فضای برداری

یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی مجموعه‌ای است مانند V که عناصرش را بردار می‌نامیم و در آن دو عمل جمع و ضرب اسکالر به صورت زیر تعریف شده‌است:

$$+: V \times V \to V$$

$$(v_۱, v_۲) \to v_۱ + v_۲$$

و

$$.: \mathbb{R} \times V \to V$$

$$(\alpha , v) \to \alpha v$$

که دارای خواص زیر است:

الف) $(V , +)$ یک گروه آبلی است.

ب)

۱) $۱x = x$

۲) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \quad ,\forall \alpha , \beta \in \mathbb{R} , \forall v \in V$

۳) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) \quad ,\forall \alpha , \beta \in \mathbb{R} , \forall v \in V$

٤) $\alpha (v_۱ + v_۲) = \alpha v_۱ + \alpha v_۲$

مثال: هریک از فضاهای $\mathbb{R}^k = \{ (x_۱, x_۲, \dots , x_k) : x_i \in \mathbb{R} , ۱ \le i \le k\}$ یک فضای برداری روی میدان اعدادحقیقی هستند. این فضاهای برداری را فضاهای اقلیدسی می‌نامیم. همانطور که می‌دانید ضرب داخلی روی این فضاها به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$x.y = x_۱y_۱ + \cdots + x_k y_k$$

که

$$x = (x_۱, x_۲, \dots , x_k) , y = (y_۱, y_۲, \dots , y_k) \in \mathbb{R}^k$$

و برای هر $x = (x_۱, x_۲, \dots , x_k) \in \mathbb{R}^k$ داریم:

$$|x.x|^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{{x_۱}^۲ + {x_۲}^۲ + \cdots {x_k}^۲}$$

که آن‌را نرم اقلیدسی می‌نامیم و اغلب با نماد $\|x\|$ که منظور همان $|x.x|^{\frac{۱}{۲}}$ نمایش می‌دهیم.

به طور کلی نرم برای فضاهای برداری به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف: فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی است نرم که با نماد $\|.\|$ نمایش می‌دهیم تابعی است از V به مجموعه اعدادحقیقی که دارای خواص زیر است:

۱) $\|x\| \ge ۰ , \forall x \in V$

۲) $\|x\| = ۰ \Leftrightarrow x = ۰$

۳) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \quad ,\forall x \in V , \alpha \in \mathbb{R}$

۴) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \quad , \forall\, x, y \in V$

نامساوی کشی شوارتز: برای هر

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k)\,, y = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$$

داریم:

$$|x.y|^2 = (x_1y_1 + \dots + x_ky_k)^2 \le (\sum_{i=1}^{k} x_i^2)(\sum_{i=1}^{k} y_i^2)$$

معرفی چند نرم بر روی فضای $\mathbb{R}^k$

۱) $\|.\|_2 \ : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2}$

۲) $\|.\|_1 \ : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{k} |x_i|$$

۳) $\|.\|_\infty \ : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|\,, |x_2|, \dots, |x_k|\}$

تمرین: نرم بودن هریک از توابع فوق را بررسی کنید.