بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

امتحان میان‌ترم دوم ریاضی عمومی ۱

۲۲−۰۱۵

نیمسال اوّل ۸۴−۸۳

مدّت امتحان: ۳ ساعت

پنجشنبه ۸۳/۹/۲۶

سؤال ۱. مقدار حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{(2n+3)^2-1^2}+\frac{1}{(2n+6)^2-2^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+3n)^2-n^2}\right)$$

سؤال ۲. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{x^7+x^6+3x^5+2x^4+x^3+x-1}{x^6+2x^4+x^2}\,dx$$

سؤال ۳. سطح زیر منحنی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{1+e^{x^2}}$، محصور به محور x و محدود به دو خط $x=\sqrt{\ln 3}$ و $x=\sqrt{\ln 8}$ را حول محور y دوران می‌دهیم. حجم حاصل از دوران را محاسبه کنید.

سؤال ۴. همگرایی یا واگرایی انتگرال زیر را بررسی کنید.

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+5x}$$

سؤال ۵. فرض کنید $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و برای هر $x\in[0,1]$ تعریف کنید $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. ثابت کنید نقطهٔ c، $0\le c\le 1$، موجود است که $F(1)-F(c)=\int_0^1 xf(x)dx$.

سؤال ۶. الف) فرض کنید $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و برای هر x، $f(x)\ge 0$. اگر $\int_0^1 f(x)dx=0$، ثابت کنید برای هر x، $f(x)=0$.

ب) فرض کنید k عددی ثابت باشد. نشان دهید تابع پیوستهٔ $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ با ویژگی‌های زیر وجود ندارد:

$$1)\ \forall x\in[0,1]:\ f(x)\ge 0,\qquad 2)\int_0^1 f(x)dx=1,\qquad 3)\int_0^1 xf(x)dx=k,\qquad 4)\int_0^1 x^2f(x)dx=k^2.$$

توزیع نمره: سؤال ۱: ۳ نمره، سؤال ۲: ۴ نمره، سؤال ۳: ۳ نمره، سؤال ۴: ۳ نمره،
سؤال ۵: ۳ نمره، سؤال ۶: الف) ۱/۵ نمره، ب) ۲/۵ نمره.

مجموع: ۲۰ نمره.

تاریخ ۸۳/۹/۲۶

شماره

پیوست

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

حل مسایل امتحان میان‌ترم دوم ریاضی عمومی ۱

سؤال ۱: حد مطلوب $= \lim_{n\to+\infty} n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2n+3i)^2 - i^2}$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2+3\frac{i}{n})^2-(\frac{i}{n})^2}\right)\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{(2+3x)^2-x^2}\,dx$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{8x^2+12x+4}\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x+1}{x+1}\right|\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}.\ \square$$

سؤال ۲: با تقسیم صورت تابع زیرانتگرال بر مخرج آن می‌توانیم بنویسیم:

تابع زیرانتگرال $= x+1+\frac{x^5-x^2+x-1}{x^6+2x^4+x^2}$.

اکنون با فرض

$$\frac{x^5-x^2+x-1}{x^6+2x^4+x^2}=\frac{x^5-x^2+x-1}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}$$

به دست می‌آوریم $A=-1$، $B=1$، $C=-2$، $D=0$، $E=0$ و $F=1$.

پس

انتگرال مطلوب $=\int\left(x+1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{2x}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$$=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{x}+\ln|x|+\frac{1}{x^2+1}+\tan^{-1}x+C.\ \square$$

سؤال ۳: حجم حاصل از دوران برابر است با

$$2\pi\int_{\sqrt{\ln 3}}^{\sqrt{\ln 8}} x\sqrt{1+e^{x^2}}\,dx.$$

با فرض $u=\sqrt{1+e^{x^2}}$ به دست می‌آوریم $x\,dx=\frac{u\,du}{u^2-1}$

و لذا حجم مطلوب برابر خواهد بود با

$$2\pi\int_2^3\frac{u^2}{u^2-1}\,du$$

$$=2\pi\int_2^3\left(1+\frac{1/2}{u-1}-\frac{1/2}{u+1}\right)du$$

$$=2\pi\left(u+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right)\Big]_2^3$$

$$=2\pi\left(1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\right).\ \square$$

سؤال ۴: می‌توانیم بنویسیم: $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+5x}=\int_0^1\frac{dx}{x^2+5x}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+5x}$

برای $\varepsilon>0$ داده شده، اگر $\varepsilon\le x\le 1$، آنگاه $\frac{1}{x^2+5x}\ge\frac{1}{6x}$، و لذا $\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x^2+5x}\ge\int_\varepsilon^1\frac{dx}{6x}$. اما $\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{6x}=+\infty$، در نتیجه $\int_0^1\frac{dx}{x^2+5x}$ واگراست که واگرایی انتگرال داده شده را به دست می‌دهد. $\square$

سؤال ۵: F تابعی مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته است و لذا می‌توانیم انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء را به کار گیریم:

$$\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1 x\,dF(x)=xF(x)\Big]_0^1-\int_0^1F(x)\,dx=F(1)-\int_0^1F(x)\,dx$$

اکنون قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرال نتیجه می‌دهد که نقطهٔ $0\le c\le 1$ موجود است که $\int_0^1F(x)\,dx=(1-0)F(c)=F(c)$ و لذا $\int_0^1xf(x)\,dx=F(1)-F(c)$. $\square$

سؤال ۶: الف) فرض کنید $x_0\in(0,1)$ موجود باشد که $f(x_0)>0$. در نتیجه پیوستگی f ایجاب می‌کند که $\delta>0$ موجود است که $[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset(0,1)$ و f روی $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ مثبت است. از طرفی f روی بازهٔ بستهٔ $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ اینفیمم خود را در نقطه‌ای چون c به خود می‌گیرد. حال افراز $P=\{0,x_0-\delta,x_0+\delta,1\}$ را از $[0,1]$ در نظر می‌گیریم. در نتیجه

$$0=\int_0^1f(x)\,dx\ge L(P,f)\ge f(c)(2\delta)>0,$$

که تناقض است. پس برای هر $x_0\in(0,1)$، $f(x_0)=0$ و چون f بر $[0,1]$ پیوسته است، لذا $f=0$ روی $[0,1]$. $\square$

ب) فرض کنید چنین تابع f ای موجود باشد. می‌توانیم بنویسیم:

$$\int_0^1(x-k)^2f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2f(x)-2kxf(x)+k^2f(x)\right)dx$$

$$=\int_0^1x^2f(x)\,dx-2k\int_0^1xf(x)\,dx+k^2\int_0^1f(x)\,dx$$

$$=k^2-2k^2+k^2$$

$$=0.$$

چون برای هر $x\in[0,1]$، $(x-k)^2f(x)\ge0$، لذا (الف) نتیجه می‌دهد که برای هر $x\in[0,1]$، $(x-k)^2f(x)=0$ یا $f(x)=0$. در نتیجه $1=\int_0^1f(x)\,dx=0$ که تناقض است. پس چنین تابع f ای وجود ندارد. $\square$