

آزمونی از تست های مثلثات از مباحث مختلف ریاضی (زمان پیشنهادی ۷۰ دقیقه)

۱- ساده شده ی کسر $\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^4 \theta}$ کدام است؟

- (۱) $\cos^{-2} 2\theta$ (۲) $\sin^{-2} 2\theta$ (۳) $\cos^{-4} 2\theta$ (۴) $\sin^{-4} 2\theta$
- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \text{عبارت مورد نظر} &= \frac{\frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta}}{\cos^2 \theta - \cos^4 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta (\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta))} = \frac{1}{\sin^4 \theta \cdot \cos^4 \theta} \\ &= \frac{16}{\sin^4 2\theta} = 16 \sin^{-4} 2\theta \end{aligned}$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۱

۲- اگر $\alpha + \beta = 135^\circ$ و $\tan(\alpha - \beta) = \frac{3}{4}$ مقدار کسر $\frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}$ کدام سات؟

(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{4}{3}$

گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta} &= \frac{(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)}{(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)} \\ &= \frac{\cos(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)} = \cot(\alpha - \beta) \cdot \cot(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

حال با توجه به داده های تست، مقدار عبارت را به دست می آوریم:

$$\left. \begin{aligned} \tan(\alpha - \beta) = \frac{3}{4} &\rightarrow \cot(\alpha - \beta) = \frac{4}{3} \\ \alpha + \beta = 135^\circ &\rightarrow \cot(\alpha + \beta) = \cot(135^\circ) = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \cot(\alpha + \beta) \cdot \cot(\alpha - \beta) = \frac{4}{3(-1)} = -\frac{4}{3}$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۴

۳- اگر $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{5}$ باشد، $\tan^2 \alpha$ چه قدر است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{2}{4}$ (۴) $\frac{2}{5}$

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. روش اول: با توجه به رابطه ی $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$ داریم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \alpha}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5 - 5 \tan \alpha = 1 + \tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{36}{15} = \frac{12}{5} = \frac{2}{4}$$

آزمونی از تست های مثلثات از مباحث مختلف ریاضی (زمان پیشنهادی ۷۰ دقیقه)

روش دوم: با توجه به رابطه $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ ، داریم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{5} \Rightarrow \tan\left(2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) = \frac{2 \times \frac{1}{5}}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2}{\frac{24}{25}} = \frac{50}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \frac{5}{12} \xrightarrow{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta} \cot 2\alpha = \frac{5}{12} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{1}{\cot 2\alpha} = \frac{12}{5} = 2.4$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۸

۴- جواب کلی، معادله ی مثلثاتی $2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x)$ کدام است؟

$$2k\pi \pm \frac{2\pi}{6} \quad (۴) \quad 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (۳) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۲) \quad k\pi - \frac{\pi}{3} \quad (۱)$$

$$2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x)$$

$$\Rightarrow 2 \cos 2x = 4 \sin x \cot x + \cot x \tan x$$

$$\Rightarrow 2(2 \cos^2 x - 1) = 4 \cos x + 1 \Rightarrow 4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (2 \cos x + 1)(2 \cos x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{3}{2} \text{ غ ق ق} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۲

۵- نقاط پایانی کمان جواب های معادله ی $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$ بر روی دایره مثلثاتی رأس های کدام چند ضلعی است؟

(۴) مثلث متساوی الساقین

(۳) مثلث قائم الزاویه

(۲) مستطیل

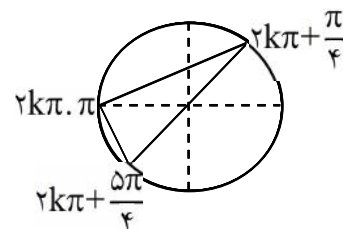
(۱) مربع

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = 1 - \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \sin^2 x \Rightarrow \cos x = \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{\cos x \neq 1} \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \\ \sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$



دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۱

۶- ناظری به فاصله ی ۳۵ متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه ای قرار دارد، ایستاده است. زاویه ی رویت انتها و ابتدای مجسمه با سطح افق 40° و 45° درجه است. ارتفاع مجسمه کدام است؟ ($\tan 40^\circ = 0.8$)

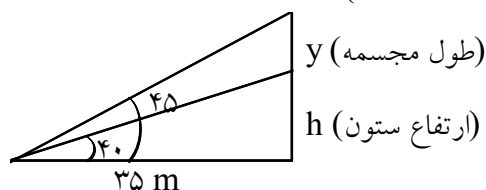
$\frac{7}{2}$ (۴)

۷ (۳)

$\frac{6}{4}$ (۲)

۶ (۱)

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.



$$\tan 45 = \frac{y+h}{35} \Rightarrow \frac{y+h}{35} = 1 \Rightarrow y+h = 35$$

$$\Rightarrow y = 7$$

$$\tan 40 = \frac{h}{35} \Rightarrow 0.8 = \frac{h}{35} \Rightarrow h = 28$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۴

آزمونی از تست های مثلثات از مباحث مختلف ریاضی (زمان پیشنهادی ۷۰ دقیقه)

۷- در مثلث ABC با معلوم بودن ضلع $BC = 3 + \sqrt{3}$ و زاویه های $\hat{B} = 60^\circ$ و $\hat{C} = 45^\circ$ ، اندازه ی ضلع AC،

کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{2}$

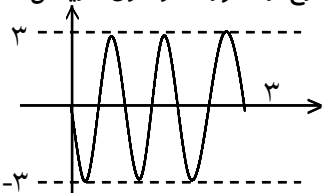
گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{B} = 60^\circ \\ \hat{C} = 45^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} = 75^\circ \Rightarrow \sin A = \sin(45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{a}{\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \frac{a}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \frac{a}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow b = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3\sqrt{2}$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۳



۸- شکل روبه رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. a.b کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) -۳ (۳) ۴/۵ (۴) ۶

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار، بیشترین مقدار تابع برابر ۳ است پس:
هم چنین با توجه به این تابع سه دوره تناوب طی کرده تا به ۳ رسیده است. پس:

$$3T = 2 \Rightarrow T = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 1 \Rightarrow |b| = 2$$

با توجه به این که مقدار تابع در بازه ی $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ نزولی است بنابراین تابع به صورت های زیر است:

$$y = -3 \sin 2\pi x \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a.b = -6$$

$$y = 3 \sin(-2\pi x) \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow ab = -6$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۲

۹- جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x$ ، به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$ (۲) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$ (۳) $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$ (۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan 3x \Rightarrow$$

$$3x = k\pi - \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow 4x = k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\div 4} x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۴

۱۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x - \tan 3x}{\sqrt{1 - \cos x}}$ برابر کدام است؟

آزمونی از تست های مثلثات از مباحث مختلف ریاضی (زمان پیشنهادی ۷۰ دقیقه)

$$(1) -2\sqrt{2}$$

$$(2) -\sqrt{2}$$

$$(3) 2$$

$$(4) 2\sqrt{2}$$

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. با قرار دادن $x = 0$ در تابع داده شده درمی یابیم حد از نوع مبهم $\frac{0}{0}$ می باشد، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \tan^3 x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \tan^3 x}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \tan^3 x}{\sqrt{2} \left| \sin \frac{x}{2} \right|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{\sqrt{2} \left| \frac{x}{2} \right|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{\sqrt{2} \left(\frac{x}{2} \right)} = -2\sqrt{2}$$

(توجه کنید که می توانستیم از هم ارزی $1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}$ در صفر، استفاده کنیم.)

دیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۵

۱۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$ کدام است؟

$$x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+$$

$$(1) -1$$

$$(2) 1$$

$$(3) -\infty$$

$$(4) +\infty$$

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. حالت ابهام این حد $\frac{0}{0}$ است. با استفاده از قاعده ی هسپیتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{-\sin x}{-\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x (1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x (1 + \sin x)}{\cos^2 x} =$$

روش دوم:

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{-\sqrt{1 - \sin^2 x}}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{-\sqrt{1 - \sin x} \times \sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{1 - \sin x} \times \sqrt{1 - \sin x}} =$$

روش سوم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{-\sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{1 - \sin x}} = \frac{-\sqrt{2}}{0^+} = -\infty$$

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$$

(دقت کنید که وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$ آن گاه $\cos x < 0$ و در نتیجه $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x}$.)

دیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۷

آزمونی از تست های مثلثات از مباحث مختلف ریاضی (زمان پیشنهادی ۷۰ دقیقه)

۱۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 5x}}{x^2}$ ، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از $\cos^P x \sim 1 - P \frac{x^2}{2}$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^{\frac{1}{2}} - (\cos 5x)^{\frac{1}{2}}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{25x^2}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2}{x^2} = 6$$

دیپستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۳

۱۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) صفر

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \text{راه اول)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \left(\frac{1}{\cos x} \right) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{راه دوم)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x + \frac{x^3}{3}\right) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

دیپستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۱

۱۴- اگر $f(x) = x + \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ ، نمودارهای دو تابع f و f^{-1} در بازه ی $[-1, 9]$ چند نقطه ی مشترک دارند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) نقطه ی مشترک ندارند.

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. $f(x) = x + \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ می دانیم $-1 \leq \cos u \leq 1$

$$\text{بنابراین: } -1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \leq 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow 1 - \frac{\pi}{4} \leq 1 + \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \leq 1 + \frac{\pi}{4} (*)$$

بنابراین با توجه به نامعادلات (*) در می یابیم $f' > 0$ و در نتیجه f اکیداً صعودی است. از طرفی در یک تابع اکیداً صعودی برای یافتن تعداد نقاط تلاقی f و f^{-1} کافی است f را با خط $y=x$ تلاقی دهیم. در نتیجه:

$$f(x) = x \Rightarrow x + \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) = x \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4}x = k\pi \Rightarrow x = 4k$$

پس مضارب صحیح ۴ در بازه ی $[-1, 9]$ جواب معادله اند که عبارت اند از $\{0, 4, 8\}$ پس تعداد نقاط مشترک f و f^{-1} ۳ تا است.

دیپستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۰

آزمونی از تست های مثلثات از مباحث مختلف ریاضی (زمان پیشنهادی ۷۰ دقیقه)

۱۵- در تابع با ضابطه $f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - 1}$ مقدار $f\left(-\frac{1}{2} f(x)\right)$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) تعریف نشده

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا دامنه ی تعریف $f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - 1}$ را تعیین می کنیم:

$$\sin \pi x - 1 \geq 0 \Rightarrow \sin \pi x \geq 1$$

مقدار سینوس نمی تواند بزرگ تر از ۱ باشد. پس تنها حالت ممکن این است که $\sin \pi x = 1$ پس:

$$\sin \pi x = 1 \Rightarrow \pi x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k + \frac{1}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

بنابراین x های دامنه ی f اعداد غیر صحیح هستند و می دانیم در این حالت $[x] + [-x] = -1$ است. پس برای هر x در دامنه ی تعریف f:

$$f(x) = \{x\} + \{-x\} + \sqrt{\sin \pi x - 1} = -1 + 0 = -1$$

$$f\left(-\frac{1}{2} f(x)\right) = f\left(-\frac{1}{2} (-1)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

عدد $\frac{1}{2}$ در دامنه ی تعریف f است و طبق توضیحات داده شده $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ می باشد.

دبستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۹

۱۶- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{1-x} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ بر روی R پیوسته است؟

(۱) $-\pi$ (۲) π (۳) ۱ (۴) هیچ مقدار a

گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. تابع $y_1 = \sin \pi x$ و تابع $y_2 = 1-x$ هر دو در R پیوسته هستند تابع $y = \frac{\sin \pi x}{1-x}$ در کل

دامنه اش یعنی $\{x | 1-x \neq 0\}$ پیوسته است. بنابراین تابع $y = \frac{\sin \pi x}{1-x}$ در کل R به جز $x=1$ پیوسته است. برای این که

تابع f در R پیوسته باشد، باید $f(1)$ را مناسب تعریف کرد. داریم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{1-x} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$a = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi(1-x))}{1-x} = \pi$$

بنابراین اگر $a = \pi$ باشد، تابع f در کل R پیوسته خواهد بود.

دبستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۸

۱۷- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ در نقطه ی $x=0$ پیوسته است؟

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) هیچ مقدار a

گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. شرط پیوستگی تابع در $x=a$ ، $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ پس برای بررسی پیوستگی تابع

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases} \text{ در } x=0 \text{ داریم:}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \end{cases} \text{ وجود ندارد:}$$

آزمونی از تست های مثلثات از مباحث مختلف ریاضی (زمان پیشنهادی ۷۰ دقیقه)

بنابراین f در $x=0$ تحت هیچ شرایطی پیوسته نخواهد بود.

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۰

۱۸- تابع با ضابطه $f(x) = (-1)^{[x]} \sin \pi x$ ، در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

- (۱) همواره پیوسته
(۲) فقط در اعداد فرد پیوسته
(۳) فقط در اعداد زوج پیوسته
(۴) از چپ پیوسته، از راست ناپیوسته
- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $k \in \mathbb{Z}$ را در نظر می گیریم:

$$\left. \begin{aligned} f(k) &= (-1)^k \sin k\pi = 0 \\ \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) &= (-1)^k \sin k\pi = 0 \\ \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) &= (-1)^{k-1} \sin k\pi = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{تابع در نقاط صحیح پیوسته است.}$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۳

۱۹- تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطه $f(x) = \sin(\pi(x - [x]))$ روی بازه $(2, 6)$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به ساختار ضابطه ای تابع داده شده، که شامل جزء صحیح می باشد، باید پیوستگی تابع f را در نقاط به طول های صحیح در بازه $(2, 6)$ بررسی کنیم. با توجه به این که در هر نقطه به طول صحیح $x = x_0 \in \mathbb{Z}$ حد راست تابع $g(x) = x - [x]$ و همچنین مقدار تابع برابر با صفر و حد چپ آن برابر با ۱ می باشد. پس در این نقاط حد چپ و حد راست تابع $f(x) = \sin(\pi g(x))$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{حد راست: } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \sin(\pi g(x)) = \sin\left(\lim_{x \rightarrow x_0^+} \pi g(x)\right) = \sin(\pi \times 0) = \sin(0) = 0 \\ \text{حد چپ: } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \sin(\pi g(x)) = \sin\left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} \pi g(x)\right) = \sin(\pi \times 1) = \sin(\pi) = 0 \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) = 0$$

لذا تابع در سراسر بازه $(2, 6)$ و حتی در کل $\mathbb{R}$ پیوسته است و نقطه ی ناپیوستگی ندارد.

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۴

۲۰- اگر $f(x) = \frac{x + \sqrt{2x}}{x-1} \cot \frac{\pi}{x}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$ کدام است؟

- (۱) $-\pi$
(۲) $-\frac{\pi}{2}$
(۳) $\frac{\pi}{2}$
(۴) π

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x + \sqrt{2x}}{x-1} \cot \frac{\pi}{x} - \frac{2 + \sqrt{4}}{2-1} \cot \frac{\pi}{2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + \sqrt{2x}) \cos \frac{\pi}{x}}{(x-1)(x-2) \sin \frac{\pi}{x}} = \text{مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + \sqrt{2x}}{(x-1) \sin \frac{\pi}{x}} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{x-2} = 4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{x-2} \xrightarrow{\text{HOP}} 4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{\pi}{x^2} \sin \frac{\pi}{x}}{1} = 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi$$

آزمونی از تست های مثلثات از مباحث مختلف ریاضی زمان پیشنهادی ۷۰ دقیقه

روش دوم: از آنجا که حد مورد نظر سوال، تعریف مشتق تابع f در $x = 2$ می باشد، پس کافی است $f'(2)$ را محاسبه کنیم، از طرف دیگر چون $f(2) = 0$ می شود یعنی $x = 2$ ریشه ی تابع f می باشد، کافی است مقدار مشتق عامل صفرشونده در $x = 2$ (یعنی $\cot \frac{\pi}{x}$) را محاسبه کرده و در مقدار مابقی تابع به ازای $x = 2$ ضرب کنیم.

$$\left(\cot \frac{\pi}{x}\right)' = \left(-\frac{\pi}{x^2}\right) \left[-\left(1 + \cot^2 \frac{\pi}{x}\right)\right] = \frac{\pi}{x^2} \left(1 + \cot^2 \frac{\pi}{x}\right)$$

$$f'(2) = \frac{\pi}{(2)^2} \left(1 + \cot^2 \frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{2 + \sqrt{2 \times 2}}{2 - 1}\right) = \pi$$

بنابراین $f'(2)$ برابر است با:

دیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۶

۲۱- اگر $f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}$ ، مقدار $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ برابر کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ به راحتی به دست می آید و داریم $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$ برای محاسبه ی $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ابتدا ضابطه ی تابع را کمی تغییر می دهیم:

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x + 1}{\sin^2 x + 1}$$

مشتق توابع به فرم $f(x) = \frac{au+b}{cu+d}$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \frac{au+b}{cu+d} \Rightarrow f'(x) = \frac{ad-bc}{(cu+d)^2} u' x$$

$$f(x) = \frac{-\sin^2 x + 1}{\sin^2 x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-1 \times 1) - (1 \times 1)}{(\sin^2 x + 1)^2} \times 2 \sin x \cos x = \frac{-2 \sin x \cos x}{(\sin^2 x + 1)^2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}}{\left(\left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^2 + 1\right)^2} = \frac{-2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1\right)^2} = \frac{-2}{9} = \frac{-8}{9}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3} - 3 \times \frac{-8}{9} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

دیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۸

۲۲- اگر $f(x) = \sin^2 \pi x - \frac{1}{2} \cos \pi x$ ، مشتق تابع $f(f(x))$ در نقطه $x = \frac{1}{3}$ چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

$\frac{\pi}{4}$ (۴)

$\frac{\pi}{8}$ (۳)

$\frac{\pi}{4}$ (۲)

$\frac{\pi}{8}$ (۱)

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = f(f(x)) \rightarrow y' = f'(x) \cdot f'(f(x)) \rightarrow y'\left(\frac{1}{3}\right) = f'\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f'\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f'\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f'\left(\frac{1}{2}\right)$$

آزمونی از تست های مثلثات از مباحث مختلف ریاضی (زمان پیشنهادی ۷۰ دقیقه)

$$f'(x) = \pi \sin(2\pi x) + \frac{\pi}{2} \sin \pi x \Rightarrow \begin{cases} f'(\frac{1}{3}) = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{2} = \frac{3\pi}{2}\sqrt{3} \\ f'(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(\frac{1}{3}) \cdot f'(\frac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{8} (3\sqrt{3})$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۹

۲۳- اگر تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} 1 + a \cos \pi x & x > 1 \\ bx^2 + x & x \leq 1 \end{cases}$ بر روی R مشتق پذیر باشد، a کدام است؟

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix}$$

گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow b + 1 = 1 + a \cos \pi \Rightarrow b = -a$$

$$f'(x) = \begin{cases} -a\pi \sin x & x > 1 \\ 2bx + 1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow -a\pi \sin x = 2b + 1 \Rightarrow 2b + 1 = 0$$

$$\Rightarrow b = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۱

۲۴- اگر $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sin(\pi x)$ شیب خط مماس بر منحنی تابع $g \circ f$ در نقطه ی تلاقی آن با محور x ها، روی بازه ی $(0, \pi)$ کدام است؟

$$\begin{matrix} -\pi & -\frac{\pi}{2} & \pi & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix}$$

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا $g \circ f$ را تشکیل می دهیم: $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\cos x) = \sin(\pi \cos x)$ در نقطه ی تلاقی $g \circ f$ با محور x ها مقدار $g \circ f(x)$ صفر می شود، پس داریم:

$$g \circ f(x) = 0 \rightarrow \sin(\pi \cos x) = 0 \rightarrow \pi \cos x = k\pi \xrightarrow{-1 \leq \cos x \leq 1} k \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow \cos x = k \quad ; \quad k = 0, 1, -1$$

اگر ۱- یا $\cos x = 1$ باشد، آن گاه معادله در بازه ی $(0, \pi)$ جواب ندارد، اما اگر $\cos x = 0$ باشد، آن گاه در فاصله ی $(0, \pi)$ ، جواب $x = \frac{\pi}{2}$ می شود پس نقطه ی تلاقی $(\frac{\pi}{2}, 0)$ است.

برای محاسبه ی شیب خط مماس کافی است مشتق را در این نقطه محاسبه کنیم:

$$(g \circ f)'(x) = (-\pi \sin x) \cdot \cos(\pi \cos x) \rightarrow (g \circ f)'(\frac{\pi}{2}) = -\pi \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos(\pi \cos \frac{\pi}{2}) =$$

$$= -\pi(\cos(0)) = -\pi$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۷

۲۵- تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه ی $f(x) = [x] \sin \pi x$ روی بازه ی $(-1, 2)$ کدام است؟

$$\begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix}$$

گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا تابع $f(x) = [x] \sin \pi x$ را در بازه ی $(-1, 2)$ به صورت چند ضابطه ای می نویسیم: با توجه به این که در بازه ی $(0, 1)$ تابع به صورت خط افقی $y = 0$ درمی آید، پس در تمام نقاط این بازه،

$$f(x) = \begin{cases} -\sin \pi x & ; -1 < x < 0 \\ 0 & ; 0 \leq x < 1 \\ \sin \pi x & ; 1 \leq x < 2 \end{cases} \quad \text{بحرانی اند.}$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۵

آزمونی از تست های مثلثات از مباحث مختلف ریاضی (زمان پیشنهادی ۷۰ دقیقه)

۲۶- نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = \cos 2x - 2 \cos x$ روی بازه $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ چگونه است؟

(۱) فاقد ماکسیمم - یک نقطه می نیمم

(۲) یک نقطه ماکسیمم - یک نقطه می نیمم

(۳) یک نقطه می ماکسیمم - دو نقطه می نیمم

(۴) دو نقطه ماکسیمم - یک نقطه می نیمم

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. باید با مشتق گیری و تعیین نقاط بحرانی تابع و آزمون مشتق اول، نقاط اکسترمم نسبی تابع را در بازه ی داده شده پیدا کنیم:

$$f(x) = \cos 2x - 2 \cos x \rightarrow f'(x) = -2 \sin 2x + 2 \sin x = -4 \sin x \cos x + 2 \sin x$$

$$f'(x) = 0$$

$$\rightarrow y' = 2 \sin x (1 - 2 \cos x) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \xrightarrow{x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} x = 0 \\ 1 - 2 \cos x = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \rightarrow x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y'	-	+	-	+	-
y	-1				-1

Min Max Min

→ یک Max نسبی و دو Min نسبی

دبستان - کنکده ها، خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۵

۲۷- مجموعه نقاطی که تقعر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + 2\sqrt{2} \cos x$; $0 \leq x \leq 2\pi$ رو به بالا باشد، در کدام بازه است؟

$$\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \quad (۴)$$

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right) \quad (۳)$$

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \quad (۲)$$

$$\left(0, \frac{3\pi}{4}\right) \quad (۱)$$

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. از تابع مشتق دوم می گیریم:

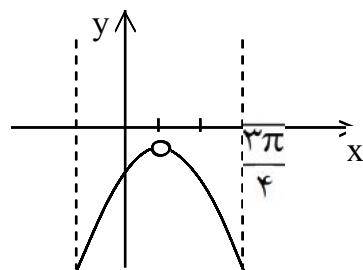
$$f(x) = x^2 + 2\sqrt{2} \cos x \Rightarrow f'(x) = 2x - 2\sqrt{2} \sin x \Rightarrow f''(x) = 2 - 2\sqrt{2} \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

در بازه $[0, 2\pi]$ جواب ها عبارت اند از: $x = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ حال مشتق دوم را تعیین علامت می کنیم:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
f''	+	-	+	-

بنابراین در بازه $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ جهت تقعر تابع رو به بالاست.

دبستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۰



۲۸- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \frac{a \sin x - \cos x}{b + \cos 2x}$ است. a کدام است؟

(۲) ۱

(۱) $-\sqrt{2}$

(۴) ۲

(۳) $\sqrt{2}$

گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$x = \frac{3\pi}{4} \text{ ریشه ی مخرج} \Rightarrow b + \cos \frac{3\pi}{4} = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{a \sin x - \cos x}{\cos 2x}$$

ریشه های مخرج عبارت اند از:

آزمونی از تست های مثلثات از مباحث مختلف ریاضی (زمان پیشنهادی ۷۰ دقیقه)

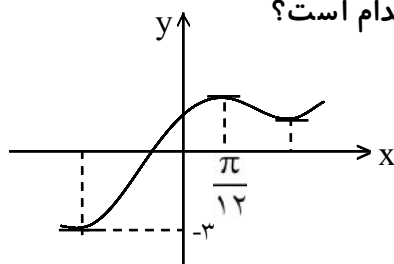
$$\cos 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ 2x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

در $x = \frac{\pi}{4}$ تابع حد دارد، ولی تعریف نشده است. پس باید ریشه‌ی صورت نیز باشد، در نتیجه:

$$a \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow a = 1$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۳

۲۹- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos 4x + b \sin 2x$ است. b کدام است؟



- (۱) ۲
- (۲) -۲
- (۳) $\sqrt{3}$
- (۴) $-\sqrt{3}$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4a \sin 4x + 2b \cos 2x, \quad f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0 \Rightarrow -4a \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2b \left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow b = 2a \\ \Rightarrow f'(x) &= -4a \sin 4x + 4a \cos 2x = 4a (\cos 2x - \sin 4x) = 4a \cos 2x (1 - 2 \sin 2x) = 0 \\ \Rightarrow \cos 2x &= 0 \Rightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -3 \Rightarrow a(-1) + b(-1) = -3 \\ \Rightarrow \begin{cases} a+b = 3 \\ b = 2a \end{cases} &\Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 2 \end{aligned}$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۱

۳۰- حاصل $\int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x} dx$ کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) ۱
- (۴) ۲

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا تابع تحت انتگرال را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x} dx &= \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} \sin x |\cos x| dx = \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx &+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\sin x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2} \sin 2x dx = \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{1}{4} (\cos \pi - \cos 0) + \frac{1}{4} (\cos 2\pi - \cos \pi) = \frac{-1}{4} (-1 - 1) + \frac{1}{4} (1 - (-1)) = 1$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۶

۳۱- حاصل $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} |\tan x| \sqrt{1 + \tan^2 x} dx$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. تابع $f(x) = |\tan x| \sqrt{1 + \tan^2 x}$ تابعی زوج است و می دانیم اگر f تابعی زوج باشد، آن گاه $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ بنابراین:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} |\tan x| \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} dx =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

(توجه کنید که در بازه ی $(0, \frac{\pi}{3})$ مقادیر $\tan x$ و $\cos x$ مثبت می باشند و به همین علت می توان قدرمطلق را از روی آن ها برداشت). حال با فرض $\cos x = u$ داریم $-\sin x \cdot dx = du$ و همچنین $x = 0 \rightarrow u = 1$ و $x = \frac{\pi}{3} \rightarrow u = \frac{1}{2}$ بنابراین:

$$I = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{-du}{u^2} = 2 \left[\frac{du}{u^2} = \frac{-2}{u} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = -2 - (-4) = 2$$

دیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۷

۳۲- اگر $f(x) = \int \sin x \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \frac{f(x)}{\cos x} + c$ و $x \neq \frac{k\pi}{2}$ آن گاه تابع $f(x)$ کدام است؟

(۱) $\sin^2 x$ (۲) $\sin^2 x$ (۳) $1 + \cos^2 x$ (۴) $1 + \sin^2 x$

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\int \sin x dx + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \sin x dx = \int \frac{u'}{(u)^2} dx = -\cos x + \frac{1}{\cos x} + c$$

آزمونی از تست های مثلثات از مباحث مختلف ریاضی (زمان پیشنهادی ۷۰ دقیقه)

$$= \frac{-\cos^2 x + 1}{\cos x} + c = \frac{\sin^2 x}{\cos x} + c \Rightarrow f(x) = \sin^2 x$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۱

۳۳- حاصل $\int_1^2 \frac{1}{x} \sin \frac{\pi}{x} dx$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{\pi}$ (۲) $\frac{2}{\pi}$ (۳) $1 - \frac{1}{\pi}$ (۴) $1 + \frac{1}{\pi}$

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. با در نظر گرفتن تغییر متغیر $u = \frac{\pi}{x}$ داریم:

$$u = \frac{\pi}{x} \rightarrow du = \left(\frac{-\pi}{x^2} \right) dx, \begin{cases} x=1 \rightarrow u=\pi \\ x=2 \rightarrow u=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

حال به جایگذاری عوامل فوق در انتگرال داده شده، به فرم جدیدی می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x} \sin \frac{\pi}{x} dx &= \left(-\frac{1}{\pi} \right) \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin u \cdot du = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin u \cdot du = \frac{-1}{\pi} \cos u \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= \frac{-1}{\pi} \left(\cos \pi - \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{-1}{\pi} (-1 - 0) = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

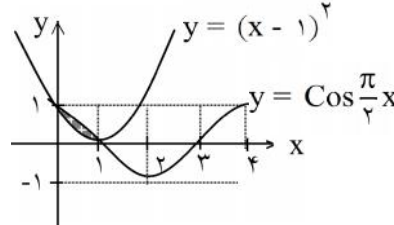
دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۵

۳۴- مساحت محدود به نمودار تابع با ضابطه ی $y = \cos \frac{\pi}{3} x$ و $y = (x-1)^2$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{\pi} - \frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{\pi} - \frac{1}{3}$ (۴) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا منحنی دو تابع داده شده را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم و محل‌های تلاقی را مشخص می‌نماییم. همان‌طور که در شکل هم کاملاً مشخص است، دو منحنی در نقاط به طول‌های $x=1$ و $x=2$ با هم تلاقی دارند. پس برای محاسبه ی مساحت محدود به نمودار دو تابع، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \left(\cos \frac{\pi}{3} x - (x-1)^2 \right) dx = \left(\frac{3}{\pi} \sin \frac{\pi}{3} x - \frac{(x-1)^3}{3} \right) \Big|_1^2 \\ S &= \left(\frac{3}{\pi} \sin \frac{\pi}{3} - 0 \right) - \left(\frac{3}{\pi} \sin(0) - \frac{(0-1)^3}{3} \right) = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$



دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۴