بسمه تعالی

امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی۱، بهار ۹۸ — زمان: ۳ ساعت

---

۱. قاعده زنجیره‌ای را بیان کنید و برهانی برایش ارائه دهید. (۱۰ نمره)

۲. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته است و نقاط $x_1<x_2<x_3$ وجود دارند که

$$f(x_1)=x_2 \quad , \quad f(x_2)=x_3 \quad , \quad f(x_3)=x_1$$

ثابت کنید $c_1<c_2$ وجود دارد که $f(c_1)=c_1$ و $f(f(c_2))=c_2$. (۱۰ نمره)

۳. نشان دهید مجموعه تقریبا بیضی $x^2+2xy+2y^2-14+\cos(xy-2)=0$، مجموعه تقریبا هذلولی $2x^2+8xy-5y^2+1+\cos(xy-2)=0$ را در نقطه $(1,2)$ به صورت عمودی قطع می‌کند. (۱۵ نمره)

۴. به کمک تقریب تیلور مرتبه دو کوچکترین بازه‌ای که $\tan^{-1}(0.97)$ مطمئناً در آن قرار دارد را بدست آورید. (۱۵ نمره)

۵. می‌خواهیم یک محوطه‌ای به شکل یک قطعه از دایره درست کنیم. قسمت صاف مرزش بخشی از یک دیوار طویل است و قسمت قوسی شکل مرزش را باید به کمک یک حصار ۱۰۰ متری ایجاد کنیم. بیشترین مساحت ممکن این محوطه چقدر خواهد بود. (۱۵ نمره)

۶. آیا حد زیر وجود دارد و در صورت وجود آن را بیابید. (در عبارت زیر توان‌های x کسرهای $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ و... است) (۱۵ نمره)

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x^{1/2})^2(1-x^{1/4})^4(1-x^{1/9})^9}{(1-x^{1/3})^3(1-x^{1/5})^5(1-x^{1/7})^7}$$

موفق باشید

بسمه تعالی

۱) اگر تابع f در نقطهٔ x_0 و تابع g در نقطهٔ $y_0=f(x_0)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه تابع gof در نقطهٔ x_0 مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر است با $g'(y_0).f'(x_0)$.

۴ نمره

چون تابع g در نقطهٔ y_0 مشتق‌پذیر است برای y های نزدیک y_0 داریم

$$g(y)=g(y_0)+g'(y_0)(y-y_0)+\underbrace{(y-y_0)E(y-y_0)}_{\text{خطای تقریب خطی}}$$

۳ نمره

که برای تابع E داریم $\lim_{h\to 0}E(h)=0$. اگر در بالا قرار دهیم $y=f(x_0+h)$, $y_0=f(x_0)$ داریم:

۲ نمره

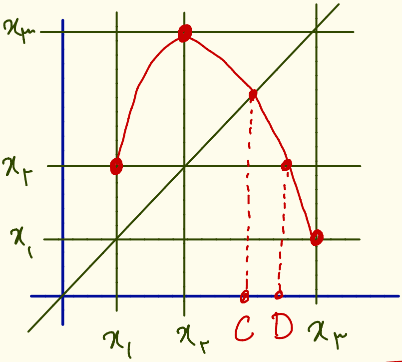
$$\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h}=\frac{[g'(y_0)+E(y-y_0)](y-y_0)}{h}=[g'(y_0)+E(y-y_0)]\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$$

از آنجایی که عبارت های داخل پرانتز زمانی که h به صفر میل می‌کند حد دارند و حد آنها به ترتیب $f'(x_0)$, $g'(y_0)$ است

پس داریم:

$$\Longrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{gof(x_0+h)-gof(x_0)}{h}=g'(y_0)f'(x_0)$$

۱ نمره



۲) تابع $g(x)=f(x)-x$ پیوسته است و در x_2 مثبت و در x_3 منفی است بنابراین $x_2<C<x_3$ وجود دارد که ← ۴ نمره

۱ نمره

$g(C)=0 \Rightarrow f(C)=C$ ۳ نمره

از آنجا که $x_2<C$ و مقدار تابع پیوسته f در نقطه C بیشتر از x_2 و در نقطه x_3 کمتر از x_2 است بنابراین $C<D<x_3$ وجود دارد که $f(D)=x_2$ ← ۳ نمره

۱ نمره ۲ نمره

بنابراین داریم $f\circ f(x_3)=x_2$ و $f\circ f(D)=x_3$. حال کافی است تابع پیوسته

$h(x)=f(f(x))-x$ را روی بازه $[D,x_3]$ در نظر بگیریم. برای آن داریم: ← ۳ نمره

$$h(D)=x_3-D>0 \quad \text{و} \quad h(x_3)=x_2-x_3<0$$

بنابراین $C<D<C_2<x_3$ وجود دارد که $h(C_2)=0$. یعنی $f(f(C_2))=C_2$

۱ نمره ۲ نمره

۳) ابتدا توجه می‌کنیم نقطهٔ (۱,۲) در هر دو رابطه صدق می‌کند

$$F(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 14 + \cos(xy-2)$$

$$F(1,2) = 1 + 4 + 8 - 14 + \cos(2-2) = 0$$

۱ نمره

$$G(x,y) = 2x^2 + 8xy - 5y^2 + 1 + \cos(xy-2)$$

$$G(1,2) = 2 + 16 - 20 + 1 + \cos(2-2) = 0$$

۱ نمره

حال توجه می‌کنیم که هر یک از منحنی‌های بالا نزدیک نقطهٔ (۱,۲) نمودار تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x است (یعنی y در نقاط آن منحنی‌ها تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x است) برای نشان دادن این موضوع فرض می‌کنیم در هر یک از رابطه‌های $F(x,y)=0$ و $G(x,y)=0$، y تابعی مشتق‌پذیر است و از آن رابطه مشتق می‌گیریم و نشان می‌دهیم مشتق $y'(1)$ قابل محاسبه است. بنابراین طبق قضیهٔ تابع ضمنی فرض اینکه y تابعی مشتق‌پذیر نسبت به x است درست است و مشتق بدست آمده هم مشتق آن تابع است:

(استفاده درست از قضیه تابع ضمنی: ۱ نمره)

۰/۴

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2xy' + 4yy' - y\sin(xy-2) - xy'\sin(xy-2) = 0 \\ x=1, y=2 \implies 2+4+2y'+8y' - 0 - 0 = 0 \implies y' = -\frac{6}{10} = \frac{-3}{5} \end{cases}$$

۰/۴

$$\begin{cases} 4x + 8y + 8xy' - 10yy' - y\sin(xy-2) - xy'\sin(xy-2) = 0 \\ x=1, y=2 \implies 4+16+8y'-20y' - 0 - 0 = 0 \implies y' = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

از آنجا که حاصل‌ضرب شیب‌های خطوط مماس بر این دو شکل در نقطهٔ (۱,۲) برابر ۱- شده پس این دو در نقطهٔ (۱,۲) بر هم عمود اند.

۱ نمره

$$f(x)=\tan^{-1}(x)$$

(۲ نمره) $$f'(x)=\frac{1}{1+x^{2}}$$

(۱ نمره) $$f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^{2})^{2}}$$

(۱ نمره) $$f^{(3)}(x)=\frac{-2(1+x^{2})^{2}+2x\left(4(1+x^{2})x\right)}{(1+x^{2})^{4}}=\frac{2(3x^{2}-1)}{(1+x^{2})^{3}}$$

(۱ نمره) $$\frac{1}{2}f^{(4)}(x)=\frac{6x(1+x^{2})^{3}-(3x^{2}-1)\left[6(1+x^{2})^{2}x\right]}{(1+x^{2})^{6}}=\frac{12x(1-x^{2})}{(1+x^{2})^{5}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\tan(f(x))=x \implies \tan'(f(x))\cdot f'(x)=1\\ &\implies f'(x)=\frac{1}{\tan'(f(x))}=\frac{1}{1+(\tan(f(x)))^{2}}=\frac{1}{1+x^{2}}\end{aligned}}$$

چندجمله‌ای تیلور مرتبه ۲ تابع f متناظر نقطه ۱ :

$$P_2(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(x)}{2}(x-1)^{2}=\pi+\frac{(x-1)}{2}-\frac{1}{4}(x-1)^{2}$$

$$P_2(0/97)=\pi-\frac{3}{200}+\frac{9}{40000}=A$$

(۳ نمره)

(۴ نمره)

طبق قضیه تیلور

$$\boxed{f(0/97)-A=\frac{f^{(3)}(c)}{6}(x-1)^{3}=-\frac{9}{2}\times10^{-6}\cdot f^{(3)}(c)}$$

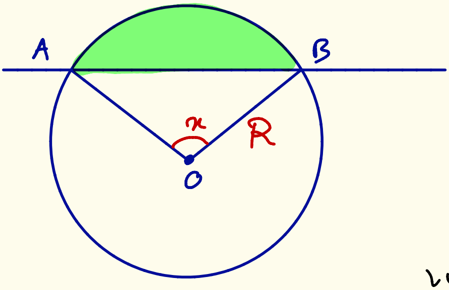
که در بالا $\boxed{\frac{97}{100}<c<1}$. از آنجا که $f^{(3)}(c)>0$ بنابراین $f(0/97)$ کمتر از A است و (۱ نمره)

برای اینکه تقریبی از اینکه چقدر کمتر است را بیابیم کافی است کرانی برای $f^{(3)}(c)$ بیابیم.

از آنجا که برای $x<1$ داریم $f^{(4)}(x)>0$ بدست می‌آید که برای این xها $f^{(3)}$ صعودی است

درنتیجه $f^{(3)}(c)<f^{(3)}(1)=\frac{1}{2}$. بنابراین تقریب بازه برابر است با $\left[A-\frac{9}{4\times10^{6}},A\right]$

(۲ نمره)



۵) فرض کنید حصار کمانی از دایره‌ای به شعاع R است و روبروی زاویه مرکزی x قرار دارد.

از آنجا که طول حصار ۱۰۰ متر است داریم $Rx=100$

۱ نمره

بنابراین $R=\frac{100}{x}$. مساحت محوطه نیز برابر است با

$$\frac{x}{2\pi}(\pi R^2) - \frac{R^2}{2}\sin x = \frac{R^2}{2}(x-\sin x) = \frac{100^2}{2}\left(\frac{x-\sin x}{x^2}\right)$$

۴ نمره

حال می‌خواهیم x را به گونه‌ای بیابیم که عبارت بالا بیشترین مقدار ممکن باشد. برای این کار بیشینه تابع $f(x)=\frac{x-\sin x}{x^2}$ را می‌یابیم.

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{\sin x}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}-\left[\frac{x^2\cos x-2x\sin x}{x^4}\right]=-\frac{1}{x^2}(1+\cos x)+\frac{2\sin x}{x^3}$$

۴ نمره

$$f'(x)=0 \iff x(1+\cos x)=2\sin x$$

$$\iff 2\theta(2\cos^2\theta)=4\sin\theta\cos\theta \qquad (x=2\theta)$$

$$\iff \begin{cases}\cos\theta=0\\ \tan\theta=\theta\end{cases}$$

۲ نمره

$\tan\theta-\theta$ روی $[0,\frac{\pi}{2})$ اکیداً صعودی است زیرا مشتق آن برابر است با $\tan^2\theta$ و مثبت است.

۲ نمره

بنابراین تنها زمانی صفر می‌شود که $\theta=0$. و برای $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ نیز $\tan\theta$ منفی است. بنابراین معادله دوم نمی‌تواند برقرار باشد. بنابراین تنها جواب $f'(x)=0$ برای $\theta=\frac{\pi}{2}$ (یعنی $x=\pi$) برقرار است.

تابع f تنها یک نقطه بحرانی درون بازه $[0,2\pi]$ دارد. برای اینکه نشان دهیم این نقطه ماکزیمم تابع f است باید روی مرز را نیز بررسی کنیم.

$$f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=0,\quad f(2\pi)=\frac{1}{2\pi},\quad f(\pi)=\frac{1}{\pi}$$

۲ نمره

۴) ابتدا به کمک قاعده‌ی هوپیتال حد $\lim_{x\to 1} \frac{(1-x^{\frac{1}{a}})}{(1-x^{\frac{1}{b}})}$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = (1-x^{\frac{1}{a}}), \quad g(x) = (1-x^{\frac{1}{b}}) \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = 0$$

۲ نمره

۵ نمره

$$f'(x) = -\frac{1}{a}x^{\frac{1}{a}-1}, \quad g'(x) = -\frac{1}{b}x^{\frac{1}{b}-1} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{b}{a} x^{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = \frac{b}{a}$$

بنابراین حد نسبت مشتق‌های f و g وجود دارد و برابر است با $\frac{b}{a}$

همچنین توجه می‌کنیم که در همسایگی ۱، $g'(x) \neq 0$. بنابراین طبق قضیه هوپیتال

۱ نمره

حد زیر وجود دارد و داریم:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(1-x^{\frac{1}{a}})}{(1-x^{\frac{1}{b}})} = \frac{b}{a}$$

۲ نمره

~~کل نکته‌ی بالا ۱۵ نمره~~

حال حد مورد نظر در مسئله به صورت حاصلضرب عبارت‌های به شکل بالا است. بنابراین این حاصلضرب نیز حد دارد و داریم:

۲ نمره

$$\lim_{x\to 1} \frac{(1-x^{1/۲})^{۲}(1-x^{1/۶})^{۴}(1-x^{1/۹})^{۹}}{(1-x^{1/۳})^{۳}(1-x^{1/۵})^{۵}(1-x^{1/۷})^{۷}} =$$

۲ نمره

$$\left[\lim \frac{(1-x^{1/۲})}{(1-x^{1/۳})}\right]^{۲}\left[\lim \frac{(1-x^{1/۶})}{(1-x^{1/۵})}\right]^{۴}\left[\lim \frac{(1-x^{1/۹})}{(1-x^{1/۷})}\right]^{۷}\left[\lim \frac{(1-x^{1/۹})}{(1-x^{1/۳})}\right]\left[\lim \frac{(1-x^{1/۹})}{(1-x^{1/۵})}\right]$$

$$= \frac{۳^۲}{۲^۲} \cdot \frac{۵^۴}{۶^۴} \cdot \frac{۷^۷}{۹^۷} \cdot \frac{۳}{۹} \cdot \frac{۵}{۹} = \frac{۳^۳ \cdot ۵^۵ \cdot ۷^۷}{۲^۲ \cdot ۶^۴ \cdot ۹^۹}$$

۱ نمره

راه حل دیگر:

ابتدا توجه می کنیم:

۴ نمره

$$\lim_{x\to 1} \frac{(1-x^{\frac{1}{a}})}{(1-x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{1}{a}}-1^{\frac{1}{a}}}{x-1}$$

$$= \left(x^{\frac{1}{a}}\right)'\Big|_{x=1} = \frac{1}{a}x^{\frac{1}{a}-1}\Big|_{x=1} = \frac{1}{a} \neq 0$$

۴ نمره حال کافی است صورت و مخرج کسر مورد نظر را در $(1-x)^{5}$ ضرب و تقسیم کنیم به این ترتیب داریم:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(1-x^{\frac{1}{2}})^2(1-x^{\frac{1}{4}})^4(1-x^{\frac{1}{9}})^9}{(1-x^{\frac{1}{3}})^3(1-x^{\frac{1}{5}})^5(1-x^{\frac{1}{7}})^7} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\left(\frac{1-x^{\frac{1}{2}}}{1-x}\right)^2\left(\frac{1-x^{\frac{1}{4}}}{1-x}\right)^4\left(\frac{1-x^{\frac{1}{9}}}{1-x}\right)^9}{\left(\frac{1-x^{\frac{1}{3}}}{1-x}\right)^3\left(\frac{1-x^{\frac{1}{5}}}{1-x}\right)^5\left(\frac{1-x^{\frac{1}{7}}}{1-x}\right)^7}$$

۴ نمره

۴ نمره عبارت بالا حاصلضرب و تقسیم عبارت هایی است که هر یک در $x=1$ حد دارد و حد آن نیز ناصفر است

بنابراین حد عبارت بالا وجود دارد و برابر است با

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{1}{9}\right)^9}{\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^5\left(\frac{1}{7}\right)^7} = \frac{3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7}{2^2 \cdot 4^4 \cdot 9^9}$$

۱ نمره