بسمه تعالی
ضمیمه کتاب مهارت حل مساله در ریاضی عمومی ۱
نوشته مهرداد نجف‌پور

پاسخ امتحانات میان‌ترم اول ریاضی عمومی۱ *
براساس فصول اول تا سوم کتاب، اعداد مختلط و پیوستگی

پاییز ۹۴

۱ امیرکبیر، پاییز ۹۰، میان‌ترم اول

سوال ۱: مقدار z را چنان بیابید که $(1+i\sqrt{3})z^8-(1-i\sqrt{3})=0$.[۸ نمره]
حل:

$$z^8=\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=cis\frac{4\pi}{3},$$

[۲ نمره] بنابراین جواب‌های معادله فوق ریشه‌های هشتم $cis\frac{4\pi}{3}$ هستند، یعنی $z_k=cis(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{4})$ برای $0\leq k<8$.
[۶ نمره]

سوال ۲: مکان هندسی نقاطی مانند $z=x+iy$ را طوری بیابید که $Im(\frac{2}{\bar{z}})\geq 2$.[۸ نمره]
حل: فرض کنید $z=x+iy$، بنابراین،

$$Im(\frac{2}{\bar{z}})=Im(\frac{2x}{x^2+y^2}+i\frac{2y}{x^2+y^2})=\frac{2y}{x^2+y^2}.$$

[۵ نمره] پس مکان هندسی مورد نظر نقاطی است که $\frac{2y}{x^2+y^2}\geq 2$[۱ نمره]، یعنی $x^2+(y-\frac{1}{2})^2\leq\frac{1}{4}$، خارج دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}$ و مرکز $(0,\frac{1}{2})$، به جز نقطه $(0,0)$.[۲ نمره]

سوال ۳: فرض کنید $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در $x=0$ پیوسته باشند، $f(0)=0$ و $g(0)=1$. فرض کنید برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x),$$

*همان طور که در مقدمه کتاب بیان شده، از آن‌جایی که باور داریم نمونه سوال امتحانی و حلشان جایی برای یادگیری نیست و انتظار می‌رود پس از مطالعه کتاب دانش‌جو توانایی حل امتحانات سال‌های گذشته را داشته باشد. تاکید می‌شود این بخش صرفا برای کاهش استرس و افزایش اعتماد به نفس آمده است؛ لذا هنگامی که درس را به خوبی فراگرفتید، ترتیب منطقی مطالب، ایده‌های حل مسائل در ذهنتان نقش بست و تعداد قابل توجهی تمرین حل کرده‌اید و آماده‌اید در امتحان شرکت کنید به این بخش مراجعه نمایید.

نشان دهید f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.[۳ نمره]

حل: فرض کنید $x_0 \in \mathbb{R}$ نقطه دل‌خواهی باشد، برای اثبات پیوستگی f در x_0 کافی است نشان دهیم،

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0),$$

[۱ نمره]

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) &= \lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0)g(\Delta x) + f(\Delta x)g(x_0)) \\ &= f(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} g(\Delta x) + g(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} f(\Delta x) \\ &= f(x_0) \times 1 + g(x_0) \times 1 = f(x_0).\end{aligned}$$

[۲ نمره]

سوال ۴: فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ با بیان دقیق قضایا نشان دهید معادله $x^3 + ax + \sin x = 1$ حداقل یک جواب دارد. [۸ نمره]

حل: تابع $f(x) = x^3 + ax + \sin x - 1$ روی $\mathbb{R}$ تابعی است پیوسته [۱ نمره]، هم‌چنین:

$$f(0) = -1 \geq 0,$$

[۱ نمره] از طرفی $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ [۱ نمره]، یعنی برای هر $M > 0$، Nای مثبت موجود است که برای هر $x > N$، $f(x) > M$. مثلا برای $M = 1$، Nای موجود است که در بازه $(N, +\infty)$، $f(x) > M = 1$؛ پس $f(N + 1) > 0$ است.[۳ نمره] لذا بنابر قضیه میانی یا حالت خاص آن بولتسانو عددی چون c در بازه $[0, N + 1]$ موجود است که $f(c) = 0$ [۲ نمره]، یعنی $c^3 + ac + \sin c = 1$.

سوال ۵: فرض کنید $k > 0$ عددی حقیقی باشد، ثابت کنید که برای هر دو عدد مختلط z_1 و z_2 رابطه زیر برقرار است.

$$|z_1 - z_2|^2 \leq (1 + k)|z_1|^2 + (1 + \frac{1}{k})|z_2|^2.$$

[۸ نمره]

حل:

$$\begin{aligned}|z_1 - z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2Re(z_1\bar{z_2}) \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\sqrt{k|z_1|^2 \frac{1}{k}|z_2|^2} \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + k|z_1|^2 + \frac{1}{k}|z_2|^2 \\ &= (1 + k)|z_1|^2 + (1 + \frac{1}{k})|z_2|^2.\end{aligned}$$

[۶ نمره] توجه کنید که $-Re(z_1\bar{z_2}) \leq |z_1||z_2|$ معادل با $y_1y_2 - x_1x_2 \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ است و این مطلب به سادگی از نامساوی میانگین حسابی-هندسی $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ نتیجه می‌شود. [۲ نمره]

۲ امیرکبیر، پاییز۹۱، میان‌ترم اول

سوال ۱: مکان هندسی تمام zهایی را مشخص کنید به طوری که،

$$Re(\frac{Rez}{\bar{z} - 3i} - 3i) = (\frac{Rez}{|z|})^2.$$

[۱۰ نمره]
حل: فرض کنید $z = x + iy$، بنابراین،

$$Re(\frac{Rez}{\bar{z} - 2i} - 3i) = Re(\frac{x}{x - iy - 2i} - 3i) = \frac{x^2}{x^2 + (y+2)^2},$$

$$(\frac{Rez}{|z|})^2 = \frac{x^2}{x^2 + y^2},$$

پس مکان هندسی مورد نظر نقاطی است که $\frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2 + (y+2)^2}$ [۴ نمره]، اگر $x \neq 0$ نتیجه می‌شود $y = -1$ [۲ نمره]، اگر $x = 0$ نتیجه می‌شود $y \in \mathbb{R}$ اما توجه کنید x و y نمی‌توانند هردو هم‌زمان صفر باشد، چرا که در مخرج سمت راست صورت سوال z وجود دارد [۴ نمره]. بنابراین مکان هندسی اجتماع خط $y = -1$ و خط $x = 0$ است که مبدا از آن برداشته شده.

سوال ۲: فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ ثابت کنید وجود دارد $x \in \mathbb{R}$ به طوری که $x^{31} + x^5 + x + 1$ برابر a باشد.[۱۰ نمره]
حل:[۱۰ نمره] از تابع $g(x) = x^{31} + x^5 + x + 1 - a$ کمک می‌گیریم. [۲ نمره] روشن است که تابع g چندجمله‌ای است و در سرتاسر اعداد حقیقی پیوسته، به علاوه $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ یعنی برای هر $M_1 > 0$ وجود دارد $N_1 > 0$ به طوری که برای هر $n_1 > N_1$، $g(n_1) > M_1$ [۲.۵ نمره]؛ هم‌چنین $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ یعنی برای هر $M_2 > 0$ وجود دارد $N_2 > 0$ به طوری که برای هر $n_2 < -N_2$، $g(n_2) < -M_2$. [۲.۵ نمره] بنابراین $n, n' \in \mathbb{R}$ موجودند که $g(n') < 0 < g(n)$ [۱ نمره]، بنابراین طبق قضیه مقدار میانی [۱ نمره] x_0ای بین n و n' موجود هست که $g(x_0) = 0$ [۱ نمره]، یعنی $a = x^{31} + x^5 + x + 1$.

سوال ۳: معادله زیر را در مجموعه اعداد مختلط حل کنید:

$$1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 + iz^5 = 0.$$

[۱۰ نمره]
حل: توجه کنید $1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 + iz^5 = (1 - z^2 + z^4) + iz(1 - z^2 + z^4) = (1 + iz)(1 - z^2 + z^4)$ [۲ نمره]، بنابراین $1 + iz = 0$ یا $1 - z^2 + z^4 = 0$. $1 + iz = 0$ نتیجه می‌دهد $z = i$ [۱ نمره]. برای حل $1 - z^2 + z^4 = 0$، با فرض $z \neq \pm i$ طرفین را در $z^2 + 1$ ضرب می‌کنیم که نتیجه می‌دهد $(1 + z^2)(1 - z^2 + z^4) = 1 + z^6 = 0$ [۲ نمره] یعنی $z_k = cis\frac{2k\pi + \pi}{6} : k = 0, 2, 3, 5$ [۳ نمره، ۱ نمره برای حذف $k = 1, 4$]. نوشتن پنج ریشه معادله با هم [۲ نمره]. (دانش‌جویان از تغییر متغیر $w = iz$ نیز استفاده کرده‌اند که درست است)

سوال ۴: فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و $0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ اعداد حقیقی باشند به طوری که برای هر i، $f(x_i) = x_{i+1}$ و $f(x_4) = x_1$ نشان دهید $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ وجود دارند به طوری که $f(c_1) = c_1$، $fof(c_2) = c_2$ و $fofof(c_3) = c_3$. [۱۰ نمره]
حل: از توابع $g_1(x) = f(x) - x$، $g_2(x) = fof(x) - x$ و $g_3(x) = fofof(x) - x$ کمک می‌گیریم. روشن است که توابع همگی در $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند.
الف) $0 \leq (x_4 - x_1)(x_1 - x_4) = g_1(x_1)g_1(x_4)$ بنابر قضیه مقدار میانی g_1 دارای ریشه‌ای بین x_1 و x_4 است، یعنی c_1ای وجود دارد که $f(c_1) = c_1$. [۴ نمره]
ب) $0 \leq (x_3 - x_1)(x_1 - x_3) = g_2(x_1)g_2(x_3)$ بنابر قضیه مقدار میانی g_2 دارای ریشه‌ای بین x_1 و x_3 است، یعنی c_2ای وجود دارد که $fof(c_2) = c_2$. [۳ نمره]
ج) $0 \leq (x_4 - x_1)(x_1 - x_2) = g_3(x_1)g_3(x_2)$ بنابر قضیه مقدار میانی g_3 دارای ریشه‌ای بین x_1 و x_2 است، یعنی c_3ای وجود دارد که $fofof(c_3) = c_3$. [۳ نمره]

سوال ۵: فرض کنید z_1 و z_2 دو عدد مختلط باشند به طوری که $|z_1| = |z_2| = r > 0$، در این صورت نشان دهید:

$$(\frac{z_1 + z_2}{r^2 + z_1 z_2})^2 + (\frac{z_1 - z_2}{r^2 - z_1 z_2})^2 \geq \frac{1}{r^2}.$$

[۱۰ نمره]
حل: کافی است ثابت کنیم،

$$A = \left(\frac{r(z_1 + z_2)}{r^2 + z_1 z_2}\right)^2 + \left(\frac{r(z_1 - z_2)}{r^2 - z_1 z_2}\right)^2 \geq 1.$$

[۱ نمره] فرض کنید $z_1 = rcis(\theta_1)$ و $z_2 = rcis(\theta_2)$ بنابراین،

$$\begin{aligned}
A &= \left(\frac{cis(\theta_1) + cis(\theta_2)}{1 + cis(\theta_1)cis(\theta_2)}\right)^2 + \left(\frac{cis(\theta_1) - cis(\theta_2)}{1 - cis(\theta_1)cis(\theta_2)}\right)^2 \\
&= \left(\frac{(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) + i(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)}{(1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)) + i(\sin(\theta_1 + \theta_2))}\right)^2 \\
&+ \left(\frac{(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) + i(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)}{(1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)) - i(\sin(\theta_1 + \theta_2))}\right)^2 \\
&= \left(\frac{2\cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} + i(2\sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1 - \theta_2}{2})}{2\cos^2\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + i(2\sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{2})}\right)^2 \\
&+ \left(\frac{-2\sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} + i(2\sin\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{2})}{2\sin^2\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - i(2\sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{2})}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\cos\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}}{\cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}\right)^2 + \left(\frac{-\sin\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}}{\sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}\right)^2 \\
&\geq \cos^2\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} + \sin^2\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = 1.
\end{aligned}$$

[هر تساوی ۲ نمره و نتیجه‌گیری آخر ۱ نمره]

۳ امیرکبیر، پاییز۹۲، میان‌ترم اول

سوال ۱: معادله زیر را حل کنید:

$$(1 + 2z)^5 = (1 - 5z)^5(1 + i)$$

[۸ نمره]
حل:

$$\left(\frac{1 + 2z}{1 - 5z}\right)^5 = 1 + i = \sqrt{2}cis\frac{\pi}{4},$$

[۳ نمره] با تغییر متغیر $w = \frac{1 + 2z}{1 - 5z}$، جواب‌های معادله $w^5 = 1 + i$ ریشه‌های پنجم $\sqrt{2}cis\frac{\pi}{4}$ هستند، یعنی $w_k = \sqrt[10]{2}cis(\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5})$ برای [۳ نمره] $0 \leq k < 5$. از طرفی $z = \frac{w - 1}{5w + 2}$، که با جای‌گذاری مقادیر w_k مشخص می‌شوند. [۲ نمره]

سوال ۲: مکان هندسی تمام zهایی را مشخص کنید که در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$|z - |z|| = |z + |z||.$$

[۱۸ نمره]

حل: با توان رسانی طرفین $|z+|z|| = |z-|z||$ نتیجه می‌شود $|z+|z||^2 = |z-|z||^2$؛ بنابراین $(z+|z|)(\bar{z}+|z|) = (z-|z|)(\bar{z}-|z|)$ [۴ نمره] ، درنتیجه $2z|z| = 2\bar{z}|z|$، یعنی $2Re(z) = 0$، پس مکان هندسی مورد نظر محور yها است. [۴ نمره]

سوال ۳: ثابت کنید $x_0 \in \mathbb{R}$ موجود است که در معادله $x^2 \sin(x+5) - x^5 = 712$ صدق می‌کند. [۸ نمره]

حل: تابع $f(x) = x^2 \sin(x+5) - x^5 - 712$ روی $\mathbb{R}$ تابعی است پیوسته [۱ نمره] ، به علاوه:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

[۲ نمره] از طرفی $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، یعنی برای هر $M_1 > 0$، N_1ای مثبت موجود است که برای هر $x > N_1$، $f(x) > M_1$. مثلا برای $M_1 = 1$، N_1ای موجود است که در بازه $(N_1, +\infty)$، $f(x) > M_1 = 1$؛ پس $f(N_1+1) > 0$ است [۲ نمره] .هم‌چنین $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، یعنی برای هر $M_2 > 0$، $N_2 > 0$ای موجود است که برای هر $x < -N_2$، $f(x) < -M_2$. مثلا برای $M_2 = 1$، N_2ای موجود است که در بازه $(-\infty, -N_2)$، $f(x) < -M_1 = -1$؛ پس $f(-N_2 - 1) < 0$ است [۲ نمره] . لذا بنابر قضیه میانی یا حالت خاص آن بولتسانو عددی چون c در بازه $[-N_2 - 1, N_1 + 1]$ موجود است که $f(c) = 0$، یعنی $c^2 \sin(c+5) - c^5 = 712$. [۱ نمره]

سوال ۴: فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد به طوری که برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $fof(x) = x$. ثابت کنید برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) = x$. [۸ نمره]

حل: ابتدا توجه کنید f تابعی است یک‌به‌یک، چرا که اگر $f(x) = f(y)$، نتیجه می‌شود $x = fof(x) = fof(y) = y$ [۱ نمره]. بنابر قضیه‌ای هر تابع پیوسته و یک‌نوا، یک‌به‌یک است. بنابراین f تابعی است اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی [۲ نمره] ، فرض کنید اکیدا صعودی است، در غیر این‌صورت با $-f$ کار کنید [۱ نمره] . برای این که نشان دهیم، $f(x) = x$، فرض کنید این طور نباشد و cای موجود باشد که $f(c) \neq c$. دو حالت اتفاق می‌افتد. [۱ نمره]

۱) $f(c) > c$ که صعودی اکید بودن f نتیجه می‌دهد $fof(c) > f(c)$، یعنی $c > f(c)$ که با فرض $f(c) > c$ تناقض است.[۱ نمره]

۲) $f(c) < c$ که صعودی اکید بودن f نتیجه می‌دهد $fof(c) < f(c)$، یعنی $c < f(c)$ که با فرض $f(c) < c$ تناقض است. [۱ نمره] بنابراین چنین cای وجود ندارد، پس برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) = x$.[۱ نمره]

سوال ۵: نشان دهید نقاط متمایز z_1، z_2 و z_3 رئوس یک مثلث متساوی‌الساقین با زاویه ۹۰ درجه در راس z_2 هستند، اگر و فقط اگر

$$(z_1 - z_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = 0.$$

[۵ نمره]

حل: ابتدا فرض کنید مثلث مذکور در راس z_2 قائم‌الزاویه است، با انتقال راس z_2 به مبدا مختصات فرض کنید $z_3 - z_2 = rcis\theta$، در این صورت $z_1 - z_2 = rcis(\theta + \frac{\pi}{2})$ بنابراین،

$$(z_1 - z_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = r^2 cis2\theta(1 + cis\pi) = 0.$$

[۲ نمره] حال فرض کنید $(z_1 - z_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = 0$، نشان می‌دهیم مثلث z_1، z_2 و z_3 متساوی‌الساقین با زاویه ۹۰ درجه در راس z_2 است. معادله $(z_1 - z_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = 0$ نتیجه می‌دهد $(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2})^2 = -1$، بنابراین $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$ دارای آرگومان $\frac{\pi}{2}$ و یا $\frac{3\pi}{2}$ است، یعنی اختلاف آرگومان‌های $z_1 - z_2$ و $z_3 - z_2$ برابر ۹۰ درجه است[۱ نمره] . برای اتمام کار کافی است نشان دهیم $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_2|$، این مطلب نیز روشن است، چرا که از $(z_1 - z_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = 0$ نتیجه می‌شود $|z_1 - z_2|^2 = |z_3 - z_2|^2$، پس $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_2|$[۱ نمره] . تاکنون ثابت کردیم مثلث به رئوس مبدا، $z_1 - z_2$ و $z_3 - z_2$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، با انتقال مبدا به z_2 نتیجه می‌شود مثلث به z_1، z_2 و z_3 قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. [۱ نمره]

سوال ۶: با استدلال کاملا دقیق نقاط ناپیوستگی تابع زیر را مشخص کنید .

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & : x\in A\\ \cos x & : x\notin A\end{cases}$$

که در آن $A=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\}$. [۵ نمره]

حل: ادعا می‌کنیم تابع f با ضابطه بالا در کل اعداد حقیقی به جز نقاط A و نقطه $x=0$ پیوسته است و در بقیه نقاط ناپیوسته.

⋆ اثبات پیوستگی در این نقاط: اگر $x_0\neq 0$ نقطه‌ای باشد که در A نیست، می‌توان حول x_0 یک هم‌سایگی آن قدر کوچک انتخاب کرد که هیچ نقطه‌ای از A را ندارد، تحدید f به این هم‌سایگی تابع $\cos x$ است که تابعی است پیوسته. [۲ نمره]

⋆ اثبات ناپیوستگی در $x=0$: توجه کنید $\frac{1}{n}\longrightarrow 0$ و $f(\frac{1}{n})=\sin\frac{1}{n}\longrightarrow 0$، اما $f(0)=1$، پس f در $x=0$ ناپیوسته است. [۱ نمره]

⋆ اثبات ناپیوستگی در نقاط A: برای هر نقطه A مانند $\frac{1}{k}$ می‌توان یک هم‌سایگی در نظر گرفت که هیچ نقطه‌ای از A را ندارد، پس هر دنباله مانند x_n هم‌گرا به نقطه $\frac{1}{k}$ از یک جایی به بعد درون این هم‌سایگی می‌افتد و از آن‌جا به بعد $f(x_n)=\cos x_n$، حال اگر f بخواهد در $x=\frac{1}{k}$ پیوسته باشد، باید $\sin\frac{1}{k}=\cos\frac{1}{k}$، اما برای هیچ kای در اعداد طبیعی این اتفاق نمی‌افتد؛ پس f در نقاط A ناپیوسته است. [۲ نمره]

۴ امیرکبیر، پاییز۹۳، میان‌ترم اول

سوال ۱: در هر حالت مکان هندسی نقاطی را بیابید که در معادله داده شده صدق می‌کند.

الف) $Re(\frac{1}{z}+1)>Im(\frac{1}{\bar z}+1)$

ب) $Re(z)-iIm(\bar z(1-2i))=5Im(z^2)$ [۱۲ نمره]

حل: الف) فرض کنید $z=x+iy$، بنابراین،

$$Re(\frac{1}{z}+1)=Re(\frac{x-iy+x^2+y^2}{x^2+y^2})=\frac{x+x^2+y^2}{x^2+y^2},$$

[۲ نمره]

$$Im(\frac{1}{\bar z}+1)=Im(\frac{x+iy+x^2+y^2}{x^2+y^2})=\frac{y}{x^2+y^2},$$

[۲ نمره] پس مکان هندسی مورد نظر نقاطی است که $x+x^2+y^2>y$، یعنی $(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2>\frac{1}{2}$، خارج دایره‌ای به مرکز $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{\sqrt{2}}{2}$. [۱ نمره]

ب) فرض کنید $z=x+iy$، بنابراین،

$$Re(z)-iIm(\bar z(1-2i))=x-iIm((x-iy)(1-2i))=x+i(2x+y).$$

[۲ نمره]

$$5Im(z^2)=5Im((x^2-y^2)+i(2xy))=10xy,$$

[۱ نمره] پس مکان هندسی مورد نظر نقاطی است که $2x+y=0$ و $10xy=x$، یعنی دو نقطه به مختصات $(0,0)$ و $(-\frac{1}{20},\frac{1}{10})$. [۲ نمره]

سوال ۲: فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد و تابع $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ پیوسته باشد. نشان دهید $c\in[0,1]$ وجود دارد که:

$$f(c)=\sin^n(\frac{\pi c}{2}).$$

[۸ نمره]

حل: تابع $g(x)=f(x)-\sin^n(\frac{\pi x}{2})$ روی بازه $[0,1]$ تابعی است پیوسته [۴ نمره] ، هم‌چنین:

$$g(0)=f(0)-\sin 0=f(0)\geq 0,$$

[۱ نمره]

$$g(1)=f(1)-\sin\frac{\pi}{2}=f(1)-1\leq 0,$$

[۱ نمره] چون $g(1)\leq 0\leq g(0)$، لذا بنابر قضیه میانی یا حالت خاص آن بولتسانو عددی چون c در بازه $[0,1]$ موجود است که $g(c)=0$، یعنی $f(c)=\sin^n(\frac{\pi c}{2})$. [۲ نمره]

سوال ۳: فرض کنید $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ پیوسته باشد و $f(2)=f(0)$، نشان دهید نمودارهای $y=f(x)$ و $y=f(x+1)$ هم‌دیگر را قطع می‌کنند. [۷ نمره]

حل: تابع $g(x)=f(x+1)-f(x)$ روی بازه $\mathbb{R}$ تابعی است پیوسته[۳ نمره] ، هم‌چنین:

$$g(0)=f(1)-f(0),$$

$$g(1)=f(2)-f(1),$$

چون $f(2)=f(0)$، لذا $g(0)+g(1)=0$، اگر $g(0)=g(1)=0$ که مسئله حل است، در غیر این‌صورت $g(0)$ و $g(1)$ دارای علامت‌های متفاوتند، در نتیجه بنابر قضیه میانی یا حالت خاص آن بولتسانو عددی چون c در بازه $[0,1]$ موجود است که $g(c)=0$ [۳ نمره] ، یعنی $f(c)=f(c+1)$ که به معنای تقاطع نمودار توابع $f(x)$ و $f(x+1)$ در نقطه $x=c$ است. [۱ نمره]

سوال ۴: فرض کنید N یک عدد طبیعی دل‌خواه باشد و z یک عدد مختلط که $|z|<1$. ثابت کنید:

$$|1+z+\dots+z^N|<\frac{2}{1-|z|}.$$

[۵ نمره]

حل:

$$|1+z+\dots+z^N|=|\frac{1-z^{N+1}}{1-z}|<\frac{1+|z^{N+1}|}{|1-z|}<\frac{2}{|1-z|}<\frac{2}{1-|z|},$$

توجه کنید به ترتیب از نابرابری‌های $|z_1-z_2|\leq|z_1|+|z_2|$، $|z^{N+1}|<1$ (چون $|z|<1$) و $|z_1-z_2|\geq|z_1|-|z_2|$ استفاده کردیم. [۵ نمره]

سوال ۵: چندجمله‌ای $f(z)=z^4+bz^3+cz^2+dz+e$ را درنظر بگیرید که $b,c,d,e\in\mathbb{R}$. فرض کنید اعداد مختلط i و $1+i$ ریشه‌های f باشند. مطلوبست محاسبه $3b+2c+d$. [۵ نمره]

حل: به سادگی می‌توان نشان داد اگر p یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی و $\alpha\in\mathbb{C}$ ریشه p باشد، $\bar{\alpha}$ نیز ریشه p است. بنابراین $-i$ و $1-i$ نیز ریشه‌های f هستند [۱ نمره] . درجه f برابر ۴ است و چهار ریشه برای آن داریم، پس،

$$f(x)=(z-i)(z+i)(z-(i+1))(z-(-i+1))=(z^2+1)(z^2-2z+2)=z^4-2z^3+3z^2-2z+2,$$

[۳ نمره] در نتیجه $z^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$ پس $3b + 2c + d = -2$. [۱ نمره]

سوال ۶: فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و $p(x)$ یک چندجمله‌ای ناصفر باشد که به ازای هر x داشته باشیم $p(f(x)) = 0$. ثابت کنید f تابع ثابت است. [۵ نمره]

حل: $p(f(x)) = 0$ نشان می‌دهد برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x)$ یک ریشه برای p است، اگر f تابع ثابت نباشد $t, s \in \mathbb{R}$ چنان موجودند که $f(s) \neq f(t)$، لذا بنابر قضیه مقدار میانی هر مقدار بین $f(t)$ و $f(s)$ را مقادیر f اتخاذ می‌کند [۳ نمره] ، بنابراین p دارای نامتناهی ریشه است که این تناقض است چراکه p یک چندجمله‌ای است و بنابر قضیه اساسی جبر حداکثر به تعداد درجه‌اش یعنی متناهی ریشه دارد؛ لذا فرض ثابت نبودن f باطل است و f تابعی است ثابت. [۲ نمره]