



مقدمه ای بر اصطکاک دینامیکی

اخترفیزیک ۱

دانشکده فیزیک

دانشگاه صنعتی شریف

نیم سال دوم ۹۹-۰۰

امیررضا قدیانی

کسری حاجیان

استاد:

دکتر عاطفه جوادی خسرقی



فهرست مطالب

۳	مقدمه:
۵	رابطه اصطکاک دینامیکی
۱۴	بررسی رابطه برای چند حالت
۱۴	μM بسیار کوچک باشد
۱۴	μM بسیار بزرگ باشد
۱۵	تابع توزیع ماکسول بولتزمان باشد
۱۷	رویکردی دیگر
۲۲	اثرات اصطکاک دینامیکی
۲۲	سقوط سیاهچاله ها
۲۴	بلعیده شدن کهکشانهای کوتوله
۲۸	اثر اصطکاک بر روی میله های کهکشان
۲۹	خوشه های کروی



مقدمه:

کهکشان ها موجوداتی بسیار نوظهور در عرصه علم هستند. ابعاد بسیار بزرگ، رصد و داده گیری دشوار و عدم وجود اثرات روزمره باعث اطلاعات کمتر ما درباره کهکشان ها شده است. قوانین حاکم در ابعاد کهکشانی بسیار متفاوت از فیزیکی است که در زمین با آن سر و کار داریم. در ادامه می خواهیم به بررسی یک پدیده عجیب که کمتر به آن پرداخته شده است بپردازیم یعنی اصطکاک دینامیکی در کهکشان. اصطکاک دینامیکی پدیده ای گرانشی و دینامیکی است که باعث کندشدن سرعت حرکت ذرات می شود، به همین دلیل به آن اصطکاک می گویند.

اصطکاک مفهومی آشنا در زندگی ما است و بسیاری از پدیده ها با وجود آن کار می کنند مانند راه رفتن، گرفتن اشیاء، ترمز گرفتن، بریدن، خراشیدن و... . منشا این نیرو در واقع نیروی الکترومغناطیس است که غالباً به دو طریق این اثر را اعمال می کند. حالت اول پیوند های مختلف در ابعاد مولکولی است که در حین تماس دو جسم با یکدیگر به وجود می آیند یا تاثیراتی که بار های مولکولی و اتمی دو سطح بر هم وارد می کنند. حالت دوم که ابعاد آن بزرگ تر است نیروی عمودی سطح ناهمواری ها و پستی و بلندی های ریز سطح اجسام است که به صورت موضعی به هم وارد می کنند که این هم متاثر از نیروی الکترومغناطیس است.

اما اصطکاک دینامیکی بسیار متفاوت است و منشا آن نیروی گرانش است. کهکشان یک سیستم گرانشی بس ذره ای است که ما برای بررسی حرکت هر المان، آنرا در مقابل یک جسم بسیار بزرگتر به نام "خود کهکشان" قرار می دهیم که شامل تمام ذرات دیگر است اما در واقع هر عنصر کهکشان با عناصر دیگر برهمکنش هایی داخلی دارند که در نظر نگرفته ایم و این برهمکنش ها عامل اصلی اصطکاک دینامیکی اند.

جرم ۲ را در نظر بگیرید که در نقطه ای ساکن است و جرم ۱ در حال حرکت است و از نزدیکی جسم ۲ عبور می کند. در نظر بگیرید سرعت جرم ۲ در فاصله های بسیار دور هم ناصفر است (این فرض بدین معناست که اطمینان داریم که دو جسم به یکدیگر مقید نمی شوند). حال در نظر بگیرید که جرم ۲ بسیار بزرگتر از جرم ۱ باشد، در این صورت جرم ۱ یک هذلولی به دور جسم یک می زند و جرم ۲ از زمانی که جرم ۱ در فاصله بینهایت است تا حضيض هر مقدار کار مثبت انجام داده است از حضيض تا بی نهایت خلاف آنرا انجام می دهد و نهایتاً تاثیر کندکنندگی در اندازه سرعت ندارد (سرعت در هذلولی گرانشی متقارن است). واضحاً طبق روابط مرکز جرم و دوتایی ها جرم ۲ تقریباً ساکن باقی می ماند و مرکز جرم هم بر آن منطبق است. (البته در اینجا جهت حرکت منحرف شده است ولی اولاً اندازه سرعت جرم ۱ مورد بررسی است ثانیاً هذلولی ایجاد شده بسیار کشیده و نزدیک به خط است یعنی خروج از مرکز بسیار بزرگی دارد).

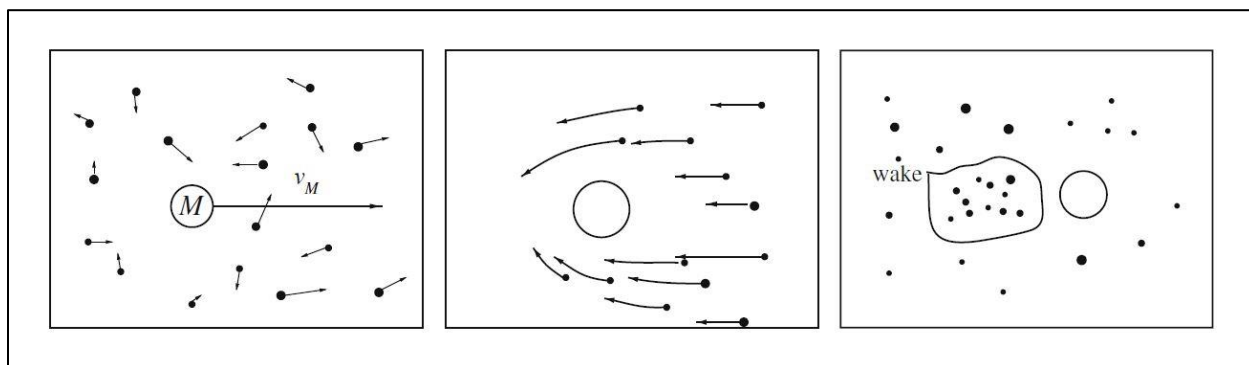
حال در نظر می گیریم که جرم ۱ کوچکتر از جرم ۲ نیست. در این حالت علاوه بر تاثیر جرم ۲ بر جرم ۱ نیز بر جرم ۲ تاثیر می گذارد و آنرا جابجا می کند. در ساده ترین نگاه (فقط برای شهود) به دلیل گرانش متقابل در اینجا میانگین فاصله دو جسم از زمانی که جرم ۱ در فاصله بینهایت است تا نقطه عبور بیشتر از نقطه عبور تا بی نهایت است و این تاثیر متقابل گرانش ثانویه را بیشتر کرده و سرعت جرم ۱ را می کاهد. (بررسی فیزیکی دقیق این کاهش سرعت را به بخش های بعد واگذار می کنیم).



اما مهم ترین حالت اصطکاک دینامیکی حالتی است که جرم ۱ به مقدار قابل توجهی بزرگ تر از جرم ۲ باشد. در این صورت جرم ۱ تغییری در جهت حرکتش ندارد و جرم ۲ یک هذلولی حول جرم ۱ می زند و باعث کاهش سرعت جرم ۱ می شود. بعداً خواهیم دید که اصطکاک دینامیکی با جرم جسم رابطه مستقیم و حساس دارد.

حال در نظر بگیرید که جرم یک مانند قبل در حال حرکت است و اجرام دیگری از جرم ۲ تا n در جوار جرم یک اند و هر کدام از اجرام تأثیری برای کاهش سرعت جرم ۱ می گذارند و اصطکاک دینامیکی ایجاد می کنند. این همان شرایطی است که در کهکشان ها اتفاق می افتد و از بهترین مثال ها حرکت خوشه های ستاره ای در کهکشان است که متاثر از بقیه اجرام دچار اصطکاک دینامیکی می شود.

مسئله دیگری که درباره اصطکاک دینامیکی مهم است ایجاد دنباله ای از ذرات سبک پشت جرم سنگین است. فرض کنید جرم سنگین تر M در میان اجرام m حرکت می کند. مطابق شکل زیر به دلیل برهم کنش گرانشی در چارچوب سکون جرم متحرک M ، ستاره های سبک تر از جلو می آیند و در پشت جرم منحرف می شوند. این برهم کنش های گرانشی متعدد به صورت یک اثر کندشودگی موثر روی جرم به جا می گذارند، درحالی که برخی از ذرات سبک تر منحرف شده m یک دنباله پشت M برجای می گذارند. این دنباله قابل اندازه گیری است و می تواند یک اثر کششی اضافی روی جرم متحرک ایجاد کند، اما کشش در چارچوب توصیف استاندارد اصطکاک دینامیکی قابل نظر کردن است. این اصطکاک دینامیکی است که دنباله را ایجاد می کند و دنباله موجب ایجاد اصطکاک دینامیکی نمی شود!



باتوجه به توضیحات بالا برای بدست آوردن رابطه ای برای اصطکاک دینامیکی، کافی است تنها تغییرات سرعت ناشی از برهم کنش های گرانشی بین جرم M و اجرام m را محاسبه کنیم و سپس می توانیم آنرا برای سیستم های بزرگ تر مانند کهکشان، با توجه به ساختار و پروفایل پخشی داخلی سیستم، تعمیم دهیم. در ادامه رابطه ای برای اصطکاک دینامیکی بدست می آوریم. در این بخش می خواهیم برای بدست آوردن روابط، تا جایی که می توانیم از تقریب استفاده نکنیم.



رابطه اصطکاک دینامیکی

دو جرم m_1, m_2 در نظر بگیرید که با هم با پارامتر برخورد b برخورد می‌کنند و سپس سرعت هر کدام تغییر می‌کند. این تغییر سرعت تنها در جهت سرعت اتفاق می‌افتد و اندازه سرعت تغییری نمی‌کند. در این برخورد انرژی مثبت است و مدار دو جرم دو هذلولی حول مرکز جرم می‌باشد. معادلات را برای حرکت نسبی می‌نویسیم:

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

و از دید مرکز جرم:

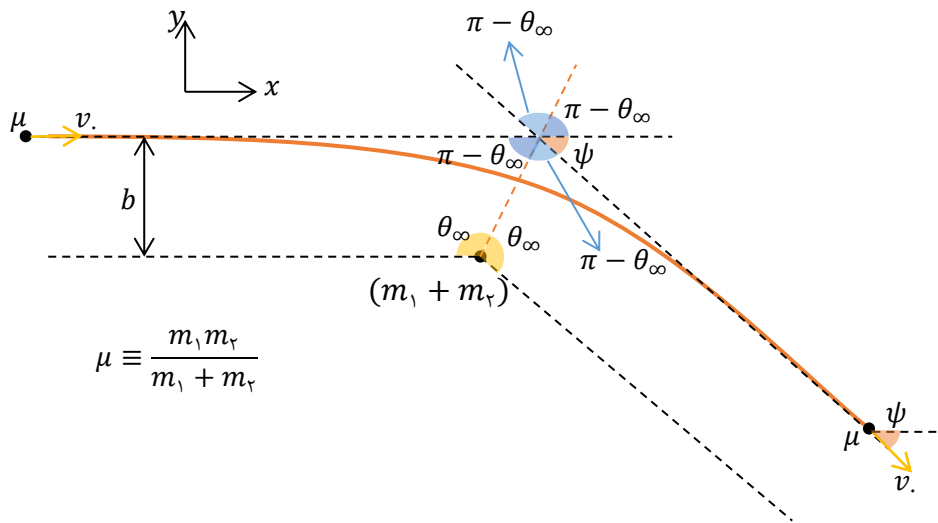
$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{r}_2, \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_2 + \frac{m_2}{m_1} \vec{r}_2 = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right) \vec{r}_2$$

$$\Rightarrow \vec{r} = -\frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1 - \vec{r}_1 = -\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right) \vec{r}_1$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right) \dot{\vec{r}}_2 = -\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right) \dot{\vec{r}}_1$$



پس با توجه به رابطه بالا پس از بدست آوردن تغییرات سرعت مدار نسبی می‌توان تغییر سرعت هر یک از اجرام را حساب کرد. برای محاسبه تغییرات سرعت به زاویه ψ نیاز داریم. با توجه به شکل:

$$\psi + 2(\pi - \theta_\infty) = \pi$$

$$\Rightarrow \psi = 2\theta_\infty - \pi$$

همچنین θ_∞ وقتی اتفاق می‌افتد که فاصله ذره به بی نهایت میل کند، یعنی:

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos(\theta)} \rightarrow \infty \Rightarrow \cos(\theta) \rightarrow -\frac{1}{e}$$



$$\Rightarrow \cos(\theta_{\infty}) = -\frac{1}{e}$$

حال تکانه زاویه ای واحد جرم مدار را برحسب سرعت اولیه ($v_{\cdot}$) و پارامتر برخورد (b) حساب می کنیم:

$$h = v_{\cdot} b = \sqrt{G(m_1 + m_2)a(e^{\epsilon} - 1)}$$

و همچنین برای انرژی واحد جرم:

$$\epsilon = U + K = \cdot + \frac{1}{2} v_{\cdot}^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{2a}$$

$$\Rightarrow a = \frac{G(m_1 + m_2)}{v_{\cdot}^2}$$

$$\Rightarrow h = v_{\cdot} b = \sqrt{\frac{G^2 M(m_1 + m_2)^2}{v_{\cdot}^2} (e^{\epsilon} - 1)} = \frac{G(m_1 + m_2)}{v_{\cdot}} \sqrt{e^{\epsilon} - 1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{e^{\epsilon} - 1} = \frac{b v_{\cdot}^2}{G(m_1 + m_2)}$$

همچنین طبق روابط مثلثاتی:

$$\tan(\theta_{\infty}) = \pm \sqrt{\frac{1}{\cos^2(\theta_{\infty})} - 1}$$

$$\tan(\theta_{\infty}) = \pm \sqrt{e^{\epsilon} - 1} = \pm \frac{b v_{\cdot}^2}{G(m_1 + m_2)}$$

برای تعیین علامت $\tan(\theta_{\infty})$ با توجه به شکل داریم:

$$\theta_{\infty} \geq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan(\theta_{\infty}) < \cdot$$

$$\Rightarrow \tan(\theta_{\infty}) = -\frac{b v_{\cdot}^2}{G(m_1 + m_2)} = -b/b^*$$

$$b^* \equiv \frac{G(m_1 + m_2)}{v_{\cdot}^2}$$



✓ b^* را برای ساده سازی معادلات تعریف کردیم. دقت کنید که b^* زمانی که $m_1 = m_2$ باشد، به حد برخورد قوی که در

قسمت مقیاس های زمانی با تقریب پیدا کردیم تبدیل می شود:

$$m_1 = m_2 = m \Rightarrow b^* = \frac{2Gm}{v^2} = b_s$$

با توجه به روابط به دست آمده و شکل روابطی برای تغییرات سرعت در راستای عمودی (y) و مماسی (x) بدست می آوریم:

$$\delta v_y = -v \cdot \sin(\psi) - \cdot = -v \cdot \sin(\psi)$$

$$\delta v_x = v \cdot \cos(\psi) - v \cdot = v \cdot (\cos(\psi) - 1)$$

حال ψ را جایگذاری می کنیم:

$$\cos(\psi) - 1 = \cos(2\theta_\infty - \pi) - 1 = -\cos(2\theta_\infty) - 1$$

$$\Rightarrow \cos(\psi) - 1 = -(1 + \cos(2\theta_\infty)) = -(1 + \cos^2(\theta_\infty) - \sin^2(\theta_\infty))$$

$$\Rightarrow \cos(\psi) = -2 \cos^2(\theta_\infty) \quad , \quad \cos^2(\theta_\infty) = \frac{1}{1 + \tan^2(\theta_\infty)} = \frac{1}{1 + \frac{b^2}{b^{*2}}}$$

$$\Rightarrow \delta v_x = \frac{-2v \cdot}{1 + \frac{b^2}{b^{*2}}}$$

و در راستای عمودی:

$$\sin(\psi) = \sin(2\theta_\infty - \pi) = -\sin(2\theta_\infty) = -2 \sin(\theta_\infty) \cos(\theta_\infty)$$

$$\sin(\theta_\infty) \cos(\theta_\infty) = \cos^2(\theta_\infty) \tan(\theta_\infty) = \frac{-\frac{b}{b^*}}{1 + \frac{b^2}{b^{*2}}}$$



$$\Rightarrow \delta v_y = \frac{-\frac{b}{b^*} v_{\cdot}}{1 + \frac{b^2}{b^{*2}}}$$

حال فرض می کنیم که جرم M در میان اجرام کوچک m حرکت می کند و تغییرات سرعت M را بدست می آوریم:

$$m_1 = m, m_r = M \Rightarrow \dot{r}_r = \left(\frac{m_1 + m_r}{m_1} \right)^{-1} \dot{r} = \frac{m}{m + M} \dot{r}$$

$$\Rightarrow \delta v_{y,M} = -\frac{r m v_{\cdot}}{m + M} \left(\frac{b/b^*}{1 + b^2/b^{*2}} \right)$$

$$\Rightarrow \delta v_{x,M} = -\frac{r m v_{\cdot}}{m + M} \left(\frac{1}{1 + b^2/b^{*2}} \right)$$

اصطکاک ناشی از تغییر سرعت در راستای موازی (x) است. اندازه تغییرات سرعت را طی یک برخورد بدست آوردیم و جهت آن نیز در جهت $v_{\cdot}$ است. با جایگذاری b^* داریم:

$$\delta \vec{v}_{x,M} = -\left(\frac{r m v_{\cdot}}{m + M} \right) \left(\frac{1}{1 + b^2/b^{*2}} \right) \hat{v}_{\cdot} = -\left(\frac{r m}{m + M} \right) \left(1 + \frac{v_{\cdot}^2 b^2}{G^2 (m + M)^2} \right)^{-1} \vec{v}_{\cdot}$$

میزان تغییر سرعت برابر تغییر سرعت در هر برخورد ضرب در تعداد برخوردها است:

$$\Delta \vec{v}_{x,M} = \int \delta \vec{v}_{x,M} \times dN = \int n \times d^3x \times \delta \vec{v}_{x,M}$$

که در این رابطه $d^3x = dV$ المان حجم است. چگالی عددی (n) را از تابع توزیع اجرام m جایگذاری می کنیم:

$$n(\vec{v}_m, \vec{v}_m + d\vec{v}_m) = f(\vec{v}_m) d^3\vec{v}_m$$

در رابطه قبل $n(\vec{v}_m, \vec{v}_m + d\vec{v}_m)$ چگالی عددی ذرات با سرعت $\vec{v}_m, \vec{v}_m + d\vec{v}_m$ است، $f(\vec{v}_m)$ تابع توزیع و $d^3\vec{v}_m$

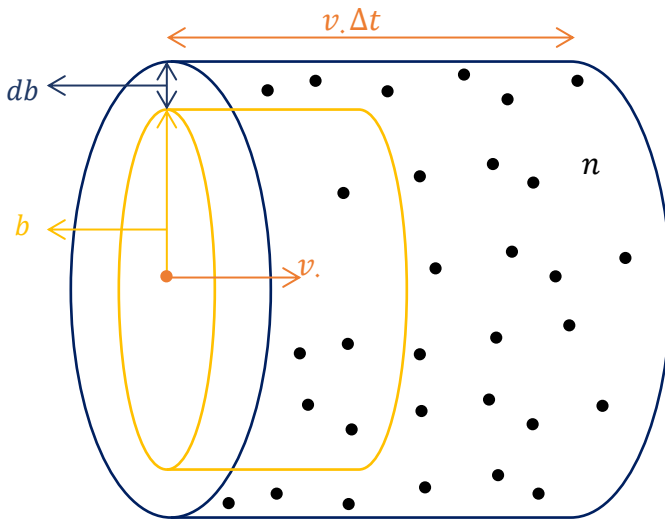
المان حجم در فضای فازی است. پس چگالی عددی:



$$\Rightarrow n = \int f(\vec{v}_m) d^3\vec{v}_m$$

✓ توجه شود که در نمادگذاری $d^3x, d^3\vec{v}_m$ توان ۳ نشان دهنده دیفرانسیلی از مرتبه سوم (حجم) است. این دیفرانسیل مرتبه سوم به دستگاه مختصاتی که انتخاب می کنیم، بستگی دارد. برای مثال در دستگاه دکارتی:

$$d^3x = dx dy dz, d^3\vec{v}_m = dv_x dv_y dv_z$$



المان حجمی به شکل استوانه ای با ضخامت db و شعاع b و ارتفاع $v \cdot \Delta t$ (مشابه المان حجم در نظر گرفته شده برای بدست آوردن زمان واهلش) در نظر می گیریم:

$$dV = dS v \cdot \Delta t$$

$$dS = 2\pi b db$$

$$d^3x = dV = 2\pi b v \cdot \Delta t db$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{v}_{x,M} = \iint \delta \vec{v}_{x,M} f(\vec{v}_m) d^3\vec{v}_m 2\pi b v \cdot \Delta t db$$

که در این رابطه یک انتگرال روی تابع توزیع برای بدست آوردن چگالی عددی و دیگری روی حجم است. حال هر دو سمت را بر Δt تقسیم می کنیم. در حد $\Delta t \rightarrow 0$ داریم:

$$\frac{\Delta \vec{v}_{x,M}}{\Delta t} = \iint \delta \vec{v}_{x,M} f(\vec{v}_m) d^3\vec{v}_m 2\pi b v \cdot db$$

$$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\Delta \vec{v}_{x,M}}{\Delta t} = \vec{a}_{x,M}$$

پس رابطه ای انتگرالی برای شتاب جرم M در راستای موازی حرکت پیدا کردیم. حال رابطه $\delta \vec{v}_{x,M}$ را جایگذاری می کنیم:

$$\vec{a}_{x,M} = \iint -\left(\frac{2m}{m+M}\right) \left(\frac{1}{1+b^2/b^{*2}}\right) \vec{v} \cdot f(\vec{v}_m) d^3\vec{v}_m 2\pi b v \cdot db$$



ابتدا بر روی تمام b ها انتگرال می گیریم:

$$\frac{b}{b^*} \equiv u \Rightarrow db = b^* du$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{x,M} = \iint_{\frac{b_{max}}{b^*}} - \left(\frac{\gamma m}{m+M} \right) \left(\frac{1}{1+u^2} \right) \vec{v} \cdot f(\vec{v}_m) d^3 \vec{v}_m \gamma \pi b^{*2} v \cdot u du$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{x,M} = \int - \left(\frac{\gamma m}{m+M} \right) \vec{v} \cdot f(\vec{v}_m) d^3 \vec{v}_m \pi b^{*2} v \cdot \int_{\frac{b_{max}}{b^*}} \frac{\gamma u du}{1+u^2}$$

با توجه به اینکه b^* تخمین دقیق تر حد برخورد قوی است پس تعریف دقیق تر Λ :

$$\Lambda \equiv \frac{bv^2}{G(m+M)} = \frac{b}{b^*}$$

برای تخمینی از حدود Λ می توان فرض کرد جرم همه ستاره ها برابر است و v^2 سرعت حرکت در مدار دایروی ناشی از جرم داخل شعاع سیستم (معمولا در کهکشان ها) R است. همچنین $b = R$ پس:

$$\Lambda = \frac{bv^2}{G(m+M)} = \frac{R \times \frac{GM(R)}{R}}{\gamma GM^*} = \frac{M(R)}{\gamma M^*} \sim \frac{N^* M^*}{\gamma M^*} \sim N^*$$

پس تقریبا Λ در مرتبه تعداد ذرات سیستم است.

با تغییر متغیر زیر:

$$x = 1 + u^2 \Rightarrow \gamma u du = dx$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{x,M} = \int - \left(\frac{\gamma m}{m+M} \right) \vec{v} \cdot f(\vec{v}_m) d^3 \vec{v}_m \pi b^{*2} v \cdot \int_1^{1+\Lambda^2} \frac{dx}{x}$$



$$\Rightarrow \vec{a}_{x,M} = \int -\left(\frac{\gamma m}{m+M}\right) \vec{v} \cdot f(\vec{v}_m) d^3\vec{v}_m \pi b^{*\gamma} v \cdot (\ln(1 + \Lambda^\gamma) - \ln(1))$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{x,M} = \int -\left(\frac{\gamma m}{m+M}\right) \vec{v} \cdot f(\vec{v}_m) d^3\vec{v}_m \pi b^{*\gamma} v \cdot \ln(1 + \Lambda^\gamma)$$

با جایگذاری b^* داریم:

$$\Rightarrow \vec{a}_{x,M} = \int -\left(\frac{\gamma m}{m+M}\right) \vec{v} \cdot f(\vec{v}_m) d^3\vec{v}_m \pi \left(\frac{G(m+M)}{v^\gamma}\right)^\gamma v \cdot \ln(1 + \Lambda^\gamma)$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{x,M} = \int -\pi \ln(1 + \Lambda^\gamma) \left(\frac{\gamma m}{m+M}\right) G^\gamma (m+M)^\gamma \frac{v \cdot}{v^\gamma} \vec{v} \cdot f(\vec{v}_m) d^3\vec{v}_m$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{x,M} = \int -\gamma \pi \ln(1 + \Lambda^\gamma) G^\gamma m(m+M) \frac{\vec{v} \cdot}{v^\gamma} f(\vec{v}_m) d^3\vec{v}_m$$

و اما v سرعت جرم M نسبت به m است:

$$\vec{v} \cdot = \vec{v}_M - \vec{v}_m, v \cdot = |\vec{v}_M - \vec{v}_m|$$

با انتگرال گیری روی تمام سرعت ها:

$$\Rightarrow \vec{a}_{x,M} = -\gamma \pi \ln(1 + \Lambda^\gamma) G^\gamma m(m+M) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{v} \cdot}{v^\gamma} f(\vec{v}_m) d^3\vec{v}_m$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{x,M} = -\gamma \pi \ln(1 + \Lambda^\gamma) G^\gamma m(m+M) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{v}_M - \vec{v}_m}{|\vec{v}_M - \vec{v}_m|^\gamma} f(\vec{v}_m) d^3\vec{v}_m$$

اصطکاک دینامیکی ناشی از اجرام m ضرب جرم (M) در این شتاب است. پس رابطه کلی برای اصطکاک دینامیکی اجرام m

$(\vec{f}_{d,m})$ به شکل زیر می باشد:

$$\boxed{\vec{f}_{d,m} = -\gamma \pi \ln(1 + \Lambda^\gamma) G^\gamma M m(m+M) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{v}_M - \vec{v}_m}{|\vec{v}_M - \vec{v}_m|^\gamma} f(\vec{v}_m) d^3\vec{v}_m}$$



دقت کنید که این عبارت بدون هیچ فرض ساده کننده و تقریب بدست آمد. سیستم مجموعه ای از ذرات m با جرم های مختلف می باشد پس کل نیروی ترمزی وارد شده بر جرم M :

$$\vec{f}_d = \sum_{m_{min}}^{m_{max}} \vec{f}_{d,m}$$

حساب کردن انتگرال عبارت اصطکاک دینامیکی معمولاً کار سختی است و در بیشتر موارد این انتگرال جواب تحلیلی ندارد. حال در ادامه فرض های ساده کننده انجام می دهیم:

فرض می کنیم جرم همه ذرات سیستم برابر باشد:

$$\vec{f}_d = \vec{f}_{d,m}$$

معمولاً Λ بسیار بزرگ است پس:

$$1 + \Lambda^\gamma \approx \Lambda^\gamma \Rightarrow \ln(1 + \Lambda^\gamma) = \ln(\Lambda^\gamma) = \gamma \ln(\Lambda)$$

همچنین فرض می کنیم توزیع ذرات همسان گرد (ایزوتروپیک) باشد. پس المان حجم فضای فاز را برای ساده تر شدن معادلات در مختصات کروی می نویسیم:

$$\Rightarrow d^3 \vec{v}_m = dv_x dv_y dv_z = \epsilon \pi v_m^\gamma dv_m$$

پس رابطه اصطکاک دینامیکی به شکل زیر درمی آید:

$$\vec{f}_d = -\gamma \pi \ln(1 + \Lambda^\gamma) G^\gamma M m (m + M) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{v}_M - \vec{v}_m}{|\vec{v}_M - \vec{v}_m|^\gamma} f(\vec{v}_m) \epsilon \pi v_m^\gamma dv_m$$

$$\Rightarrow \vec{f}_d = -\gamma \pi \ln(\Lambda) G^\gamma M m (m + M) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{v}_M - \vec{v}_m}{|\vec{v}_M - \vec{v}_m|^\gamma} f(\vec{v}_m) v_m^\gamma dv_m$$

به نظر این انتگرال هم به سادگی حل نشود، اما این انتگرال خیلی آشنا است. به رابطه میدان $(\vec{g}(\vec{r}))$ توجه کنید:

$$\vec{g}(\vec{r}) = \int -\frac{G dm}{r^\gamma} \hat{r} = \int_{-\infty}^{\infty} -G \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^\gamma} d^3 r'$$



برای توزیع جرم کروی: $d^3r' = 4\pi r'^2 dr', \rho(\vec{r}') = \rho(r')$

$$\vec{g}(\vec{r}) = \int_{\cdot}^{\infty} -G\rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' = \int_{\cdot}^{\vec{r}} -G\rho(r') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} 4\pi r'^2 dr'$$

با توجه به قضیه پوسته های گرانشی نیروی از اجرام در $\vec{r}' > \vec{r}$ به جسم وارد نمی شود و پاسخ انتگرال:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM(r)}{r^2} \hat{r} = -G \frac{\hat{r}}{r^2} \int_{\cdot}^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'$$

پس برای توزیع کروی می توان نوشت:

$$\int_{\cdot}^{\infty} \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' = \frac{\hat{r}}{r^2} \int_{\cdot}^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' (*)$$

دوباره به انتگرال رابطه اصطکاک دینامیکی توجه کنید:

$$\int_{\cdot}^{\infty} \frac{\vec{v}_M - \vec{v}_m}{|\vec{v}_M - \vec{v}_m|^3} f(\vec{v}_m) d^3\vec{v}_m (**)$$

با کمی دقت متوجه می شویم که انتگرال (*) کاملاً متناظر انتگرال (**) است و این دو با تبدیل $\vec{r}' \rightarrow \vec{v}_M, \vec{r} \rightarrow \vec{v}_m$ به یکدیگر

تبدیل می شوند، پس پاسخ انتگرال ها نیز باید مشابه یکدیگر باشد:

$$\Rightarrow \int_{\cdot}^{\infty} \frac{\vec{v}_M - \vec{v}_m}{|\vec{v}_M - \vec{v}_m|^3} f(\vec{v}_m) d^3\vec{v}_m = \frac{\hat{v}_M}{v_M^2} \int_{\cdot}^{v_M} 4\pi v_m^2 f(v_m) dv_m$$

با جایگذاری عبارت به دست آمده به رابطه اصطکاک دینامیکی برای توزیع ذرات کروی می رسیم:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{f}_d = -4\pi \ln(\Lambda) G^2 M m(m+M) \frac{\vec{v}_M}{v_M^2} \int_{\cdot}^{v_M} v_m^2 f(v_m) dv_m}$$

به عبارتی برای اصطکاک دینامیکی رسیدیم که همواره در خلاف جهت سرعت ذره M است. همچنین شتاب ناشی از این نیرو با

جرم M متناسب است، پس هرچه جرم ذره بیشتر شود نیرو اصطکاک وارد بر آن نیز بیشتر می شود. در ادامه این رابطه را برای چند

حالت مختلف بررسی می کنیم.



بررسی رابطه برای چند حالت

v_M بسیار کوچک باشد:

در این حالت $v_M \rightarrow 0$ پس تابع توزیع در بازه انتگرال تقریباً برابر با تابع توزیع ذرات با سرعت صفر است:

$$f(v_m) \approx f(0)$$

$$\Rightarrow \int_0^{v_M} v_m f(v_m) dv_m \approx \int_0^{v_M} v_m f(0) dv_m = f(0) \int_0^{v_M} v_m dv_m = \frac{1}{3} f(0) v_M^3$$

و رابطه اصطکاک در این حالت:

$$\Rightarrow \vec{f}_d = -\frac{1}{3} \pi^2 \ln(\Lambda) G^2 M m(m+M) \frac{\vec{v}_M}{v_M^3} \times \frac{1}{3} f(0) v_M^3$$

$$\boxed{\vec{f}_d = -\frac{1}{3} \pi^2 \ln(\Lambda) G^2 M m(m+M) f(0) \vec{v}_M = -\beta \vec{v}_M}$$

رابطه اصطکاک به صورت ضریبی ثابت در سرعت تبدیل شد.

v_M بسیار بزرگ باشد:

در این حالت $v_M \rightarrow \infty$ پس با توجه به تعریف فضای فاز می توان نوشت:

$$\int_0^{v_M} 4\pi v_m^2 f(v_m) dv_m \approx \int_0^{\infty} 4\pi v_m^2 f(v_m) dv_m = n$$

$$\Rightarrow \vec{f}_d = -4\pi^2 \ln(\Lambda) G^2 M m(m+M) \frac{\vec{v}_M}{v_M^3} \times n$$

همچنین چون فرض کردیم سیستم از ذرت با جرم برابر m تشکیل شده است:

$$\rho = nm$$



$$\Rightarrow \vec{f}_d = - \frac{\epsilon \pi^\gamma \ln(\Lambda) G^\gamma (m + M) M \rho}{v_M^\gamma} \vec{v}_M$$

معمولا اصطکاک دینامیکی را بر روی اجرام با جرم زیاد بررسی می‌کنیم:

$$M \gg m \Rightarrow (m + M) \approx M$$

$$\Rightarrow \vec{f}_d = - \frac{\epsilon \pi^\gamma \ln(\Lambda) G^\gamma M^\gamma \rho}{v_M^\gamma} \hat{v}_M$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{f}_d = - \frac{C (GM)^\gamma \rho}{v_M^\gamma} \hat{v}_M}$$

$$C = \epsilon \pi^\gamma \ln(\Lambda)$$

نکته قابل توجه این است که با تحلیل ابعادی برای بدست آوردن رابطه‌ای برای اصطکاک دینامیکی دقیقا به فرمی مشابه می‌رسیم.

تابع توزیع ماکسول بولتزمان باشد:

این تابع توزیع به شکل زیر است:

$$f(v_m) = \frac{n}{(\gamma \pi \sigma^\gamma)^\gamma} e^{-\frac{v_m^\gamma}{\gamma \sigma^\gamma}}$$

$$\Rightarrow \vec{f}_d = -\epsilon \pi^\gamma \ln(\Lambda) G^\gamma M m (m + M) \frac{\vec{v}_M}{v_M^\gamma} \int_0^{v_M} v_m^\gamma \frac{n}{(\gamma \pi \sigma^\gamma)^\gamma} e^{-\frac{v_m^\gamma}{\gamma \sigma^\gamma}} dv_m$$

از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$x = \frac{v_m}{\sqrt[\gamma]{\gamma} \sigma} \Rightarrow dv_m = \sqrt[\gamma]{\gamma} \sigma dx$$

$$\Rightarrow \vec{f}_d = -\epsilon \pi^\gamma \ln(\Lambda) G^\gamma M m (m + M) \frac{\vec{v}_M}{v_M^\gamma} \frac{n}{(\gamma \pi \sigma^\gamma)^\gamma} \int_{\frac{v_M}{\sqrt[\gamma]{\gamma} \sigma}}^{\frac{v_M}{\sqrt[\gamma]{\gamma} \sigma}} \gamma \sigma^\gamma x^\gamma e^{-x^\gamma} \sqrt[\gamma]{\gamma} \sigma dx$$



$$\Rightarrow \vec{f}_d = -\epsilon\sqrt{\pi} \ln(\Lambda) G^\gamma M m n (m + M) \frac{\vec{v}_M}{v_M^\gamma} \int_{\frac{v_M}{\sqrt{\gamma}\sigma}}^{\frac{v_M}{\sqrt{\gamma}\sigma}} x^\gamma e^{-x^\gamma} dx$$

دوباره به دلیل فرض برابر بودن اجرام سیستم داریم:

$$nm = \rho$$

همچنین فرض می کنیم M بسیار بزرگ باشد. X را نیز تعریف می کنیم:

$$M \gg m \Rightarrow (m + M) \approx M$$

$$X \equiv \frac{v_M}{\sqrt{\gamma}\sigma}$$

پس رابطه اصطکاک دینامیکی:

$$\Rightarrow \vec{f}_d = -\epsilon\sqrt{\pi} \ln(\Lambda) G^\gamma M^\gamma \rho \frac{\vec{v}_M}{v_M^\gamma} \int_{\frac{v_M}{\sqrt{\gamma}\sigma}}^X x^\gamma e^{-x^\gamma} dx$$

طبق انتگرال جزء به جزء:

$$U = x \Rightarrow dU = dx$$

$$dV = x e^{-x^\gamma} dx \Rightarrow V = \int x e^{-x^\gamma} dx = -\frac{1}{\gamma} \int e^{-x^\gamma} d(-x^\gamma) = -\frac{e^{-x^\gamma}}{\gamma}$$

$$\int_{\frac{v_M}{\sqrt{\gamma}\sigma}}^X x^\gamma e^{-x^\gamma} dx = \int_{\frac{v_M}{\sqrt{\gamma}\sigma}}^X U dV = \int_{\frac{v_M}{\sqrt{\gamma}\sigma}}^X d(UV) - \int_{\frac{v_M}{\sqrt{\gamma}\sigma}}^X V dU$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{v_M}{\sqrt{\gamma}\sigma}}^X x^\gamma e^{-x^\gamma} dx = \left(-\frac{x e^{-x^\gamma}}{\gamma} \right) \Big|_{\frac{v_M}{\sqrt{\gamma}\sigma}}^X - \int_{\frac{v_M}{\sqrt{\gamma}\sigma}}^X -\frac{e^{-x^\gamma}}{\gamma} dx$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{v_M}{\sqrt{\gamma}\sigma}}^X x^\gamma e^{-x^\gamma} dx = -\frac{1}{\gamma} X e^{-X^\gamma} + \frac{1}{\gamma} \int_{\frac{v_M}{\sqrt{\gamma}\sigma}}^X e^{-x^\gamma} dx$$

اما این انتگرال حل تحلیلی ندارد، پس از تعریف تابع خطا (*error function*) استفاده می کنیم:



$$\operatorname{erf}(X) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X e^{-x^2} dx$$

$$\Rightarrow \int_0^X x^2 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} X e^{-X^2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(X)$$

$$\Rightarrow \vec{f}_d = -\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \ln(\Lambda) G^2 M^2 \rho \frac{\vec{v}_M}{v_M^2} \left(-\frac{1}{2} X e^{-X^2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(X) \right)$$

$$\Rightarrow \vec{f}_d = -\frac{1}{2} \pi \ln(\Lambda) G^2 M^2 \rho \frac{\vec{v}_M}{v_M^2} \left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}} X e^{-X^2} + \operatorname{erf}(X) \right)$$

پس رابطه اصطکاک دینامیکی در این حالت:

$$\Rightarrow \vec{f}_d = -\frac{\frac{1}{2} \pi \ln(\Lambda) G^2 M^2 \rho}{v_M^2} \left(\operatorname{erf}(X) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} X e^{-X^2} \right) \hat{v}_M$$

$$X \equiv \frac{v_M}{\sqrt{2} \sigma}$$

همان‌طور که می‌بینید به رابطه‌ای مشابه رابطه تحلیل ابعادی رسیدیم:

$$\vec{f}_d = -\frac{C' (GM)^2 \rho}{v_M^2} \hat{v}_M$$

$$C' = \frac{1}{2} \pi \ln(\Lambda) \left(\operatorname{erf}(X) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} X e^{-X^2} \right)$$

رویکردی دیگر

حال می‌خواهیم با رویکردی ساده‌تر و متفاوت رابطه اصطکاک دینامیکی را بازنویسی کنیم. در کلیت این روش ابتدا با استفاده از روابط مکانیکی مدار هذلولی، المان دیفرانسیلی تغییر سرعت ذره را بدست می‌آوریم. سپس با فرض ساختار همگن رابطه نهایی



اصطکاک دینامیکی را استخراج می کنیم. فرض کنید ذره‌ای با جرم نسبتاً کم m از فاصله دور با سرعت نسبی u و پارامتر برخورد b به جسم پرجرمی با جرم M نزدیک می‌شود.

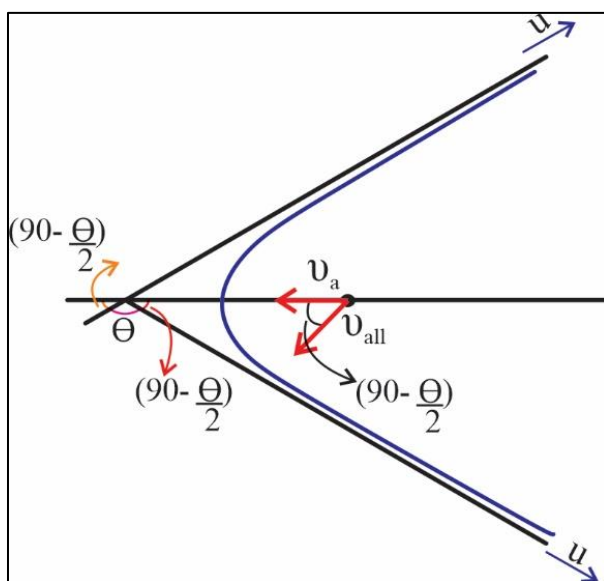
در اثر برهم‌کنش گرانشی این ذرات با جرم بزرگتر سرعت جسم بزرگتر تغییر می‌کند این مقدار را برحسب u و θ زاویه انحراف جسم کوچکتر بدست می آوریم. (با توجه به فرض قبلی جرم اصلی که اصطکاک را برای آن بررسی می کنیم بسیار سنگین تر از سایر اجرام است یعنی: $M \gg m$). این تغییر سرعت را v_a می نامیم و برای بدست آوردن سرعت از پایستگی تکانه خطی استفاده می‌کنیم زیرا سیستم تحت هیچ نیروی خارجی ای نیست.

$$\vec{P} = const \Rightarrow$$

$$\gamma m u \cos\left(90 - \frac{\theta}{\gamma}\right) = M v_a$$

$$M v_a = \gamma m u \sin \frac{\theta}{\gamma}$$

$$v_a = \frac{\gamma m}{M} u \sin \frac{\theta}{\gamma}$$



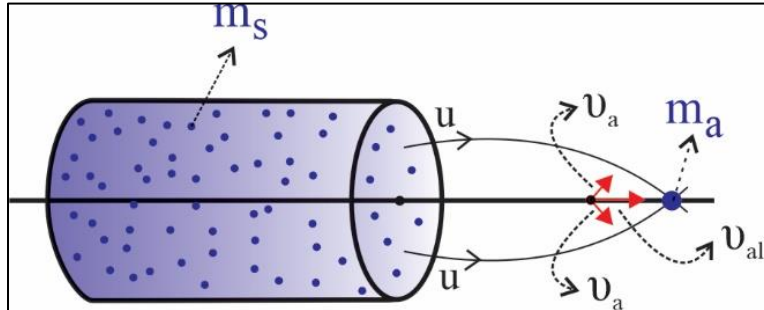
حال مقدار سرعتی که در راستای سرعت اولیه ایجاد می شود را بدست می آوریم و آن را $v_{a\ eff}$ می نامیم. کافیت مولفه رابطه قبل را در راستای سرعت اولیه بیابیم یعنی آن را تصویر کنیم:



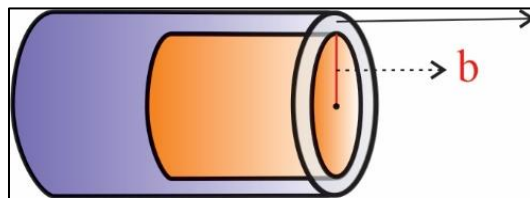
$$v_{a\,eff} = \frac{\gamma m}{M} u \sin \frac{\theta}{\gamma} \cos \left(90^\circ - \frac{\theta}{\gamma} \right) = \frac{\gamma m}{M} u \sin^{\gamma} \frac{\theta}{\gamma}$$

$$\sin^{\gamma} \frac{\theta}{\gamma} = \frac{1 - \cos \theta}{\gamma}$$

$$v_{a\,eff} = \frac{mu}{M} (1 - \cos \theta)$$



حال فرض ساختار همگن را تاثیر می دهیم و به سراغ المان دیفرانسیلی تغییر سرعت ذره می رویم. با فرض اینکه چگالی عددی ذرات n باشد، این المان دیفرانسیلی تغییر سرعت ذره همان مقدار تغییر سرعت M در بازه زمانی dt در اثر برهم کنش گرانشی با ذراتی که دارای پارامتر برخورد بین b تا $b + db$ هستند است. ابتدا باید المان حجمی که برای مجموعه ذرات با پارامتر برخورد خاص به دلیل حرکت نسبی جاروب می شود را بدست آوریم:



$$ds = \pi((b + db)^{\gamma} - b^{\gamma})$$

$$ds = \gamma \pi b db$$

$$dV = \gamma \pi b db u dt \rightarrow dN = n dV$$

حال با توجه به المان حجم و تغییر سرعتی که هر ذره باعث می شود تغییر سرعت کل را استخراج می کنیم.

$$dv_{tot} = v_{all} dN, \quad v_{a\,eff} = \frac{mu}{M} (1 - \cos \theta)$$

$$dv_{tot(b,b+db)} = \frac{mu}{M} \underbrace{(1 - \cos \theta)}_{\gamma \sin^{\gamma} \frac{\theta}{\gamma}} \times \gamma \pi n b u db dt$$



$$dv_{tot(b,b+db)} = \frac{\epsilon \pi n m u^{\gamma}}{M} \sin^{\gamma} \frac{\theta}{\gamma} b db dt$$

مشاهده می‌شود که رابطه فوق دارای دو دیفرانسیل پارامتر برخوردی و زمانی است. در نظر بگیرید شعاع کپکشان مذکور R و چگالی آن ρ است.

حال با در ادامه فرض قبلی یک مرتبه از المان سرعتمان انتگرال گیری می‌کنیم. در این بخش انتگرال را روی دیفرانسیل پارامتر برخوردی می‌گیریم که حاصل آن تغییر سرعت M را در بازه t تا dt است. برای این بخش ابتدا باید پارامترهای متغیر دیگر را بر حسب پارامتر برخورد بنویسیم که در اینجا فقط θ است. به سراغ معادلات مدار هذلولی می‌رویم:

$$\theta = \gamma \theta_{\infty} - \pi, \quad a = \frac{GM}{u^{\gamma}}$$

$$e^{\gamma} - 1 = \frac{b^{\gamma} u^{\epsilon}}{(GM)^{\gamma}} \rightarrow e = \sqrt{1 + \left(\frac{bu^{\gamma}}{GM}\right)^{\gamma}}$$

$$\cos \theta_{\infty} = -\frac{1}{e}, \quad \theta_{\infty} = \frac{\pi}{\gamma} + \frac{\theta}{\gamma} \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{\gamma} + \frac{\theta}{\gamma}\right) = -\sin \frac{\theta}{\gamma}$$

$$\sin \frac{\theta}{\gamma} = \frac{1}{e} \rightarrow \sin^{\gamma} \frac{\theta}{\gamma} = \frac{1}{e^{\gamma}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{bu^{\gamma}}{GM}\right)^{\gamma}}$$

حالا باید از رابطه تغییر سرعت بر روی دیفرانسیل پارامتر برخورد از صفر تا شعاع کپکشان انتگرال گیری کنیم:

$$dv_{tot} = \frac{\epsilon \pi n m u^{\gamma}}{M} dt \int_{\cdot}^R \sin^{\gamma} \frac{\theta}{\gamma} b db$$

برای انتگرال گیری کل مخرج را یک متغیر جدید در نظر می‌گیریم:

$$dv_{tot} = \frac{\epsilon \pi n m u^{\gamma}}{M} dt \int_{\cdot}^R \frac{b db}{\underbrace{1 + \left(\frac{bu^{\gamma}}{GM}\right)^{\gamma}}_x}$$

$$x \equiv 1 + \left(\frac{bu^{\gamma}}{GM}\right)^{\gamma}$$

$$dx = \gamma \left(\frac{u^{\gamma}}{GM}\right)^{\gamma} b db \rightarrow b db = \frac{dx}{\gamma \left(\frac{u^{\gamma}}{GM}\right)^{\gamma}}$$



$$dv_{tot} = \frac{\pi n m u^r}{M} \times \frac{dt}{\left(\frac{u^r}{GM}\right)^r} \int_{x.}^x \frac{dx}{x}$$

$$dv_{tot} = \frac{\pi m u^r n (GM)^r}{M u^r} dt \ln(x) \Big|_{x.}^x$$

$$dv_{tot} = \frac{\pi m n G^r M}{u^r} dt \ln \left(1 + \left(\frac{b u^r}{GM} \right)^r \right) \Big|_{x.}^R$$

$$dv_{tot} = \frac{\pi m n G^r M}{u^r} dt \ln \left(1 + \left(\frac{R u^r}{GM} \right)^r \right)$$

$$nm = \rho$$

$$dv_{tot} = \frac{\pi \rho G^r M}{u^r} dt \ln \left(1 + \left(\frac{R u^r}{GM} \right)^r \right)$$

حال رابطه اصطکاک دینامیکی وارد به جرم M را محاسبه می کنیم. از قانون دوم نیوتون استفاده می کنیم یعنی از تغییر سرعت شتاب را بدست می آوریم و سپس نیرو. باقی کارها صرفا ساده سازی است. (فرض کنید خروج از مرکز مدار e_{max} است).

$$R = b_{max} \quad , \quad b_{max} = a \sqrt{e_{max}^r - 1}$$

$$dv_{tot} = \frac{\pi \rho G^r M}{u^r} \ln \left(1 + \left(\frac{b_{max}}{GM} \right)^r \right) dt$$

$$F_d = M \frac{dv_{tot}}{dt} = \frac{\pi \rho G^r M^r}{u^r} \ln \left(1 + \frac{b_{max}^r}{\left(\frac{GM}{u^r} \right)^r} \right)$$

$$\left(\frac{GM}{u^r} \right) = a \quad , \quad \frac{b_{max}^r}{a^r} = e_{max}^r - 1$$

$$F_d = \frac{\pi \rho G^r M^r}{u^r} \ln(1 + e_{max}^r - 1)$$

$$\Rightarrow F_d = \pi \ln(e_{max}) \frac{\rho G^r M^r}{u^r}$$

و در اینجا صریحا رابطه ای برای اصطکاک دینامیکی وارد به جرم M بدست آوردیم که با نتیجه تحلیل ابعادی نیز همخوانی دارد. در ادامه برخی از نتایج اصطکاک دینامیکی بررسی شده است.



اثرات اصطکاک دینامیکی:

در این بخش می‌خواهیم بعضی از اثرات اصطکاک دینامیکی بر روی تحول کهکشان را بررسی کنیم.

(۱) سقوط سیاهچاله‌ها:

در مرکز اکثر کهکشان‌ها سیاهچاله‌های بسیار سنگینی با اجرامی در حدود $10^6 M_{sun}$ تا $10^9 M_{sun}$ وجود دارند. پرسشی که مطرح می‌شود این است که آیا چنین سیاهچاله‌هایی می‌توانند در جاهای دیگر کهکشان وجود داشته باشند که رصد آن‌ها دشوارتر است؟ باتوجه به این که اثر اصطکاک دینامیکی برای اجرام با جرم بزرگ‌تر بیشتر است، اثر این نیرو را بر سیاهچاله‌ای به جرم M که در حال حرکت در مدار دایره‌ای با شعاع r است، بررسی می‌کنیم. باتوجه به این که سرعت حرکت مدار دایروی برای اکثر کهکشان‌ها ثابت است برای پروفایل چگالی داریم:

$$\rho(r) = \frac{v_c^2}{4\pi G r^2}$$

که $v_c = \sqrt{2}\sigma$ سرعت ثابت حرکت مدار دایروی است. به دلیل اصطکاک دینامیکی، گشتاور به سیاهچاله وارد می‌شود که باعث تغییر تکانه زاویه‌ای آن می‌شود. فرض می‌کنیم در هر لحظه سیاهچاله در یک مدار دایروی باشد. ($r\Omega = v_c$)

$$L = I\Omega = Mr^2\Omega = Mrv_c$$

$$\frac{dL}{dt} = Mv_c \frac{dr}{dt} = \tau$$

همچنین گشتاور در خلاف جهت تکانه زاویه‌ای وارد می‌شود:

$$\tau = |\vec{r} \times \vec{F}_d| = r \times -\frac{4\pi \ln(\Lambda) G^2 M^2 \rho}{v_M^2} \left(\text{erf}(X) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} X e^{-X^2} \right)$$

همچنین $v_M = v_c$ و $X = \frac{v_c}{\sqrt{2}\sigma} = 1$ در این پروفایل چگالی $\sqrt{2}\sigma$ سرعت حرکت مدار دایروی است.

$$\Rightarrow Mv_c \frac{dr}{dt} = -\frac{4\pi \ln(\Lambda) G^2 M^2 \rho}{v_c^2} r \left(\text{erf}(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \right)$$

$$\Rightarrow Mv_c \frac{dr}{dt} = -0.428 \times \frac{4\pi \ln(\Lambda) G^2 M^2 \rho}{v_c^2} r \times \frac{v_c^2}{4\pi G r^2}$$

$$\Rightarrow r dr = -0.428 \ln(\Lambda) \frac{GM}{v_c} dt$$



باتوجه به این رابطه شعاع مداری سیاهچاله به مرور کم می‌شود و به عبارتی سقوط می‌کند. با انتگرال گیری از این رابطه مدت زمان سقوط را محاسبه می‌کنیم.

$$\Rightarrow \int_{r_i}^{\cdot} r dr = \int_{\cdot}^{t_{fric}} -0.428 \ln(\Lambda) \frac{GM}{v_c} dt$$

$$\frac{r_i^2}{2} = 0.428 \ln(\Lambda) \frac{GM}{v_c} t_{fric}$$

$$\Rightarrow t_{fric} = \frac{1.17}{\ln(\Lambda)} \frac{v_c r_i^2}{GM}$$

همچنین باتوجه به رابطه $t_{cross} \approx \frac{r_i}{v_c}$ و جرم در شعاع r داریم:

$$M(r) = \int \pi r'^2 \rho(r') dr' = \int_{\cdot}^r \pi r'^2 \times \frac{v_c^2}{4\pi G r'^2} dr'$$

$$\Rightarrow M(r) = \frac{v_c^2 r}{G}$$

$$\frac{t_{fric}}{t_{cross}} = \frac{1.17}{\ln(\Lambda)} \frac{v_c r_i^2}{GM} \times \frac{v_c}{r_i} = \frac{1.17}{\ln(\Lambda)} \frac{v_c^2 r_i}{GM}$$

$$\Rightarrow \frac{t_{fric}}{t_{cross}} = \frac{1.17}{\ln(\Lambda)} \frac{M(r_i)}{M}$$

برای سیاهچاله‌ای به جرم $10^8 M_{sun}$ و شعاع مداری اولیه $5 kpc$ ، $\ln(\Lambda)$ و سپس مدت زمان سقوط را تخمین می‌زنیم:

$$\Lambda \equiv \frac{b_{max}}{b_{min}} \approx \frac{R_{GLX}}{\frac{2G(M+m)}{v^2}}$$

$$v \approx 200 \frac{km}{s}, M+m \approx M = 10^8 M_{sun}, R_{GLX} \approx 5 kpc$$

$$\Rightarrow \ln(\Lambda) \approx 6.5$$

$$\Rightarrow t_{fric} \approx 2 Gyr$$

که این مدت در مقیاس کهکشانی بسیار کوتاه است و سیاهچاله به سرعت به مرکز کهکشان می‌رسد. برای سیاهچاله پرجرمی تقریباً در فاصله $10 kpc$ این مدت برابر سن کیهان است. همچنین اگر مدار سیاهچاله بیضوی باشد، از نواحی با چگالی بیشتر که نیروی اصطکاک در آن‌ها بیشتر است می‌گذرد و زودتر سقوط می‌کند. نتیجه این است که سیاهچاله‌هایی که در فواصل کمتر از $10 kpc$



به وجود آمده‌اند، همه در زمانی کمتر از سن کیهان به مرکز کهکشان سقوط کرده‌اند. پس سیاهچاله‌های پر جرم باید در مرکز کهکشان رصد شوند، مگر این که در نواحی دوردست هاله باشند.

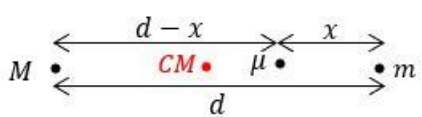
۲) بلعیده شدن کهکشان‌های کوتوله:

معمولاً چندین کهکشان کوتوله (کوچک)، کهکشان‌های بزرگتر را همراهی می‌کنند. این کهکشان‌های کوتوله تحت پتانسیل کهکشان میزبان (بزرگ) حرکت می‌کنند و نیروی اصطکاک دینامیکی ناشی از ستاره‌های کهکشان میزبان به آن‌ها وارد می‌شود. هم‌چنین نیروهای کشندی ناشی از کهکشان میزبان ستاره‌های کهکشان کوتوله را به مرور زمان از آن می‌کند. (از قید گرانشی کهکشان کوتوله رها می‌شوند). کهکشان کوتوله در حال از دست دادن ستاره‌هایش مارپیچی به‌سوی مرکز کهکشان میزبان می‌زنند و پس از مدتی به طور کامل از هم‌گسیخته می‌شود. این فرآیند باعث ادغام دو کهکشان می‌شود، و یا به عبارتی دیگر کهکشان میزبان، کهکشان کوتوله را می‌بلعد. این اتفاق برای ابرهای ماژلانی که دو کهکشان کوتوله‌ای هستند که به دور راه‌شیری می‌گردند، هم اتفاق می‌افتد و پس از مدتی با راه‌شیری ادغام خواهد شد. در ادامه با مدل‌سازی این اتفاق را بررسی می‌کنیم:

به دلیل نیروهای کشندی ناشی از کهکشان میزبان ستاره‌های کهکشان کوتوله از آن کنده می‌شوند و از قید گرانش آن می‌گریزند، پس جرم کهکشان کوتوله با گذشت زمان تغییر می‌کند. می‌توان به جای از دست رفتن جرم فرض کرد که چگالی کهکشان کوتوله ثابت است، و شعاع آن تغییر می‌کند. شعاع کهکشان کوتوله را مساوی با شعاع ژاکوبی (شعاع روچ) آن در نظر می‌گیریم.

دو جرم نقطه‌ای m و M را در نظر می‌گیریم، که حول مرکز جرمشان در مدار دایروی حرکت می‌کنند. فاصله این دو جرم از یکدیگر برابر d است. فرض می‌کنیم جرم بسیار کوچک μ که اثری بر روی مدار m و M نمی‌گذارد، در فاصله x از m بر روی خط واصل m و M قرار گرفته است. معادله‌ای به شکل $f(x, d, m, M) = 0$ می‌نویسیم، به‌طوری که اگر برقرار باشد، μ بر روی خط واصل m و M باقی بماند.

باتوجه به شکل زیر معادلات دینامیکی μ را می‌نویسیم. هم‌چنین می‌دانیم سرعت زاویه‌ای چرخش این سیستم برابر:



$$\Omega = \sqrt{\frac{G(M+m)}{d^3}}$$

$$a_\mu = -\frac{GM}{(d-x)^2} + \frac{Gm}{x^2}$$

برای این که μ همواره بر روی این خط باقی بماند، باید در مداری دایروی حول مرکز جرم m و M با سرعت زاویه‌ای Ω بچرخد. از دید مرکز جرم:

$$m\vec{r}_m + M\vec{r}_M = 0, |\vec{r}_M - \vec{r}_m| = d$$



$$\vec{r}_m = -\frac{M}{m}\vec{r}_M \Rightarrow \left| \vec{r}_M + \frac{M}{m}\vec{r}_M \right| = d$$

$$\Rightarrow r_M = d \frac{m}{m+M}$$

$$r_\mu = (d-x) - r_M = (d-x) - d \frac{m}{m+M}$$

$$r_\mu = \left(d \frac{M}{m+M} - x \right)$$

برای حرکت در مدار دایره‌ای:

$$a_\mu = -r_\mu \Omega^2 = -\left(d \frac{M}{m+M} - x \right) \frac{G(M+m)}{d^3}$$

با جایگذاری در معادله نیرو:

$$\Rightarrow -\frac{GM}{(d-x)^2} + \frac{Gm}{x^2} = -\left(d \frac{M}{m+M} - x \right) \frac{G(M+m)}{d^3}$$

با ضرب هر دو طرف در $\frac{d^3}{GM}$ و کمی ساده‌سازی:

$$\Rightarrow f(x, d, m, M) = -\left(1 - \frac{x}{d}\right)^{-2} + \left(\frac{m}{M}\right)\left(\frac{x}{d}\right)^{-2} + \left(\left(1 + \frac{m}{M}\right)^{-1} - \frac{x}{d}\right)\left(1 + \frac{m}{M}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x, d, m, M) = 1 - \left(\frac{x}{d}\right)\left(1 + \frac{m}{M}\right) + \left(\frac{m}{M}\right)\left(\frac{x}{d}\right)^{-2} - \left(1 - \frac{x}{d}\right)^{-2} = 0}$$

شعاع ژاکوبی طبق تعریف فاصله‌ای از جرم m است، که جرم کوچکی که در آن نقطه قرار دارد، در آستانه فرار از قید گرانشی m باشد. این شعاع دقیقاً همان x است. جرم M را کهکشان بزرگتر، m کهکشان کوتوله d فاصله دو کهکشان و x را فاصله ستاره‌های کهکشان کوتوله از آن در نظر می‌گیریم. می‌توانیم فرض کنیم $\frac{x}{d} \ll 1$ و $\frac{m}{M} \ll 1$ باشد. با تقریب $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ داریم:

$$f(x, d, m, M) \approx 1 - \left(\frac{x}{d}\right) + \left(\frac{m}{M}\right)\left(\frac{x}{d}\right)^{-2} - \left(1 + 2\frac{x}{d}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2\frac{x}{d} = \left(\frac{m}{M}\right)\left(\frac{x}{d}\right)^{-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{j,m} = x = \left(\frac{m}{2M}\right)^{\frac{1}{3}} d}$$

باتوجه به تخت شدن سرعت حرکت مدار دایروی در کهکشان‌های با توزیع کروی داریم:



$$-\frac{v^2}{r} = -\frac{GM(r)}{r^2} \Rightarrow M(r) = \frac{v^2 r}{G}$$

$$\rho(r) = \frac{dM}{dr} \frac{1}{4\pi r^2} = \frac{v^2}{G} \frac{1}{4\pi r^2}$$

که r از مرکز هر کهکشان برای یافتن چگالی آن کهکشان سنجیده شده است. با توجه به تعریف $v_c = \sqrt{2}\sigma$ برای سرعت حرکت در مدار دایروی داریم:

$$\rho_{sat} = \frac{\sigma_{sat}^2}{2\pi G r^2}$$

و کهکشان میزبان:

$$\rho_{GLX} = \frac{\sigma_{GLX}^2}{2\pi G r^2}$$

با توجه به رابطه اصطکاک دینامیکی داریم:

$$\vec{f}_d = -\frac{4\pi \ln(\Lambda) G^2 M^2 \rho}{v_M^2} \left(\text{erf}(X) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} X e^{-X^2} \right) \hat{v}_M$$

فرض می‌کنیم کهکشان کوتوله در هر لحظه در مدار دایروی باشد:

$$v_{c,m} = \sqrt{2}\sigma_{GLX} \Rightarrow X = \frac{v_{c,m}}{\sqrt{2}\sigma_{GLX}} = 1$$

پس با توجه به جواب تابع خطا و جایگذاری سرعت کهکشان کوتوله و تابعیت چگالی میزبان برای گشتاور وارد شده به کهکشان کوتوله داریم: (جرم کهکشان کوتوله m در نظر گرفته شده است.)

$$\tau = |\vec{r} \times \vec{F}_d| = r \times -\frac{4\pi \ln(\Lambda) G^2 m^2 \rho}{v_M^2} \left(\text{erf}(X) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} X e^{-X^2} \right)$$

$$\Rightarrow \tau = -\frac{4\pi \ln(\Lambda) G^2 m^2 \rho}{2\sigma_{GLX}^2} r \left(\text{erf}(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \right)$$

$$\Rightarrow \tau = -0.428 \times \frac{4\pi \ln(\Lambda) G^2 m^2}{2\sigma_{GLX}^2} r \times \frac{\sigma_{GLX}^2}{2\pi G r^2}$$

$$\Rightarrow \tau = -0.428 \ln(\Lambda) \frac{G m^2}{r}$$

حال رابطه‌ای برای جرم کهکشان کوتوله بر حسب r بدست می‌آوریم: (r فاصله مرکز کوتوله از میزبان و R شعاع کهکشان کوتوله است.)



$$R = \left(\frac{m}{\gamma M}\right)^{\frac{1}{\gamma}} r, m = \frac{\gamma \sigma_{sat} R}{G}$$

$$\Rightarrow m = \frac{\gamma \sigma_{sat}}{G} \left(\frac{m}{\gamma M}\right)^{\frac{1}{\gamma}} r$$

همچنین M جرم کهکشان میزبان تا شعاع r است.

$$\Rightarrow m^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \frac{\gamma \sigma_{sat}}{G} \left(\frac{1}{\gamma \left(\frac{\gamma \sigma_{GLX} r}{G} \right)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} r$$

$$\Rightarrow m^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \frac{\gamma \sigma_{sat}}{G^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} (\epsilon \sigma_{GLX})^{\frac{1}{\gamma-1}}} r^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\Rightarrow m = \frac{\sqrt{\lambda} \sigma_{sat}}{\sqrt{\epsilon} G \sigma_{GLX}} r$$

$$\Rightarrow m = \sqrt{\frac{\epsilon}{\lambda}} \frac{\sigma_{sat} r}{G \sigma_{GLX}}$$

حال رابطه‌ای برای مدت زمان سقوط کهکشان کوتوله به دست می‌آوریم. رابطه تکانه زاویه‌ای و گشتاور وارد بر کهکشان کوتوله را می‌نویسیم و سرعت برابر سرعت حرکت در مدار دایروی در کهکشان میزبان است و جرم آن را از رابطه بالا جایگذاری می‌کنیم:

$$L = mrv = \sqrt{\frac{\epsilon}{\lambda}} \frac{\sigma_{sat} r}{G \sigma_{GLX}} \times r \times \sqrt{\epsilon} \sigma_{GLX}$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon}} \frac{\sigma_{sat} r^{\gamma}}{G} \Rightarrow \dot{L} = \gamma \sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon}} \frac{\sigma_{sat}}{G} r \dot{r}$$

$$\tau = -0.428 \ln(\lambda) \frac{G m^{\gamma}}{r} = -0.428 \ln(\lambda) \frac{G}{r} \frac{\epsilon}{\gamma} \frac{\sigma_{sat}^{\epsilon} r^{\gamma}}{G^{\gamma} \sigma_{GLX}^{\gamma}}$$

$$\dot{L} = \tau \Rightarrow \gamma \sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon}} \frac{\sigma_{sat}}{G} r \dot{r} = -0.428 \ln(\lambda) \frac{\epsilon}{\gamma} \frac{\sigma_{sat}^{\epsilon} r^{\gamma}}{G^{\gamma} \sigma_{GLX}^{\gamma}}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = -0.175 \ln(\lambda) \frac{\sigma_{sat}}{\sigma_{GLX}^{\gamma}}$$



از عبارت بالا انتگرال می گیریم. فرض می کنیم فاصله اولیه کهکشان کوتوله r_i بوده است.

$$\Rightarrow \int_{r_i}^{\cdot} dr = \int_{\cdot}^{t^*} -0.175 \ln(\Lambda) \frac{\sigma_{sat}^2}{\sigma_{GLX}^2} dt$$

$$\Rightarrow t^* = \frac{\sigma_{GLX}^2}{0.175 \ln(\Lambda) \sigma_{sat}^2} r_i$$

با مقادیر $\sigma_{GLX} = 200 \frac{km}{s}$, $\sigma_{sat} = 100 \frac{km}{s}$ برای سقوط LMC در راهشیری داریم:

$$\Lambda \approx \frac{R_{GLX} v_M^2}{2GM} = \frac{R_{GLX} \sigma_{GLX}^2}{GM}$$

همچنین $M = 10^{10} M_{sun}$ و $R_{GLX} \approx 15 kpc$ پس:

$$\Lambda = 7.86$$

هم چنین $r_i \approx 45 kpc$

$$t_{LMC}^* = 4.89 Gyr$$

پس با این تئوری پس از حدود 4.89 میلیارد سال کهکشان LMC توسط راهشیری بلعیده می شود.

(۳) اثر اصطکاک بر روی میله های کهکشان:

مثال دیگری برای بررسی اثر اصطکاک دینامیکی میله های کهکشان ها است. برای یک تخمین ساده، می توانیم فرض کنیم میله شبیه دمبلی با دو جرم M در فاصله d از مرکز کهکشان باشد. همچنین معمولا در کهکشان های با میله های قوی جرم M تقریبا برابر جرم کهکشان تا شعاع r است و باتوجه به معادلات بدست آمده در بخش بررسی سیاهچاله ها، میله باید به سرعت تکانه زاویه ایش را از دست بدهد و عملا سرعت چرخش صفر شود و از حرکت بایستد.

اما این مدل بیش از حد ساده شده است. برای نزدیک تر کردن این مدل به واقعیت باید: (۱) پتانسیل گرانشی یک میله با جرم نقطه ای متفاوت است و باید اثرات شکل میله را در نظر گرفت. (۲) برخلاف اکثر اجرام که با کهکشان برهمکنش دارند، میله ها اجرامی طویل و بزرگ هستند که شکل رابطه اصطکاک برای آن ها متفاوت است. (۳) اصطکاک دینامیکی، گشتاوری به میله وارد می کند، اما ما واکنش میله نسبت به این گشتاور را نمی دانیم. آیا میله سرعتش بیشتر می شود یا کمتر؟ طول میله افزایش پیدا می کند یا تغییر نمی کند؟



بررسی آنالیزی دقیق اثر اصطکاک بر روی میله کار به مراتب دشواری است و راه حل آن استفاده از اختلال و تقریب است. اما می توانیم از شبیه سازی های کامپیوتری استفاده کنیم. نتایج این شبیه سازی ها حاکی از این است که هاله گشتاور بزرگی ناشی از اصطکاک به میله وارد می کند، و این باعث می شود سرعت چرخش میله به سرعت کم شده ولی روی خود میله تاثیری نمی گذارد.

این شبیه سازی ها بیان می کنند که اگر در نواحی داخلی کهکشان توزیع هاله ماده تاریک حضور داشته باشد، میله ها باید به کندی بچرخند. رصدها با این نتایج مغایرت دارند و در اکثر کهکشان ها میله ها با سرعت نسبتا بالایی می چرخند. برای حل این مشکل باید از مدل دیسک بی نهایت برای کهکشان ها استفاده کنیم که در این حالت جرم هاله در چند کیلوپارسکی مرکز که برهم کنش با میله بیشینه است، ناچیز باشد.

(۴) خوشه های کروی:

این سیستم ها تغییرات قابل توجهی در مدار خود ناشی از گشتاور اصطکاک دینامیکی تجربه می کنند. محاسبات برای خوشه های

کروی مشابه سیاهچاله ها است. برای خوشه ای به جرم $10^5 M_{sun}$ با فرض $v_c = 200 \frac{km}{s}$ تخمین می زنیم:

$$t_{fric} = \frac{1.17}{\ln(A)} \frac{v_c r_i^2}{GM} \approx 20.92 \text{ Gyr} \left(\frac{r_i}{1 \text{ kpc}} \right)^2$$

که این مدت زمان قابل مقایسه با سن کیهان است و هنوز خیلی از خوشه های راهشیری کاملا سقوط نکرده اند. همچنین از فاصله خوشه های کروی از مرکز کهکشان های مختلف می توان حد بالایی برای سن کهکشان ارائه داد.