8$ برقرار نیست.

پاسخ پرسش سوم:

اگر ثابت کنیم دور همیلتنی وجود دارد، حکم مسئله اثبات می‌شود (چرا؟) برای این کار یک گراف دیگر از روی گراف مسئله می‌سازیم به این گونه:

یک گراف دوبخشی در نظر می‌گیریم و سپس به ازای هر رخ که در مختصات (i, j) داریم یک یال از راس i بخش بالا به راس j بخش پایین می‌کشیم.

بررسی که کنیم به ازای هر مجموعه متحد درجه‌ی چهار راس دو واحد اضافه می‌شود پس گراف دوبخشی دارای تور اویلری است. چون به ازای هر یال یک راس وجود دارد پس در گراف اصلی دور همیلتنی داریم.

پاسخ پرسش چهارم:

با عرض پوزش! این سوال رو من خودم بیشتر از همه ابهام دارم البته رو جواب نه تو صورت سوال. یک سریا

می گن $\binom{n}{2}$ و یک سریا هم قبول ندارن اینو. من نظری ندارم کماکان روی این سوال! 😊