

تسلیت به خانواده‌ی  
آتش نشان های عزیز

به نام خدا  
دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده علوم ریاضی



امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل

جمع نمرات: ۱۲۰

۲ بهمن ۱۳۹۵

مدت امتحان: ۳ ساعت

\* استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

\* هر سوال ۲۰ نمره دارد.

۱- یک جواب سری (نا صفر) برای معادله دیفرانسیل بسل  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$  بدست آورید.

۲- (الف) تبدیل لاپلاس  $\delta_1'(t)$  را حساب کنید.  $\delta_1(t)$  تابع ضربه با ضابطه‌ی

$$\delta_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon < t-1 < \varepsilon \\ 0 & |t-1| \geq \varepsilon \end{cases}$$

است.  $\varepsilon \rightarrow 0$

(ب) مساله‌ی  $\begin{cases} y' + \int_0^t y(t-\tau) d\tau = \delta_1'(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$  را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

۳- مساله‌ی کوشی اوپلر  $\begin{cases} x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$  را در نظر بگیرید.

(الف) این مساله را (با کمک گرفتن از معادله مشخصه متناظر) حل کنید.

(ب) نشان دهید با گرفتن تبدیل لاپلاس، معادله‌ی فوق به یک معادله کوشی اوپلر جدید تبدیل می‌شود. آن را بدست آورید.

(پ) با حل معادله‌ی بدست آمده در قسمت (ب) (با کمک گرفتن از معادله مشخصه متناظر)، جواب معادله‌ی اصلی را محاسبه کنید و نشان دهید نتیجه منطبق بر قسمت (الف) است.

۴- دستگاه خطی

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X(t),$$

را به طور کامل حل کنید.

۵- ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید.

(الف) یک ماتریس اساسی برای مساله‌ی  $X' = AX$  بدست آورید.

(ب) مساله‌ی ناهمگن

$$X' = AX + \begin{bmatrix} 1 - e^{2t} \\ -2 + e^{2t} \end{bmatrix}, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

را حل کنید.

۶- صفحه‌ی فاز دستگاه  $X' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} X$  را رسم کنید. بیان استدلال و جزئیات محاسبات لازم است.

### تبدیل‌های لاپلاس:

$f(t)$	$F(s)$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
$\delta_{t_0}(t)$	$e^{-st_0}$
$-tf(t)$	$F'(s)$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$u_c(t) f(t-c)$	$e^{-cs} F(s)$

با آرزوی موفقیت

سوال (۱)

$$\begin{aligned} x^2 y'' + xy' + (x^2 - 4)y &= 0 \\ \Leftrightarrow y'' + \frac{1}{x}y' + \left(-\frac{4}{x^2} + 1\right)y &= 0 \\ \Leftrightarrow r^2 + (1-1)r + (-4) &= 0 \\ \Leftrightarrow r = \pm 2 \\ \Rightarrow y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \end{aligned}$$

بعد از جایگذاری در معادله داریم

$$\begin{aligned} (2^2 - 4)a_2 x^2 + (3^2 - 4)a_3 x^3 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n [(n+2)^2 - 4] + a_{n-2}) x^{n+2} &= 0 \\ \Leftrightarrow a_1 = 0, \quad a_n = \frac{-a_{n-2}}{(n+2)^2 - 4} = -a_{n-2} \frac{1}{n(n+4)} \\ \Rightarrow a_{2k-1} = 0, \quad k \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2k} \frac{1}{2(k-1)} \cdots \frac{1}{2 \times 1} \frac{1}{2(k+2)} \frac{1}{2(k+1)} \cdots \frac{1}{2 \times (1+2)} \\ \Rightarrow a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}} \times \frac{1}{k!} \times \frac{1}{(k+2)!} \\ \Rightarrow y_1(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \frac{x^{2n+2}}{n!(n+2)!}, \quad a_0 \neq 0 \end{aligned}$$

سوال (۲) الف

$$\mathcal{L}[\delta_1'](s) = s\mathcal{L}[\delta_1](s) - \delta_1(0) = se^s$$

$$\begin{aligned}
 y'(t) + \int_0^t y(t-r)dr &= \delta_1'(t), \quad y(0) = 0 \\
 \iff s\mathcal{L}[y](s) + \mathcal{L}[y](s)\mathcal{L}[1](s) &= \mathcal{L}[\delta_1'](s) \\
 \iff s\mathcal{L}[y](s) + \frac{1}{s}\mathcal{L}[y](s) &= se^s \\
 \iff \mathcal{L}[y](s) = \frac{s^2}{s^2+1}e^s &= e^s \frac{1}{s^2+1} - e^s \\
 \iff y(t) = \int_0^t \delta_1(r) \sin(t-r)dr - \delta_1(t) &= \\
 &= u(t-1) \sin(t-1) - \delta_1(t)
 \end{aligned}$$

که در آن

$$u(t) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

اگر معادله انتگرالی را به بصورت

$$y'(t) + \int_0^t y(\tau)(t-\tau)d\tau = \delta_1'(t)$$

در نظر بگیریم، یعنی  $t - \tau$  را آرگومان  $y$  در نظر بگیریم و آن را تابعی در نظر بگیریم که در  $y$  ضرب شده است و بعد از قضیه پیچش استفاده کنیم، در این حالت مانند راه صورت مورد نظر سوال داریم

$$\begin{aligned}
 s\mathcal{L}[y](s) + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}[y](s) &= se^{-s} \\
 \iff \mathcal{L}[y] = \frac{s^2 e^{-s}}{s^2+1} = e^{-s} - e^{-s} \frac{1}{s^2+1} \\
 \frac{3}{s^2+1} &= \frac{1}{s+1} + \frac{-s+2}{s^2-s+1} = \frac{1}{s+1} + \frac{-s+2}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \\
 &= \frac{1}{s+1} - \frac{s-\frac{1}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}
 \end{aligned}$$

پس داریم

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]^{-1} = \frac{e^{-t}}{3} - \frac{e^{t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}{3} + \frac{\sqrt{3}e^{t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}{3}$$

پس در نهایت

$$y(t) = \delta_1(t) - \frac{u_1(t)}{3} \left( e^{-(t-1)} - e^{(t-1)/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)\right) + \sqrt{3}e^{(t-1)/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)\right) \right)$$

البته گفتی است که اگر منظور طراح سوال ضرب این دو تابع بود، بهتر بود آن را به صورت

$$y'(t) + \int_0^t (t - \tau)y(\tau)d\tau = \delta'(t)$$

در صورت سوال مطرح میکرد.

سوال ۳)

(الف)

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \implies r^2 + (-2 - 1)r + 2 = 0 \iff r = 2, 1$$

$$y(x) = ax^2 + bx \implies y(0) = 0, \quad y'(0) = b = 1$$

$$y(x) = ax^2 + x$$

توجه کنید که مساله در مبدا مرتبه دوم نیست و در نتیجه برای کل مساله لزومی ندارد قضیه وجود و یکتایی برقرار باشد که همانطور که مشاهده میشود، در اینجا با این شروط، مساله جواب یکتا ندارد.

(ب)

$$\int_0^\infty x^2 y''(x) e^{-sx} dx = \frac{d^2}{ds^2} \int_0^\infty y''(x) e^{-sx} dx = \frac{d^2}{ds^2} [\mathcal{L}[y''](s)] = \frac{d^2}{ds^2} [s^2 \mathcal{L}[y](s) - 1]$$

$$\int_0^\infty -2xy'(x) e^{-sx} dx = \frac{d}{ds} \int_0^\infty 2y'(x) e^{-sx} dx = 2 \frac{d}{ds} [\mathcal{L}[y'](s)] = 2 \frac{d}{ds} [s \mathcal{L}[y](s) - 0]$$

$$\implies \frac{d^2}{ds^2} [s^2 \mathcal{L}[y](s) - 1] + 2 \frac{d}{ds} [s \mathcal{L}[y](s) - 0] + 2 \mathcal{L}[y](s) = 0$$

$$F(s) := \mathcal{L}[y](s) \implies s^2 F''(s) + 2sF'(s) + 2F(s) + 2sF'(s) + 2F(s) + 2F(s) = 0$$

$$\implies s^2 F''(s) + 4sF'(s) + 6F(s) = 0$$

(پ)

$$r^2 + (4 - 1)r + 6 = 0 \iff r = -2, -3$$

$$F(s) = A \frac{1}{s-2} + B \frac{1}{s-3} \iff y(x) = \frac{A}{2} x^2 + Bx$$

حال با توجه شروط اولیه به روشنی مانند قسمت الف داریم

$$y(x) = \frac{A}{2} x^2 + x =: ax^2 + x$$

سوال ۴) برای محاسبه مقادیر ویژه داریم

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) - 2(1-\lambda+1) = \\ &= (1-\lambda) - \lambda(2-\lambda) - 2(2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 2) = \\ &= -(\lambda-2)^2(\lambda+1) \\ &\iff \lambda = 2, 2, -1 \end{aligned}$$

برای بردار ویژه متناظر با  $\lambda = -1$  داریم

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \iff -y + 2z = 0, \quad 2x + y + z = 0 &\iff x = -\frac{3}{2}z - y + 2z = 0 \\ z = 2 \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

برای بردار ویژه متناظر با  $\lambda = 2$  داریم

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \iff -z - y = 0, \quad -x + y + z = 0, &\iff x = 0, \quad y = -z \\ z = 1 \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

برای بردار ویژه تعمیم یافته متناظر برای مقدار ویژه  $\lambda = 2$  داریم

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -x + y + z = 0, \quad -y - z = 1$$

$$y = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & -e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{-t} \\ be^{2t} + cte^{2t} \\ ce^{2t} \end{pmatrix}$$

$$= ae^{-t} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + (be^{2t} + cte^{2t}) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + ce^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

البته این تنها راه حل سوال نیست. میتوان از تبدیل لاپلاس یا روشهای حل دیگر هم استفاده کرد.

سوال ۵)

(الف)

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2, 3$$

بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه  $\lambda = 2$  داریم

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه  $\lambda = 3$  داریم

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y = 1 \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

پس برای جواب اساسی که ماتریسی است که در معادله دیفرانسیل صدق کند داریم

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2e^{2t} & -e^{3t} \\ e^{2t} & e^{3t} \end{pmatrix}$$

و اگر بخواهیم ماتریس اساسی را معرفی کنیم که در زمان صفر ماتریس همانی باشد داریم

$$\Psi(t) := e^{tA} = \Phi(t) \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2e^{2t} & -e^{3t} \\ e^{2t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & 2e^{2t} - 2e^{3t} \\ e^{3t} - e^{2t} & 2e^{3t} - e^{2t} \end{pmatrix}$$

البته این تنها راه حل سوال نیست. میتوان از تبدیل لاپلاس یا روشهای حل دیگر هم استفاده کرد.

(ب) با توجه به قضیه مربوط به حل معادلات ناهمگن خطی مرتبه اول داریم

$$X(t) = e^{tA}X(0) + e^{tA} \int_0^t e^{-sA} \begin{pmatrix} 1 - e^{2s} \\ -2 + e^{2s} \end{pmatrix} ds$$

$$\int_0^t e^{-sA} \begin{pmatrix} 1 - e^{2s} \\ -2 + e^{2s} \end{pmatrix} ds = \int_0^t \begin{pmatrix} 2e^{-2s} - e^{-3s} & 2e^{-2s} - 2e^{-3s} \\ e^{-3s} - e^{-2s} & 2e^{-3s} - e^{-2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - e^{2s} \\ -2 + e^{2s} \end{pmatrix} ds$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} 2e^{-3s} - 2e^{-2s} - e^{-s} \\ e^{-s} + e^{-2s} - 3e^{-3s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} -e^{-3t} + e^{-2t} + e^{-t} - 1 \\ e^{-3t} - e^{-t} - \frac{e^{-2t}}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

همچنین داریم

$$\begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & 2e^{2t} - 2e^{3t} \\ e^{3t} - e^{2t} & 2e^{3t} - e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-3t} + e^{-2t} + e^{-t} - 1 \\ e^{-3t} - e^{-t} - \frac{e^{-2t}}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} - e^{2t} \end{pmatrix}$$

پس در نهایت داریم

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & 2e^{2t} - 2e^{3t} \\ e^{3t} - e^{2t} & 2e^{3t} - e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} - e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - 3e^{3t} \\ 3e^{3t} - \frac{5}{2}e^{2t} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



البته این تنها راه حل سوال نیست. میتوان از تبدیل لاپلاس یا روشهای حل دیگر مانند روش ضرایب نامعین و هر روش درست دیگری هم استفاده کرد.

سوال ۶)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

برای مقادیر ویژه داریم

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

$$\iff \lambda = 1 \pm \sqrt{1 - 5} = 1 \pm 2i$$

پس صفحه فاز مارپیچ خواهد بود، چون بخش موهومی و حقیقی هر دو ناصفر هستند.

$$r^2(t) = x^2(t) + y^2(t) \implies r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = x(x + 2y) + y(-2x + y) = x^2 + y^2 = r^2$$

$$\implies \dot{r} = r \implies r(t) = e^t r(0)$$

$$x(t) \neq 0 \implies \tan \theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)} \implies (1 + \tan^2 \theta)\dot{\theta} = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2}$$

$$\implies \dot{\theta} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{(y - 2x)x - (x + 2y)y}{x^2} = \frac{-2(x^2 + y^2)}{x^2}$$

$$\implies \dot{\theta} = -2 \implies \theta(t) = -2t + \theta(0)$$

برای حالتی که  $x(t) = 0$  میتوان از  $\cot \theta$  استفاده کرد و به روشنی نتیجه همان است که در بالا آمد. در نهایت با توجه به جواب های بدست آمده،  $r$  در حال افزایش در زمان مثبت است و  $\theta$  در حال کاهش که این به معنی حرکت ساعتگرد در زمان مثبت است.

البته این تنها راه حل سوال نیست. میتوان از تبدیل لاپلاس یا روشهای حل دیگری که در برخی کلاسها مطرح شده مانند حل به روش تناظر اعداد مختلط و صفحه و حل معادله در دستگاه اعداد مختلط و همچنین حل کامل دستگاه به روشی که در فصل هفتم کتاب آمده است و یا هر روش درست دیگری استفاده کرد.

نمودار در صفحه بعد رسم شده است.

