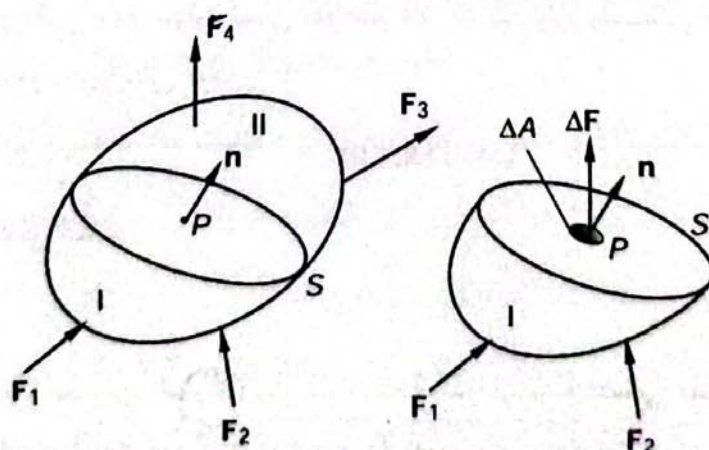


تنش و فرمول بندی انتگرالی اصول کلی

در فصل پیش، فارق از نیروهای عامل حرکت و تغییر شکل، صرفاً توصیف سینماتیک حرکت پیوستار را بررسی کردیم. در این فصل، روش توصیف نیروهای درون جسمی را که به صورت پیوستار انتزاع می شود، بررسی می کنیم. عموماً پذیرفته شده است که ماده، از مولکول ها، و مولکول از اتم ها و ذرات زیراتمی تشکیل می شود. بنا بر این، نیروهای داخلی ماده واقعی، نیروهای میان این ذرات اند. در نظریه کلاسیک پیوستار که بر فرض توزیع پیوسته ماده مبتنی است، نیروهای وارد بر همه نقاط درون جسم، در قالب مفهوم نیروهای حجمی و نیروهای سطحی قابل بیان اند. نیروهای حجمی، نیروهایی اند که در نتیجه اندرکنش دوربرد با ماده و یا بارهای واقع در یک فاصله، بر همه حجم وارد می شوند (برای مثال، گرانش و نیروی الکتروستاتیک). نیروهای سطحی، نیروهایی اند که بر سطح (حقیقی یا مجازی) جداکننده قسمت های ماده وارد می آیند. فرض می کنیم که تعریف بردار تنش (که در بخش ۱.۴ خواهد آمد)، برای توصیف نیروهای سطحی در نقطه ای از سطح، کفایت نماید. تعریف مذکور، توجهی به انحناى سطح در آن نقطه ندارد. چنین فرضی، اصل تنش کوشی نام دارد و یکی از اصول موضوعه مکانیک پیوستار کلاسیک است.

۱.۴ بردار تنش



شکل ۱-۱.۴

جسم ترسیم شده در شکل ۱-۱.۴ را در نظر می گیریم. صفحه ای مانند S را تصور کنید که از نقطه درونی و دلخواه P می گذرد، و n بردار یکه نرمال آن است. این صفحه، جسم را به دو قسمت تقسیم می کند؛ قسمتی در سمت پیکان n (که در شکل با II نمایش داده شده است) و قسمتی دیگر در انتهای n (که با I نمایش داده شده است). اگر قسمت I

را جسم آزاد در نظر بگیریم، بر صفحه S نیروی برآیند ΔF وجود خواهد داشت که بر مساحت کوچک ΔA (که شامل P است)، وارد می‌شود. بردار تنش در نقطه P و در صفحه S را (که از I بر II وارد می‌شود)، به صورت حد نسبت $\Delta F / \Delta A$ هنگامی که $\Delta A \rightarrow 0$ ، تعریف می‌کنیم. به بیان دیگر، در صورتی که t_n معرف بردار تنش باشد،

$$t_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (۱.۱.۴)$$

اگر قسمت II جسم آزاد در نظر گرفته شود، با استفاده از قانون کنش و واکنش نیوتن، در همان نقطه و در همان صفحه، بردار تنش t_{-n} وجود خواهد داشت که از I بر II وارد می‌شود، و هم‌اندازه و خلاف جهت بردار تنش معادله (۱.۱.۴) است. یعنی،

$$t_n = -t_{-n} \quad (۲.۱.۴)$$

اندیس $-n$ در t (به صورت t_{-n})، نشان‌دهنده این است که نرمال برون‌سوی قسمت II ، در راستای منفی n است. حال فرض کنید که S نه یک صفحه، بلکه سطحی گذرا از نقطه P باشد. فرض کنید که ΔF نیروی برآیند وارد بر مساحت کوچک ΔS در سطح S باشد. تعریف برداری تنش کوشی در نقطه P و در سطح S به صورت زیر است.

$$t = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad (۳.۱.۴)$$

حال اصلی را اصل تنش کوشی نام دارد، بیان می‌کنیم: برداری تنش در هر مکان و زمان مفروض، در همه قسمت‌های ماده که در نقطه P صفحه مماسی مشترک دارند، و در یک سمت این صفحه مماس واقع اند، مقداری برابر دارد. به بیان دیگر، اگر در صفحه مماس، n نرمال یکه برون‌سو (یعنی، بردار برون‌سویی به طول واحد و به سمت خارج ماده) باشد، آن‌گاه،

$$t = t(x, t, n) \quad (۴.۱.۴)$$

در رابطه فوق، اسکالر t ، معرف زمان است.

در بخش بعد، با استفاده از قانون دوم نیوتن نشان خواهیم داد که می‌توان وابستگی بردار تنش کوشی به بردار نرمال برون‌سوی n را، به صورت زیر بیان کرد.

$$t = T(x, t)n \quad (۵.۱.۴)$$

در رابطه فوق، T تبدیلی خطی است.

۲.۴ تانسور تنش

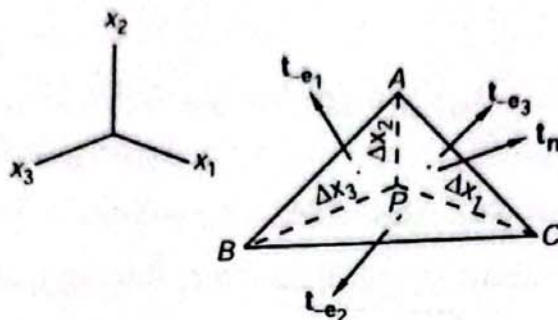
بنا بر معادله (۴.۱.۴)، در زمان مفروض t ، برداری تنش در صفحه گذرا از نقطه فضایی مفروض x تنها به بردار یکه نرمال صفحه (n)، وابسته است. لذا، فرض کنید که تبدیل T به صورت زیر باشد.

$$t_n = Tn \quad (۱.۲.۴)$$

نشان خواهیم داد که تبدیل فوق، خطی است. فرض کنید که یک چهاروجهی از جسم مجزا شود. نقطه P یکی از رئوس چهاروجهی است (به شکل ۱-۲.۴ بنگرید). ابعاد چهاروجهی را در نهایت به حجم صفر میل می‌دهیم

چنان که در حد، صفحه مایل از نقطه P بگذرد. مساحت و بردار نرمال برون سوی وجه PAB به ترتیب، برابر اند با ΔA_1 و $-e_1$. لذا، بردار تنش در صفحه با t_{-e_1} نمایش داده می شود و نیروی وارد بر صفحه برابر است با $t_{-e_1} \Delta A_1$. به همین ترتیب، نیروهای وارد بر PAC ، PBC و وجه مایل ABC به ترتیب، برابر اند با $t_{-e_r} \Delta A_r$ ، $t_{-e_r} \Delta A_r$ و $t_n \Delta A_n$. لذا، با استفاده از قانون دوم نیوتن، می توان برای چهار وجهی نوشت،

$$\sum F = t_{-e_1}(\Delta A_1) + t_{-e_r}(\Delta A_r) + t_{-e_r}(\Delta A_r) + t_n(\Delta A_n) = ma \quad (2.2.4)$$



شکل ۲-۴-۱

در سمت راست، «جرم» = «حجم» (چگالی) و «جرم» = $(1/6) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ (یعنی، حجم چهاروجهی با حاصل ضرب سه طول بی نهایت کوچک متناسب است). در سمت چپ، بردارهای تنش در مساحت وجوه (یعنی، حاصل ضرب دو طول بی نهایت کوچک) ضرب شده اند. لذا، هنگامی که ابعاد چهاروجهی به صفر میل کنند، سمت راست معادله (۲.۲.۴) از سمت چپ به صفر سریع تر میل خواهد کرد. بنا بر این در حد، جمله شتاب از معادله (۲.۲.۴) کاملاً حذف می شود. (توجه داریم که همه نیروهای حجمی وارده مانند وزن نیز، هم مرتبه جمله شتاب اند و حذف خواهند شد). لذا،

$$\sum F = t_{-e_1}(\Delta A_1) + t_{-e_r}(\Delta A_r) + t_{-e_r}(\Delta A_r) + t_n(\Delta A_n) = 0 \quad (3.2.4)$$

فرض کنید که بردار نرمال یکه صفحه مایل ABC برابر باشد با،

$$n = n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3 \quad (4.2.4)$$

روابط میان مساحت های ΔA_1 ، ΔA_2 و ΔA_3 (تساوی ΔA_n بر صفحات مختصات) و ΔA_n بدین صورت اند،

$$\Delta A_1 = n_1 \Delta A_n, \quad \Delta A_2 = n_2 \Delta A_n, \quad \Delta A_3 = n_3 \Delta A_n \quad (5.2.4)$$

با استفاده از معادله (۵.۲.۴)، معادله (۳.۲.۴) به شکل زیر درمی آید.

$$t_{-e_1} n_1 + t_{-e_2} n_2 + t_{-e_3} n_3 + t_n = 0 \quad (6.2.4)$$

اما با استفاده از قانون کنش و واکنش،

$$t_{-e_1} = -t_{e_1}, \quad t_{-e_2} = -t_{e_2}, \quad t_{-e_3} = -t_{e_3} \quad (7.2.4)$$

بنا بر این، معادله (۶.۲.۴) به شکل زیر درمی آید.

$$t_n = n_1 t_{e_1} + n_2 t_{e_2} + n_3 t_{e_3} \quad (8.2.4)$$

حال با استفاده از معادلات (۴.۲.۴) و (۸.۲.۴): معادله (۱.۲.۴) برابر خواهد بود با،

$$T(n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3) = n_1 T e_1 + n_2 T e_2 + n_3 T e_3 \quad (9.2.4)$$

به بیان دیگر، تبدیل T که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$t_n = T n \quad (10.2.4)$$

تبدیلی خطی است. تبدیل مذکور، تانسور تنش یا تانسور تنش کوشی نام دارد.

۳.۴ مؤلفه‌های تانسور تنش

بنا بر معادله (۱۰.۲.۴) در بخش قبل، رابطه میان بردارهای تنش (t_{e_i}) وارد بر صفحات سه‌گانه مختصات (صفحات e_i) و تانسور تنش (T) به صورت زیر است.

$$t_{e_1} = T e_1, \quad t_{e_2} = T e_2, \quad t_{e_3} = T e_3 \quad (11.3.4)$$

با استفاده از تعریف مؤلفه‌های تانسور (به معادله (۲.۷.۲) بنگرید)، می‌توان نوشت،

$$T e_i = T_{mi} e_m \rightarrow T e_i = T_{ij} e_j \quad (2.3.4)$$

لذا،

$$\begin{aligned} t_{e_1} &= T_{11} e_1 + T_{21} e_2 + T_{31} e_3 \\ t_{e_2} &= T_{12} e_1 + T_{22} e_2 + T_{32} e_3 \\ t_{e_3} &= T_{13} e_1 + T_{23} e_2 + T_{33} e_3 \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

چون t_{e_1} بردار تنش وارد بر صفحه‌ای است که e_1 نرمال برون‌سوی آن است، و با توجه به رابطه نخست معادله (۳.۳.۴)، روشن است که T_{11} مؤلفه عمودی بردار تنش، و T_{21} و T_{31} مؤلفه‌های مماسی آن اند. به همین ترتیب، T_{22} مؤلفه عمودی وارد بر صفحه e_2 ، و T_{12} و T_{32} مؤلفه‌های مماسی وارد بر این صفحه اند، و به همین ترتیب.

توجه داریم که در همه مؤلفه‌های تنش (T_{ij})، اندیس نخست (i)، معرف راستای آن مؤلفه، و اندیس دوم (j)، معرف صفحه‌ای است که تنش بر آن وارد می‌شود؛ برای مثال T_{12} مؤلفه تنش در راستای e_1 و وارد بر صفحه‌ای است که نرمال برون‌سوی آن در راستای e_2 قرار دارد. همچنین، توجه داریم که تنش‌های عمودی مثبت و تنش‌های عمودی منفی به ترتیب، تنش‌های کششی و تنش‌های فشاری نیز نامیده می‌شوند. تنش‌های مماسی، گاه تنش‌های برشی نامیده می‌شوند. T_{21} و T_{12} ، هر دو مؤلفه‌های تنش برشی وارد بر یک صفحه اند (صفحه e_1). لذا، تنش برشی بر این صفحه، برابر است با،

$$\tau_1 = T_{21} e_2 + T_{31} e_3 \quad (4.3.4)$$

اندازه این تنش برشی، برابر است با،

$$|\tau_1| = \sqrt{T_{21}^2 + T_{31}^2} \quad (5.3.4)$$

به همین ترتیب، در صفحه e_2 ،

$$\tau_2 = T_{12} e_1 + T_{32} e_3 \quad (6.3.4)$$

و در صفحه e_3 ،

$$\tau_3 = T_{13} e_1 + T_{23} e_2 \quad (7.3.4)$$

با توجه به $t = Tn$ ، رابطه مؤلفه‌های t و مؤلفه‌های T و n برابر است با،

$$t_i = T_{ij}n_j \quad (۸.۳.۴)$$

و یا به‌شکلی که در محاسبات مناسب‌تر است،

$$[t] = [T][n] \quad (۹.۳.۴)$$

لذا، مسلماً اگر ماتریس T معلوم باشد؛ معادله (۹.۳.۴)، بردار تنش (t) را در همه صفحات مایل، به‌صورت یکتا تعیین خواهد کرد. به‌بیان دیگر، تانسور تنش (T)، حالت تنش را (در نقطه‌ای خاص به‌صورت کامل مشخص می‌کند. همچنین، چون T تانسور مرتبه دوم است، هر ماتریس T ، ماتریس‌های دیگر T را تعیین می‌کند (به بخش ۱۸.۲ بنگرید).

شایان توجه است که برخی نویسندگان، از قرارداد $t = T^T n$ استفاده می‌کنند، چنان‌که $t_i = T_{ji}n_j$ در این قرارداد، برای مثال، T_{21} و T_{33} مؤلفه‌های مماسی بردار تنش در صفحه‌ای اند که e_2 نرمال آن است، و مانند آن. اگر تانسور تنش متقارن باشد، اختلاف تعابیر درایه‌های غیر قطری T ، مرتفع می‌شوند.

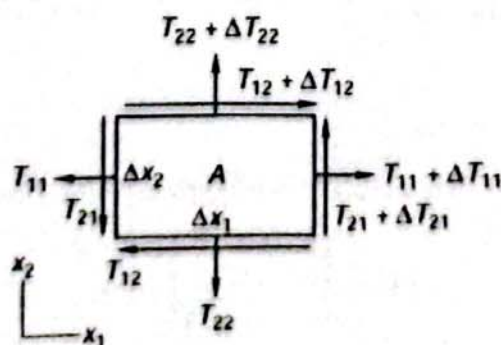
۴.۴ تقارن تانسور تنش: اصل گشتاور تکانه

در این‌جا با استفاده از معادله گشتاور تکانه المان دیفرانسیلی، نشان می‌دهیم که تانسور تنش عموماً، تانسوری متقارن است.^۱ نمودار جسم آزاد متوازی‌السطوح دیفرانسیلی‌ای را که از جسم مجزا شده‌است، در نظر بگیرید (به شکل ۱-۴.۴ بنگرید). گشتاور همه نیروها را حول محور موازی با محور x_3 و گذرا از نقطه مرکزی A ، محاسبه می‌کنیم.

$$\sum (M_A)_3 = T_{31}(\Delta x_2)(\Delta x_3) \left(\frac{\Delta x_1}{2} \right) + (T_{31} + \Delta T_{31})(\Delta x_2)(\Delta x_3) \left(\frac{\Delta x_1}{2} \right) - T_{13}(\Delta x_1)(\Delta x_3) \left(\frac{\Delta x_2}{2} \right) - (T_{13} + \Delta T_{13})(\Delta x_1)(\Delta x_3) \left(\frac{\Delta x_2}{2} \right) \quad (۱.۴.۴)$$

معادله (۱.۴.۴) را صرف‌نظر از گشتاورهای حجمی نوشته‌ایم. با حذف جملات دارای کمیت‌های کوچک از مرتبه بالاتر، به‌دست خواهیم آورد،

$$\sum (M_A)_3 = (T_{31} - T_{13})(\Delta x_1)(\Delta x_2)(\Delta x_3) \quad (۲.۴.۴)$$



شکل ۱-۴.۴

^۱ به مسئله ۴.۲۹ بنگرید (حالتی که در آن تانسور تنش متقارن نیست).

حال خواه المان در تعادل استاتیکی باشد، خواه نباشد،

$$\sum (M_A)_r = I_{rr} \alpha = 0 \quad (3.4.4)$$

علت این است که جمله شتاب زاویه‌ای $(I_{rr} \alpha)$ ، با گشتاور لختی

$$I_{rr} = \left(\frac{1}{12} \right) (\text{چگالی}) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 [(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2]$$

متناسب است. بنا بر این، در قیاس با جمله $(T_{r1} - T_{r2})(\Delta x_1)(\Delta x_2)(\Delta x_3)$ ، کمیتی کوچک و از مرتبه بالاتر است. لذا،

$$\sum (M_A)_r = (T_{r1} - T_{r2})(\Delta x_1)(\Delta x_2)(\Delta x_3) = 0 \quad (4.4.4)$$

با استنتاج‌های مشابه برای گشتاور حول دو محور دیگر، خواهیم داشت،

$$T_{12} = T_{21}, \quad T_{13} = T_{31}, \quad T_{23} = T_{32} \quad (5.4.4)$$

بنا بر معادلات فوق، تانسور تنش، متقارن است؛ به عبارت دیگر، $\boxed{T = T^T}$ ، لذا، تنها شش مؤلفه مستقل تنش وجود دارد. (۶)

◀ مثال ۱.۴.۴

حالت تنش در نقطه‌ای خاص برابر است با $T = -pI$. در این رابطه، p اسکالر است. نشان دهید که تنش برشی در همه صفحات گذرا از این نقطه، برابر با صفر است.

حل

بردار تنش در همه صفحات گذرا از نقطه مفروض (و دارای نرمال n)، برابر است با،

$$t_n = Tn = -pIn = -pn$$

بنا بر این، بردار تنش بر صفحه عمود است. این حالت ساده تنش، حالت تنش هیدروستاتیک نام دارد. (۷)

▲

۹۳-۴ ◀ مثال ۲.۴.۴

ماتریس حالت تنش نسبت به دستگاه مختصات راست‌گوشه دکارتی، در نقطه خاصی از جسم برابر است با،

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

(الف) بردار تنش و اندازه تنش عمودی را در صفحه گذرا از این نقطه و موازی با صفحه $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 - 6 = 0$ بیابید (نرمال)

(ب) اگر $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2e_1 + 2e_2 + e_3)$ و $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - e_2)$ را بیابید. ↗

حل

(الف) یکه نرمال صفحه $\sigma = 0$ ، برابر است با،

$$\mathbf{n} = \frac{1}{3}(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$$

با استفاده از معادله (۹.۳.۴)، بردار تنش به صورت زیر به دست می آید.

$$[\mathbf{t}] = [\mathbf{T}][\mathbf{n}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

و یا

$$\mathbf{t} = \frac{1}{3}(16\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \text{ MPa}$$

با توجه به این که $T_n \equiv T_{(n)(n)}$ اندازه تنش عمودی، برابر است با،

$$T_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{9}(16 + 4 + 1) = 2.19 \text{ MPa}$$

(ب) برای یافتن مؤلفه های پرایم دار تانسور تنش، به صورت زیر عمل می کنیم.

$$T'_{12} = \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{7}{3\sqrt{2}} = 1.65 \text{ MPa}$$

◀ مثال ۳.۴.۴

توزیع تنش درون جسمی، از ماتریس زیر به دست می آید.

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} -p + \rho g y & 0 & 0 \\ 0 & -p + \rho g y & 0 \\ 0 & 0 & -p + \rho g y \end{bmatrix}$$

در رابطه فوق، p ، ρ و g ثابت اند. شکل ۴.۴-۲ (الف)، یک بلوک مستطیلی از درون جسم را نشان می دهد.

(الف) توزیع بردار تنش در شش وجه بلوک را بیابید.

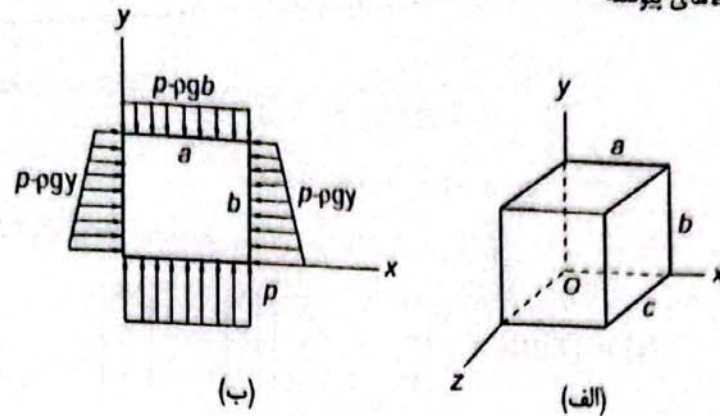
(ب) نیروی برآیند کل وارد در وجوه $y = 0$ و $x = 0$ را بیابید.

حل

(الف) با استفاده از $\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n}$ ، به دست می آوریم،

$x = 0$,	$[\mathbf{n}] = [-1 \ 0 \ 0]$,	$[\mathbf{t}] = [p - \rho g y$	0	$0]$
$x = a$,	$[\mathbf{n}] = [+1 \ 0 \ 0]$,	$[\mathbf{t}] = [-p + \rho g y$	0	$0]$
$y = 0$,	$[\mathbf{n}] = [0 \ -1 \ 0]$,	$[\mathbf{t}] = [0$	p	$0]$
$y = b$,	$[\mathbf{n}] = [0 \ +1 \ 0]$,	$[\mathbf{t}] = [0$	$-p + \rho g b$	$0]$
$z = 0$,	$[\mathbf{n}] = [0 \ 0 \ -1]$,	$[\mathbf{t}] = [0$	0	$p - \rho g y]$
$z = c$,	$[\mathbf{n}] = [0 \ 0 \ +1]$,	$[\mathbf{t}] = [0$	0	$-p + \rho g y]$

توزیع بردار تنش در چهار وجه مکعب، در شکل ۴.۴-۲ (ب) نشان داده شده است.



شکل ۴.۴-۲

(ب) نیروی برآیند در وجه $y = 0$ برابر است با،

$$F_y = \int t dA = \left(p \int dA \right) e_y = p a c e_y$$

و نیروی برآیند در وجه $x = 0$ برابر است با،

$$F_x = \left[\int (p - \rho g y) dA \right] e_x = \left[\int p dA - \rho g \int y dA \right] e_x$$

می‌توان انتگرال دوم را مستقیماً با تعویض dA با $c dy$ و انتگرال‌گیری از $y = 0$ تا $y = b$ محاسبه کرد؛ و یا، چون $\int y dA$ گشتاور اول مساحت وجه حول محور z است، برابر با حاصل ضرب فاصله مرکزوار^۱ در مساحت وجه است؛ لذا،

$$F_x = \left[p b c - \frac{\rho g b^2 c}{2} \right] e_x$$

۵.۴ تنش‌های اصلی

در بخش ۲.۲، آموختیم که هر تانسور تنش متقارن حقیقی، کمینه سه راستای اصلی دوبه‌دو عمود (ویژه‌بردارهای T) دارد. صفحاتی که راستاهای مذکور نرمال‌های آن‌ها صفحات اصلی نام دارند. بردار تنش در صفحات مذکور، بر این صفحات عمود است (یعنی، بدون تنش‌های برشی اند) و این تنش‌های عمودی، تنش‌های اصلی نامیده می‌شوند. بنا بر این، تنش‌های اصلی (ویژه‌مقدارهای T) دربردارنده مقادیر بیشینه و کمینه تنش‌های عمودی همه صفحات گذرا از نقطه‌ای مفروض اند.

تنش‌های اصلی را از معادله مشخصه T به‌دست می‌آوریم. می‌توان معادله مشخصه را به‌صورت زیر نوشت.

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (۱.۵.۴)$$

که در آن،

$$\begin{aligned} I_1 &= T_{11} + T_{22} + T_{33} \\ I_2 &= \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \\ I_3 &= \det T \end{aligned} \quad (۲.۵.۴)$$

سه ناوردای اسکالر اصلی تانسور تنش اند. چگونگی محاسبه این راستاهای اصلی، در بخش ۲.۲ آمد.

^۱ برخی مترجمان، به‌جای «مرکزوار»، «مرکز هندسی» را به‌کار برده‌اند. - م.

۶.۴ تنش برشی بیشینه

در این بخش، نشان می‌دهیم که تنش برشی بیشینه، برابر با نصف تفاضل میان تنش‌های اصلی بیشینه و کمینه است؛ و در صفحه نیمساز زاویه قائمه میان صفحه تنش اصلی بیشینه و صفحه تنش اصلی کمینه، وارد می‌شود.

فرض کنید که e_1 و e_2 و e_3 ، راستاهای اصلی T ؛ و T_1 و T_2 و T_3 ، تنش‌های اصلی آن باشند. اگر $n = n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3$ نرمال یک صفحه‌ای مفروض باشد، مؤلفه‌های بردار تنش در آن صفحه، برابر خواهند بود با،

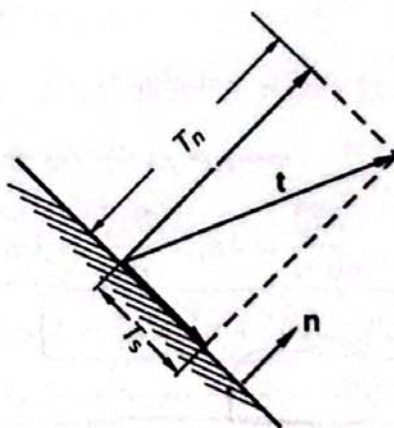
$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & T_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & T_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 n_1 \\ T_2 n_2 \\ T_3 n_3 \end{bmatrix} \quad (۱۶.۴)$$

یعنی،

$$\boxed{t = n_1 T_1 e_1 + n_2 T_2 e_2 + n_3 T_3 e_3} \quad (۲۶.۴)$$

و تنش‌های عمودی در صفحه مذکور، برابر اند با،

$$T_n = n \cdot t = n_1^2 T_1 + n_2^2 T_2 + n_3^2 T_3 \quad (۳۶.۴)$$



شکل ۶.۴-۱

حال اگر (T_s) معرف اندازه تنش برشی کل در صفحه باشد، خواهیم داشت (به شکل ۶.۴-۱ بنگرید)،

$$\boxed{T_s^2 = |t|^2 - T_n^2} \quad (۴۶.۴)$$

یعنی،

$$T_s^2 = T_1^2 n_1^2 + T_2^2 n_2^2 + T_3^2 n_3^2 - (T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2)^2 \quad (۵۶.۴)$$

حال برای مجموعه مقادیر مفروض (T_1, T_2, T_3) ، مقدار بیشینه تنش برشی (T_s) و صفحه یا صفحاتی را (با تعریف (n_1, n_2, n_3)) که در آن وارد می‌شود، به دست می‌آوریم. با توجه به معادله (۵۶.۴)، روشن است که کار با T_s^2 نسبت به T_s آسان‌تر است. برای مقادیر مفروض (T_1, T_2, T_3) ، معادله (۵۶.۴) بیان می‌دارد که T_s^2 تابعی از n_1 و n_2 و n_3 است. یعنی،

$$T_s^2 = f(n_1, n_2, n_3) \quad (۶۶.۴)$$

در پی یافتن سه گانه‌هایی از (n_1, n_2, n_3) هستیم که در آن‌ها، مقدار تابع f با وجود قید زیر، بیشینه شود.

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (۷۶.۴)$$

هنگامی که مقدار بیشینه T_s^0 به دست آید، مقدار بیشینه T_s نیز به دست می‌آید. توجه داریم که اگر (n_1, n_2, n_3) برابر با $(\pm 1, 0, 0)$ یا $(0, \pm 1, 0)$ یا $(0, 0, \pm 1)$ باشد، از معادله (۵۶.۴) به دست می‌آید، $T_s = 0$. این بدان علت است که صفحات فوق، صفحات اصلی اند و در آن‌ها تنش برشی، برابر با صفر است. مسلماً، مقدار کمینه تابع معادله (۵۶.۴) برابر با صفر است ($T_s = 0$).

دیفرانسیل کل مقادیر ایستایی T_s^0 در تابع معادله (۵۶.۴)، برابر است با،

$$dT_s^0 = \frac{\partial T_s^0}{\partial n_1} dn_1 + \frac{\partial T_s^0}{\partial n_2} dn_2 + \frac{\partial T_s^0}{\partial n_3} dn_3 = 0 \quad (۸۶.۴)$$

اگر تغییرات dn_1 ، dn_2 و dn_3 از یکدیگر مستقل باشند، آن‌گاه، از معادله (۸۶.۴) (شرح) آشنای تعیین سه گانه (n_1, n_2, n_3) متناظر با مقادیر ایستایی T_s^0 ، به دست خواهد آمد؛ این شرط عبارت است از،

$$\frac{\partial T_s^0}{\partial n_1} = 0, \quad \frac{\partial T_s^0}{\partial n_2} = 0, \quad \frac{\partial T_s^0}{\partial n_3} = 0. \quad (۹۶.۴)$$

اما تغییرات dn_1 ، dn_2 و dn_3 مستقل از یکدیگر نیست. با محاسبه دیفرانسیل کل معادله (۷۶.۴) (یعنی، $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$) به دست می‌آوریم،

$$n_1 dn_1 + n_2 dn_2 + n_3 dn_3 = 0. \quad (۱۰۶.۴)$$

از مقایسه معادلات (۱۰۶.۴) و (۸۶.۴)، به معادلات زیر می‌رسیم.

$$\frac{\partial T_s^0}{\partial n_1} = \lambda n_1, \quad \frac{\partial T_s^0}{\partial n_2} = \lambda n_2, \quad \frac{\partial T_s^0}{\partial n_3} = \lambda n_3 \quad (۱۱۶.۴)$$

به رابطه معادله (۱۱۶.۴)، به همراه معادله $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ (یعنی، معادله (۷۶.۴))، چهار معادله برای تعیین چهار مجهول n_1 ، n_2 ، n_3 و λ تشکیل می‌دهند. ضریب λ ضریب لاگرانژ نام دارد. این روش که در آن مقادیر ایستایی تابع، با وجود یک قید تعیین می‌شوند، (روش ضریب لاگرانژ) نامیده می‌شود. با استفاده از معادله (۵۶.۴)، از معادلات (۱۱۶.۴) به دست می‌آوریم،

$$2n_1[T_1^0 - 2(T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2)T_1] = n_1 \lambda \quad (۱۲۶.۴)$$

$$2n_2[T_2^0 - 2(T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2)T_2] = n_2 \lambda \quad (۱۳۶.۴)$$

$$2n_3[T_3^0 - 2(T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2)T_3] = n_3 \lambda \quad (۱۴۶.۴)$$

برای مجموعه مقادیر معلوم (T_1, T_2, T_3) ، چهار معادله جبری غیر خطی (۱۲۶.۴)، (۱۳۶.۴)، (۱۴۶.۴) و (۷۶.۴)، نسبت به چهار مجهول (n_1, n_2, n_3, λ) ، مجموعه حل‌های بسیاری دارند. متناظر با هر مجموعه حل، می‌توان از معادله (۵۶.۴)، یعنی،

$$T_s^0 = T_1^0 n_1^2 + T_2^0 n_2^2 + T_3^0 n_3^2 - (T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2)^2$$

^۱ برخی مترجمان، به جای «ایستایی»، واژه «مانایی» را به کار برده‌اند. طبق تعریف، نقطه ایستایی، نقطه‌ای است که در آن مشتق تابع برابر با صفر است (Weissstein, 2010) - م.

^۲ مقدار ضریب لاگرانژ (λ)، مطلقاً بی‌اهمیت است و می‌توان آن را پس از حل دستگاه معادلات، کنار گذاشت.

مقادیر ایستایی T_s^2 را در صفحه‌ای که نرمال آن برابر با (n_1, n_2, n_3) است، به دست آورد. مقادیر بیشینه و کمینه T_s^2 ، جزء مقادیر ایستایی اند. در جدول ۱.۴ خلاصه حل‌ها ارائه شده است. (برای تفصیل، به پیوست ۱.۴ بنگرید.) توجه داریم که $(n_1, n_2, 1)$ و $(-n_1, -n_2, 0)$ ، هر دو معرف یک صفحه اند. از سوی دیگر، $(n_1, n_2, 0)$ و $(n_1, -n_2, 0)$ دو صفحه متمایز عمود بر یکدیگر اند. لذا، گرچه از دیدگاه ریاضی (۱۸) مجموعه ریشه وجود دارد، تعداد صفحات متمایز، تنها ۹ مورد است.

جدول ۱.۴ مقادیر ایستایی T_s^2 و صفحات متناظر

مقادیر ایستایی T_s^2	صفحه متناظر	$\mathbf{n} = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$ ، (n_1, n_2, n_3) معرف راستاهای اصلی است.
.	صفحه $\mathbf{e}_1$	$\mathbf{n} = \pm\mathbf{e}_1$ یعنی $(1, 0, 0)$ و $(-1, 0, 0)$
.	صفحه $\mathbf{e}_2$	$\mathbf{n} = \pm\mathbf{e}_2$ یعنی $(0, 1, 0)$ و $(0, -1, 0)$
.	صفحه $\mathbf{e}_3$	$\mathbf{n} = \pm\mathbf{e}_3$ یعنی $(0, 0, 1)$ و $(0, 0, -1)$
$\left(\frac{T_1 - T_2}{2}\right)^2$	صفحه نیمساز صفحات $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ در ربع دوم و چهارم	$(1/\sqrt{2})(1, 1, 0)$ و $(1/\sqrt{2})(-1, -1, 0)$ یعنی $\mathbf{n} = \pm(1/\sqrt{2})(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$
$\left(\frac{T_1 - T_2}{2}\right)^2$	صفحه نیمساز صفحات $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_1$ در ربع نخست و سوم	$(1/\sqrt{2})(1, -1, 0)$ و $(1/\sqrt{2})(-1, 1, 0)$ یعنی $\mathbf{n} = \pm(1/\sqrt{2})(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$
$\left(\frac{T_1 - T_2}{2}\right)^2$	صفحه نیمساز صفحات $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_1$ در ربع دوم و چهارم	$(1/\sqrt{2})(1, 0, 1)$ و $(1/\sqrt{2})(-1, 0, -1)$ یعنی $\mathbf{n} = \pm(1/\sqrt{2})(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)$
$\left(\frac{T_1 - T_2}{2}\right)^2$	صفحه نیمساز صفحات $\mathbf{e}_3$ و $\mathbf{e}_2$ در ربع نخست و سوم	$(1/\sqrt{2})(1, 0, -1)$ و $(1/\sqrt{2})(-1, 0, 1)$ یعنی $\mathbf{n} = \pm(1/\sqrt{2})(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)$
$\left(\frac{T_2 - T_3}{2}\right)^2$	صفحه نیمساز صفحات $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ در ربع دوم و چهارم	$(1/2)(0, -1, -1)$ و $(1/2)(0, 1, 1)$ یعنی $\mathbf{n} = \pm(1/\sqrt{2})(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$
$\left(\frac{T_2 - T_3}{2}\right)^2$	صفحه نیمساز صفحات $\mathbf{e}_3$ و $\mathbf{e}_2$ در ربع نخست و سوم	$(1/\sqrt{2})(0, -1, 1)$ و $(1/\sqrt{2})(0, 1, -1)$ یعنی $\mathbf{n} = \pm(1/\sqrt{2})(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$

سه مورد از صفحات، صفحات اصلی اند، و در هر کدام (طبق انتظار) تنش برشی صفر است. صفر، مقدار کمینه اندازه تنش برشی است. تنش برشی در شش صفحه دیگر، به طور کلی، غیر صفر است. همچنین از ستون سوم جدول می‌توان دریافت که اندازه تنش برشی در آن دو صفحه که بر یکدیگر عمود اند برابر است؛ زیرا تانسور تنش متقارن است. مقادیر T_s^2 در ستون سوم، مقادیر ایستایی T_s^2 اند و صفر، کمینه آن‌هاست. مقدار بیشینه T_s^2 بیشینه مقادیر ستون سوم است. لذا، اندازه بیشینه تنش برشی، بیشینه سه مقدار زیر است.



$$\frac{|T_1 - T_2|}{2}, \frac{|T_1 - T_2|}{2}, \frac{|T_2 - T_1|}{2} \quad (۱۵۶.۴)$$

به بیان دیگر،

$$(T_s)_{\max} = \frac{(T_n)_{\max} - (T_n)_{\min}}{2} \quad (۱۶۶.۴)$$

در رابطه فوق، $(T_n)_{\max}$ و $(T_n)_{\min}$ به ترتیب، بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین تنش‌های عمودی اند. دو صفحه متعامدی که تنش برشی بیشینه فوق در آن‌ها وارد می‌شود، نیمساز صفحات تنش عمودی بیشینه و کمینه اند.

می‌توان نشان داد که تنش عمودی در صفحه تنش برشی بیشینه برابر است با،

$$T_n = \frac{(T_n)_{\max} + (T_n)_{\min}}{2} \quad (۱۷۶.۴)$$

اگر دو مورد از تنش‌های اصلی برابر باشند (مثلاً، $T_1 = T_2 \neq T_3$)، آن‌گاه، افزون بر حل‌های فهرست‌شده در جدول، می‌توان بی‌شمار حل دیگر را با دوران محوره‌های e_1 و e_2 حول محور e_3 ، به دست آورد. با وجود این، مقادیر ایستایی (T_s) آن‌ها، بدون تغییر، دقیقاً برابر با مقادیر ایستایی پیش از دوران خواهند بود. آخرین مورد، اگر $T_1 = T_2 = T_3$ ، آن‌گاه، تنش برشی در همه صفحات صفر خواهد بود.

مثال ۱.۶.۴

حالت تنشی که در آن مؤلفه‌های T_{11} ، T_{22} و T_{33} برابر با صفر باشند، حالت تنش صفحه‌ای نام دارد. (الف) برای حالت تنش صفحه‌ای، مقادیر اصلی و راستاهای اصلی متناظر را بیابید. (ب) تنش برشی بیشینه را تعیین کنید.

حل

(الف) معادله مشخصه ماتریس تنش

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{21} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۸۶.۴)$$

برابر است با،

$$\lambda[\lambda^2 - (T_{11} + T_{22})\lambda + (T_{11}T_{22} - T_{12}^2)] = 0. \quad (۱۹۶.۴)$$

بنا بر این، $\lambda = 0$ یک ویژه مقدار، و ویژه بردار متناظر آن مسلماً $\underline{n} = e_3$ است. ویژه مقدارهای دیگر، عبارت اند از،

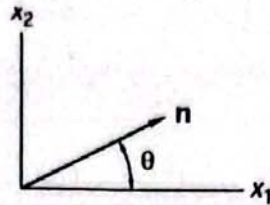
$$\begin{cases} T_1 \\ T_2 \end{cases} = \frac{(T_{11} + T_{22}) \pm \sqrt{(T_{11} - T_{22})^2 + 4T_{12}^2}}{2} \quad (۲۰۶.۴)$$

برای یافتن ویژه بردارهای متناظر، می‌نویسیم، $(T_{ij} - \lambda \delta_{ij})n_j = 0$ ، و برای $\lambda = T_1$ یا $\lambda = T_2$ به دست می‌آوریم،

$$\begin{aligned} (T_{11} - \lambda)n_1 + T_{12}n_2 &= 0 \\ T_{12}n_1 + (T_{22} - \lambda)n_2 &= 0 \\ (0 - \lambda)n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (۲۱۶.۴)$$

از معادله آخر به دست می آید، $n_r = 0$ فرض کنید که $\mathbf{n} = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$ (به شکل ۲-۶.۴ بنگرید)؛ در نتیجه، با استفاده از رابطه نخست معادله (۲۱۶.۴)،

$$\tan \theta = \frac{n_2}{n_1} = -\frac{T_{11} - \lambda}{T_{12}} \quad (226.4)$$



شکل ۲-۶.۴

(ب) چون ویژه مقدار سوم (T_3)، برابر با صفر است، تنش برشی بیشینه، بیشینه مقادیر زیر است.

$$\frac{|T_1|}{2}, \frac{|T_2|}{2}, \left| \frac{T_1 - T_2}{2} \right| = \frac{\sqrt{(T_{11} - T_{22})^2 + 4T_{12}^2}}{2} \quad (236.4)$$



◀ مثال ۲.۶.۴

مثال پیش را برای حالت تنش مقابل تکرار کنید: $T_{12} = T_{21} = 1000 \text{ MPa}$ و T_{ij} های دیگر برابر با صفر.

حل

از معادله (۲۰۶.۴)، خواهیم داشت،

$$\begin{cases} T_1 \\ T_2 \end{cases} = \pm \frac{\sqrt{4(1000)^2}}{2} = \pm 1000 \text{ MPa}$$

متناظر با تنش عمودی بیشینه $T_1 = 1000 \text{ MPa}$ ، از معادله (۲۲۶.۴) به دست می آید،

$$\tan \theta_1 = -\frac{0 - 1000}{1000} = +1$$

یعنی،

$$\theta_1 = 45^\circ$$

و متناظر با تنش عمودی کمینه $T_2 = -1000 \text{ MPa}$ (یعنی، تنش فشاری بیشینه)،

$$\tan \theta_2 = -\frac{0 - (-1000)}{1000} = -1$$

یعنی،

$$\theta_2 = -45^\circ$$

تنش برشی بیشینه، برابر است با،

$$(T_s)_{\max} = \frac{1000 - (-1000)}{2} = 1000 \text{ MPa}$$

که در صفحه نیمساز صفحات تنش های عمودی بیشینه و کمینه (یعنی، در صفحه $\mathbf{e}_1$ و در صفحه $\mathbf{e}_2$) وارد می شود.



◀ مثال ۳.۶.۴

مفروض است،

$$[T] = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 500 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

تنش برشی بیشینه و صفحاتی را که این تنش در آن‌ها وارد می‌شود، تعیین کنید.

حل

در این مورد $T_1 = T_2 = 100 \text{ MPa}$ ، $T_3 = 500 \text{ MPa}$ ، لذا تنش برشی بیشینه، برابر است با،

$$T_s = \frac{500 - 100}{2} = 200 \text{ MPa}$$

تنش برشی بیشینه، در چهار صفحه $(e_1 \pm e_2)/\sqrt{2}$ و $(e_2 \pm e_3)/\sqrt{2}$ ، و به‌طور کلی هر صفحه $(n_1 e_1 + n_2 e_2 \pm 1/\sqrt{2} e_3)$ که در آن $n_1^2 + n_2^2 + 1/2 = 1$ وارد می‌شود؛ به‌بیان دیگر، این صفحات بر سطح مخروط دایروی قائمی مماس اند که e_3 محور آن، و زاویه میان خط مولد و این محور برابر با 45° است.

۷.۴ معادلات حرکت: اصل تکانه خطی

در این بخش، معادلات دیفرانسیل حرکت پیوستار متحرک را استخراج می‌کنیم. اصل اساسی، این است که همه ذرات پیوستار، باید قانون حرکت نیوتن را تأمین کنند.

شکل ۷.۴-۱: بردارهای تنش وارد در شش وجه المانی راست‌گوشه را که در همسایگی موقعیت x_i از پیوستار مجزا شده‌است، نشان می‌دهد.

فرض کنید که $B = B_i e_i$ نیروی حجمی (مانند وزن) به ازای جرم واحد، ρ چگالی جرم در x_i و a شتاب ذره‌ای که در زمان حاضر در موقعیت x_i است، باشد؛ در این صورت، قانون حرکت نیوتن به‌صورت زیر درمی‌آید (رابطه زیر تنها در دستگاه مختصات راست‌گوشه دکارتی برقرار است).

$$\begin{aligned} & \{t_{e_1}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) + t_{-e_1}(x_1, x_2, x_3)\}(\Delta x_2 \Delta x_3) \\ & + \{t_{e_2}(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) + t_{-e_2}(x_1, x_2, x_3)\}(\Delta x_1 \Delta x_3) \\ & + \{t_{e_3}(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) + t_{-e_3}(x_1, x_2, x_3)\}(\Delta x_1 \Delta x_2) \\ & + \rho B \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = (\rho \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3) a \end{aligned} \quad (1)$$

$$t_{-e_1} = -t_{e_1} \quad \text{چون}$$

$$\begin{aligned} & t_{e_1}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) + t_{-e_1}(x_1, x_2, x_3) \\ & = \left\{ \frac{t_{e_1}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - t_{e_1}(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1} \right\} \Delta x_1 \end{aligned} \quad (2)$$

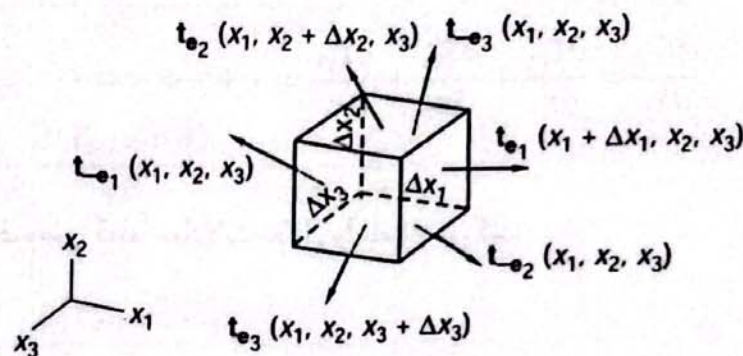
به همین ترتیب،

$$\{t_{e_r}(x_1, x_r + \Delta x_r, x_r) + t_{-e_r}(x_1, x_r, x_r)\} \\ = \left\{ \frac{t_{e_r}(x_1, x_r + \Delta x_r, x_r) - t_{e_r}(x_1, x_r, x_r)}{\Delta x_r} \right\} \Delta x_r \quad (۳)$$

و موارد دیگر نیز چنین است.

لذا، معادله (۱) به صورت زیر درمی آید.

$$\left\{ \frac{t_{e_1}(x_1 + \Delta x_1, x_r, x_r) - t_{e_1}(x_1, x_r, x_r)}{\Delta x_1} \right\} \\ + \left\{ \frac{t_{e_r}(x_1, x_r + \Delta x_r, x_r) - t_{e_r}(x_1, x_r, x_r)}{\Delta x_r} \right\} \\ + \left\{ \frac{t_{e_r}(x_1, x_r, x_r + \Delta x_r) - t_{e_r}(x_1, x_r, x_r)}{\Delta x_r} \right\} + \rho B = \rho a \quad (۱.۷.۴)$$



شکل ۷-۱-۴

با فرض $\Delta x_i \rightarrow 0$ از معادله فوق به دست می آوریم،

$$\frac{\partial t_{e_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{e_r}}{\partial x_r} + \frac{\partial t_{e_r}}{\partial x_r} + \rho B = \rho a \quad \text{یا} \quad \frac{\partial t_{e_j}}{\partial x_j} + \rho B_j e_j = \rho a_j e_j \quad (۲.۷.۴)$$

چون $t_{e_j} = T_{ij} = T_{ji} e_i$ (با توجه به آن که در مختصات دکارتی، راستای همه e_i ها ثابت است) خواهیم داشت،

$$\left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} e_i + \rho B_i e_i = \rho a_i e_i \right) \quad (۳.۷.۴)$$

صورت ناوردای معادله فوق، برابر است با،

$$\text{div } \mathbf{T} + \rho \mathbf{B} = \rho \mathbf{a} \quad (۴.۷.۴)$$

و صورت مؤلفه ای دکارتی آن، برابر است با،

$$\left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho a_i \right) \quad (۵.۷.۴)$$

معادلات اخیر، معادلاتی اند که در حرکت هر پیوستار، خواه جامد باشد، خواه سیال، باید تأمین شوند معادلات مذکور، معادلات

حرکت کوشی نام دارند اگر شتاب صفر باشد معادله (۵.۷.۴) ساده می شود و حاصل، معادله تعادل استاتیکی خواهد بود.

$$\left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = 0 \right) \quad (۶.۷.۴)$$

۱۳-۱. ◀ مثال ۱.۷.۴

۹۳-۴ آیا توزیع تنش زیر، معادلات تعادل را در غیاب نیروهای حجمی تأمین می‌کند؟ در روابط زیر، v ثابت است.

$$\begin{aligned} T_{11} &= x_1^2 + v(x_1^2 - x_2^2), & T_{12} &= -2vx_1x_2, & T_{22} &= x_1^2 + v(x_2^2 - x_1^2) \\ T_{33} &= T_{12} = 0, & T_{23} &= v(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

حل

خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{1j}}{\partial x_j} &= \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} = 2vx_1 - 2vx_1 + 0 = 0 \\ \frac{\partial T_{2j}}{\partial x_j} &= \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} = -2vx_2 + 2vx_2 + 0 = 0 \end{aligned}$$

و

$$\frac{\partial T_{3j}}{\partial x_j} = \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} = 0 + 0 + 0 = 0$$

بنا بر این، توزیع تنش مفروض، قطعاً معادلات تعادل را تأمین می‌کند.

◀ مثال ۲.۷.۴

معادلات حرکت را برای حالتی که مؤلفه‌های تنش به صورت $T_{ij} = -p\delta_{ij}$ اند، تشکیل دهید در رابطه اخیر،

$$p = p(x_1, x_2, x_3, t)$$

حل

برای T_{ij} مفروض،

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

بنا بر این، با استفاده از معادله (۶.۷.۴)، خواهیم داشت،

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho B_i = \rho a_i \quad (۷.۷.۴)$$

و یا

$$-\nabla p + \rho \mathbf{B} = \rho \mathbf{a} \quad (۸.۷.۴)$$

۸.۴ معادلات حرکت در مختصات استوانه‌ای و کروی

در فصل ۲، مؤلفه‌های $\text{div } \mathbf{T}$ را در مختصات استوانه‌ای و کروی ارائه کردیم. معادلات زیر را با استفاده از آن فرمول‌ها (معادلات (۸.۳۴.۲) تا (۱۰.۳۴.۲) و معادلات (۳۳.۳۵.۲) تا (۳۵.۳۵.۲)) به دست می‌آوریم (همچنین، به مسئله ۳۶.۴ بنگرید).

لذا،

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} = A \left(-\frac{r}{R^3} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{r}{R^3} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial R}{\partial r} \right) = A \left(-\frac{r}{R^3} - \frac{r}{R^3} + \frac{1}{R^3} \right)$$

$$\frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} = -A \left(\frac{r}{R^3} \right)$$

$$\frac{\partial T_{rz}}{\partial z} = -A \left(-\frac{r}{R^3} \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{r}{R^3} - \frac{1}{R^3} \frac{\partial R}{\partial z} \right) = A \left(\frac{r}{R^3} - \frac{r}{R^3} + \frac{1}{R^3} \right)$$

سمت چپ معادله (۱.۹.۴) به صورت زیر درمی آید.

$$A \left(-\frac{r}{R^3} - \frac{r}{R^3} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{r}{R^3} + \frac{r}{R^3} - \frac{1}{R^3} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{R^3} \right) = A \left(-\frac{1}{R^3} + \frac{1}{R^3} (r^2 + z^2) \right)$$

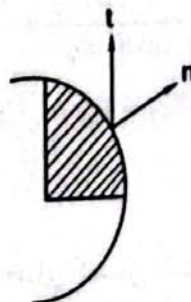
$$= A \left(-\frac{1}{R^3} + \frac{1}{R^3} \right) = 0$$

به بیان دیگر، معادله تعادل r تأمین می شود. چون $T_{r\theta} = T_{\theta z} = 0$ و $T_{\theta\theta}$ مستقل از θ است، معادله دوم تعادل نیز تأمین می شود. می توان معادله سوم تعادل را به همین ترتیب اثبات کرد (به مسئله ۳۷.۴ بنگرید).



۹.۴ شرط مرزی تانسور تنش

نیروی گسترده وارد بر مرز جسم را کشش سطحی^۱ می نامیم. در پی یافتن رابطه ای میان کشش سطحی و میدان تنش (که درون جسم تعریف می شود) هستیم.



شکل ۱-۹.۴

چهاروجهی بی نهایت کوچکی را در نظر بگیرید که از مرز جسم، برش خورده و وجه مایل آن بر صفحه مماس بر وجه مرزی، منطبق است (شکل ۱-۹.۴)؛ در این صورت، مانند بخش ۱.۴، به دست می آوریم،

$$t = Tn$$

(۱.۹.۴)

در رابطه فوق، n بردار یکه نرمال برون سو در مرز، T تانسور تنش محاسبه شده در مرز و t بردار نیرو در مرز به ازای مساحت واحد است. معادله (۱.۹.۴)، شرط مرزی تنش نامیده می شود. حالت خاص $t = 0$ شرط بدون کشش نام دارد.

۱.۹.۴ مثال

میدان تنش در استوانه ای کشسان و جداره ضخیم، به صورت زیر مفروض است.

$$T_{rr} = A + \frac{B}{r^2}, \quad T_{\theta\theta} = A - \frac{B}{r^2}, \quad T_{r\theta} = T_{rz} = T_{\theta z} = T_{zz} = 0$$

^۱ در سراسر کتاب، «کشش سطحی» معادل surface traction به کار رفته است و نباید با surface tension اشتباه شود. - م.

در روابط فوق، A و B ثابت اند. (الف) نشان دهید که این حالت تنش، معادلات تعادل را در غیاب نیروهای حجمی تأمین می‌کند. (ب) بردار تنش در سطح استوانه‌ای $r = a$ را بیابید. (ج) اگر کشش سطحی در سطح داخلی ($r = r_i$) برابر با فشاری یکنواخت (p_i)، و سطح خارجی ($r = r_o$) بدون کشش سطحی باشد، ثابتهای A و B را بیابید.

حل

(الف) با توجه به این که $T_{r\theta} = T_{rz} = T_{\theta z} = T_{zz} = 0$ و $T_{\theta\theta}$ تنها به r وابسته است؛ تنها معادله تعادل r را باید بررسی کنیم. خواهیم داشت،

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} = -\frac{\gamma B}{r^2} + 0 + \frac{\gamma B}{r^2} + 0 = 0$$

لذا، همه معادلات تعادل تأمین می‌شوند.

(ب) بردار یکه نرمال برون‌سو در سطح استوانه‌ای $r = a$ ، برابر است با $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$. لذا، بردار تنش در این سطح، برابر است با،

$$\begin{bmatrix} t_r \\ t_\theta \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & T_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{rr} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

یعنی،

$$\mathbf{t} = T_{rr} \mathbf{e}_r + (0) \mathbf{e}_\theta + (0) \mathbf{e}_z = \left(A + \frac{B}{a^2} \right) \mathbf{e}_r$$

(ج) شرایط مرزی عبارت اند از،

$$\begin{aligned} T_{rr} &= 0, & (r = r_o \text{ در}) \\ T_{rr} &= -p_i, & (r = r_i \text{ در}) \end{aligned}$$

لذا،

$$A + \frac{B}{r_i^2} = -p_i \quad \text{و} \quad A + \frac{B}{r_o^2} = 0$$

از دو معادله قبل به‌دست می‌آید،

$$A = \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2}, \quad B = -\frac{p_i r_i^2 r_o^2}{r_o^2 - r_i^2}$$

و حالت تنش، برابر است با،

$$T_{rr} = \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_o^2}{r^2} \right), \quad T_{\theta\theta} = \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_o^2}{r^2} \right)$$



برای استنتاج معادله (۲.۱۱.۴) استفاده می‌کنیم. در رابطه فوق، $J = \det F$ به دست می‌آوریم.

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{(T_*)_{im} F_{jm}}{J} = \frac{F_{jm}}{J} \frac{\partial (T_*)_{im}}{\partial x_j} + (T_*)_{im} \frac{\partial F_{jm}}{\partial x_j} \frac{1}{J} = \frac{F_{jm}}{J} \frac{\partial (T_*)_{im}}{\partial x_j} \quad (۲)$$

در رابطه اخیر، از نتیجه مثال قبل (مثال ۳.۱۰.۴) یعنی،

$$\frac{\partial F_{jm}}{\partial x_j} \frac{1}{J} = 0$$

استفاده کردیم. اکنون،

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \frac{F_{jm}}{J} \frac{\partial (T_*)_{im}}{\partial x_j} = \frac{1}{J} \frac{\partial x_j}{\partial X_m} \frac{\partial (T_*)_{im}}{\partial X_n} \frac{\partial X_n}{\partial x_j} = \frac{1}{J} \delta_{mn} \frac{\partial (T_*)_{im}}{\partial X_n} \quad (۳)$$

لذا

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{J} \frac{\partial (T_*)_{ij}}{\partial X_j} \quad (۴)$$

با جایگذاری معادله فوق در معادلات حرکت کوشی (یعنی، $\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho a_i$ ، به دست می‌آوریم.

$$\frac{\partial (T_*)_{ij}}{\partial X_j} + (J\rho) B_i = (J\rho) a_i \quad (۵)$$

حال، $dV = (\det F) dV$ (به معادله (۲.۲۸.۳) بنگرید)؛ بنا بر این،

$$\rho_0 = (\det F) \rho = J \rho \quad (۶)$$

و معادله (۵) به صورت زیر درمی‌آید.

$$\frac{\partial (T_*)_{ij}}{\partial X_j} + \rho_0 B_i = \rho_0 a_i \quad (۷)$$

۱۲.۴ توان تنش

با مراجعه به متوازی‌السطوح راست‌گوشه و بی‌نهایت کوچک شکل ۱۲.۴-۱ (که دقیقاً برابر با شکل ۷.۴-۱ و در این جا برای سهولت تکرار شده‌است)، نرخ انجام کار بردارهای تنش t_{e_1} و t_{-e_1} بر جفت وجوهی که e_1 و $-e_1$ نرمال آن‌ها باشند برابر است با،

(۱)

$$\begin{aligned} & \left[(t_{e_1} \cdot v)_{x_1+dx_1, x_2, x_3} + (t_{-e_1} \cdot v)_{x_1, x_2, x_3} \right] dx_2 dx_3 \\ &= \left[(t_{e_1} \cdot v)_{x_1+dx_1, x_2, x_3} + (t_{e_1} \cdot v)_{x_1, x_2, x_3} \right] dx_2 dx_3 \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (t_{e_1} \cdot v) dx_1 \right] dx_2 dx_3 = \frac{\partial (T_{j1} v_j)}{\partial x_1} dV \end{aligned}$$

در رابطه فوق، از این نتیجه که،

$$\mathbf{t}_{e_i} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{T} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{v} = \mathbf{e}_i \cdot T_{ji} v_j \mathbf{e}_i = T_{ji} v_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i) = T_{ji} v_j$$

۹

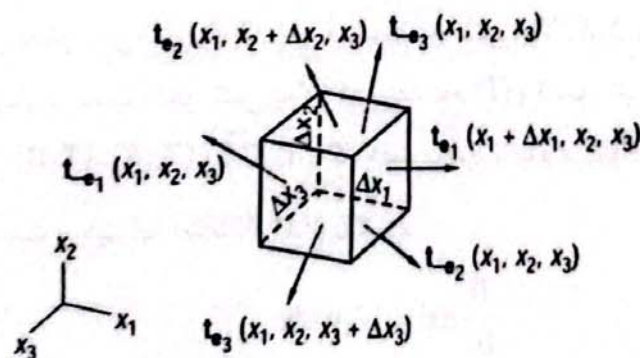
$$dx_1 dx_2 dx_3 = dV$$

استفاده کرده‌ایم. به همین ترتیب، نرخ انجام کار بردارهای تنش بر دو جفت وجه دیگر، برابر است با،

$$\frac{\partial(T_{j2}v_j)}{\partial x_2} dV \quad \text{و} \quad \frac{\partial(T_{j3}v_j)}{\partial x_3} dV$$

در صورتی که نرخ انجام کار نیروهای حجمی را که برابر با $\rho B_i v_i dV$ است نیز به حساب آوریم،
نرخ کل انجام کار بر ذره، برابر خواهد بود با،

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (v_j T_{ij}) + \rho B_i v_i \right] dV \\ &= \left[v_i \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i \right) + T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] dV \\ &= \left[\rho v_i \frac{Dv_i}{Dt} + T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] dV \end{aligned} \quad (۲)$$



شکل ۱-۱۲.۴

اکنون، $\frac{D}{Dt}(\rho dV) = 0$ (اصل پایستگی جرم) بنا بر این،

$$\begin{aligned} \rho v_i \frac{Dv_i}{Dt} dV &= \rho dV \frac{D}{Dt} \left(\frac{v_i v_i}{2} \right) \\ &= \frac{D}{Dt} \left(\frac{v_i v_i}{2} \rho dV \right) \\ &= \frac{D}{Dt} \left(dm \frac{v^2}{2} \right) \\ &= \frac{D}{Dt} (KE) \end{aligned} \quad (۳)$$

در رابطه فوق، (KE) انرژی جنبشی است. حال می‌توانیم بنویسیم،

$$P = \frac{D}{Dt} (KE) + P_s dV \quad (۱.۱۲.۴)$$

که در آن،

$$P_s = T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \text{tr}(\mathbf{T}^T \nabla \mathbf{v}) \quad (۲.۱۲.۴)$$

چون،

$$\begin{aligned} T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \left(T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + T_{ji} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} T_{ij} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = T_{ij} D_{ij} \end{aligned} \quad (۳.۱۲.۴)$$

توان تنش بر حسب تانسور تنش متقارن ($\mathbf{T}$) و تانسور نرخ تغییر شکل ($\mathbf{D}$)، برابر است با،

$$P_s = T_{ij} D_{ij} = \text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{D}) \quad (۴.۱۲.۴)$$

توان تنش (P_s)، معرف نرخ انجام کار برای تغییر حجم و تغییر شکل ذره‌ای به حجم واحد است.

۱۳.۴ توان تنش بر حسب تانسورهای تنش پیولا-کیرشهف

در بخش قبل، توان تنش را بر حسب تانسور تنش کوشی ($\mathbf{T}$) و تانسور نرخ تغییر شکل ($\mathbf{D}$) به دست آوردیم (معادله ۴.۱۲.۴). در این بخش توان تنش را؛ (الف) بر حسب تانسور تنش پیولا-کیرشهف نخست ($\mathbf{T}_0$) و تانسور شیب تغییر شکل ($\mathbf{F}$)، و (ب) بر حسب تانسور تنش پیولا-کیرشهف دوم ($\tilde{\mathbf{T}}$) و تانسور تغییر شکل لاگرانژ ($\mathbf{E}^*$)، به دست می‌آوریم. زوج‌های ($\mathbf{T}_0, \mathbf{F}$)، ($\mathbf{T}, \mathbf{D}$) و ($\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{E}^*$)، گاه جفت مزدوج نامیده می‌شوند.

(الف) در بخش ۱۲.۳ به دست آوردیم (به معادله ۶.۱۲.۳) بنگرید،

$$\frac{D}{Dt} d\mathbf{x} = (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) d\mathbf{x} \quad (۱.۱۳.۴)$$

چون $d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$ (به معادله ۳.۱۸.۳) بنگرید، معادله ۱.۱۳.۴ به صورت زیر درمی‌آید.

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{F} d\mathbf{X} = \frac{D\mathbf{F}}{Dt} d\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (۲.۱۳.۴)$$

لازم است که معادله فوق برای هر $d\mathbf{X}$ برقرار باشد، لذا،

$$\frac{D\mathbf{F}}{Dt} = (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) \mathbf{F} \quad (۳.۱۳.۴)$$

و یا

$$(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) = \frac{D\mathbf{F}}{Dt} \mathbf{F}^{-1} \quad (۴.۱۳.۴)$$

اکنون، با استفاده از معادلات (۲.۱۲.۴) و (۴.۱۳.۴)، خواهیم داشت،

$$P_s = \text{tr} \left(\mathbf{T}^T \frac{D\mathbf{F}}{Dt} \mathbf{F}^{-1} \right) \quad (۵.۱۳.۴)$$

معادله $T = \frac{1}{\det F} T_0 F^T$ (معادله (۱۱.۱۰.۴))، رابطه میان تانسور تنش کوشی (T) و تانسور تنش پیولا-کیرشهف نخست (T_0) است. بنا بر این،

$$P_s = \frac{1}{\det F} \text{tr} \left(F T_0^T \frac{DF}{Dt} F^{-1} \right) \quad (۶.۱۳.۴)$$

با استفاده از اتحاد $\text{tr}(ABCD) = \text{tr}(BCDA) = \text{tr}(CDAB)$ و رابطه $\det F = \rho_0/\rho$ خواهیم داشت،

$$P_s = \frac{1}{\det F} \text{tr} \left(F T_0^T \frac{DF}{Dt} F^{-1} \right) \quad (۷.۱۳.۴)$$

(ب) معادله $T = \frac{1}{\det F} \tilde{F} T_0^T \tilde{F}^T$ (به معادله (۲۱.۱۰.۴) بنگرید)، رابطه میان تانسور تنش کوشی (T) و تانسور تنش پیولا-کیرشهف دوم ($\tilde{T}$) است، بنا بر این،

$$P_s = \text{tr}(TD) = \frac{1}{\det F} \text{tr}(F \tilde{T} F^T D) = \frac{1}{\det F} \text{tr}(\tilde{T} F^T D F) \quad (۸.۱۳.۴)$$

حال نشان می‌دهیم که،

$$\left(\frac{DE^*}{Dt} \right) = F^T D F \quad (۹.۱۳.۴)$$

پیش‌تر به‌دست آوردیم (به معادله (۳.۲۴.۳) بنگرید)،

$$ds^2 = dS^2 + 2dX \cdot E^* dX \quad (۱۰.۱۳.۴)$$

بنا بر این،

$$\frac{D}{Dt} ds^2 = 2dX \cdot \left(\frac{DE^*}{Dt} \right) dX \quad (۱۱.۱۳.۴)$$

و نیز به‌دست آمد (به معادله (۱۱.۱۳.۳) بنگرید)،

$$\frac{D}{Dt} ds^2 = 2dx \cdot D dx = 2F dx \cdot D F dx = 2dx \cdot F^T D F dx \quad (۱۲.۱۳.۴)$$

از مقایسه معادلات (۱۱.۱۳.۴) و (۱۲.۱۳.۴)، خواهیم داشت،

$$\left(\frac{DE^*}{Dt} \right) = F^T D F \quad (۱۳.۱۳.۴)$$

با استفاده از معادله (۱۳.۱۳.۴)، معادله (۸.۱۳.۴) به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$P_s = \frac{1}{\det F} \text{tr} \left(\tilde{T} \frac{DE^*}{Dt} \right) = \frac{\rho}{\rho_0} \text{tr} \left(\tilde{T} \frac{DE^*}{Dt} \right) \quad (۱۴.۱۳.۴)$$

۱۴.۴ نرخ جریان گرما به المان دیفرانسیلی توسط رسانش

فرض کنید که برداری هم‌اندازه نرخ جریان گرما از مساحت واحد، و هم‌جهت جریان گرما باشد؛ در این صورت، می‌توان جریان خالص گرما توسط رسانش (Q_c) به المان دیفرانسیلی را به‌شرح زیر محاسبه کرد.

۱۵.۴ معادله انرژی

ذره‌ای به حجم دیفرانسیلی dV را در زمان t و موقعیت x ، در نظر بگیرید. فرض کنید که U انرژی داخلی، KE انرژی جنبشی، Q_c نرخ خالص جریان ورودی گرما توسط رسانش از محیط، Q_s تولید گرما (نرخ ورود گرما، برای مثال، ناشی از تابش) و P نرخ انجام کار بر ذره توسط نیروهای حجمی و نیروهای سطحی باشد. در این صورت، در غیاب صورت‌های دیگر ورود انرژی، اصل اساسی پایداری انرژی، بیان می‌دارد که نرخ افزایش انرژی‌های داخلی و جنبشی ذره، برابر است با حاصل جمع کاری که بر ماده انجام می‌شود، گرمایی که از طریق رسانش و از سطح مرزی آن وارد می‌شود و تولید گرما در همه حجم ذره. به عبارت دیگر،

$$\frac{D}{Dt}(U + KE) = P + Q_c + Q_s \quad (۱.۱۵.۴)$$

در رابطه فوق، (D/Dt) مشتق مادی است و $P = \frac{D}{Dt}(KE) + T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV$ و $Q_c = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV$ (به معادلات (۱.۱۲.۴)، (۲.۱۲.۴) و (۱.۱۴.۴) بنگرید). لذا،

$$\frac{DU}{Dt} = T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV + Q_s \quad (۲.۱۵.۴)$$

اگر فرض کنیم که u انرژی داخلی در جرم واحد باشد، آن‌گاه،

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{D}{Dt}(u \rho dV) = \rho dV \frac{Du}{Dt} \quad (۳.۱۵.۴)$$

در رابطه فوق، از معادله پایداری جرم ($\frac{D}{Dt}(\rho dV) = 0$) استفاده کرده‌ایم. در نتیجه معادله انرژی به صورت زیر درمی‌آید.

$$\rho \frac{Du}{Dt} = T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho q_s \quad (۴.۱۵.۴)$$

در این رابطه q_s تولید گرما در جرم واحد است. نمایش مستقیم معادله فوق، به شکل زیر است.

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{D}) - \text{div } \mathbf{q} + \rho q_s \quad (۵.۱۵.۴)$$

۱۶.۴ نابرابری انتروپی

فرض کنید که $\eta(x, t)$ معرف انتروپی پیوستار به ازای جرم واحد باشد. در این صورت، انتروپی ذره‌ای به حجم dV برابر است با $\rho \eta dV$ (چگالی است). نرخ افزایش انتروپی با تعقیب ذره حین حرکت آن، برابر است با،

$$\frac{D}{Dt}(\rho \eta dV) = \rho dV \frac{D\eta}{Dt} + \eta \frac{D}{Dt}(\rho dV) = \rho dV \frac{D\eta}{Dt} \quad (۱.۱۶.۴)$$

در رابطه فوق، طبق اصل پایداری جرم، از معادله $(D/Dt)(\rho dV) = 0$ استفاده کرده‌ایم. بدین ترتیب، نرخ افزایش انتروپی به ازای حجم واحد، برابر است با $\rho (D\eta/Dt)$. قانون نابرابری انتروپی بیان می‌دارد که نرخ

افزایش انتروپی ذره، همواره بزرگ‌تر یا مساوی جریان ورودی انتروپی از سطح مرزی آن، به علاوه تولید انتروپی در همه حجم است. یعنی،

$$\rho \frac{D\eta}{Dt} \geq -\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right) + \frac{\rho q_s}{\theta} \quad (۲.۱۶.۴)$$

در رابطه فوق، θ دمای مطلق، $\mathbf{q}$ شار گرما و q_s تولید گرماست.

◀ مثال ۱.۱۶.۴

جسمی را در نظر بگیرید که دمای آن در $x_1 = 0$ و $x_1 = L$ ثابت، و به ترتیب برابر با θ_1 و θ_2 است. (الف) با استفاده از قانون رسانش گرمای فوریه ($\mathbf{q} = -\kappa \nabla \theta$)، κ ثابت است، توزیع دما را بیابید. (ب) نشان دهید که برای تأمین قانون نابرابری انتروپی، κ باید مثبت باشد.

حل

(الف) این مسئله دما، در حالت پایا و تک‌بعدی است. معادله حاکم بر توزیع دما، برابر است با (به معادله (۴.۱۴.۴) بنگرید).

$$\frac{d^2 \theta}{dx_1^2} = 0 \quad (۳.۱۶.۴)$$

لذا،

$$\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{L} x_1 + \theta_1 \quad (۴.۱۶.۴)$$

(ب) با توجه به این که $\frac{D\eta}{Dt} = 0$ و $q_s = 0$ ، نابرابری (معادله (۲.۱۶.۴)) به صورت زیر درمی‌آید.

$$0 \geq -\frac{d}{dx_1} \left[\frac{1}{\theta} \left(-\kappa \frac{d\theta}{dx_1} \right) \right] = \kappa \frac{d}{dx_1} \left[\frac{1}{\theta} \left(\frac{d\theta}{dx_1} \right) \right] \quad (۵.۱۶.۴)$$

اکنون،

$$\kappa \frac{d}{dx_1} \left[\frac{1}{\theta} \left(\frac{d\theta}{dx_1} \right) \right] = \kappa \left[\frac{1}{\theta} \left(\frac{d^2 \theta}{dx_1^2} \right) - \frac{1}{\theta^2} \left(\frac{d\theta}{dx_1} \right)^2 \right] = -\kappa \frac{1}{\theta^2} \left(\frac{d\theta}{dx_1} \right)^2$$

بنا بر این، خواهیم داشت،

$$\kappa \frac{1}{\theta^2} \left(\frac{d\theta}{dx_1} \right)^2 \geq 0 \quad (۶.۱۶.۴)$$

لذا،

$$\kappa \geq 0 \quad (۷.۱۶.۴)$$

به بیان دیگر، جریان گرما از دمای بالا به دمای پایین است.



مسائل فصل ۴

۱.۴ در همه صفحات مختصات (که نرمال آن‌ها در راستاهای e_1 , e_2 و e_3 است)، حالت تنش در نقطه خاصی از یک جسم، برابر است با،

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{e_i} \text{ MPa}$$

(الف) تنش عمودی را بیابید. (ب) تنش برشی کل را بیابید.

حالت تنش در نقطه خاصی از یک جسم، برابر است با،

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{e_i} \text{ MPa}$$

(الف) بردار تنش را در نقطه‌ای واقع بر صفحه‌ای که نرمال آن در راستای $e_3 + 2e_2 + 2e_1$ است، بیابید. (ب) اندازه تنش‌های عمودی و برشی را در صفحه مذکور تعیین کنید.

مسئله قبل را برای صفحه گذرا از همان نقطه و موازی با صفحه $4 = 3x_3 - 2x_2 + x_1$ تکرار کنید.

توزیع تنش در جسمی خاص، برابر است با،

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 100x_1 & -100x_2 \\ 100x_1 & 0 & 0 \\ -100x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

بردار تنش وارد بر صفحه‌ای را که از نقطه $(1/2, \sqrt{3}/2, 3)$ می‌گذرد و در این نقطه بر سطح استوانه دایروی $x_1^2 + x_2^2 = 1$ مماس است، بیابید.

۵.۴ در نقطه‌ای از پیوستار، مفروض است: $T_{11} = 1 \text{ MPa}$, $T_{22} = -1 \text{ MPa}$ و T_{ij} های دیگر برابر با صفر.

(الف) نشان دهید که بردار تنش، تنها در صفحه‌ای برابر با صفر است، که در آن تنش عمودی هم‌راستای e_3 باشد (ب) سه صفحه‌ای را که در آن‌ها تنش عمودی وارد نمی‌شود، به دست آورید.

در حالت تنش زیر،

$$[T] = \begin{bmatrix} 10 & 50 & -50 \\ 50 & 0 & 0 \\ -50 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

فرض کنید که e'_1 در راستای $e_1 + 2e_2 + 3e_3$ و e'_2 در راستای $e_1 + e_2 - e_3$ باشد. در این صورت T'_{11} و T'_{22} را بیابید.

توزیع تنش زیر را در نظر بگیرید.

$$[T] = \begin{bmatrix} \alpha x_2 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در رابطه فوق، α و β ثابت اند.

(الف) در صفحه $\alpha = 0$ مربعی را در نظر بگیرید که رئوس آن در $(0, 1, 1)$, $(0, -1, 1)$, $(0, 1, -1)$ و $(0, -1, -1)$ واقع اند. توزیع بردار تنش وارد بر این مربع را تعیین و ترسیم کنید.

(ب) نیرو و گشتاور برآیند کل (حول مبدأ)، ناشی از بردارهای تنش وارد بر مربع قسمت (الف) را بیابید.

۸.۴ مسئله قبل را با توزیع تنش مقابل تکرار کنید: $T_{11} = \alpha x_1^2$ و T_{12} های دیگر برابر با صفر.

۹.۴ مسئله ۷.۴ را با توزیع تنش مقابل تکرار کنید: $T_{11} = \alpha$ ، $T_{12} = \alpha x_1$ ، $T_{22} = T_{33} = T_{11}$ و T_{12} های دیگر برابر با صفر.

۱۰.۴ توزیع تنش زیر را در یک میله استوانه‌ای دایروی در نظر بگیرید.

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha x_2 & \alpha x_2 \\ -\alpha x_2 & 0 & 0 \\ \alpha x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(الف) توزیع بردار تنش را در سطوح زیر بیابید.

(۱) سطح جانبی $x_1^2 + x_2^2 = 4$

(۲) وجه انتهایی $x_1 = 0$

(۳) وجه انتهایی $x_1 = l$

(ب) نیرو و گشتاور برآیند کل در وجه انتهایی ($x_1 = l$) را بیابید.

۱۱.۴ توزیع تنش در میله بیضوی با سطح جانبی $x_1^2 + 2x_2^2 = 1$ به صورت زیر است.

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & -2x_2 & x_2 \\ -2x_2 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(الف) نشان دهید که بردار تنش در هر نقطه (x_1, x_2, x_3) واقع در سطح جانبی، برابر با صفر است.

(ب) نیرو و گشتاور برآیند (حول مبدأ O)، ناشی از بردار تنش در وجه انتهایی در سمت چپ ($x_1 = 0$) را بیابید.

$$\text{توجه:} \quad \int x_2^2 dA = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad \int x_1^2 dA = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$$

۱۲.۴ در هر حالت تنش (T) ، تنش اعوجاج (S) را به صورت $S = T - (T_{kk}/3)I$ تعریف می‌کنیم. T_{kk} ناوردای نخست تانسور تنش (T) است.

(الف) نشان دهید که ناوردای نخست تنش اعوجاج، برابر با صفر است.

(ب) برای تانسور تنش زیر، S را محاسبه کنید.

$$[T] = 100 \begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 5 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 9 \end{bmatrix} \text{ kPa}$$

(ج) نشان دهید که راستاهای اصلی تانسور تنش و تانسور تنش اعوجاج، منطبق اند.

۱۳.۴ صفحه تنش هشت‌وجهی، صفحه‌ای است که زاویه نرمال آن با هر یک از محورهای اصلی تنش، برابر است.

(الف) در هر نقطه، چه تعداد صفحه هشت‌وجهی مستقل وجود دارد؟

(ب) نشان دهید که تنش عمودی در صفحه هشت‌وجهی، برابر با یک‌سوم ناوردای نخست تنش است.

(ج) نشان دهید که تنش برشی در صفحه هشت‌وجهی، برابر است با،

$$T_s = \frac{1}{3} [(T_1 - T_2)^2 + (T_2 - T_3)^2 + (T_3 - T_1)^2]^{1/2}$$

در رابطه فوق، T_1 ، T_2 و T_3 مقادیر اصلی تانسور تنش اند.

۱۴.۴ (الف) فرض کنید که m و n دو بردار یک‌گه معرف صفحات M و N باشند. صفحات مذکور از نقطه P می‌گذرند. نشان دهید که در حالت تنش دلخواه در نقطه P ، مؤلفه بردار تنش t_m در راستای m ، برابر با مؤلفه بردار تنش t_n در راستای n است.

(ب) اگر $m = e_1$ و $n = e_2$ ، نتایج (الف) چه تغییری خواهند کرد؟

۱۵.۴ فرض کنید که m بردار یک‌گه معرف صفحه M باشد. صفحه M ، از نقطه P می‌گذرد. نشان دهید که بردار تنش در همه صفحات دربردارنده گشش تنش t_m ، در صفحه M واقع است.

۱۶.۴ فرض کنید، t_m و t_n بردارهای تنش در صفحاتی باشند که به ترتیب، با بردارهای یک‌گه m و n تعریف می‌شوند. تنش‌های مذکور از نقطه P می‌گذرند. نشان دهید که اگر k بردار یک‌گه صفحه دربردارنده t_m و t_n باشد، t_k بر m و n عمود خواهد بود.

۱۷.۴ تابع $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ مفروض است. مقدار بیشینه f را با قید $x + y = 2$ بیابید.

۱۸.۴ صحیح یا غلط

× (۱) اگر جسم، شتاب زاویه‌ای داشته باشد، تانسور تنش، متقارن نخواهد بود.
✓ (۲) تنش برشی در صفحه تنش عمودی بیشینه، همواره برابر با صفر است.

۱۹.۴ صحیح یا غلط

× (۱) تنش عمودی در صفحه تنش برشی بیشینه، همواره برابر با صفر است.
✓ (۲) بردار تنش در صفحه‌ای که نرمال آن در راستای $e_1 + 2e_2 - 2e_3$ قرار دارد، برابر است با

$t = 50e_1 + 100e_2 - 100e_3$ MPa. صفحه مذکور، صفحه اصلی است.

$t = 50(e_2 + 2e_2 - 2e_3)$ نرمال همواره تنش برشی نیست. تنش‌های نرمال آن تنش‌های اصلی هستند.

۲۰.۴ چرا نمی‌توان دو ماتریس زیر را معرف یک تانسور تنش دانست؟

$$\begin{bmatrix} 100 & 200 & 40 \\ 200 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & -50 \end{bmatrix} \text{ MPa}, \quad \begin{bmatrix} 40 & 100 & 60 \\ 100 & 100 & 0 \\ 60 & 0 & 20 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

۲۱.۴ مفروض است،

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 100 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

(الف) اندازه تنش برشی را در صفحه‌ای که نرمال آن در راستای $e_1 + e_2$ است، بیابید.

(ب) تنش‌های عمودی بیشینه و کمینه، و صفحاتی را که بر آن‌ها وارد می‌شوند، بیابید.

(ج) تنش برشی بیشینه و صفحه‌ای را که بر آن وارد می‌شود، بیابید.

۲۲.۴ نشان دهید که معادله تنش عمودی در صفحه تنش برشی بیشینه، برابر است با،

$$T_n = \frac{(T_n)_{\max} + (T_n)_{\min}}{2}$$

۲۳.۴ مؤلفه‌های تنش در نقطه‌ای برابر اند با،

$$T_{11} = 100 \text{ MPa}, \quad T_{22} = 300 \text{ MPa}$$

$$T_{33} = 400 \text{ MPa}, \quad T_{12} = T_{13} = T_{23} = 0$$

(الف) تنش برشی بیشینه و صفحاتی را که بر آن‌ها وارد می‌شود، بیابید.

(ب) تنش عمودی را در این صفحات بیابید.

(ج) آیا صفحه یا صفحاتی وجود دارد که تنش عمودی در آن‌ها برابر با ۵۰۰ MPa باشد؟

۲۴.۴ مقادیر اصلی تانسور تنش T برابر اند با: $T_1 = 10 \text{ MPa}$, $T_2 = -10 \text{ MPa}$ و $T_3 = 30 \text{ MPa}$ اگر ماتریس تنش برابر باشد با،

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & T_{33} \end{bmatrix} \times 10 \text{ MPa}$$

مقادیر T_{11} و T_{33} را بیابید.

اگر حالت تنش در نقطه‌ای برابر باشد با، (۲۵.۴)

$$[T] = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & 400 \end{bmatrix} \text{ kPa}$$

(الف) اندازه تنش برشی را در صفحه‌ای که نرمال آن در راستای $(2e_1 + 2e_2 + e_3)$ است، بیابید. (ب) تنش برشی بیشینه را بیابید.

مفروض است، (۲۶.۴)

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

(الف) بردار تنش را در صفحه‌ای که نرمال آن در راستای $e_1 + e_2$ است، بیابید.

(ب) تنش عمودی را در صفحه مذکور بیابید.

(ج) اندازه تنش برشی را در صفحه مذکور بیابید.

(د) تنش برشی بیشینه و صفحاتی را که تنش برشی بیشینه بر آن‌ها وارد می‌شود، بیابید.

۲۷.۴ حالت تنشی که در آن مؤلفه‌های غیر صفر تنش، تنها یک زوج تنش برشی باشد، برش ساده نامیده می‌شود. فرض کنید: $T_{12} = T_{21} = \tau$ و T_{ij} های دیگر برابر با صفر.

(الف) مقادیر اصلی و راستاهای اصلی حالت تنش مذکور را بیابید.

(ب) تنش برشی بیشینه و صفحاتی را که بر آن‌ها وارد می‌شود، بیابید.

۲۸.۴ حالت تنشی که در آن مؤلفه‌های غیر صفر تنش، تنها سه مؤلفه تنش عمودی باشند؛ حالت تنش سه-محوری نامیده می‌شود. فرض کنید: $T_{11} = \sigma_1$, $T_{22} = \sigma_2$ و $T_{33} = \sigma_3$ و $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ و T_{ij} های دیگر برابر با صفر. تنش برشی بیشینه و صفحه‌ای را که بر آن وارد می‌شود، بیابید.

۲۹.۴ نشان دهید که اگر گشتاور حجمی به ازای حجم واحد، برابر با صفر نباشد (برای مثال، جامد دی‌الکتریک ناهمسانگرد قطبیده)، تانسور تنش متقارن نخواهد بود.

۳۰.۴ توزیع تنش زیر مفروض است.

$$[T] = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & T_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ T_{12}(x_1, x_2) & x_1 - 2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{bmatrix}$$

T_{12} را چنان بیابید که در غیاب نیروهای حجمی، توزیع تنش تعادلی؛ و بردار تنش در صفحه $x_1 = 1$ برابر با $t = (1 + x_2)e_1 + (5 - x_2)e_2$ باشد.

۳۱.۴ تانسور تنش زیر را در نظر بگیرید.

$$[T] = \alpha \begin{bmatrix} x_2 & -x_2 & 0 \\ -x_2 & 0 & -x_2 \\ 0 & -x_2 & T_{33} \end{bmatrix}$$

T_{33} را چنان بیابید که در حضور نیروی حجمی $B = -ge_3$ ، تانسور تنش، معادلات تعادل را تأمین کند. g ثابت است.

۳۲.۴ توزیع تنش تعادلی در جسمی خاص، در غیاب نیروهای حجمی، برابر است با،

$$\begin{aligned} T_{11} &= Ax_2, & T_{12} &= T_{21} = x_1 \\ T_{22} &= Bx_1 + Cx_2, & T_{33} &= (T_{11} + T_{22})/2 \end{aligned}$$

و T_{ij} های دیگر برابر با صفر اند. همچنین، در صفحه مرزی $x_2 - x_1 = 0$ جسم بدون تنش است. (الف) مقدار C و (ب) مقدار A و B را بیابید.

آیا مؤلفه‌های تنش زیر، معادلات تعادل را در غیاب نیروهای حجمی تأمین می‌کنند؟

$$\begin{aligned} T_{11} &= \alpha[x_1^2 + v(x_1^2 - x_2^2)], & T_{22} &= \alpha[x_1^2 + v(x_2^2 - x_1^2)] \\ T_{33} &= \alpha v(x_1^2 + x_2^2), & T_{12} &= T_{21} = -2\alpha v x_1 x_2 \\ T_{13} &= T_{31} = 0, & T_{23} &= T_{32} = 0 \end{aligned}$$

مسئله قبل را با توزیع تنش زیر تکرار کنید.

$$[T] = \alpha \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & 2x_1 - x_2 & 0 \\ 2x_1 - x_2 & x_1 - 2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 \end{bmatrix}$$

۳۵.۴ فرض کنید که توزیع تنش به صورت زیر باشد (این حالت، حالت تنش صفحه‌ای نام دارد).

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11}(x_1, x_2) & T_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ T_{12}(x_1, x_2) & T_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(الف) اگر تنش در حالت تعادل باشد، آیا ممکن است که نیروهای حجمی به x_2 وابسته باشند؟

(ب) نشان دهید که اگر تابعی مانند $\varphi(x_1, x_2)$ تعریف کنیم، چنان که $T_{11} = \partial^2 \varphi / \partial x_2^2$ ، $T_{22} = \partial^2 \varphi / \partial x_1^2$ و $T_{12} = -\partial^2 \varphi / \partial x_1 \partial x_2$ ، آن گاه، هر $\varphi(x_1, x_2)$ که تا مشتقات سوم پیوسته باشد، معادلات تعادل را در غیاب نیروهای حجمی تأمین خواهد کرد.

۳۶.۴ در مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) ، حجم دیف‌زف، محاسبه کنید.

۳۷.۴ آیا از دیدگاه فیزیک، معادلات زیر می‌توانند معرف تغییرشکل قابل قبول یک جسم باشند؟ دلیل (یا دلایل) ارائه کنید.

$$x_1 = -\frac{1}{4}X_1, \quad x_2 = \frac{1}{4}X_2, \quad x_3 = -4X_3$$

۳۸.۴ تغییرشکل جسمی برابر است با،

$$x_1 = 4X_1, \quad x_2 = -(\frac{1}{4})X_2, \quad x_3 = -(\frac{1}{4})X_3$$

جامد کشسان

تاکنون سینماتیک تغییر شکل، توصیف حالت تنش، و اصول پنج گانه فیزیک پیوستار را مطالعه کرده ایم (به بخش ۱۸.۴ بنگرید): اصل پایداری جرم، اصل تکانه خطی، اصل گشتاور تکانه، اصل پایداری انرژی و نابرابری انتروپی. همه روابط مذکور برای هر پیوستار برقرار اند، چرا که در استنتاج این روابط، هیچ اشاره ای به ماده نشد.

با این همه، معادلات فوق، برای توصیف پاسخ ماده ای خاص تحت بارگذاری مفروض، کافی نیستند. به تجربه می دانیم که در شرایط بارگذاری یکسان، پاسخ فولاد و آب متفاوت است. به علاوه، در مورد ماده ای خاص، این پاسخ با شرایط بارگذاری مختلف، تغییر می کند. برای مثال، در بارگذاری های متوسط، تغییر شکل فولاد به علت اعمال بار، با برداشتن بار، ناپدید می شود. این جنبه رفتار ماده، کشسانی^۱ نام دارد. بارگذاری بیش از حدی خاص، موجب تغییر شکل دائم، یا حتی شکست می شود، و این رفتار، با رفتار کشسانی، کاملاً متفاوت است.

در این فصل، مواد آرمانی را مطالعه می کنیم. این مواد، مدل رفتار کشسان جامدات واقعی به شمار می روند. معادلات ساختاری مدل کشسان خطی همسانگرد و برخی روش های منتخب در حل مسائل مقدار مرزی کشسانی، از جمله، حل تنش صفحه ای و حل کرنش صفحه ای و نیز حل به وسیله توابع پتانسیل در بخش الف؛ فرمول بندی معادلات ساختاری مدل های کشسان خطی ناهمسانگرد در بخش ب؛ و چند مثال از مدل کشسان غیر خطی همسانگرد تراکم ناپذیر در بخش ج ارائه خواهد شد.

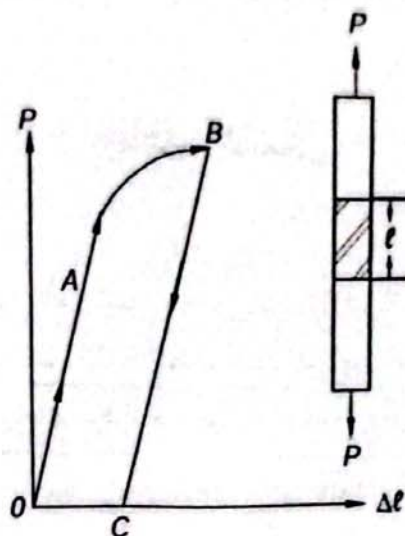
۱.۵ خواص مکانیکی

در این جا هدف، درک رفتار مکانیکی مواد جامد است. برای این منظور، چند آزمایش ذهنی را که بر مبنای آزمایش های عینی مدل شده اند، انجام می دهیم.

فرض کنید که یک نمونه آزمایش استوانه ای باریک با مساحت مقطع عرضی A را از بلوکی از ماده جدا کنیم. حال، در اثر اعمال نیروی محوری P ، میله به شکل استاتیک کشیده می شود. افزایش طول Δl نسبت به طول

^۱ در سراسر کتاب، «کشسانی» معادل واژه «الاستیسیت» به کار رفته است. - م.

معیار محوری ℓ ، اندازه‌گیری می‌شود. نمونه‌ای از ترسیم نیروی کششی بر حسب افزایش طول در شکل ۱-۱۵ نشان داده شده است. (در قسمت خطی OA که گستره تناسب نام دارد)، اگر بار به صفر کاهش یابد (یعنی، باربرداری)، نمودار، خط OA را طی می‌کند و به O باز می‌گردد. در این حالت، قطعه از خود خاصیت کشسانی بروز داده است. با اعمال باری بزرگ‌تر از A و سپس باربرداری، نوعاً مسیر به شکل $OABC$ است و «افزایش طول دائم» (OC) ایجاد می‌شود. با اعمال دوباره بار در C ، قطعه با شیبی برابر با شیب OA ، رفتار کشسان بروز می‌دهد، اما حد تناسب افزایش می‌یابد. در این حالت، می‌گوییم ماده دچار کار سختی شده است.)



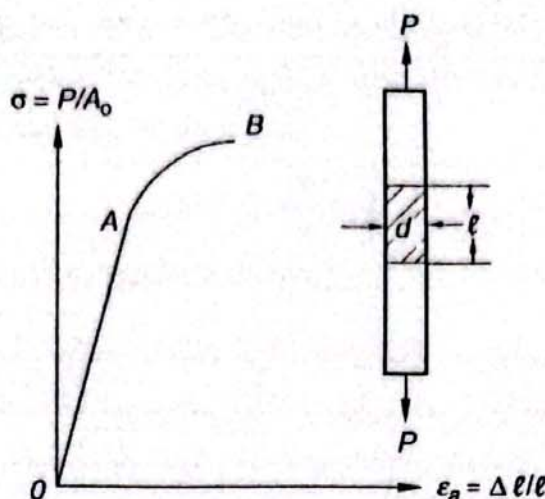
شکل ۱-۱۵

نمودار بار بر حسب افزایش طول که در شکل ۱-۱۵ نشان داده شده است، به مقطع عرضی قطعه و طول معیار محوری (ℓ)، وابسته است. برای داشتن تصویری از رفتار ماده که از اندازه قطعه و متغیرهای ناشی از ساخت آزمایش، مستقل باشد؛ می‌توانیم تنش $\sigma = P/A_0$ را (A_0 مساحت تغییر شکل یافته مقطع عرضی است) بر حسب کرنش محوری $\epsilon_a = \Delta\ell/\ell$ ترسیم کنیم (چنان که در شکل ۲-۱۵ نشان داده شده است). در این روش، نتایج آزمون، مستقل از ابعاد قطعه به دست می‌آیند. بنا بر این، شیب خط OA ، یکی از ضرایب ماده است و مدول یانگ (یا مدول کشسانی) نامیده می‌شود. این مدول را با E_Y نمایش می‌دهیم؛ به عبارت دیگر،

$$E_Y = \frac{\sigma}{\epsilon_a} \quad (1.15)$$

مقدار عددی E_Y برای فولاد، حدود 207 GPa ($30 \times 10^6 \text{ psi}$) است؛ بدین معنا که کرنش محوری میله‌ای فولادی با مساحت مقطع عرضی 32.3 cm^2 (5 in^2) که باری به اندازه $667,000 \text{ N}$ ($150,000 \text{ lbs}$) را تحمل می‌کند، برابر است با،

$$\epsilon_a = \frac{667,000 / (32.3 \times 10^{-2})}{207 \times 10^9} \approx 10^{-2}$$



شکل ۲-۱.۵

مطابق انتظار، کرنش در گستره کشسان خطی فلزات، کاملاً کوچک است؛ لذا، می‌توانیم برای توصیف تغییر شکل فلزات از نظریه کرنش بی‌نهایت کوچک استفاده کنیم.

در آزمون کشش، می‌توانیم ابعاد جانبی را نیز اندازه‌گیری کنیم. اگر مقطع عرضی میله، دایروی، و قطر اولیه آن d باشد، این مقطع در مورد فلزات آرمانی خاص، دایروی خواهد ماند، و قطر، هم‌زمان با افزایش بار کششی، کاهش می‌یابد. با فرض این که ϵ_d کرنش جانبی باشد (برابر با $\Delta d/d$)، درمی‌یابیم که اگر کرنش‌ها کوچک بمانند، نسبت $-\epsilon_d/\epsilon_a$ ثابت خواهد بود. این ثابت را، نسبت پواسون می‌نامیم و با ν نمایش می‌دهیم. نمونه‌ای از مقدار ν فولاد برابر با 0.3 است.

تاکنون تنها قطعه‌ای منفرد را، خارج از بلوک ماده در نظر گرفته‌ایم. می‌توان تصور کرد که مدول کشسانی (E) و نیز نسبت پواسون (ν)، ممکن است به راستای قطعه نسبت به بلوک بستگی داشته باشند. در این حالت، ماده نسبت به خواص کشسان آن، ناهمسانگرد نامیده می‌شود. خواص ناهمسانگرد در موادی با ساختار درونی خاص بروز می‌یابند؛ مانند، چوب یا ورق فولاد نوردشده یا مواد کامپوزیت و بسیاری از بافت‌های زیستی. اگر قطعات، در راستاهای متفاوت بریده شوند، در همسایگی به قدر کافی نزدیک، نمودار تنش-کرنش حاصل، یکسان خواهد بود، و می‌توانیم نتیجه بگیریم که ماده نسبت به خواص کشسان خود در آن همسایگی، همسانگرد است.

افزون بر وابستگی احتمالی خواص کشسان به راستا، ممکن است این خواص از یک همسایگی تا دیگری نیز تغییر کنند. در این حالت، ماده ناهمگن نامیده می‌شود. اگر تغییری در نتایج آزمون قطعات در همسایگی‌های مختلف وجود نداشته باشد، ماده را همگن می‌نامیم.

پیش‌تر اشاره کردیم که (ممکن است، مقطع عرضی دایروی میله در آزمون کشش، دایروی بماند. این حالت، هنگامی صادق است که ماده نسبت به خواص کشسان خود، همگن و همسانگرد باشد.)

می‌توان آزمون‌های مشخصه دیگری را نیز بر ماده کشسان انجام داد. ممکن است در مواردی، تغییر حجم بلوک ماده تحت فشار هیدروستاتیک (σ)، مطلوب باشد. در این حالات، تنش برابر است با،

$$T_{ij} = \sigma \delta_{ij} \quad (2.1.5)$$

رابطه میان تنش وارده (σ) و تغییر حجم به ازای حجم اولیه (e) (که تساع) نیز نامیده می‌شود؛ به معادله (۲.۱۰.۳) بنگرید) را در آزمایشی مناسب، اندازه‌گیری می‌کنیم. برای ماده کشسان در e کوچک، رابطه‌ای خطی وجود دارد و مدول حجمی (k) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$k = \frac{\sigma}{e} \quad (۳.۱.۵)$$

نمونه‌ای از مقدار k برای فولاد ۱۳۸ GPa (20×10^6 psi) است.

از آزمایش پیچش، ثابت کشسان دیگری به دست می‌آید. برای مثال، می‌توانیم میله‌ای فولادی و استوانه‌ای با شعاع مقطع عرض دایروی r را تحت گشتاور پیچشی (M_t) در طول محور استوانه، قرار دهیم. طول میله برابر با ℓ است و به محض اعمال گشتاور M_t ، میله به اندازه زاویه θ پیچانده می‌شود. در θ کوچک، رابطه‌ای خطی میان زاویه پیچش (θ) و گشتاور وارده (M_t) به دست می‌آید. مدول برشی (μ) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mu = \frac{M_t \ell}{I_p \theta} \quad (۴.۱.۵)$$

در رابطه فوق، $I_p = \pi r^4 / 2$ (گشتاور دوم قطبی سطح). نمونه‌ای از مقدار μ برای فولاد ۷۶ GPa (11×10^6 psi) است.

در مورد جامد کشسان ناهمسانگرد، مقادیر این ضرایب ماده (ثابت‌های ماده)، به راستای قطعه تهیه‌شده از بلوک ماده وابسته‌اند. از آن‌جا که بی‌شمار راستا ممکن است، پرسش مهم و جالب توجه این است که، چه تعداد ضریب برای تعریف کامل رفتار مکانیکی جامد کشسان خاص نیاز است؟ این پرسش را در بخش بعد، در مورد جامد کشسان خطی، پاسخ خواهیم داد. (?)

۲.۵ جامد کشسان خطی

آزمایش‌هایی که در بخش ۱.۵ ذکر شدند، درون حدودی خاص، دارای ویژگی‌های مشترک زیر اند.

۱. رابطه میان بارگذاری وارده و کمیت معرف تغییر شکل، خطی است.
۲. نرخ اعمال بار، بی‌تأثیر است.
۳. به محض حذف بارگذاری، تغییر شکل‌ها کاملاً ناپدید می‌شوند.
۴. تغییر شکل‌ها بسیار کوچک اند.

حال، از مشخصه‌های ۱ تا ۴ برای فرموله کردن معادله ساختاری ماده آرمانی (جامد کشسان خطی یا جامد کشسان هوکی) استفاده می‌کنیم. معادله ساختاری، رابطه میان تنش و کمیت‌های تغییر شکل متناظر است. در این مورد، تغییر شکل‌ها کوچک اند و نرخ اعمال بار، بی‌اثر است. بنا بر این، می‌توانیم بنویسیم،

$$T = T(E) \quad (۱.۲.۵)$$

در رابطه فوق T تانسور تنش کوشی و E تانسور کرنش بی‌نهایت کوچک است. در صورتی که $T(0) = 0$ و نیز تابع فوق، خطی باشد، به صورت مؤلفه‌ای خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} T_{11} &= C_{1111}E_{11} + C_{1112}E_{12} + \dots + C_{1133}E_{33} \\ T_{12} &= C_{1211}E_{11} + C_{1212}E_{12} + \dots + C_{1233}E_{33} \\ &\vdots \\ T_{33} &= C_{3311}E_{11} + C_{3312}E_{12} + \dots + C_{3333}E_{33} \end{aligned} \quad (۲.۲.۵)$$

می توان نه معادله فوق را به شکل فشرده، چنین نوشت،

$$T_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} \quad (۳.۲.۵)$$

چون T_{ij} و E_{ij} مؤلفه های تانسورهای مرتبه دوم اند، از قاعده خارج قسمت که در بخش ۱۹.۲ آمد، می دانیم که C_{ijkl} معرف مؤلفه های تانسور مرتبه چهارمی است که در این جا تانسور کشسانی نامیده می شود. قانون تبدیل (به بخش ۱۹.۲ بنگرید)، رابطه میان مقادیر این مؤلفه ها نسبت به پایه پرایم دار (e'_i) و پایه بدون پرایم (e_i) است،

$$C'_{ijkl} = Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} Q_{sl} C_{mnpq} \quad (۴.۲.۵)$$

اگر جسم همگن باشد، یعنی، خواص مکانیکی همه ذرات جسم، یکسان باشند، C_{ijkl} از موقعیت مستقل خواهد بود. تنها به اجسام همگن خواهیم پرداخت. در معادله (۳.۲.۵)، ضرب (۸۱) ضریب وجود دارد. با وجود این، چون $E_{ij} = E_{ji}$ همواره می توانیم حاصل جمع دو جمله مانند $C_{1112} E_{12} + C_{1121} E_{21}$ را به یک جمله، $(C_{1112} + C_{1121}) E_{12}$ ، تبدیل کنیم؛ بدین ترتیب، $(C_{1112} + C_{1121})$ خود یک ضریب مستقل خواهد بود. به روشی دیگر، می توانیم به سادگی اختیار کنیم، $C_{1112} = C_{1121}$ ؛ لذا، به علت تقارن تانسور کرنش، خواهیم داشت،

$$C_{ijkl} = C_{jilk} \quad (۵.۲.۵)$$

معادلات فوق تعداد C_{ijkl} های مستقل را از ۸۱ به ۵۴ تقلیل می دهند. تنها حالتی را در نظر می گیریم که در آن تانسور تنش، متقارن است، یعنی،

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (۶.۲.۵)$$

$$۸۱ \xrightarrow{(۱)} ۵۴ \xrightarrow{(۲)} ۳۶ \xrightarrow{(۳)} ۲۱$$

در نتیجه،

$$C_{ijkl} = C_{jkl i} \quad (۷.۲.۵)$$

معادلات فوق، تعداد ضرایب مستقل را ۱۸ واحد تقلیل می دهند. لذا، جسم کشسان خطی در حالت کلی، حداکثر ۳۶ ضریب ماده خواهد داشت.

افزون بر این، فرض می کنیم که مفهوم «کشسانی»، متضمن وجود تابع انرژی ذخیره شده (یعنی، $U(E_{ij})$ که تابع انرژی کرنش نیز نامیده می شود) باشد. تابع مذکور، تابع مثبت معینی از مؤلفه های کرنش است، به گونه ای که،

$$T_{ij} = \frac{\partial U}{\partial E_{ij}} \quad (۸.۲.۵)$$

با چنین فرضی (منشأ معادله (۸.۲.۵) در مثال ۱.۲.۵ خواهد آمد)، می توان نشان داد که (به مثال ۲.۲.۵ بنگرید)،

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (۹.۲.۵)$$

معادلات (۹.۲.۵)، تعداد ضرایب کشسان را از ۳۶ به ۲۱ تقلیل می دهند.

◀ مثال ۱.۲.۵

(الف) در نظریه کشسانی بی نهایت کوچک، مؤلفه های جابجایی و مؤلفه های شیب جابجایی، هر دو بسیار کوچک فرض می شوند. نشان دهید که با این فرض ها، می توان تانسور نرخ تغییر شکل (D) را با DE/Dt تقریب زد. E تانسور کرنش بی نهایت کوچک است.

(ب) نشان دهید که اگر T_{ij} برابر باشد با $C_{ijkl}E_{kl}$ (معادله (۳.۲.۵))، نرخ انجام کار مؤلفه‌های تنش برای تغییر حجم و تغییر شکل حجم ماده، برابر است با،

$$P_s = \frac{DU}{Dt} \quad (۱۰.۲.۵)$$

در رابطه فوق، U تابع انرژی کرنش است و با معادله (۸.۲.۵) تعریف می‌شود.

حل

(الف) با استفاده از $\dot{E}_{ij} = (\partial u_i / \partial X_j + \partial u_j / \partial X_i)$ خواهیم داشت،

$$\dot{E}_{ij} = \frac{\partial}{\partial X_j} \frac{Du_i}{Dt} + \frac{\partial}{\partial X_i} \frac{Du_j}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial X_j} + \frac{\partial v_j}{\partial X_i} \quad (۱۱.۲.۵)$$

چون $x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t)$ می‌توانیم به‌دست آوریم،

$$\frac{\partial v_i}{\partial X_j} + \frac{\partial v_j}{\partial X_i} = \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial X_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial X_i} \quad (۱۲.۲.۵)$$

اکنون، با استفاده از $x_m = X_m + u_m$ که در آن u_m مؤلفه‌های جابجایی بی‌نهایت کوچک است، خواهیم داشت،

$$\frac{\partial x_m}{\partial X_i} = \delta_{mi} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i} \quad \text{و} \quad \frac{\partial x_m}{\partial X_j} = \delta_{mj} + \frac{\partial u_m}{\partial X_j} \quad (۱۳.۲.۵)$$

لذا، با صرف‌نظر از کمیت‌های مرتبه بالاتر، به‌دست می‌آوریم،

$$\dot{E}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial X_j} + \frac{\partial v_j}{\partial X_i} = \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \delta_{mj} + \frac{\partial v_j}{\partial x_m} \delta_{mi} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \equiv \dot{D}_{ij} \quad (۱۴.۲.۵)$$

یعنی،

$$\frac{DE_{ij}}{Dt} = D_{ij} \quad (۱۵.۲.۵)$$

(ب) در بخش ۱۲.۴، برای محاسبه توان تنش (یعنی، نرخ انجام کار مؤلفه‌های تنش برای تغییر حجم و تغییر شکل حجم ماده)، فرمولی به‌صورت زیر به‌دست آوردیم (به معادله (۴.۱۲.۴) بنگرید).

$$P_s = T_{ij} D_{ij} \quad (۱۶.۲.۵)$$

با استفاده از معادله (۱۵.۲.۵)، خواهیم داشت،

$$P_s = T_{ij} \frac{DE_{ij}}{Dt} \quad (۱۷.۲.۵)$$

اکنون، اگر $T_{ij} = \partial U / \partial E_{ij}$ (معادله (۸.۲.۵))، آن‌گاه،

$$P_s = \frac{\partial U}{\partial E_{ij}} \frac{DE_{ij}}{Dt} = \frac{\partial U}{\partial E_{ij}} \left(\frac{\partial E_{ij}}{\partial t} \right)_{X_i = \text{ثابت}} = \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{X_i = \text{ثابت}} = \frac{DU}{Dt} \quad (۱۸.۲.۵)$$

یعنی، با فرضی که در معادله (۸.۲.۵) به کار رفت، نرخ انجام کار مؤلفه‌های تنش برای تغییر حجم و شکل (P_s).

نرخ افزایش انرژی کرنش را کاملاً تعیین می‌کند. لذا، اگر P_3 برابر با صفر باشد، انرژی کرنش ثابت می‌ماند (یعنی، ذخیره می‌شود). می‌توان این نتیجه را منشأ فرض وجود تابع انرژی مثبت معین^۱ (معادله (۸.۲.۵)) دانست.



◀ مثال ۲.۲.۵

اگر $T_{ij} = \partial U / \partial E_{ij}$ نشان دهید که در جسم کشسان خطی، (الف) مؤلفه‌های تانسور کشسان شرط زیر را تأمین می‌کنند

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (۱۹.۲.۵)$$

(ب) تابع انرژی کرنش (U)، برابر است با،

$$U = \frac{1}{2} T_{ij} E_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijkl} E_{ij} E_{kl} \quad (۲۰.۲.۵)$$

حل

(الف) در جامد کشسان خطی، $T_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}$ بنا بر این،

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial E_{rs}} = C_{ijrs} \quad (۲۱.۲.۵)$$

لذا، از معادله (۸.۲.۵)، (یعنی، $T_{ij} = \partial U / \partial E_{ij}$) خواهیم داشت،

$$C_{ijrs} = \frac{\partial^2 U}{\partial E_{rs} \partial E_{ij}} = \frac{\partial^2 U}{\partial E_{ij} \partial E_{rs}} = C_{rstj} \quad (۲۲.۲.۵)$$

بنا بر این،

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (۲۳.۲.۵)$$

(ب) با استفاده از $T_{ij} = \partial U / \partial E_{ij}$ خواهیم داشت،

$$T_{ij} dE_{ij} = \frac{\partial U}{\partial E_{ij}} dE_{ij} = dU \quad (۲۴.۲.۵)$$

یعنی،

$$dU = C_{ijkl} E_{kl} dE_{ij} \quad (۲۵.۲.۵)$$

با تغییر اندیس‌های ظاهری، به‌دست می‌آوریم،

$$dU = C_{klij} E_{ij} dE_{kl} \quad (۲۶.۲.۵)$$

^۱ در این فصل، مفهوم کشسانی را بدون در نظر داشتن هرگونه اثرات ترمودینامیکی تعریف می‌کنیم. در نظریه ترمو-الاستیک، تابع انرژی کرنش، در حرکت‌های هم‌دما با تابع انرژی داخلی، و در حرکت‌های هم‌انرژی با تابع انرژی هلمهولتز تعریف می‌شود.

اما $C_{klij} = C_{ijkl}$ بنا بر این،

$$dU = C_{ijkl} E_{ij} dE_{kl} \quad (۲۷.۲.۵)$$

با جمع معادلات (۲۵.۲.۵) و (۲۷.۲.۵)، به دست می‌آوریم،

$$2dU = C_{ijkl} (E_{kl} dE_{ij} + E_{ij} dE_{kl}) = C_{ijkl} d(E_{ij} E_{kl})$$

که از آن به دست می‌آید،

$$U = \frac{1}{2} C_{ijkl} E_{ij} E_{kl} \quad (۲۸.۲.۵)$$

در ادامه، نخست نشان می‌دهیم که اگر ماده همسانگرد باشد، تنها ۲ ضریب مستقل وجود خواهد داشت. بعداً در بخش ب به معادلات ساختاری جامد کشسان ناهمسانگرد بل (۱۳) ضریب (جامد کشسان مونوکلینیک) (۹) ضریب (جامد کشسان ارتوتروپیک) و (۵) ضریب (جامد همسانگرد عرضی) خواهیم پرداخت.

بخش الف: جامد کشسان خطی همسانگرد

۳.۵ جامد کشسان خطی همسانگرد

در صورتی ماده را همسانگرد می‌نامیم که بتوان خواص مکانیکی آن را بدون در نظر داشتن راستاها توصیف کرد. اگر چنین نباشد، ماده، ناهمسانگرد نامیده می‌شود. می‌توان بسیاری از فلزات ساختمانی مانند فولاد و آلومینیوم را بدون خطای قابل ملاحظه‌ای، همسانگرد به‌شمار آورد.

پیش‌تر، برای جامد کشسان خطی، نسبت به پایه e_i ، به دست آمد،

$$T_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} \quad (۱.۳.۵)$$

و نسبت به پایه e'_i ،

$$T'_{ij} = C'_{ijkl} E'_{kl} \quad (۲.۳.۵)$$

اگر ماده همسانگرد باشد، مؤلفه‌های تانسور کشسانی، قطع نظر از چگونگی دوران یا بازتابش پایه راست گوشه، تحت همه تبدیل‌های متعامد پایه، باید یکسان بمانند. یعنی،

$$C'_{ijkl} = C_{ijkl} \quad (۳.۳.۵)$$

تانسور همسانگرد، تانسوری است که مؤلفه‌های آن نسبت به هر پایه یکامتعاملد، یکسان باشند. برای مثال، تانسور همانی (I)، مسلماً همسانگرد است؛ زیرا، مؤلفه‌های آن (δ_{ij}) نسبت به هر پایه دکارتی، یکسان اند. در واقع، می‌توان ثابت کرد (به مسئله ۲.۵ بنگرید) که تانسور همانی (δ_{ij}) (به غیر از مضارب اسکالر آن)، تنها تانسور مرتبه دوم همسانگرد است. می‌توانیم از این تانسور مرتبه دوم همسانگرد (δ_{ij}) سه تانسور مرتبه چهارم همسانگرد زیر را تشکیل دهیم (به قاعده ضرب در بخش ۱۹.۲ بنگرید).

$$A_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}, \quad B_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}, \quad H_{ijkl} = \delta_{il}\delta_{jk} \quad (۴.۳.۵)$$

در بخش ب در این فصل، جزئیات ساده‌سازی C_{ijkl} کلی به همسانگرد C_{ijkl} خواهیم کرد. در این جا، به‌عنوان میان‌بر به حالت همسانگرد، تانسور کشسانی C_{ijkl} را بر حسب A_{ijkl} ، B_{ijkl} و H_{ijkl} بیان می‌کنیم. یعنی،

$$C_{ijkl} = \lambda A_{ijkl} + \alpha B_{ijkl} + \beta H_{ijkl} \quad (۵.۳.۵)$$

در رابطه فوق، λ ، α و β ثابت اند. با استفاده از معادلات (۴.۳.۵) و (۵.۳.۵)، معادله (۱.۳.۵) به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$T_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} E_{kl} + \alpha \delta_{ik} \delta_{jl} E_{kl} + \beta \delta_{il} \delta_{jk} E_{kl} \quad (۶.۳.۵)$$

لذا،

$$T_{ij} = \lambda E_{kk} \delta_{ij} + (\alpha + \beta) E_{ij} \quad (۷.۳.۵)$$

و یا، در صورتی که $(\alpha + \beta)$ را با 2μ نمایش دهیم، خواهیم داشت،

$$T_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \quad (۸.۳.۵)$$

که در آن،

$$e \equiv E_{kk} \quad (۹.۳.۵)$$

معرف اتساع است. نمایش مستقیم معادله (۸.۳.۵)، برابر است با،

$$\mathbf{T} = \lambda e \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} \quad (۱۰.۳.۵)$$

صورت گسترده معادله (۸.۳.۵) (یا معادله (۱۰.۳.۵)) برابر است با،

$$\begin{cases} T_{11} = \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + 2\mu E_{11} & (۱۱.۳.۵) \\ T_{22} = \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + 2\mu E_{22} & (۱۲.۳.۵) \\ T_{33} = \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + 2\mu E_{33} & (۱۳.۳.۵) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{12} = 2\mu E_{12} & (۱۴.۳.۵) \\ T_{13} = 2\mu E_{13} & (۱۵.۳.۵) \\ T_{23} = 2\mu E_{23} & (۱۶.۳.۵) \end{cases}$$

معادله (۸.۳.۵) (یا معادله (۱۰.۳.۵))، معادلات ساختاری جامد کشسان خطی همسانگرد است. دو ثابت ماده (λ) و (μ) ضرایب لامه یا ثابت‌های لامه نام دارند. چون E_{ij} ها بی‌بعد اند، λ و μ با تانسور تنش هم‌بعد اند (نیرو به ازای مساحت واحد). مقادیر ثابت‌های لامه ماده واقعی، با استفاده از آزمایش‌های مناسب تعیین می‌شوند. بعداً در این باره بیش‌تر بحث خواهد شد.

◀ مثال ۱.۳.۵

(الف) نشان دهید که راستاهای اصلی تنش و کرنش ماده هوکی همسانگرد، برهم منطبق اند. (ب) میان مقادیر اصلی تنش و کرنش، رابطه‌ای بیابید.

حل

(الف) فرض کنید که $\mathbf{n}_1$ ویژه‌برداری از تانسور کرنش ($\mathbf{E}$) باشد (یعنی، $\mathbf{E}\mathbf{n}_1 = E_1 \mathbf{n}_1$). در این صورت، با استفاده از قانون هوک (معادله (۱۰.۳.۵))، خواهیم داشت،

$$\mathbf{T}\mathbf{n}_1 = 2\mu \mathbf{E}\mathbf{n}_1 + \lambda e \mathbf{n}_1 = (2\mu E_1 + \lambda e) \mathbf{n}_1$$

بنا بر این، Π_1 برای تانسور T نیز ویژه بردار است.

(ب) فرض کنید که E_1, E_2 و E_3 ویژه مقدارهای E باشند؛ در این صورت، $e = E_1 + E_2 + E_3$ و با استفاده از معادلات (۱۱.۳.۵)، (۱۲.۳.۵) و (۱۳.۳.۵)، به دست می‌آید،

$$T_1 = 2\mu E_1 + \lambda(E_1 + E_2 + E_3)$$

$$T_2 = 2\mu E_2 + \lambda(E_1 + E_2 + E_3)$$

$$T_3 = 2\mu E_3 + \lambda(E_1 + E_2 + E_3)$$

▲

◀ مثال ۲.۳.۵

برای ماده همسانگرد، (الف) میان ناورداهای نخست تنش و کرنش، رابطه‌ای بیابید. (ب) با استفاده از نتیجه قسمت (الف)، قانون هوک را وارون کنید و کرنش را به شکل تابعی از تنش به دست آورید.

حل

(الف) با ادغام اندیس‌های معادله (۸.۳.۵)، (یعنی، جمع معادلات (۱۱.۳.۵)، (۱۲.۳.۵) و (۱۳.۳.۵))، به دست می‌آوریم،

$$T_{kk} = (2\mu + 3\lambda)E_{kk} = (2\mu + 3\lambda)e \quad (۱۷.۳.۵)$$

(ب) حال که،

$$e = \frac{T_{kk}}{(2\mu + 3\lambda)} \quad (۱۸.۳.۵)$$

می‌توان وارون معادله (۱۰.۳.۵) را به دست آورد. این وارون برابر است با،

$$E = \frac{1}{2\mu} T - \frac{\lambda T_{kk}}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} I \quad (۱۹.۳.۵)$$

▲

۴.۵ مدول یانگ، نسبت پواسون، مدول برشی و مدول حجمی

معادله (۸.۳.۵)، مؤلفه‌های تنش را بر حسب مؤلفه‌های کرنش بیان می‌کند. چنان‌که در مثال ۲.۳.۵ انجام شد، می‌توان این معادله را وارون ساخت و به دست آورد،

$$E_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[T_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} T_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (۱.۴.۵)$$

همچنین با استفاده از معادله (۱۸.۳.۵)، می‌توان نوشت،

$$e = \left(\frac{1}{3\lambda + 2\mu} \right) T_{kk} \quad (۲.۴.۵)$$

اگر حالت تنش چنان باشد که تنها یک مؤلفه تنش عمودی، غیر صفر باشد، این حالت را حالت تنش تک‌محور می‌نامیم. حالت تنش تک‌محور، تقریب خوبی از حالت تنش واقعی در میله استوانه‌ای مورد استفاده در آزمون کشش بخش ۱.۵ است. اگر راستای e_1 را راستای محوری اختیار کنیم، تنش T_{11} ، تنها مؤلفه غیر صفر خواهد بود؛ در این صورت، از معادله (۱.۴.۵) به دست می‌آوریم،

$$E_{11} = \frac{1}{2\mu} \left[T_{11} - \frac{\lambda}{2\lambda + 2\mu} T_{11} \right] = \frac{\lambda + \mu}{\mu(2\lambda + 2\mu)} T_{11} \quad (3.4.5)$$

$$E_{22} = E_{33} = \frac{1}{2\mu} \left[(0) - \frac{\lambda}{2\lambda + 2\mu} T_{11} \right] = -\frac{\lambda}{2\mu(2\lambda + 2\mu)} T_{11} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} E_{11} \quad (4.4.5)$$

$$E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0 \quad (5.4.5)$$

نسبت T_{11}/E_{11} که با نسبت σ/ϵ_a در آزمون کشش بخش ۱.۵ متناظر است، مدول یانگ یا مدول کشسانی (E_Y) نامیده می‌شود. لذا، با استفاده از معادله (۳.۴.۵) به‌دست می‌آوریم،

$$E_Y = \frac{\mu(2\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (6.4.5)$$

نسبت‌های $-E_{22}/E_{11}$ و $-E_{33}/E_{11}$ که با نسبت $-\epsilon_d/\epsilon_a$ در آزمون کشش بخش ۱.۵ متناظر اند، نسبت پواسون نامیده می‌شوند. این نسبت‌ها را با ν کمایش می‌دهیم. لذا، با استفاده از معادله (۴.۴.۵) به‌دست می‌آوریم،

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (7.4.5)$$

می‌توانیم با استفاده از معادلات (۶.۴.۵) و (۷.۴.۵)، معادله (۱.۴.۵) را به‌شکلی که در مهندسی متداول است، بنویسیم.

$$E_{11} = \frac{1}{E_Y} [T_{11} - \nu(T_{22} + T_{33})] \quad (8.4.5)$$

$$E_{22} = \frac{1}{E_Y} [T_{22} - \nu(T_{33} + T_{11})] \quad (9.4.5)$$

$$E_{33} = \frac{1}{E_Y} [T_{33} - \nu(T_{11} + T_{22})] \quad (10.4.5)$$

$$E_{12} = \frac{1}{2\mu} T_{12} \quad (11.4.5)$$

$$E_{13} = \frac{1}{2\mu} T_{13} \quad (12.4.5)$$

$$E_{23} = \frac{1}{2\mu} T_{23} \quad (13.4.5)$$

گرچه در معادلات (۸.۴.۵) تا (۱۳.۴.۵)، سه ثابت ماده وجود دارد، باید به‌خاطر داشت که ماده همسانگرد تنها دو ثابت ماده مستقل دارد. در حقیقت، با حذف λ از معادلات (۶.۴.۵) و (۷.۴.۵)، رابطه مهم زیر به‌دست می‌آید.

$$\mu = \frac{E_Y}{2(1 + \nu)} \quad (14.4.5)$$

همچنین می‌توانیم با استفاده از رابطه فوق، معادله (۱.۴.۵) را به‌صورت زیر بنویسیم.

$$E_{ij} = \frac{1}{E_Y} [(1 + \nu)T_{ij} - \nu T_{kk} \delta_{ij}] \quad (15.4.5)$$

اگر حالت تنش چنان باشد که تنها یک جفت از تنش‌های برشی، غیر صفر باشند، این حالت، حالت تنش برشی ساده نامیده می‌شود. می‌توان حالت تنش مذکور را با $T_{12} = T_{21} = \tau$ بیان کرد. در این صورت، از معادله (۱۱.۴.۵) به‌دست می‌آید،

$$E_{11} = E_{22} = \frac{E}{2\mu} \quad (16.4.5)$$

مدول برشی (G) به شکل نسبت تنش برشی (τ) در برش ساده، به کاهش زاویه میان المان‌هایی که ابتدا در راستاهای e_1 و e_2 بوده‌اند، تعریف می‌شود. لذا، خواهیم داشت:

$$\frac{\tau}{2E_{11}} = G \quad (17.4.5)$$

(مقایسه (17.4.5) با معادله (16.4.5)، درمی‌یابیم که ثابت لامه μ برابر با مدول برشی G است.)

تانسور تنش $T = \sigma I$ ، سومین حالت تنش را که حالت تنش هیدروستاتیک نام دارد، تعریف می‌کند. در این حالت، از معادله (2.4.5) به دست می‌آید:

$$e = \frac{2\sigma}{2\mu + 3\lambda} \quad (18.4.5)$$

چنان که در بخش ۱.۵ آمد، مدول حجمی (k) ، به شکل نسبت تنش عمودی هیدروستاتیک (σ) به تغییر حجم واحد تعریف می‌شود. خواهیم داشت:

$$k = \frac{\sigma}{e} = \frac{2\mu + 3\lambda}{3} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (19.4.5)$$

از معادلات (6.4.5)، (7.4.5)، (14.4.5) و (19.4.5)، می‌توان دریافت که ثابت‌های لامه، مدول یانگ، مدول برشی، نسبت پواسون و مدول حجمی، همگی با یکدیگر رابطه دارند. در مورد ماده کشسان خطی همسانگرد، از میان همه ثابت‌ها، تنها دو مورد مستقل اند. جدول ۱.۵، ثابت‌های کشسان مختلف را بر حسب دو ثابت دیگر نشان می‌دهد. جدول ۲.۵، چند نمونه از مقادیر این ثابت‌ها را برای مواد متداول ارائه می‌کند.

۱.۴.۵ مثال

ماده‌ای که در هیچ یک از حالات تنش، دچار تغییر حجم نشود، تراکم‌ناپذیر نامیده می‌شود. نشان دهید که در جامد کشسان خطی همسانگرد تراکم‌ناپذیر با مدول یانگ (E_Y) متناهی؛ (الف) نسبت پواسون، $\nu = 1/2$. (ب) مدول برشی، $\mu = E_Y/3$. (ج) $k \rightarrow \infty$ و $\lambda \rightarrow \infty$ و $k - \lambda = 2\mu/3$.

حل

(الف) با استفاده از معادله (15.4.5)،

$$E_{11} = \frac{1}{E_Y} [(1 + \nu)T_{11} - 2\nu T_{kk}] = \frac{1}{E_Y} (1 - 2\nu)T_{11} \quad (20.4.5)$$

E_{11} تغییر حجم به ازای حجم واحد (اتساع) و T_{11} حاصل جمع تنش‌های عمودی است. لذا، اگر ماده تراکم‌ناپذیر باشد، آن گاه، $\nu = 1/2$.

$$(ب) \quad \nu = \frac{E_Y}{2\mu} - 1 \quad \text{بنا بر این، } \nu = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \quad \text{که از آن } \frac{E_Y}{2\mu} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \mu = \frac{E_Y}{3}$$

(ج) در حالت تنش هیدروستاتیک، $T_{11} = \sigma \delta_{11}$ و $T_{11} = 2\sigma$ ، لذا، معادله (20.4.5) به صورت زیر درمی‌آید.

$$\frac{E_Y}{3(1 - 2\nu)} = \frac{\sigma}{e} \equiv k \quad (21.4.5)$$

در جامد تراکم‌ناپذیر، $\nu \rightarrow 1/2$ ؛ لذا، $k \rightarrow \infty$. حال با توجه به این که $k = \lambda + 2\mu/3$ ؛ بنا بر این، $\lambda \rightarrow \infty$ اما $k - \lambda = 2\mu/3$ که کمیتی متناهی است.

جدول ۱.۵ تبدیل ثابت‌های جامد کشسان همسانگرد

	λ	μ	E_Y	ν	k
λ, μ	λ	μ	$\frac{\mu(2\lambda + 3\mu)}{\lambda + \mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$
λ, ν	λ	$\frac{\lambda(1 - 2\nu)}{2\nu}$	$\frac{\lambda(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{\nu}$	ν	$\frac{\lambda(1 + \nu)}{2\nu}$
λ, k	λ	$\frac{2(k - \lambda)}{3}$	$\frac{3k(k - \lambda)}{(2k - \lambda)}$	$\frac{\lambda}{(2k - \lambda)}$	k
μ, E_Y	$\frac{\mu(E_Y - 2\mu)}{2\mu - E_Y}$	μ	E_Y	$\frac{E_Y}{2\mu} - 1$	$\frac{\mu E_Y}{2(2\mu - E_Y)}$
μ, ν	$\frac{2\mu\nu}{(1 - 2\nu)}$	μ	$2\mu(1 + \nu)$	ν	$\frac{2\mu(1 + \nu)}{2(1 - 2\nu)}$
μ, k	$k - \frac{2}{3}\mu$	μ	$\frac{3k\mu}{(2k + \mu)}$	$\frac{2k - 2\mu}{3k + 2\mu}$	k
E_Y, ν	$\frac{\nu E_Y}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	$\frac{E_Y}{2(1 + \nu)}$	E_Y	ν	$\frac{E_Y}{2(1 - 2\nu)}$
E_Y, k	$\frac{2(kE_Y - 2k^2)}{(E_Y - 3k)}$	$\frac{2kE_Y}{(3k - E_Y)}$	E_Y	$\frac{(2k - E_Y)}{3k}$	k
k, ν	$\frac{2k\nu}{(1 + \nu)}$	$\frac{2k(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}$	$2k(1 - 2\nu)$	ν	k
λ, E_Y	λ	$\mu(\lambda, E_Y)^*$	E_Y	$\frac{E_Y}{2\mu(\lambda, E_Y)} - 1$	$\frac{\mu(\lambda, E_Y)E_Y}{2[2\mu(\lambda, E_Y) - E_Y]}$
$*\mu(\lambda, E_Y) = \left\{ -(2\lambda - E_Y) + \sqrt{(2\lambda - E_Y)^2 + 4E_Y\lambda} \right\} / 2$					
توجه: (۱) هنگامی که $\nu \rightarrow 1/2$; $\lambda \rightarrow \infty$; $k \rightarrow \infty$; $\mu \rightarrow E_Y/3$ (۲) عموماً پذیرفته شده‌است که حالت تنش هیدروستاتیک فشاری، به افزایش حجم نمی‌انجامد؛ بنا بر این، $\nu < 1/2$. (۳) نسبت پواسون مواد همسانگردی که تحت تنش تنش ساده، کرنش عرضی منفی دارند، برابر است با $1/2 \leq \nu \leq 1$. (۴) کرنش عرضی مواد اکستیک، تحت کشش ساده، مثبت است؛ لذا، در حال کلی، $1/2 < \nu < 1$. برای ملاحظه بحث درباره حد پایینی ۱-، به بخش ۵۲.۵ در بخش ب فصل حاضر بنگرید.					

جدول ۲.۵ ثابت‌های کنش‌های جامدات همسانگرد در دمای اتاق **

ماده	ترکیب	مدول کشسانی، E_T (10^6 psi) GPa	نسبت پواسون، ν	مدول برشی، μ (10^6 psi) GPa	ثابت لامه، λ (10^6 psi) GPa	مدول حجمی، K (10^6 psi) GPa
الومینیوم	خالص و الیازی	۷۸/۵ تا ۶۸/۲ (۱۱/۳ تا ۹/۹)	۰/۳۳ تا ۰/۳۲	۲۶/۵ تا ۲۵/۵ (۳/۸۵ تا ۳/۷)	۶۲/۷ تا ۴۶/۲ (۹/۱ تا ۶/۷)	۸۰/۶ تا ۶۳/۲ (۱۱/۷ تا ۹/۳)
برنج	Cu ٪۷۰ تا ۶۰ Zn ٪۳۰ تا ۳۰	۱۰۹/۶ تا ۹۹/۹ (۱۵/۹ تا ۱۳/۵)	۰/۳۳ تا ۰/۳۶	۳۱/۳ تا ۳۶/۵ (۶/۱ تا ۵/۳)	۱۰۳/۴ تا ۷۳/۰ (۱۵/۰ تا ۱۰/۶)	۱۳۰/۹ تا ۹۷/۱ (۱۹/۰ تا ۱۴/۱)
مس		۱۳۳ تا ۱۱۷ (۱۸ تا ۱۷)	۰/۳۳ تا ۰/۳۶	۳۶/۲ تا ۴۰/۰ (۶/۷ تا ۵/۸)	۱۳۰/۹ تا ۸۵/۴ (۱۹/۰ تا ۱۲/۳)	۱۴۸/۱ تا ۱۱۲/۳ (۲۱/۵ تا ۱۶/۳)
آهن	C ٪۰/۳ تا ۲/۷	۱۴۵ تا ۹۰ (۳۱ تا ۱۳)	۰/۳۰ تا ۰/۲۱	۵۶/۵ تا ۳۵/۸ (۸/۲ تا ۵/۲)	۸۳/۴ تا ۲۶/۹ (۱۲/۱ تا ۳/۹)	۱۴۱/۳ تا ۵۱/۰ (۱۷/۶ تا ۷/۳)
فولاد	کربن و کم‌آلیاز	۲۲۰ تا ۱۹۳ (۳۳ تا ۲۸)	۰/۲۶ تا ۰/۲۹	۸۲/۰ تا ۷۵/۸ (۱۱/۹ تا ۱۱/۰)	۱۱۷/۸ تا ۸۲/۷ (۱۷/۱ تا ۱۲/۰)	۱۷۳/۳ تا ۱۳۳/۰ (۲۵/۰ تا ۱۹/۳)
فولاد ضدزنگ	Cr ٪۱۸ تا ۲۸ Ni ٪۸ تا ۲۸	۲۲۰ تا ۱۹۳ (۳۳ تا ۲۸)	۰/۳	۷۳/۰ تا ۶۰/۶ (۱۰/۶)	۱۱۹/۲ تا ۱۱۱/۶ (۱۷/۳ تا ۱۶/۲)	۱۶۸/۱ تا ۱۶۰/۵ (۲۳/۴ تا ۲۳/۲)
تیتانیوم	خالص و الیازی	۱۱۴/۳ تا ۱۰۶/۱ (۱۶/۳ تا ۱۵/۳)	۰/۳۳	۴۱/۳ تا ۳۶/۲ (۶/۰)	۹۰/۹ تا ۸۴/۱ (۱۳/۲ تا ۱۲/۲)	۱۱۸/۵ تا ۱۱۱/۶ (۱۷/۲ تا ۱۶/۲)
نیشه	گونگون	۷۹/۲ تا ۳۹/۶ (۱۱/۵ تا ۷/۲)	۰/۲۷ تا ۰/۲۱	۳۲/۴ تا ۲۶/۲ (۴/۷ تا ۳/۸)	۳۶/۵ تا ۱۵/۲ (۵/۳ تا ۲/۲)	۵۷/۹ تا ۳۲/۳ (۸/۳ تا ۳/۷)
لاستیک		۰/۰۰۰۰۴۱۳ تا ۰/۰۰۰۰۷۶ (۰/۰۰۰۰۰۶ تا ۰/۰۰۰۰۱۱)	۰/۵۰	۰/۰۰۰۰۱۳۸ تا ۰/۰۰۰۰۲۸ (۰/۰۰۰۰۰۲۰ تا ۰/۰۰۰۰۰۰۴)	∞	∞

* هنگامی که ν به ۰/۵ میل می‌کند $\infty \rightarrow k/E_T \rightarrow \infty$ و $\lambda/\mu \rightarrow \infty$ مقادیر واقعی k و λ لاستیک، به فولاد نزدیک است.

** بخشی از جدول مأخوذ از:

An Introduction to the Mechanics of Solids, S.H. Crandall and N.C Dahl (Eds.), McGraw-Hill, 1959

۵.۵ معادلات نظریه کشسانی بی نهایت کوچک

در بخش ۷.۴، معادله حرکت کوشی را (به معادله (۵.۷.۴) بنگرید) که میدان تنش هر پیوستار باید تأمین کند، به دست آوردیم.

$$\rho a_i = \rho B_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (۱.۵.۵)$$

در رابطه فوق، ρ معرف چگالی، a_i معرف مؤلفه‌های شتاب، ρB_i معرف مؤلفه‌های نیروی حجمی به ازای حجم واحد و T_{ij} معرف مؤلفه‌های تنش کوشی است. همه کمیت‌های جملات معادله فوق، به دره‌ای متناسب اند که در زمان حاضر در موقعیت (x_1, x_2, x_3) قرار دارد.

تنها حالت حرکت‌های کوچک را در نظر می‌گیریم؛ یعنی، حرکت‌هایی که همه ذرات همواره در همسایگی کوچک حالت طبیعی اند. به بیان دقیق‌تر، اگر X_i معرف موقعیت ذره در حالت طبیعی باشد، فرض می‌کنیم،

$$x_i \approx X_i \quad (۲.۵.۵)$$

و نیز اندازه مؤلفه‌های شیب جابجایی $(\partial u_i / \partial x_j)$ بسیار کوچک باشد. با استفاده از

$$x_1 = X_1 + u_1, \quad x_2 = X_2 + u_2, \quad x_3 = X_3 + u_3 \quad (۳.۵.۵)$$

رابطه میان مؤلفه‌های سرعت و مؤلفه‌های جابجایی را، به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$v_i = \frac{Dx_i}{Dt} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)_{x_i - \text{ثابت}} + v_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \quad (۴.۵.۵)$$

در رابطه فوق، (v_i) معرف مؤلفه‌های سرعت کوچک متناظر با مؤلفه‌های جابجایی کوچک است. با چشم‌پوشی از کمیت‌های کوچک از مرتبه بالاتر، مؤلفه‌های سرعت را به صورت زیر،

$$v_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)_{x_i - \text{ثابت}} \quad (۵.۵.۵)$$

و مؤلفه‌های شتاب به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$a_i = \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right)_{x_i - \text{ثابت}} \quad (۶.۵.۵)$$

افزون بر این، رابطه زیر، حجم دیفرانسیلی dV را به حجم اولیه dV_0 مرتبط می‌سازد (به بخش ۱۰.۳ بنگرید).

$$dV = (1 + E_{kk}) dV_0 \quad (۷.۵.۵)$$

بنا بر این، رابطه چگالی‌ها، برابر است با،

$$\rho = (1 + E_{kk})^{-1} \approx (1 - E_{kk}) \rho_0 \quad (۸.۵.۵)$$

در رابطه فوق، از قضیه دوجمله‌ای استفاده کرده‌ایم. باز هم با صرف نظر از کمیت‌های کوچک از مرتبه بالاتر، خواهیم داشت،

$$\rho a_i = \rho_0 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right)_{x_i - \text{ثابت}} \quad (۹.۵.۵)$$

لذا، معادله (۱۰.۵.۵) به صورت زیر درمی‌آید.

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho_0 B_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (10.5.5)$$

در معادله (۱۰.۵.۵)، همه مؤلفه‌های جابجایی به شکل تابعی از مختصات فضایی (x_i) در نظر گرفته می‌شوند. معادلات این به سادگی بیان می‌دارند که در حرکت‌های بی‌نهایت کوچک، به تمایز میان مختصات فضایی (x_i) و مختصات مادی (X_i) نیاز نیست. در بخش‌های پیش‌رو از بخش‌های الف و ب در فصل حاضر، همه مؤلفه‌های جابجایی به شکل تابعی از مختصات فضایی بیان خواهند شد.

میدان جابجایی $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ در پیوستار کشسان با تغییر شکل کوچک، معرف حرکتی/امکان‌پذیر نامیده می‌شود، اگر این میدان جابجایی، معادله (۱۰.۵.۵) را تأمین کند. هنگامی که میدان جابجایی $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ معلوم باشد، برای حصول اطمینان از امکان‌پذیر بودن حرکت، می‌توانیم نخست میدان کرنش (E_{ij}) را از معادله (۱۶.۷.۳)، یعنی،

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (11.5.5)$$

و سپس میدان تنش کشسان (T_{ij}) متناظر آن را از معادله (۸.۳.۵)، یعنی،

$$T_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \quad (12.5.5)$$

محاسبه کنیم. حال جایگذاری u_i و T_{ij} در معادله (۱۰.۵.۵)، نشان می‌دهد که این حرکت امکان‌پذیر است یا خیر. راه دیگر این است که میدان جابجایی مستقیماً در معادلات ناویه جایگذاری شود (معادلات ناویه در بخش بعد برای همین منظور، استنتاج خواهند شد). اگر حرکت مورد بررسی، امکان‌پذیر باشد، کشش‌های سطحی (یعنی، بردارهای تنش در سطح جسم) در مرز جسم که برای حفظ حرکت لازم اند، از معادله (۱۹.۹.۴) به دست می‌آیند. این معادله، برابر است با،

$$t_i = T_{ij} n_j \quad (13.5.5)$$

از سوی دیگر، اگر شرایط مرزی تعیین شده باشند، برای این که u_i حل مسئله باشد، باید شرایط تعیین شده را در مرز تأمین کند، خواه آن شرایط، شرایط جابجایی باشند، خواه شرایط کشش سطحی.

۶.۵ معادلات حرکت ناویه در محیط کشسان

در این بخش، برای به دست آوردن معادلات حرکتی که تنها بر حسب مؤلفه‌های جابجایی باشند، معادلات (۱۰.۵.۵)، (۱۱.۵.۵) و (۱۲.۵.۵) را ترکیب می‌کنیم. معادلات حاصل، معادلات حرکت ناویه نام دارند. نخست، با استفاده از معادلات (۱۱.۵.۵) و (۱۲.۵.۵)، خواهیم داشت،

$$T_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2\mu E_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (16.5)$$

لذا،

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial e}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) \quad (۲۶.۵)$$

اکنون،

$$\frac{\partial e}{\partial x_j} \delta_{ij} = \frac{\partial e}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial e}{\partial x_i} \quad (۳۶.۵)$$

بنا بر این، معادله حرکت (معادله (۱۰.۵.۵))، به صورت زیر درمی آید.

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho_0 B_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (۴۶.۵)$$

صورت گسترده معادله (۴۶.۵)، برابر است با،

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \rho_0 B_1 + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_1 \quad (۵۶.۵)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \rho_0 B_2 + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x_2} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_2 \quad (۶۶.۵)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \rho_0 B_3 + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x_3} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_3 \quad (۷۶.۵)$$

در روابط فوق،

$$e = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (۸۶.۵)$$

صورت ناوردای معادلات حرکت ناویه، برابر است با،

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \mathbf{B} + (\lambda + \mu) \nabla e + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (۹۶.۵)$$

که در آن،

$$e = \text{div } \mathbf{u} \quad (۱۰۶.۵)$$

◀ مثال ۱.۶.۵

میدان جابجایی $u_1 = u_1(x_1, t)$ و $u_2 = u_3 = 0$ مفروض است. معادله‌ای را که u_1 باید تأمین کند، تا در غیاب نیروهای حجمی، معرف حرکت امکان پذیر جامد کشسان همسانگرد باشد، به دست آورید.

حل

از معادله ناویه (۵۶.۵)، خواهیم داشت،

$$\begin{aligned}
 \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \\
 &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \\
 &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}
 \end{aligned} \quad (۱۱۶.۵)$$

لذا،

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c_L^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \quad (۱۲۶.۵)$$

که در آن،

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}} \quad (۱۳۶.۵)$$

معادله (۱۲۶.۵)، معادله موج ساده نامیده می‌شود.

۷.۵ معادلات ناویه در مختصات استوانه‌ای و کروی

با استفاده از عبارت‌های E و $\nabla^2 u$ که در بخش ۷.۳ و در بخش د در فصل ۲ برای مختصات استوانه‌ای و کروی استنتاج شد، می‌توانیم قانون هوک و معادلات ناویه را در این دو مختصات به شرح زیر به دست آوریم.

مختصات استوانه‌ای. با این فرض که (u_r, u_θ, u_z) معرف مؤلفه‌های جابجایی در راستاهای (r, θ, z) باشد، قوانین هوک عبارت اند از،

$$\begin{aligned}
 T_{rr} &= \lambda e + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
 T_{\theta\theta} &= \lambda e + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \\
 T_{zz} &= \lambda e + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}
 \end{aligned} \quad (۱.۷.۵)$$

$$T_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (۲.۷.۵)$$

برای مثال، در مورد کوبهٔ کروی به‌دست آمد که $g(t) = -\frac{\gamma}{R\pi}t$ (به معادلات (۳۰.۴۵.۵) و (۲) بنگرید)؛ لذا،

$$w_0 = -\frac{\pi}{\gamma} \int_0^a g(t) dt = \frac{\gamma}{R} \int_0^a t dt = \frac{a^2}{R} \quad (۱۶)$$

که برابر با معادلهٔ (۴۰.۴۵.۵) است.

مسائل فصل ۵، بخش الف، بخش‌های ۱.۵-۸.۵

۱.۵ نشان دهید که بردار بوج، تنها بردار همسانگرد است. (راهنمایی: فرض کنید که $\mathbf{a}$ برداری همسانگرد است و با استفاده از تغییر پایه‌ای ساده، مؤلفه‌های پرایم‌دار و بدون پرایم را برابر قرار دهید.)

۲.۵ نشان دهید که کلی‌ترین تانسور همسانگرد مرتبهٔ دوم به‌صورت $\alpha \mathbf{I}$ است. α اسکالر و $\mathbf{I}$ تانسور همانی است.

۳.۵ برای جسم کشسان خطی همسانگرد، (الف) $\mu = \mu(\lambda, E_Y)$ را آن‌گونه که در جدول ۱.۵ آمده است، اثبات کنید و (ب) مقدار μ را هنگامی که $E_Y/\lambda \rightarrow 0$ ، به‌دست آورید.

۴.۵ با استفاده از روابط زیر،

$$\lambda = \frac{\nu E_Y}{[(1+\nu)(1-2\nu)]}$$

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{(1-2\nu)}$$

$$k = \frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu}$$

$\mu = \mu(E_Y, \nu)$ و $k = k(\mu, \nu)$ را به‌دست آورید.

۵.۵ نشان دهید که در مادهٔ تراکم‌ناپذیر ($\nu \rightarrow 1/2$)،

(الف) $\mu = E_Y/3$ ، $\lambda \rightarrow \infty$ ، اما $k \rightarrow \infty$ ؛ اما $\mu = E_Y/3$ ، $k - \lambda = (2/3)\mu$

(ب) $\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{E} + (T_{kk}/3)\mathbf{I}$ ، که در آن T_{kk} به‌لحاظ ساختاری نامعین است.

۶.۵ $B_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ و $A_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}$ مفروض است.

(الف) A_{11jk} و B_{11jk} را به‌دست آورید.

(ب) مواردی از A_{11jk} را که با B_{11jk} متفاوت اند، مشخص کنید.

۷.۵ نشان دهید که در حالت کلی، راستاهای اصلی تنش و کرنش مادهٔ کشسان خطی ناهمسانگرد، منطبق نیستند.

۸.۵ ثابت‌های لامه برابر اند با $\lambda = 119/2 \text{ GPa}$ ($17/3 \times 10^6 \text{ psi}$)، $\mu = 79/2 \text{ GPa}$ ($11/5 \times 10^6 \text{ psi}$)

10^6 psi مدول یانگ، نسبت پواسون و مدول حجمی را بیابید.

۹.۵ مدول یانگ $E_Y = 10.3 \text{ GPa}$ و نسبت پواسون $\nu = 0.34$ مفروض اند. ثابت‌های لامه (λ و μ) را

بیابید. مدول حجمی را نیز بیابید.

۱۰.۵) مدول یانگ $E_Y = ۱۹۳ \text{ GPa}$ و مدول برشی $\mu = ۷۶ \text{ GPa}$ مفروض اند. نسبت بواسون (ν)، ثابت لامه (λ) و مدول حجمی (k) را بیابید.

۱۱.۵) اگر مؤلفه‌های کرنش در نقطه‌ای از فولاد ساختمانی برابر باشند با،

$$\begin{aligned} E_{11} &= ۳۶ \times ۱۰^{-۶}, & E_{22} &= ۴۰ \times ۱۰^{-۶}, & E_{33} &= ۲۵ \times ۱۰^{-۶} \\ E_{12} &= ۱۲ \times ۱۰^{-۶}, & E_{23} &= ۰, & E_{13} &= ۳۰ \times ۱۰^{-۶} \end{aligned}$$

مؤلفه‌های تنش را بیابید.

$$\lambda = ۱۱۹,۲ \text{ GPa} (۱۷,۳ \times ۱۰^۶ \text{ psi}), \quad \mu = ۷۹,۲ \text{ GPa} (۱۱,۵ \times ۱۰^۶ \text{ psi})$$

۱۲.۵) اگر مؤلفه‌های کرنش به صورت زیر باشند، مسئله قبل را تکرار کنید.

$$\begin{aligned} E_{11} &= ۱۰ \times ۱۰^{-۶}, & E_{22} &= -۲۰۰ \times ۱۰^{-۶}, & E_{33} &= -۱۰۰ \times ۱۰^{-۶} \\ E_{12} &= -۱۰۰ \times ۱۰^{-۶}, & E_{23} &= ۰, & E_{13} &= ۰ \end{aligned}$$

۱۳.۵) حالت تنش یکنواخت در جسم کشسان همسانگردی ($\mu = ۷۹,۲ \text{ GPa}$, $E_Y = ۲۰۷ \text{ GPa}$) برابر است با،

$$[T] = \begin{bmatrix} ۱۰۰ & ۴۰ & ۶۰ \\ ۴۰ & -۲۰۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲۰۰ \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

(الف) مؤلفه‌های کرنش را بیابید.

(ب) تغییر حجم کل یک مکعب پنج سانتی‌متری از ماده را بیابید.

۱۴.۵) کره کشسان همسانگردی با شعاع $\Delta \text{ cm}$ ($\mu = ۷۹,۲ \text{ GPa}$, $E_Y = ۲۰۷ \text{ GPa}$) تحت میدان تنش

$$[T] = \begin{bmatrix} ۶ & ۲ & ۰ \\ ۲ & -۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

یکنواخت مقابل قرار دارد. تغییر حجم کره را بیابید.

۱۵.۵) حرکت $x_1 = X_1 + k(X_1 + X_2)$ ، $x_2 = X_2 + k(X_1 - X_2)$ مفروض است. برای تابع $f(a, b) = ab$

نشان دهید که (الف) $f(x_1, x_2) = f(X_1, X_2) + O(k)$ و (ب) $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_1} + O(k)$ در این

دو رابطه، هنگامی که $k \rightarrow ۰$ ، $O(k) \rightarrow ۰$

۱۶.۵) مسئله قبل را با $f(a, b) = a^2 + b^2$ تکرار کنید.

۱۷.۵) میدان جابجایی جامد کشسان خطی همسانگردی به صورت زیر مفروض است.

$$u_1 = kX_2X_3, \quad u_2 = kX_3X_1, \quad u_3 = k(X_1^2 - X_2^2), \quad k = ۱۰^{-۴}$$

(الف) مؤلفه‌های تنش را بیابید (ب) آیا حالت تنش در غیاب نیروهای حجمی، میدان تنش تعادلی امکان‌پذیر است؟

۱۸.۵) میدان جابجایی جامد کشسان خطی همسانگردی به صورت زیر مفروض است.

$$u_1 = kX_2X_3, \quad u_2 = kX_1X_3, \quad u_3 = kX_1X_2, \quad k = ۱۰^{-۴}$$

(الف) مؤلفه‌های تنش را بیابید (ب) آیا حالت تنش در غیاب نیروهای حجمی، میدان تنش تعادلی امکان‌پذیر است؟

۱۹.۵ میدان جابجایی جامد کشسان خطی همسانگردی به صورت زیر مفروض است.

$$u_1 = kX_1X_2, \quad u_2 = k(X_1X_2 + X_2^2), \quad k = 10^{-4}$$

(الف) مؤلفه‌های تنش را بیابید. (ب) آیا حالت تنش در غیاب نیروهای حجمی، میدان تنش تعادلی امکان‌پذیر است؟

مسائل فصل ۵، بخش الف، بخش‌های ۹.۵-۱۲.۵ (الف، ۱)

۲۰.۵ برای هر تابع $f(s)$ ، نشان دهید که جابجایی $u_1 = f(s)$ که در آن $s = x_1 \pm c_L t$ معادله موج $\partial^2 u_1 / \partial t^2 = c_L^2 (\partial^2 u_1 / \partial x_1^2)$ را تأمین می‌کند.

۲۱.۵ نسبت سرعت‌های فاز (c_L/c_T) را برای نسبت‌های پواسون مقابل محاسبه کنید: $1/3$ ، 0.49 و 0.499 .

۲۲.۵ فرض کنید که میدان جابجایی u_i تنها به x_2 و t وابسته باشد، یعنی، $u_i = u_i(x_2, t)$. معادلات دیفرانسیلی را که $u_i(x_2, t)$ باید تأمین کند تا در غیاب نیروهای حجمی، حرکتی امکان‌پذیر باشد، بیابید.

۲۳.۵ فرض کنید که میدان جابجایی یک محیط کشسان خطی به صورت زیر باشد.

$$u_1 = \varepsilon [\sin \beta(x_2 - ct) + \alpha \sin \beta(x_2 + ct)], \quad u_2 = u_3 = 0$$

(الف) ویژگی‌های این موج کشسان را بیابید (موج طولی است یا عرضی؟ راستای انتشار آن کدام است؟).

(ب) کرنش‌ها و تنش‌ها را بیابید و تعیین کنید که در غیاب نیروهای حجمی، تحت چه شرط یا شرایطی، معادلات حرکت تأمین می‌شوند.

(ج) فرض کنید که در $x_2 = 0$ مرز بدون کششی وجود داشته باشد. تحت چه شرط یا شرایطی، حرکت فوق شرط مرزی را همواره تأمین خواهد کرد؟

(د) فرض کنید که در $x_2 = l$ مرز بدون کششی وجود داشته باشد. برای این که این شرط مرزی همواره تأمین شود، چه شرایط دیگری بر حرکت فوق تحمیل خواهند شد؟

۲۴.۵ اگر مرز $x_2 = 0$ ثابت (بدون حرکت) و مرز $x_2 = l$ بدون کشش باشد، مسئله قبل (مسئله ۲۳.۵) را تکرار کنید.

۲۵.۵ اگر مرزهای $x_2 = 0$ و $x_2 = l$ هر دو ثابت (بدون حرکت) باشند، مسئله ۲۳.۵ را تکرار کنید.

۲۶.۵ اگر میدان جابجایی به صورت زیر باشد، مسئله ۲۳.۵ را تکرار کنید.

$$u_2 = \varepsilon [\sin \beta(x_2 - ct) + \alpha \sin \beta(x_2 + ct)], \quad u_1 = u_3 = 0$$

۲۷.۵ اگر مرز $x_2 = 0$ ثابت (بدون حرکت) و مرز $x_2 = l$ بدون کشش باشد ($t = 0$)، مسئله قبل (مسئله ۲۶.۵) را تکرار کنید.

۲۸.۵ اگر مرزهای $x_2 = 0$ و $x_2 = l$ هر دو ثابت باشند، مسئله ۲۶.۵ را تکرار کنید.

سیال ویسکوز نیوتنی

موادی مانند آب و هوا نمونه‌هایی از سیالات اند. از دیدگاه مکانیکی، تفاوت سیال و قطعه‌ای از فولاد یا بتن، در این است که سیال نمی‌تواند تنش‌های برشی را بدون تغییر شکل پیوسته تحمل کند. برای مثال، فرض کنید که میان دو صفحه موازی، آب (یا هوا) قرار داشته باشد، و یکی از صفحات ثابت و صفحه دیگر در حال اعمال تنش برشی باشد. اگر تنش برشی حذف نشود، تغییر شکل آب (هوا) با زمان، به‌طور نامحدود ادامه خواهد یافت. همچنین، این حقیقت که آب ساکن با وجود گرانش، همواره به‌شکل ظرف درمی‌آید، گواهی بر ناتوانی آن در تحمل تنش برشی در حالت سکون است.

بر مبنای این تصویر از سیالیت، سیال را چنین تعریف می‌کنیم: گروهی از مواد آرمانی که در حرکت صلب-گونه (و نیز حالت سکون)، نمی‌تواند تنش برشی را تحمل کند. آب و هوا دو نمونه سیال اند. آب که مایع است، در گستره وسیعی از بار، تغییر چگالی ناچیزی دارد؛ در مقابل، هوا گاز است و به‌گونه‌ای دیگر پاسخ می‌دهد. این جنبه رفتار به مفهوم سیالات تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر تعمیم می‌یابد. با این همه، در شرایط خاص (جریان با عدد ماخ پایین)، هوا را باید تراکم‌ناپذیر دانست و در شرایط دیگر (برای مثال، انتشار امواج آکوستیک)، آب را باید تراکم‌پذیر به حساب آورد.

در این فصل، مدل خاصی از سیال را مطالعه می‌کنیم. خاصیت مدل مذکور این است که در آن، تنش حاصل از حرکت به‌شکل خطی به مقدار لحظه‌ای نرخ تغییر شکل وابسته است. این مدل سیال، سیال نیوتنی یا سیال ویسکوز خطی نام دارد و می‌دانیم که رفتار مکانیکی بسیاری از سیالات واقعی را در گستره وسیعی از حالات، به خوبی توصیف می‌کند. در مقابل؛ برای توصیف برخی سیالات مانند محلول‌های بسپاری، مدل عام‌تری (یعنی، مدل سیالات غیر نیوتنی) نیاز است. مبحث مدل‌های سیالات غیر نیوتنی را به فصل ۸ موکول می‌کنیم.

۱.۶ سیال

بر اساس تصویری از سیالیت که در بندهای قبل بحث شد، سیال را چنین تعریف می‌کنیم: گروهی از مواد آرمانی است که در حرکت‌های صلب‌گونه (و نیز حالت سکون)، نمی‌تواند تنش‌های برشی را تحمل کند. به بیان دیگر،

هنگامی که سیال در حرکت صلب‌گونه باشد، بردار تنش در همه صفحات گذرا از نقطه‌ای مفروض، عمود بر صفحه است. یعنی، برای هر $\mathbf{n}$

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \lambda \mathbf{n} \quad (۱.۱۶)$$

با استفاده از معادله (۱.۱۶)، می‌توان به‌سادگی نشان داد که اندازه بردار تنش (λ) در همه صفحات گذرا از نقطه‌ای مفروض، برابر است. برای این منظور، فرض کنید که $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ بردارهای نرمال دو صفحه دلخواه گذرا از نقطه‌ای مفروض باشند؛ در این صورت خواهیم داشت،

$$\mathbf{T}\mathbf{n}_1 = \lambda_1 \mathbf{n}_1 \quad \text{و} \quad \mathbf{T}\mathbf{n}_2 = \lambda_2 \mathbf{n}_2 \quad (۲.۱۶)$$

لذا،

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_1 = (\lambda_2 - \lambda_1) \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \quad (۳.۱۶)$$

چون $\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{n}_2$ و $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ ، سمت چپ معادله (۳.۱۶) برابر با صفر است. لذا،

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \quad (۴.۱۶)$$

چون بردارهای $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ دلخواه اند،

$$\lambda_1 = \lambda_2 \quad (۵.۱۶)$$

به بیان دیگر، در همه صفحات گذرا از یک نقطه، تنش عمودی یکسان، و تنش برشی برابر با صفر است. این تنش عمودی را با $-p$ نمایش می‌دهیم. لذا،

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} \quad (۶.۱۶)$$

و یا، به صورت مؤلفه‌ای،

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (۷.۱۶)$$

اسکالر p ، اندازه تنش عمودی فشاری است و فشار هیدروستاتیک نام دارد.

۲.۶ سیال تراکم‌پذیر؛ سیال تراکم‌ناپذیر

چگالی، آن‌چه را که عموماً «مایع» می‌نامیم (مانند آب یا جیوه)، در گستره وسیعی از فشار، اساساً بدون تغییر می‌ماند. با انتزاع این خاصیت، سیال تراکم‌ناپذیر را چنین تعریف می‌کنیم: سیالی است که چگالی همه ذرات آن، قطع نظر از حالت تنش، همواره بدون تغییر می‌ماند. به عبارت دیگر، در سیالات تراکم‌ناپذیر،

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (۱.۲۶)$$

در نتیجه، معادله پایستگی جرم (معادله (۳.۱۵.۳))،

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad (۲.۲۶)$$

در سیالات تراکم‌ناپذیر به صورت زیر درمی‌آید.

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad (۳.۲۶)$$

و یا

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (۴.۲۶)$$

ضرورتی ندارد که توزیع مکانی چگالی همه سیالات تراکم‌ناپذیر، یکنواخت باشد (برای مثال، می‌توان آب-نمک را که غلظت نمک آن غیر یکنواخت است و با عمق تغییر می‌کند، به صورت سیال غیر همگن مدل کرد). اگر چگالی نیز یکنواخت باشد، سیال همگن نامیده می‌شود و در این صورت، ρ در همه سیال ثابت خواهد بود.

موادی مانند هوا و بخارها را که تغییر چگالی آن‌ها با فشار محسوس است، اغلب، سیالات تراکم‌پذیر دانیم. البته، می‌توان حالتی را یافت که آب باید تراکم‌پذیر لحاظ شود و در مقابل، می‌توان هوا را تراکم‌ناپذیر لحاظ کرد. به هر صورت، بهتر است در مطالعات نظری، سیالات تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر را دو نوع سیال متمایز در نظر بگیریم.

۳.۶ معادلات هیدروستاتیک

معادلات تعادل بر حسب تنش عبارت اند از (به معادله (۶.۷.۴) بنگرید)،

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = 0 \quad (۱.۳۶)$$

در رابطه فوق، B_i معرف مؤلفه نیروهای حجمی به ازای جرم واحد است. با توجه به این که،

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (۲.۳۶)$$

معادله (۱.۳۶) به صورت زیر درمی‌آید.

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho B_i \quad (۳.۳۶)$$

و یا

$$\nabla p = \rho \mathbf{B} \quad (۴.۳۶)$$

در حالتی که B_i مؤلفه وزن به ازای جرم واحد باشد، اگر محور x_3 مثبت را قائم و فروسو فرض کنیم، خواهیم داشت،

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = g \quad (۵.۳۶)$$

بنا بر این،

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho g \quad (۶.۳۶)$$

معادلات (۶.۳۶) بیان می‌دارند که p تنها تابعی از x_3 است، و اختلاف فشار میان دو نقطه دلخواه (مثلاً، نقطه ۲ و نقطه ۱ در مایع)، به سادگی برابر است با،

$$p_2 - p_1 = \rho gh \quad (۷.۳۶)$$

در رابطه فوق h عمق نقطه ۲ نسبت به نقطه ۱ است. بدین ترتیب، فشار استاتیک در مایع، تنها به عمق وابسته است. فشار استاتیک همه ذراتی که در یک مایع و در یک صفحه افقی واقع اند، برابر است.

اگر سیال در حالت دوران صلب‌گونه باشد (نرخ تغییر شکل برابر با صفر)، کماکان می‌توان T_{ij} را از معادله (۲.۳۶) به دست آورد، اما سمت راست معادله (۱.۳۶) برابر با ρa_i خواهد بود (a_i معرف مؤلفه‌های شتاب سیالی است که مانند جسمی صلب حرکت می‌کند. با این توضیح، معادله حاکم در حالت مذکور برابر است با،

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho B_i = \rho a_i \quad (۸.۳۶)$$

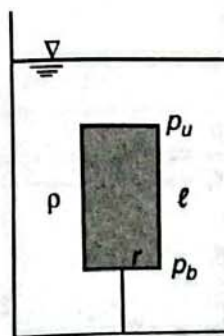
◀ مثال ۱.۳.۶

جسمی استوانه‌ای به شعاع r ، طول ℓ و وزن W ، با ریسمان به کف ظرفی پر از مایعی به چگالی ρ ، بسته شده است. اگر چگالی جسم (ρ_B) کوچک‌تر از چگالی مایع باشد، کشش ریسمان را بیابید (شکل ۱-۳۶).

حل

فرض کنید که p_u و p_b به ترتیب، فشار سطوح فوقانی و تحتانی استوانه باشند و T کشش ریسمان باشد. در این صورت، تعادل جسم استوانه‌ای مستلزم آن است که،

$$p_b(\pi r^2) - p_u(\pi r^2) - W - T = 0$$



شکل ۱-۳.۶

یعنی،

$$T = \pi r^2(p_b - p_u) - W$$

حال با استفاده از معادله (۷.۳۶)،

$$(p_b - p_u) = \rho g \ell$$

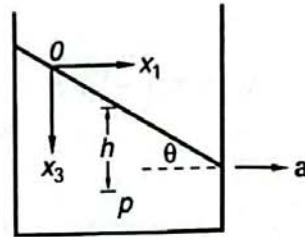
بنا بر این،

$$T = \pi r^2 \rho g \ell - W = \pi r^2 \ell g (\rho - \rho_B)$$

می‌دانیم که $\pi r^2 \ell \rho g$ نیروی شناوری، و برابر با وزن مایعی است که جسم جابجا می‌کند.

◀ مثال ۲.۳.۶

مخزنی که محتوی سیال همگنی است، به شکل افقی و با شتاب ثابت a به سمت راست حرکت می‌کند (شکل ۲-۳۶). (الف) شیب سطح آزاد (زاویه θ) را بیابید. (ب) فشار در نقطه دلخواه P درون سیال را بیابید.



شکل ۲-۳۶

حل

(الف) با توجه به این که،

$$\begin{aligned} a_1 &= a, & B_1 &= B_2 = 0 \\ a_2 &= a_3 = 0, & B_2 &= g \end{aligned}$$

معادلات حرکت (معادله ۸.۳۶) به صورت زیر درمی‌آیند.

$$\rho a = -\frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial x_2}, \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho g \quad (1)$$

با انتگرال‌گیری از معادلات فوق، به دست می‌آوریم،

$$p = -\rho a x_1 + \rho g x_3 + c \quad (2)$$

برای تعیین ثابت انتگرال‌گیری c ، توجه می‌کنیم که فشار همه نقاط سطح آزاد، برابر با فشار محیطی (p_0) است. فرض کنید که در لحظه مطلوب، مبدأ محورهای مختصات (که نسبت به زمان ثابت است)، در نقطه‌ای در سطح آزاد واقع باشد؛ در این صورت،

$$c = p_0 \quad (3)$$

لذا، فشار درون سیال در نقطه دلخواه (x_1, x_2, x_3) ، برابر است با،

$$p = -\rho a x_1 + \rho g x_3 + p_0 \quad (4)$$

فشار سطح آزاد برابر است با p_0 . برای یافتن معادله این سطح، $p = p_0$ را در معادله (۴) جایگذاری می‌کنیم و به دست می‌آوریم،

$$x_3 = \frac{a}{g} x_1 \quad (5)$$

لذا، سطح آزاد، صفحه‌ای است که زاویه شیب آن برابر است با،

$$\tan \theta = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a}{g} \quad (۶)$$

(ب) با توجه به شکل ۲-۳۶، می‌توان نوشت،

$$\frac{(x_2 - h)}{x_1} = \tan \theta$$

لذا،

$$x_2 = x_1 \left(\frac{a}{g} \right) + h$$

بنا بر این،

$$p = -\rho a x_1 + \rho g \left(h + \frac{x_1 a}{g} \right) + p_0 = \rho g h + p_0 \quad (۷)$$

به بیان دیگر، فشار در نقطه‌ای دلخواه درون سیال، تنها به عمق آن نقطه نسبت به سطح آزادی که دقیقاً بالای آن قرار دارد (h)، و فشار سطح آزاد وابسته است.



۴.۶ سیال نیوتنی

اگر به جامد کشسان تنش برشی وارد آید، ضمن تغییر شکل برشی غیر صفر، از پیکربندی اولیه خود تغییر شکل می‌دهد، و به حالت تعادل می‌رسد. اگر تنش برشی حذف شود، تغییر شکل از بین می‌رود. حال اگر به لایه‌ای از سیال (مانند آب، جیوه و یا هوا) تنش برشی وارد آید، سیال از پیکربندی اولیه خود تغییر شکل می‌دهد و در نهایت به حالت پایایی می‌رسد که در آن، مادامی که تنش برشی وارد شود، سیال با نرخ برش غیر صفر، پیوسته تغییر شکل می‌یابد. اگر تنش برشی حذف شود، سیال در حالت تغییر شکل یافته‌ای که پیش از حذف تنش برشی ایجاد شده است، می‌ماند. بدین ترتیب، حالت تنش برشی سیال در حرکت برشی، مستقل از تغییر شکل برشی، اما به نرخ برش وابسته است. در چنین سیالاتی، برای حفظ مقدار مفروضی از تغییر شکل برشی، به تنش برشی نیاز نیست؛ اما برای حفظ نرخ ثابت تغییر شکل برشی، به مقدار معینی تنش برشی نیاز است.

چون حالت تنش سیال در حرکت صلب‌گونه (و نیز سکون) از تانسوری همسانگرد به دست می‌آید، منطقی است که در بررسی حرکت کلی سیال، تانسور تنش را به دو بخش تجزیه کنیم.

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + T'_{ij} \quad (۱.۴۶)$$

در رابطه فوق، (T'_{ij}) تنها به نرخ تغییر شکل وابسته است و هنگامی که سیال در حرکت صلب‌گونه یا سکون (یعنی، نرخ تغییر شکل صفر) قرار داشته باشد، برابر با صفر است، و (p) اسکالاری است که مقدار آن صریحاً به نرخ تغییر شکل وابسته نیست.

حال، گروهی از مواد آرمانی را که به سیالات نیوتنی موسوم اند، به شرح زیر تعریف می‌کنیم.

۱. در همه نقاط مادی، مقدار T'_{ij} ها در هر زمان t ، به شکل خطی به مؤلفه‌های تانسور نرخ تغییر شکل (D_{ij}) در آن زمان وابسته است و به هیچ یک از دیگر کمیت‌های سینماتیک (از قبیل نرخ‌های تغییر شکل بالاتر) وابسته نیست. رابطه میان نرخ تغییر شکل و شیب سرعت برابر است با،

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (۲.۴۶)$$

۲. سیال نسبت به هر پیکربندی مرجع، همسانگرد است.

با پیروی از استدلالی که درباره ماده کشسان خطی همسانگرد آمد، چنین به دست می‌آوریم که عام‌ترین صورت T'_{ij} در سیال نیوتنی (که سیال ویسکوز خطی نیز نامیده می‌شود)، در صورتی که $\Delta \equiv D_{11} + D_{22} + D_{33}$ نرخ تغییر حجم یا است، $D_{33} = D_{kk}$ برابر است با،

$$T'_{ij} = \lambda \Delta \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (۳.۴۶)$$

در رابطه فوق، λ و μ ثابت‌های ماده و بُعد آن‌ها برابر است با $(\text{طول})^2 / (\text{زمان})$ (نیرو) (این ثابت‌ها، غیر از ثابت‌های جسم کشسان اند). تانسور تنش $\{T'_{ij}\}$ تانسور تنش ویسکوز نامیده می‌شود. بدین ترتیب، تانسور تنش کل برابر است با،

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \Delta \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (۴.۴۶)$$

یعنی،

$$\begin{aligned} T_{11} &= -p + \lambda \Delta + 2\mu D_{11} \\ T_{22} &= -p + \lambda \Delta + 2\mu D_{22} \\ T_{33} &= -p + \lambda \Delta + 2\mu D_{33} \end{aligned} \quad (۵.۴۶)$$

و

$$T_{12} = 2\mu D_{12}, \quad T_{13} = 2\mu D_{13}, \quad T_{23} = 2\mu D_{23} \quad (۶.۴۶)$$

در معادله فوق، اسکالر p فشار نام دارد. چنان که در معادلات (۵.۴۶) نشان داده شده است، در حال کلی، فشار p با تنش عمودی فشاری کل وارد بر صفحه، برابر نیست. در مباحث سیالات، تنها باید به یاد داشت که تانسور همسانگرد $(-p \delta_{ij})$ ، بخشی از T_{ij} است که صریحاً به نرخ تغییر شکل وابسته نیست.

۵.۶ تعبیر λ و μ

جریانی برشی را در نظر بگیرید که میدان سرعت آن برابر است با،

$$v_1 = v_1(x_2), \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0 \quad (۱.۵۶)$$

در این جریان،

$$D_{11} = D_{22} = D_{33} = D_{12} = D_{23} = 0 \quad \text{و} \quad D_{12} = \frac{1}{2} \frac{dv_1}{dx_2} \quad (۲.۵۶)$$

بنا بر این،

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = -p, \quad T_{12} = T_{21} = 0 \quad (۳.۵۶)$$

و

$$T_{12} = \mu \frac{dv_1}{dx_2} \quad (۴.۵۶)$$

لذا، ثابت تناسب مرتبط‌کننده تنش برشی به نرخ کاهش زاویه میان دو خط مادی دوبه‌دو عمود Δx_1 و Δx_2 است (به بخش ۱۳.۳ بنگرید). ضریب نخست گرانیروی، و یا صرفاً گرانیروی نامیده می‌شود.

با استفاده از معادله (۳.۴۶)، در میدان سرعت کلی خواهیم داشت،

$$\frac{1}{3} T'_{ii} = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \Delta \quad (۵.۵۶)$$

در رابطه فوق، $\Delta = D_{ii}$ نرخ تغییر حجم (یا نرخ اتساع) است. لذا، ثابت تناسب مرتبط‌کننده تنش عمودی میانگین ویسکوز $(T'_{ii}/3)$ به نرخ تغییر حجم (Δ) است و ضریب دوم گرانیروی، یا گرانیروی حجمی نامیده می‌شود.

تنش عمودی میانگین برابر است با،

$$\frac{1}{3} T'_{ii} = -p + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \Delta \quad (۶.۵۶)$$

مشاهده می‌کنیم که به‌طور کلی، p با تنش عمودی میانگین برابر نیست، مگر این‌که Δ برابر با صفر باشد (برای مثال، در جریان سیالات تراکم‌ناپذیر) و یا گرانیروی حجمی $\Delta = (\lambda + 2\mu/3)$ برابر با صفر باشد. فرض صفر بودن گرانیروی حجمی سیال تراکم‌پذیر (فرض استوکس نام دارد).

۶.۶ سیال نیوتنی تراکم‌ناپذیر

در سیال تراکم‌ناپذیر، همواره $\Delta \equiv D_{ii} = 0$. لذا، معادله ساختاری چنین سیالی به‌صورت زیر است.

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (۱۶.۶)$$

از معادله فوق به‌دست می‌آوریم،

$$T_{ii} = -3p + 2\mu D_{ii} = -3p$$

یعنی،

$$p = \frac{T_{ii}}{3} \quad (۲۶.۶)$$

بنا بر این، فشار p در سیال ویسکوز تراکم‌ناپذیر، به‌معنای تنش عمودی میانگین است. مقدار p صریحاً به هیچ یک از کمیت‌های سینماتیک وابسته نیست؛ لذا، مادامی که رفتار مکانیکی سیال منظور باشد، مقدار فشار نامعین است. به‌بیان دیگر، چون سیال تراکم‌ناپذیر است، بدون تأثیر بر پاسخ مکانیکی سیال، می‌توان هر فشار یکنواخت

را بر آن، برهم‌نهی کرد. لذا، فشار در سیال تراکم‌ناپذیر اغلب به‌لحاظ ساختاری، فشار نامعین نامیده می‌شود. البته، در مسائلی که شرایط مرزی فشار مشخص شده باشند، میدان فشار معین است.

چون (در رابطه زیر v_i معرف مؤلفه‌های سرعت است)،

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (۳۶۶)$$

می‌توان معادلات ساختاری را به‌صورت زیر نوشت.

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (۴۶۶)$$

به‌صورت مؤلفه‌ای،

$$T_{11} = -p + 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \quad T_{22} = -p + 2\mu \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \quad T_{33} = -p + 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \quad (۵۶۶)$$

و

$$T_{12} = \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right), \quad T_{13} = \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right), \quad T_{23} = \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \quad (۶۶۶)$$

مثال ۱.۶.۶

نشان دهید که در سیال تراکم‌ناپذیر،

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (۷۶۶)$$

حل

در سیال تراکم‌ناپذیر،

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

بنا بر این،

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i}$$

حال با تعویض ترتیب مشتق‌گیری در جمله آخر معادله فوق، و توجه به این که در سیال تراکم‌ناپذیر، $\partial v_j / \partial x_j = 0$ خواهیم داشت،

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) = 0$$

لذا،

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

تکامل معادلات

۷.۶ معادلات ناویه-استوکس در سیالات تراکم‌ناپذیر

معادلات ناویه-استوکس، معادلات حرکت بر حسب مؤلفه‌های سرعت سیال اند. معادلات حرکت بر حسب مؤلفه‌های تنش برابر اند با (به معادله (۵.۷.۴) در فصل ۴ بنگرید).

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i \quad (۱.۷.۶)$$

با جایگذاری معادله ساختاری (معادله (۴.۶.۶)) در معادله فوق، به دست می‌آوریم (به مثال ۱.۶.۶ بنگرید).

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \rho B_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (۲.۷.۶)$$

به صورت مؤلفه‌ای،

$$\rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) = \rho B_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right) \quad (۳.۷.۶)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) = \rho B_2 - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right) \quad (۴.۷.۶)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) = \rho B_3 - \frac{\partial p}{\partial x_3} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right) \quad (۵.۷.۶)$$

و یا به صورت ناورد،

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \right\} = \rho \mathbf{B} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (۶.۷.۶)$$

روابط فوق، معادلات ناویه-استوکس حرکت در سیالات نیوتنی تراکم‌ناپذیر نام دارند. در معادلات سه‌گانه (۳.۷.۶) تا (۵.۷.۶)، چهار تابع مجهول وجود دارد که عبارت اند از: v_1, v_2, v_3 و p . معادله پیوستگی، معادله چهارم را تأمین می‌کند.

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad (۷.۷.۶)$$

که صورت ناوردای آن برابر است با،

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (۸.۷.۶)$$

◀ مثال ۱.۷.۶

اگر بردار سرعت همه ذرات، با راستای ثابتی موازی باشد، جریان، جریان موازی یا جریان تک‌راستا نامیده می‌شود. نشان دهید که در جریان موازی سیال نیوتنی تراکم‌ناپذیر، در همه نقاط واقع در همه صفحات موازی و عمود بر راستای جریان، تنش عمودی فشاری کل برابر با فشار p است.