پرسش‌هایِ ترکیبیاتِ المپیادهایِ ریاضیِ روسیه

Combinatorics.vcp.ir

مترجم: ابوالفضل اسدی منبع انگلیسی: کتاب $problems\ from\ around\ the\ world$ و سایت $mathlinks.ro$

1993

1. در یک آلبومِ عکس،

الف) 10

ب) n

عکس وجوددارد. رویِ هر عکس سه فرد حضوردارند: یک مرد در وسطِ آن، پسرَش در سمتِ چپَش و برادرَش در سمتِ راستَش. کمینه‌یِ ممکنِ تعدادِ افرادِ متفاوت رویِ عکس‌ها چیست، با فرضِ این که تمامِ مردهایِ وسطِ عکس‌ها متفاوت باشند؟ (کلاسِ نهم – روزِ یکم)

2. بزرگ‌ترین تعداد پیاده‌هایی که می‌توانند رویِ خانه‌هایِ یک تخته‌شترنج گذاشته‌شوند؛ به گونه‌ای که هر سطر، ستون یا قطر تعدادِ زوجیِ پیاده داشته‌باشد، چیست؟ (کلاسِ نهم – روزِ دوم)

3. سی نفر از یک شرکت دورِ یک میز نشسته‌اند. برخی از آن‌ها باهوش و برخی خنگ هستند. از هر فرد پرسیده‌می‌شود: "هم‌سایه‌یِ سمتِ راستِ شما یک مردِ باهوش است یا خنگ؟". یک مردِ باهوش درست پاسخ‌می‌دهد؛ حال آن که یک فردِ خنگ درست یا نادرست پاسخ‌می‌دهد. فرض‌کنید که نابیش‌تر از F خنگ در شرکت وجوددارد. بیشینه‌یِ مقدارِ صحیحِ F برایِ آن که همواره با دانستنِ پاسخ‌ها بتوان یک مردِ باهوش در شرکت تشخیص‌داد، چیست؟ (کلاسِ دهم – روزِ یکم)

4. یک مربع با ضلعِ n به n^2 مربعِ واحد تقسیم‌شده‌است. بیشینه‌یِ n چیست؛ برایِ آن که بتوان n مربعِ واحد را نشان‌دارکرد؛ به گونه‌ای که هر مستطیل با اضلاعِ رویِ خطوطِ مشبک و مساحتی که از n کم‌تر نیست، شاملِ دستِ‌کم یک مربعِ نشان‌دار در درونَش باشد؟ (کلاسِ دهم – روزِ دوم)

5. نشان‌دهید عددِ طبیعیِ n با شرطِ زیر وجوددارد: اگر یک مثلثِ منتظم با ضلعِ n به n^2 مثلثِ منتظم با ضلعِ 1 تقسیم‌شود، آن‌گاه در میانِ رأس‌هایِ این مثلث‌ها بتوان $1993n$ نقطه انتخاب‌کرد که هیچ سه‌تایی از آن‌ها رأس‌هایِ یک مثلثِ منتظم نباشند. (کلاسِ یازدهم – روزِ یکم)

6. اعداد 1 تا 1993 به ترتیبی در یک سطر نوشته‌شده‌اند. عملِ زیر انجام‌می‌شود: اگر عددِ نخستِ سطر k باشد، آن‌گاه k عددِ نخستِ سطر وارون‌می‌شوند. نشان‌دهید پس از تعدادی عمل عددِ 1 در نخستین مکان پدیدارمی‌شود. (کلاسِ یازدهم – روزِ دوم)

7. در یک تورنمنتِ تنیس با n شرکت‌کننده، مسابقات در جفت‌ها (دو به دو) انجام‌شد؛ به گونه‌ای که هر دو شرکت‌کننده درست یک مسابقه روبه‌رویِ یک‌دیگر قرارگرفتند. برایِ چه nهایی این ممکن است؟ (کلاسِ یازدهم – روزِ دوم)

1994

1. سه کپه کبریت رویِ میز وجوددارد: یکی با 100 کبریت، یکی با 200تا و یکی با 300تا. دو بازی‌کن بازیِ زیر را انجام‌می‌دهند: آن‌ها به نوبت بازی‌می‌کنند و یک بازی‌کن در نوبتَ‌ش یکی از کپه‌ها را برمی‌دارد و هر یک از کپه‌هایِ باقی‌مانده را به دو کپه‌یِ ناتهی تقسیم‌می‌کند. بازی‌کنی که نتواند یک حرکتِ مجاز انجام‌دهد، می‌بازد. چه کسی استراتژیِ برد دارد؟ (کلاسِ نهم – روزِ یکم)

*این پرسش در کلاسِ دهم – روزِ یکم هم داده‌شد. ضمناً این پرسش بسیار ساده به نظر می‌رسد. احتمالاً در متنِ انگلیسی سوال اشتباه تایپ‌شده‌است. ولی به هر حال پرسش به صورتِ بالا در متنِ انگلیسی آمده‌است.

2. رویِ یک خط n نقطه‌یِ آبی و n نقطه‌یِ قرمز داده‌شده‌اند. ثابت‌کنید جمعِ فواصلِ بینِ جفت نقاطِ هم‌رنگ از جمعِ فواصلِ بینِ جفت نقاطِ ناهم‌رنگ تجاوزنمی‌کند. (کلاسِ نهم – روزِ یکم)

3. کارت‌هایی شماره‌گذاری‌شده با اعدادِ 1 تا 1000، یک به یک رویِ خانه‌هایِ یک تخته‌یِ مستطیلیِ 1×1994، طبقِ قانونِ زیر گذاشته‌می‌شوند: اگر خانه‌یِ بعدیِ خانه‌یِ شاملِ کارتِ n آزاد باشد، آنگاه کارتِ $n+1$ باید در آن قرارگیرد. ثابت‌کنید تعدادِ آرایش‌هایِ ممکن بیش از نصفِ یک میلیون نیست. (کلاسِ نهم – روزِ دوم)

4. یک صفحه به مربع‌هایِ واحدی با دو دسته از خطوطِ موازی تقسیم‌شده‌است. برایِ هر مربعِ $n \times n$ با اضلاعِ رویِ خطوطِ تقسیم‌کننده، "تنه"یِ آن را مجموعه‌یِ مربع‌هایِ واحدِ آن که از درون با مرزِ مربعِ $n \times n$ در تماس هستند، درنظرمی‌گیریم. ثابت‌کنید تنها یک راه برایِ پوشاندنِ یک مربعِ 100×100 داده‌شده با اضلاع رویِ خطوطِ تقسیم‌کننده با تنه‌هایی از 50 مربع (نه لزوماً مشمول در مربعِ 100×100) وجوددارد. (کلاسِ نهم – روزِ دوم)

5. در یک $6n+1$ضلعیِ منتظم، k رأس با قرمز و بقیه با آبی رنگ‌شده‌اند. ثابت‌کنید تعدادِ مثلث‌هایِ متساوی‌الساقینی که رأس‌هایِ‌شان هم‌رنگ هستند به آرایشِ رئوسِ قرمز بستگی‌ندارد. (کلاسِ دهم – روزِ یکم)

6. 30 شاگرد در یک کلاس وجوددارند و هر یک از آن‌ها تعدادِ یک‌سانی دوست در میانِ هم‌کلاسی‌هایَش دارد. بیشینه‌یِ ممکنِ تعدادِ شاگردهایی که هر یک از آن بیش از اکثریتِ دوستانَش درس‌می‌خواند، چیست (براِ هر دو شاکر می‌توان گفت کدام‌یک بیش‌تر درس‌می‌خواند)؟ (کلاسِ دهم – روزِ دوم)

7. درونِ یک 100ضلعیِ کوژ k نقطه انتخاب‌شده‌اند که $2 \leq k \leq 50$. نشان‌دهید می‌توان $2k$ رأس از 100ضلعی را برگزید؛ به گونه‌ای که $2k$ضلعیِ کوژِ ساخته‌شده با این رأس‌ها شاملِ تمامِ نقاطِ انتخاب‌شده باشد. (کلاسِ یازدهم – روزِ یکم)

8. اعدادِ حقیقی رویِ مربع‌هایِ یک شبکه‌یِ نامتناهی نوشته‌شده‌است. دو شکل شاملِ متناهی مربع داده‌شده‌است. آن‌ها می‌توانند هرجایی رویِ شبکه انتقال‌یابند، البته اگر بر مربع‌هایِ شبکه منطبق‌شوند. می‌دانیم که هرگاه شکلِ یکم انتقال‌داده‌شود، جمعِ اعدادی که پوشش‌می‌دهد، مثبت است. ثابت‌کنید شکلِ دوم می‌تواند انتقال‌داده‌شود؛ به گونه‌ای که جمعِ اعدادی که پوشش‌می‌دهد، مثبت‌باشد. (کلاسِ یازدهم – روزِ دوم)

9. بازی‌کن‌هایِ A, B به نوبت یک اسب را رویِ یک تخته‌شترنجِ 1994×1994 حرکت‌می‌دهند. بازی‌کنِ A تنها حرکاتِ افقی انجام‌می‌دهد؛ یعنی به گونه‌ای که اسب به یک سطرِ مجاور می‌رود, حال آن که بازی‌کنِ B تنها حرکاتِ عمودی انجام‌می‌دهد. ابتدا بازی‌کنِ A اسب را رویِ یک مربعِ دل‌خواه می‌گذارد و حرکتِ یکم را انجام‌می‌دهد. اسب نمی‌تواند به یک مربع که قبلاً در طولِ بازی دیده‌شده‌است، حرکت‌کند. ثابت‌کنید بازی‌کنِ A یک استراتژیِ برد دارد. (کلاسِ یازدهم – روزِ دوم)

1995

1. آیا اعدادِ 1 تا 81 می‌توانند در یک تخته‌یِ 9×9 نوشته‌شود؛ به گونه‌ای که جمعِ اعداد در هر مربعِ 3×3 یک‌سان باشد؟ (کلاسِ نهم – روزِ یکم)

2. سه جعبه از سنگ وجوددارد. "زیزیفوس" سنگ‌ها را پشتِ سرِ هم بینِ جعبه‌ها حرکت‌می‌دهد. هرگاه که او یک سنگ را حرکت‌می‌دهد، "زئوس" به او تعدادی سکه می‌دهد که برابر با تفاضلِ بینِ تعدادِ سنگ‌هایِ جعبه‌ای که سنگ در آن قرارگرفت منهایِ جعبه‌ای که سنگ از آن برداشته‌شد، است (سکه‌یِ حرکت‌داده‌شده حساب نمی‌شود). اگر این تفاضل منفی

بود، زیزیفوس به اندازه‌یِ متناظر به زئوس برمی‌گرداند (اگر زیزیفوس نتواند پرداخت‌کند، زئوسِ بخشنده به او اجازه‌می‌دهد تا حرکت‌کند و بعداً پرداخت‌کند. پس از مدتی تمامِ سنگ‌ها در جعبه‌هایِ ابتداییِ‌شان قرارگرفتند. بیشینه‌یِ ممکنِ پولِ زیزیفوس در آن لحظه چیست؟ (کلاسِ نهم – روزِ دوم)

3. اعداد 1 و 1- در خانه‌هایِ یک تخته‌یِ 2000×2000 نوشته‌شده‌است. می‌دانیم جمعِ تمامِ اعداد در تخته مثبت است. نشان‌دهید می‌توان 1000 سطر و 1000 ستون برگزید؛ به گونه‌ای که جمعِ اعدادِ نوشته‌شده در خانه‌هایِ تقاطعِ‌شان دستِ‌کم 1000 باشد. (کلاسِ نهم – روزِ دوم)

*این پرسش در کلاسِ دهم – روزِ دوم هم آمده‌است.

4. یک پسر n بار به یک چرخ و فلک با n صندلی می‌رود. پس از هر بار، او در جهتِ ساعت‌گرد حرکت‌می‌کند و صندلیِ دیگری را می‌گیرد و نیز یک دایره‌یِ کاملِ نمی‌چرخد. تعدادِ صندلی‌هایی که او در هر حرکت از آن‌ها می‌گذرد، طولِ آن حرکت نامیده‌می‌شود. برایِ چه nهایی، او می‌تواند رویِ هر صندلی بنشیند و او در طولِ تمامِ $n-1$ حرکت، طول‌هایِ متفاوت بسازد؟ (کلاسِ یازدهم – روزِ دوم)

1996

1. در "دوما" 1600 نماینده وجوددارد که 16000 کمیته‌یِ 80 نفری را تشکیل‌داده‌اند. ثابت‌کنید می‌توان دو کمیته پیداکرد که ناکم‌تر از چهار عضوِ مشترک داشته‌باشند.

2. دو کپه از سکه رویِ یک میز وجوددارد. می‌دانیم که جمعِ وزن‌هایِ سکه در کپه‌ها برابر است و برایِ هر عددِ طبیعیِ k که از تعدادِ سکه‌هایِ هیچ کپه‌ای تجاوزنمی‌کند، جمعِ وزن‌هایِ k سکه‌یِ سنگین‌تر در کپه‌یِ یکم نابیش‌تر از کپه‌یِ دوم است. نشان‌دهید برایِ هر عددِ طبیعیِ x اگر هر سکه (در هر دو کپه)، از وزنِ ناکم‌تر از x با یک سکه از وزنِ x جای‌گزین‌شود، کپه‌یِ یکم سنگین‌تر از دومی نخواهدبود.

3. آیا یک تخته‌چکرِ 7×5 می‌تواند با ال – ترومینو (شکلی ساخته‌شده با یک مربعِ 2×2 با برداشتنِ یکی از چهار مربعِ گوشه‌ایِ 1×1) در چندین لایه پوشانده‌شود؛ به گونه‌ای که هر مربع از تخته با تعدادِ یک‌سانی ال – ترومینو پوشانده‌شود؟

4. رویِ یک صفحه‌مختصات چهار پیش‌خوان گذاشته‌شده‌است که مرکزِ هر یک مختص‌هایِ درست دارد. می‌توان هر پیش‌خوان را با یک بردارِ متصل‌کننده‌یِ مراکزِ دو پیش‌خوانِ دیگر جابه‌جا کرد. ثابت‌کنید هر دو پیش‌خوانِ دل‌خواه می‌توانند با دنباله‌ای از حرکات بر هم منطبق‌شوند.

5. اعدادِ 1 تا 100 به ترتیبی نامعلوم نوشته‌شده‌اند. می‌توان در موردِ هر 50 عدد پرسید و ترتیبِ آن‌ها را فهمید. کمینه‌یِ پرسش‌هایِ موردِ نیاز برایِ پیداکردنِ ترتیبِ تمامِ 100 عدد چیست؟

1997

1. نشان‌دهید اعدادِ 1 تا 16 می‌توانند در یک خط (هم‌چنین ثابت‌کنید دورِ یک دایره نمی‌توانند) نوشته‌شوند؛ به گونه‌ای که جمعِ هر دو عددِ مجاور یک مربعِ کامل باشد.

2. یک شرکت 50000 کارمند دارد. برایِ هر کارمند، جمعِ تعدادِ بالادستی‌هایِ بلافاصله و پایین‌دستی‌هایِ بلافاصله‌یِ او، 7 است. یک دوشنبه، هر کارمند یک سفارش آماده‌کرد و کپی‌هایی از آن را به هر یک از بالادستی‌هایِ بلافاصله‌اش (در صورتِ وجود)، داد. پس از آن هر روز، هر کارمند کپی‌هایی از تمامِ سفارش‌هایِ گرفته‌شده در روزِ قبل را به تمامِ پایین‌دستی‌هایِ بلافاصله‌اش، اگر وجود داشت، می‌دهد؛ در غیر این صورت آن را پیشِ خود نگه‌می‌دارد. فهمیده‌شد که جمعه، هیچ سفارشی داده‌نشد. نشان‌دهید دستِ‌کم 97 کارمند وجوددارند که بالادستیِ بلافاصله ندارند.

*منظور از بالادستیِ بلافاصله، فردی است که مقامَ‌ش یکی بیش‌تر باشد و منظور از پایین‌دستیِ بلافاصله، فردی است که مقامَ‌ش یکی کم‌تر باشد.

3. ا) در مکزیکوسیتی، برایِ محدودکردنِ روندِ ترافیک، برایِ هر اتومبیلِ شخصی، دو روز از هفته مشخص‌شده است که در آن‌ها اتومبیل نمی‌تواند در خیابان‌هایِ شهر حرکت‌کند. یک خانواده می‌خواهند از دستِ‌کم 10 اتومبیل در هر روز استفاده‌کنند. کمینه‌یِ تعدادِ اتومبیل‌هایی که باید داشته‌باشند چیست؛ اگر بتوانند برایِ هر اتومبیل، روزهایی را محدودکنند.

ب) قانون به "محدودکردنِ هر اتومبیل به تنها یک روز در هفته" تغییرمی‌کند، اما پلیس روزها را انتخاب‌می‌کند. خانواده‌ای به پلیس رشوه‌می‌دهد؛ به گونه‌ای که خانواده برایِ هر اتومبیل دو روز انتخاب‌کند و پلیس به طورِ دل‌خواه، یکی از آن دو روز را برایِ اتومبیل محدودکند. اکنون کمینه‌یِ تعدادِ اتومبیل‌هایی که خانواده نیازدارند تا موفق‌شوند هر روز به 10 ماشین دست‌یابی داشته‌باشند، چیست؟

4. رویِ یک تخته‌سیاه اعدادِ از 1 تا 1000 نوشته‌شده است. دو بازی‌کن به نوبت یک عدد از تخته پاک‌می‌کنند. بازی وقتی پایان‌می‌یابد که دو عدد باقی‌بمانند: بازی‌کنِ یکم می‌برد اگر جمعِ این اعداد بر 3 بخش‌پذیر باشد؛ در غیرِ این صورت بازی‌کنِ دوم می‌برد. کدام بازی‌کن یک استراتژیِ برد دارد؟

5. در سرزمینِ روبات‌ها، تعدادی متناهی از دنباله‌ها (یِ متناهی) از ارقام ممنوع است. می‌دانیم که یک کسرِ اعشاریِ نامتناهی وجوددارد که شاملِ هیچ زیردنباله‌یِ ممنوع نیست. نشان‌دهید یک کسرِ اعشاریِ نامتاهیِ متناوب وجوددارد که شاملِ هیچ زیردنباله‌یِ ممنوع نیست.

6. اعضایِ کنگره‌ای از حزب‌هایِ دارایِ اشتراکِ متفاوت به گونه‌ای اند که برایِ هر دو حزبِ (نه لزوماً متفاوت) A, B، مکملِ $A \cup B$ نیز یک حزب است. نشان‌دهید برایِ هر دو حزبِ A, B، $A \cup B$ نیز یک حزب است.

7. ا) داوریِ "انجمنِ خردمندان" به صورتِ زیر انجام‌می‌شود: شاه خردمندان را در یک خط آرایش‌می‌دهد و رویِ سرِ هر خردمند یک کلاهِ سفید یا سیاه می‌گذارد. هر خردمند می‌تواند رنگِ کلاه‌هایِ خردمندانِ جلویَ‌ش را ببیند، اما کلاهِ خودَش و کلاهِ خردمندانِ جلویَ‌ش را نمی‌بیند. سپس یکی پس از دیگری (به ترتیبِ انتخابیِ خودِشان)، هر خردمند یک رنگ حدس‌می‌زند. پس از آن، شاه آن خردمندانی را که رنگِ کلاهِشان را درست حدس‌نزده‌اند، می‌کشد.
روزِ بعد خردمندان هم‌دیگر را ملاقات‌می‌کنند و تصمیم‌می‌گیرند که کمینه‌یِ تعدادِ کشته‌ها را داشته‌باشند. کمینه‌یِ تعدادِ خردمندانی که در این حالت مطمئناً زنده‌می‌مانند، چیست؟
ب) شاه قصددارد سه رنگ برایِ کلاه‌ها استفاده‌کند: سفید، سیاه و قرمز. حالا کمینه‌یِ تعدادِ خردمندانی که مطمئناً زنده‌می‌مانند، چیست؟

8. یک کلاس شاملِ 33 دانش‌آموز است. از هر دانش‌آموز پرسیده‌می‌شود چند دانش‌آموزِ دیگر در کلاس اسمِ او را دارند و چند نفر فامیلیِ او را دارند. فهمیده‌شد در بینِ پاسخ‌ها، تمامِ اعدادِ 0 تا 10 رخ دادند. نشان‌دهید که دو دانش‌آموز در کلاس با اسم و فامیلیِ یک‌سان وجوددارد.

9. اعداد 1 تا 100 در یک جدولِ 10×10 آرایش‌یافته‌اند؛ به گونه‌ای که هیچ دو عددِ مجاور جمعِ کم‌تر از S ندارند. کمینه‌یِ مقدارِ S را برایِ این که این کار ممکن باشد، بیابید.

10. رویِ یک نوارِ نامتناهی (از هر دو جهت) از مربع‌هایی نشان‌دارشده با اعدادِ درست، چند سنگ قراردادەشدەاست (ممکن است رویِ یک مربع بیش از یک سنگ باشد). ما یک دنباله از حرکاتِ مانندِ زیر انجام‌می‌دهیم:

1) برداشتنِ یک سنگ از هر یک از مربع‌هایِ $n-1$ و n و گذاشتنِ یک سنگ رویِ مربعِ $n+1$.

2) برداشتنِ دو سنگ از مربعِ n و گذاشتنِ یک سنگ رویِ هر یک از مربع‌هایِ $n+1$ و $n-2$.

ثابت‌کنید هر دنباله از این حرکات سرانجام به موقعیتی می‌رسد که در آن هیچ حرکتِ دیگر نمی‌تواند انجام‌شود و همچنین این موقعیتِ پایانی به دنباله‌یِ حرکات بستگی‌ندارد.

11. یک مکعبِ $n\times n\times n$ به مکعب‌هایِ واحد تقسیم‌شده‌است. یک چندضلعیِ بسته (در فضا) بدونِ خودبرخوردی به ما داده‌شده‌است که اضلاعِ آن مراکزِ دو مکعبِ واحدِ مشترک در یک وجه را به هم وصل‌می‌کنند. وجوهِ مکعب‌هایِ واحدی که چندضلعی را قطع‌می‌کنند، "برجسته" نامیده‌می‌شوند. ثابت‌کنید که یال‌هایِ مکعب‌هایِ واحد می‌توانند با دو رنگ، رنگ‌شوند؛ به گونه‌ای که هر وجهِ برجسته تعدادِ فردی از یال‌هایِ هر رنگ داشته‌باشد؛ در حالی که هر وجهِ نابرجسته تعدادِ زوجی یال از هر رنگ داشته‌باشد.

12. در یک شبکه‌یِ مستطیلیِ $m\times n$ که m,n اعدادِ درستِ فرد هستند، در ابتدا دومینوهایِ 2×1 قرارگرفته‌اند؛ به گونه‌ای که درست تمامِ شبکه را به جز یک مربعِ 1×1 در یک گوشه از شبکه می‌پوشانند. مجاز است که یک دومینو را به در امتدادِ یک مربعِ خالی بلغزانیم؛ که به موجبِ آن مربعیِ دیگر خالی‌می‌شود. نشان‌دهید با یک دنباله از این حرکات، می‌توانیم هر گوشه‌یِ دیگر از مستطیل را خالی‌کنیم.

1998

1. یک دسته‌کارت شاملِ 52 کارت از 13 نوعِ متفاوت است. وانیا یک کارت از دسته برمی‌دارد و نوعِ آن را حدس می‌زند و آن را کنارمی‌گذارد. او این کار را تکرارمی‌کند تا دسته خالی‌شود. نشان‌دهید اگر وانیا همواره یک نوع را حدس بزند که ناکم‌تر از هر نوعِ دیگر، کارتِ باقی‌مانده دارد، او همواره دستِ‌کم 13 بار درست حدس‌خواهدزد.

2. $n \geq 9$ نقطه در صفحه داده‌شده‌است. برایِ هر 9 نقطه‌یِ داده‌شده، دو دایره وجوددارند که هر یک از 9 نقطه رویِ یکی از دایره‌ها قراردارد. نشان‌دهید دو دایره وجوددارند؛ به گونه‌ای که هر یک از نقاطِ داده‌شده رویِ یکی از دایره‌ها قراردارند.

3. نشان‌دهید که از هر مجموعه‌یِ متناهی از نقاطِ درونِ صفحه، می‌توان یک نقطه پاک‌کرد؛ به گونه‌ای که مجموعه‌یِ باقی‌مانده بتواند به دو زیرمجموعه، هر یک با قطرِ کوچک‌تر از مجموعه‌یِ اصلی افرازشود. (قطرِ یک مجموعه‌یِ متناهی از نقاط، بیشینه‌یِ فاصله‌یِ بینِ دو نقطه در مجموعه است.)

4. در 1999 حافظه‌یِ یک رایانه، اعدادِ $1, 2, \ldots, 2^{1998}$ ذخیره‌شده‌اند. دو برنامه‌نویس به نوبت از هر یک از 5 حافظه‌یِ متفاوت، یک واحد کم‌می‌کنند. اگر هر حافظه‌ای یک عددِ منفی پیداکرد، رایانه می‌شکند و برنامه‌نویسِ مقصر باید هزینه‌یِ تعمیر را بدهد. کدام برنامه‌نویس می‌تواند مطمئن‌باشد که او امنیتِ مالی دارد و چگونه؟

5. دو دسته‌کارتِ یکسان، هر یک 36 کارت دارند. یکی برزده‌می‌شود و بالایِ دومی قرارمی‌گیرد. برایِ هر کارتِ دسته‌یِ بالایی، تعدادِ کارت‌هایِ بینِ آن و کارتِ متناظر در دسته‌یِ دوم را می‌شماریم. جمعِ این اعداد چیست؟

6. یک جدولِ $n \times n$ $(n > 100)$ داریم که در $n - 1$ خانه‌یِ آن 1 و در بقیه 0 وجوددارد. میتوانیم هر خانه را انتخاب‌کنیم و یکی از آن بکاهیم و یکی به خانه‌هایِ دیگر در سطر و ستونَ‌ش اضافه‌کنیم. با این فرآیند، آیا می‌توانیم تمامِ خانه‌هایِ جدول را برابر کنیم؟

7. تمامِ روش‌هایِ توزیع‌کردنِ اعداد از 1 تا 9 را در یک جدولِ 3×3 بیابید؛ به گونه‌ای که برایِ هر یک از 6 مربعی که با خانه‌هایِ جدول شکل‌می‌گیرند، اعدادِ در گوشه‌هایِ مربع جمعِ یکسان داشته‌باشند.

8. یک گروه از چوپان‌ها، 128 گوسفند در میانِشان دارند. اگر یکی از آن‌ها دستِ‌کم نیمی از گوسفندها را داشته‌باشد، هر چوپانِ دیگر به تعدادِ گوسفندهایی که دارد، از او می‌دزدد. اگر دو چوپان هر یک 64 گوسفند داشتند، یک نفر یک گوسفند از یکی از آن دو می‌گیرد. فرض‌کنسد هفت دور از دزدی‌ها رخ‌دهد. ثابت‌کنید یک چوپان با تمامِ گوسفندها تمام‌می‌کند.

9. یک مکعب با طولِ ضلعِ n با تیغه به مکعب‌هایِ واحدی، تقسیم‌شده‌است (هر تیغه یک جفت از مکعب‌هایِ مجاور را جدامی‌کند). کمینه‌یِ تعدادِ تیغه‌هایی که می‌تواند برداشته‌شود؛ به گونه‌ای که از هر مکعب، بتوان به رویه‌یِ مکعب بدونِ گذر از یک تیغه رسید، چیست؟

10. من یک عدد از 1 تا 144، شاملِ خودِشان، انتخاب‌می‌کنم. شما می‌توانید یک زیرمجموعه از $\{1, 2, \ldots, 144\}$ انتخاب‌کنید و از من بپرسید که آیا عددِ من در این زیرمجموعه هست یا نه. یک پاسخِ "بله" 2 دلار خواهد ارزید و یک پاسخِ "خیر" تنها 1 دلار می‌ارزد. کمینه‌یِ مقدارِ پولی که شما نیازخواهیدداشت تا مطمئن‌باشید عددِ من را پیدامی‌کنید، چیست؟

11. رویِ یک تخته‌شترنجِ نامتناهی، ما یک چندضلعی با اضلاعِ متعلق به خطوطِ مشبک می‌کشیم. یک پاره‌خطِ واحد متعلق به محیط با سیاه یا سفید، طبقِ آن که آن با یک مربعِ سیاه یا سفید در درونِ چندضلعی در تماس است، رنگ‌می‌شود. گیرید A و B و a و b به ترتیب تعدادِ پاره‌خط‌هایِ سیاه، پاره‌خط‌هایِ سفید، مربع‌هایِ سیاهِ درونِ چندضلعی و مربع‌هایِ سفیدِ درونِ چندضلعی باشند. نشان‌دهید $A - B = 4(a - b)$.

12. یک شکنج یک تخته‌یِ 8×8 با برخی از مربع‌هایِ مجاورِ جداشده با دیوار است؛ به گونه‌ای که یک مسیر از هر مربع به هر مربعِ دیگر وجوددارد که از یک دیوار نمی‌گذرد. دستوراتِ **چپ**، **راست**، **بالا** یا **پایین** داده‌می‌شوند و یک مهره‌یِ پیاده یک مربع در جهتِ متناظرِ حرکت‌می‌کند ؛البته اگر حرکتِ او با یک دیوار یا یک یال از تخته سد نشود؛ در غیرِ این صورت حرکت انجام‌نمی‌شود. خدا یک برنامه می‌نویسد (یک دنباله‌یِ متناهی از دستورات) و آن را به شیطان می‌دهد که او

سپس یک شکنج می‌سازد و پیاده را رویِ یکی از مربع‌هایِ آن قرارمی‌دهد. آیا خدا می‌تواند مطمئن‌باشد بدونِ بستگی به آن چه شیطان انجام‌می‌دهد، پیاده رویِ هر مربع از تخته قرارمی‌گیرد؟

13. یک جواهرساز، یک زنجیر از $N > 3$ حلقه‌یِ شماره‌گذاری‌شده برایِ یک مشتریِ بداخلاق می‌سازد. سپس مشتری از جواهرساز می‌خواهد که ترتیبِ حلقه‌ها را تغییردهد؛ به گونه‌ای که جواهرساز باید بیشینه‌یِ تعدادِ حلقه‌ها را بازکند. این تعداد، چند حلقه خواهدبود؟

14. زیرمجموعه‌هایی مشخص از یک مجموعه‌یِ داده‌شده، "برجسته" هستند. هر زیرمجموعه‌یِ برجسته شاملِ $2k$ عضو است که k یک عددِ درستِ مثبتِ ثابت است. می‌دانیم که یک زیرمجموعه‌یِ داده‌شده با کم‌تر از $(k+1)^2$ عضو، یا شاملِ هیچ زیرمجموعه‌یِ برجسته نیست؛ یا تمامِ زیرمجموعه‌هایِ برجسته‌یِ آن یک عضوِ مشترک دارند. نشان‌دهید که تمامِ زیرمجموعه‌هایِ برجسته یک عضوِ مشترک دارند.

15. اعدادِ 19 و 98 رویِ یک تخته نوشته‌شده‌اندو هر دقیقه، هر عدد یا به اندازه‌یِ 1 افزایش‌می‌یابد یا مجذور می‌شود. آیا ممکن است اعداد در زمانی برابر شوند؟

16. هر مربعِ یک تخته‌یِ $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ شاملِ $+1$ یا -1 است. یک چنین آرایشی "موفق" نامیده‌می‌شود اگر هر عدد ضربِ هم‌سایه‌هایَ‌ش (مربعی که یک ضلعِ مشترک با مربعِ داده‌شده داشته‌باشد) باشد. تعدادِ آرایش‌هایِ موفق را بیابید.

17. 1998 شهر در روسیه وجوددارند، هر یک به سه شهرِ دیگر با خطوطِ هوایی متصل‌است (در هر دو جهت). هر شهر می‌تواند از هر شهرِ دیگر با دنباله‌ای از پروازها قابلِ دسترسی باشد. KGB می‌خواهد 200 شهر را ببندد که هیچ دوتایی با یک خطِ هوایی به هم وصل‌نباشند. نشان‌دهید که این کار می‌تواند انجام‌شود؛ به گونه‌ای که هر شهرِ آزاد بتواند از هر شهرِ آزادِ دیگر با دنباله‌ای از پروازهایی که تنها از شهرهایِ آزاد می‌گذرد، قابلِ دسترسی باشد.

18. یک شکلِ ساخته‌شده با مربع‌هایِ 1×1 این شرط را دارد که اگر مربع‌هایِ یک مستطیلِ (ثابتِ) $m \times n$ با اعدادی پرشوند که جمعِ تمامِ آن‌ها مثبت است، شکل بتواند رویِ یک مستطیل (ممکن است پس از دوران)، جای‌داده‌شود؛ به گونه‌ای که اعدادِ پوشانده‌شده هم جمعِ مثبت داشته‌باشند (شکل نمی‌تواند به گونه‌ای قراربگیرد که مربع‌های‌َش رویِ مستطیل قرارنگرفته‌باشند). ثابت‌کنید تعدادی از چنین شکل‌هایی می‌توانند رویِ یک مستطیلِ $m \times n$ قراربگیرد؛ به گونه‌ای که هر مربع با تعدادِ یکسانی از شکل‌ها پوشانده‌شود.

1999

1. در یک جعبه مجموعه‌ای پیچیده از دومینوهایِ 2×1 قراردارد (به عبارتِ دیگر، برایِ هر جفت از اعدادِ درستِ i, j که $0 \leq i \leq j \leq n$، یک دومینو با i رویِ یک مربع و j رویِ دیگری وجوددارد). دو بازی‌کن به نوبت یک دومینو از جعبه انتخاب‌می‌کنند و آن را به یک انتهایِ یک زنجیره (یِ مستقیم) رویِ میز اضافه‌می‌کنند؛ به گونه‌ای که دومینوهایِ مجاور اعدادِ یکسان در مربع‌هایِ مجاورِشان دارند (بازی‌کنِ یکم ممکن است هر دومینویی را حرکت‌دهد). نخستین بازی‌کنی که قادر به حرکت‌نباشد، می‌بازد. چه بازی‌کنی با بازیِ درست می‌برد؟ (دورِ چهارم – کلاسِ هشتم)

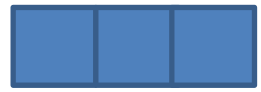
2. یک زنجیره از 54 مربع به طولِ 1 ساخته‌می‌شود؛ به گونه‌ای که هر جفت از مربع‌هایِ متوالی در یک رأسِ تنها به هم وصل هستند و هر مربع به دو هم‌سایه‌اش در رأس‌هایِ روبه‌رو وصل است. آیا ممکن است رویه‌یِ بیرونیِ یک مکعبِ $3 \times 3 \times 3$ با این زنجیره پوشانده‌شود؟ (دورِ چهارم – کلاسِ هشتم)

3. دورِ یک دایره تمامِ اعدادِ درستِ مثبت از 1 تا N که $N \geq 2$، نوشته‌شده‌است؛ به گونه‌ای که هر دو عددِ درستِ مجاور دستِ‌کم یک رقمِ مشترک در نمایشِ دهدهیِ‌شان دارند. کوچک‌ترین N را برایِ آن که این ممکن باشد، بیابید. (دورِ چهارم - کلاسِ نهم)

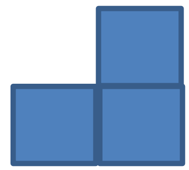
4. یک "شکنج" شاملِ یک شبکه‌یِ 8×8 است، در هر خانه‌یِ 1×1 از آن یک نشانِ جهت‌دارِ بالا، پایین، چپ یا راست نوشته‌شده‌است. یالِ بالاییِ مربعِ بالا – راست، خروجیِ شکنج است. یک مهره رویِ مربعِ پایین – چپ نشسته‌است و سپس در دنباله‌ای از تغییرات، حرکت‌می‌کند. در هر تغییر، مهره یک مربع در سویِ جهت حرکت‌می‌کند. سپس جهتِ درونِ مربعی که مهره از آن حرکت‌کرده‌بود، $90°$ ساعت‌گرد می‌چرخد. اگر نشانِ جهت‌دار به سویِ خارجِ تخته باشد (و از خروجی نگذرد)، مهره آن‌جا می‌ماند و نشان $90°$ ساعت‌گرد می‌چرخد. ثابت‌کنید دیر یا زود مهره شکنج را ترک‌می‌کند. (دورِ چهارم – کلاسِ نهم)

5. هر مربع از یک شبکه‌یِ نامتناهی با یکی از 5 رنگ، رنگ‌می‌شود؛ به گونه‌ای که هر 5- مربعِ صلیبی شاملِ یک مربع از هر رنگ است. نشان‌دهید که هر مستطیلِ 5×1 نیز شاملِ یک مربع از هر رنگ است. (دورِ چهارم – کلاسِ نهم)

❇یک "n- خانه‌ای" یا "n- مربعی" شکلی است که از n خانه یا مربع متصل به هم، تشکیل‌می‌شود. برای nهای کوچک، n- خانه‌ای‌ها را نام‌گذاری کرده‌اند. در زیر نام برخی از n- خانه‌ای‌ها نوشته‌شده‌است:

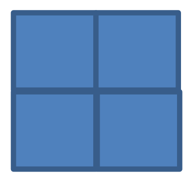


سه- خانه‌ایِ مستقیم ($straight\ tromino$)

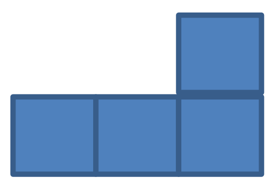


سه-خانه‌ایِ ال ($L - tromino$)

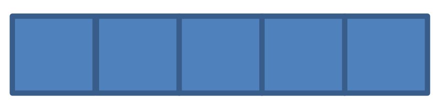
چهار- خانه‌ایِ مستقیم ($straight\ tetramino$)



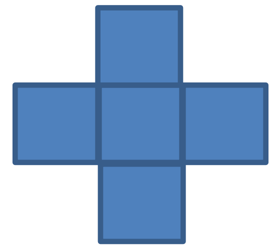
چهار- خانه‌ایِ مربعی ($square\ tetramino$)



چهار- خانه‌ایِ ال ($L - tetramino$)



پنج- خانه‌ایِ مستقیم ($straight\ pentamino$)



پنج‌خانه‌ایِ صلیبی ($cross\ pentamino$)

6. n نقطه در فضا در موقعیتِ عمومی (هیچ سه نقطه‌ای هم‌خط نیستند و هیچ چهارتایی هم‌صفحه نیستند)، داده‌شده‌است. از میانِ هر سه‌تایی از آن‌ها یک صفحه کشیده‌شده‌است. نشان‌دهید برایِ هر $n-3$ نقطه در فضا، یکی از صفحاتِ کشیده‌شده وجوددارد که از هیچ‌یک از این نقاط نمی‌گذرد. (دورِ چهارم – کلاسِ دهم)

7. هر رأی‌دهنده در یک انتخابات رویِ یک برگه‌یِ رأی نامِ n کاندیدا را می‌نویسد. هر برگه‌یِ رأی در یکی از $n+1$ جعبه جای‌داده‌می‌شود. پس از انتخابات هر جعبه شاملِ دستِ‌کم یک برگه‌یِ رأی است و برایِ هر $n+1$ برگه‌یِ رأی، یکی در هر جعبه، یک نام وجوددارد که رویِ تمامِ این برگه‌ها نوشته‌شده‌است. نشان‌دهید برایِ دستِ‌کم یک جعبه، یک نام وجوددارد که رویِ تمامِ برگه‌هایِ جعبه نوشته‌شده‌است. (دورِ چهارم - کلاسِ دهم)

8. در یک کلاس، هر پسر با دستِ‌کم یک دختر دوست است. نشان‌دهید یک گروه از دستِ‌کم نصفِ دانش‌آموزان وجوددارد؛ به گونه‌ای که هر پسر در گروه با تعدادِ فردی از دخترها در گروه دوست باشد. (دورِ چهارم – کلاسِ یازدهم)

9. هر خانه از یک مربعِ 50×50 با یکی از چهار رنگ، رنگ‌می‌شود. نشان‌دهید که یک خانه وجوددارد که خانه‌هایی از رنگِ یک‌سان در جهتِ بالا، جهتِ پایین، جهتِ چپ و جهتِ راستَ‌ش دارد (نه لزوماً مجاور با آن). (دورِ چهارم – کلاسِ یازدهم)

10. اعدادِ 1 تا 1000000 می‌توانند با سیاه یا سفید رنگ‌شوند. یک حرکتِ مجاز شاملِ گزینشِ یک عدد از 1 تا 1000000 و عوض کردنِ رنگِ آن عدد و هر عددِ نسبت به آن اول است. در ابتدا تمامِ اعداد سیاه هستند. آیا ممکن است دنباله‌ای از حرکات ساخته‌شود که پس از آن تمامِ اعداد سفید شوند؟ (دورِ پنجم – کلاسِ نهم)

11. یک مثلثِ متساوی‌الاضلاع با طولِ ضلعِ n با اضلاعی متعلق به یک شبکه‌یِ مثلثی با طولِ ضلعِ 1، کشیده‌شده‌است. بیشینه‌یِ تعدادِ پاره‌خط‌هایِ شبکه رو یا درونِ مثلث که بتوانند نشان‌دار شوند؛ به گونه‌ای که هیچ سه پاره‌خطِ نشان‌دار یک مثلث نسازند، چیست؟ (دورِ پنجم – کلاسِ نهم)

12. یک تخته‌یِ گرد با 2000 تلفن دارد که هر دوتایی از آن‌ها با یک سیم به هم وصل‌شده‌اند. دیوانگانی با نام‌هایِ "واسیا" و "پتیا" به نوبت سیم‌ها را می‌برند: واسیا (که اول حرکت‌می‌کند)، همواره یک سیم را می‌برد؛ در حالی که پتیا یک یا سه سیم را می‌برد. نخستین نفری که آخرین سیم را از یک تلفن ببرد، می‌بازد. چه کسی با بازیِ درست، می‌برد؟ (دورِ پنجم – کلاسِ نهم)

13. سه کاسه‌یِ خالی رویِ یک میز قرارداده‌شده‌اند. سه بازی‌کنِ A, B, C که ترتیبِ بازی‌شان تصادفی است، به نوبت یک مهره در یک کاسه می‌گذارند. A می‌تواند یک مهره در یکمین یا دومین کاسه بگذارد، B در دومین یا سومین و C در سومین یا یکمین. نخستین بازی‌کنی که 1999امین مهره را در یک کاسه بگذارد، می‌بازد. نشان‌دهید A و B می‌توانند هم‌کاری‌کنند تا مطمئن‌باشند C خواهدباخت. (دورِ پنجم - کلاسِ دهم)

14. یک مربعِ $n \times n$ رویِ یک تخته‌چکرِ نامتناهی کشیده‌شده‌است. هر یک از n^2 خانه‌یِ مشمول در مربع، در ابتدا شاملِ یک مهره است. یک حرکت شاملِ پریدنِ یک مهره از رویِ یک مهره‌یِ مجاور (افقی یا عمودی) به یک مربعِ خالی است؛ مهره‌ای که از رویِ آن پریده‌می‌شود، برداشته‌می‌شود. یک دنباله از حرکات تمام‌می‌شود؛ هرگاه در پایان، حرکتِ دیگری ممکن نباشد. نشان‌دهید دستِ‌کم $\frac{n^2}{3}$ حرکت انجام‌خواهدشد. (دورِ پنجم – کلاسِ دهم)

15. در یک گروه از 12 نفر، در میانِ هر 9 نفر، می‌توان 5 نفر پیداکرد که هر دوتا از آن‌ها هم‌دیگر را بشناسند. نشان‌دهید که 6 نفر در گروه وجوددارند که هر دوتا از آن‌ها هم‌دیگر را می‌شناسند. (دورِ پنجم – کلاسِ دهم)

16. سه چندضلعیِ کوژِ P_1, P_2, P_3 در صفحه به ما داده‌شده‌است. نشان‌دهید دو عبارتِ زیر هم‌ارز هستند:

(i) هیچ خطِ l هر سه چندضلعیِ را قطع‌نمی‌کند.

(ii) برایِ $i = 1, 2, 3$، یک خطِ l_i وجوددارد که هیچ یک از چندضلعی‌ها را قطع‌نمی‌کند؛ به گونه‌ای که P_i در طرفِ مقابلِ l_i از دو چندضلعیِ دیگر قرارداشته‌باشد.

2000

1. تعدادی شهر در یک ایالت و مجموعه‌ای از جاده‌ها وجوددارد؛ که هر جاده دو شهر را به هم وصل‌می‌کند و هیچ دو جاده‌ای یک جفتِ یکسان از شهرها را وصل‌نمی‌کنند. می‌دانیم که دستِ‌کم 3 جاده از هر شهر خارج‌می‌شود. ثابت‌کنید یک مسیرِ دوری (که آن، یک مسیر است که آخرین جاده، جایی پایان‌می‌یابد که نخستین جاده از آن‌جا آغازمی‌شود) وجوددارد؛ به گونه‌ای که تعدادِ جاده‌های درونِ مسیر بر 3 بخش‌پذیر نباشد.

2. پنج سنگ که به ظاهر یکسان هستند، وزن‌های متفاوت دارند. "اُلگ" وزنِ هر سنگ را می‌داند. برایِ هر سنگِ x، گیرید $m(x)$ وزنِ آن باشد. "دیمیتری" درتلاش‌است که ترتیبِ وزن‌هایِ سنگ‌ها را بفهمد. او اجازه‌دارد هر سه سنگِ A, B, C را برگزیند و از الگ بپرسد :"آیا این درست است که $m(A) < m(B) < m(C)$؟". الگ با "بله" یا "خیر" پاسخ‌می‌دهد. آیا دیمیتری می‌تواند ترتیبِ وزنه‌ها را در دستِ‌بالا نُه پرسش بفهمد؟

3. گیرید $ABCDE$ یک پنج‌ضلعیِ کوژ روزِ صفحه‌یِ مختصات باشد. هر یک از رأس‌ها نقطه‌هایِ شبکه‌ای هستند. پنج قطرِ $ABCDE$ یک پنج‌ضلعیِ کوژِ $A_1B_1C_1D_1E_1$ را شکل‌می‌دهند. ثابت‌کنید که این پنج‌ضلعیِ کوچک‌تر شاملِ یک نقطه‌یِ شبکه‌ای رویِ مرزَش یا درونَش است.

4. تعدادی چکرِ سیاه و تعدادی چکرِ سفید رویِ برخی از مربع‌هایِ یک تخته‌یِ $2n \times 2n$ با دستِ‌بالا یک چکر رویِ هر مربع، وجوددارند. ابتدا، ما هر چکرِ سیاهی که در ستونِ یکسان با چکری سفید است، برمی‌داریم. سپس ما هر چکرِ سیاهی که در سطری یکسان با چکری سفید است، برمی‌داریم. ثابت‌کنید رنگی وجوددارد که دستِ‌بالا n^2 چکر از آن رنگ باقی‌مانده باشد.

5. M یک مجموعه‌یِ متناهی از اعدادِ حقیقی است؛ به گونه‌ای که برایِ هر سه عضوِ متفاوتِ داده‌شده از M، ما می‌توانیم دوتا از آن‌ها را انتخاب‌کنیم که جمعِشان نیز متعلق به M باشد. بیشینه‌یِ تعدادِ عضوهایی که M می‌تواند داشته‌باشد، چیست؟

6. یک مجموعه‌یِ متناهی از کارت‌هایِ مربعی موجود است که رویِ یک میزِ مستطیلی، با اضلاعِ موازیِ اضلاعِ میز قرارگرفته‌اند. هر کارت با یکی از k رنگ، رنگ‌می‌شود. برایِ هر k کارت از رنگ‌هایِ متفاوت، دوتا از آن‌ها هستند که می‌توانند با یک میخ، رویِ میز پانچ‌شوند. ثابت‌کنید رنگی وجوددارد که تمامِ کارت‌هایِ آن می‌توانند با $2k-2$ میخ، پانچ‌شوند.

7. هر خانه از یک تخته‌یِ 100×100 با یکی از 4 رنگ، رنگ‌می‌شود؛ به گونه‌ای که درست 25 خانه از هر رنگ در هر سطر و در هر ستون وجوددارد. ثابت‌کنید که می‌توان دو ستون و دو سطر برگزید؛ به گونه‌ای که چهار خانه‌ای که آن‌ها متقاطع هستند، با چهار رنگِ متفاوت، رنگ‌شده‌باشد.

8. کوچک‌ترین عددِ درستِ فردِ n را پیداکنید؛ به گونه‌ای که nضلعی‌ای (نه ضرورتاً کوژ) وجودداشته‌باشد که بتواند به متوازی‌الاضلاع‌هایی که درونِشان هم‌پوشانی ندارند، افرازشود.

9. $2n+1$ پاره‌خط رویِ یک خط نشان‌دار شده‌اند. هر یک از پاره‌خط‌ها دست‌ِکم n پاره‌خطِ دیگر را قطع‌می‌کند. ثابت‌کنید یکی از این پاره‌خط‌ها تمامِ پاره‌خط‌هایِ دیگر را قطع‌می‌کند.

10. در میانِ 5 سکه که به ظاهر شبیه اند، 2 سکه‌یِ تقلبی وجوددارد. هر دویِ سکه‌هایِ تقلبی وزنِ یکسان دارند و سه سکه‌یِ واقعیِ دیگر نیز وزن یکسان دارند. هر پنج سکه وزنِ یکسان ندارند، اما نمی‌دانیم وزنِ هر سکه‌یِ تقلبی بیش‌تر یا کم‌تر از وزنِ هر سکه‌یِ واقعی است. کمینه‌یِ تعدادِ وزن‌کردن‌هایِ مورد نیاز برایِ یافتنِ دست‌ِکم یک سکه‌یِ واقعی را بیابید و شرح‌دهید چگونه آن را انجام‌می‌دهید. (ترازو وزنِ اشیایِ درونِ کفه‌یِ چپ منهایِ وزنِ اشیایِ درونِ کفه‌یِ راست را نشان‌می‌دهد.)

11. کوچک‌ترین عددِ درستِ n را بیابید؛ به گونه‌ای که هر مربعِ $n\times n$ بتواند به مربع‌هایِ 40×40 و 49×49 با افرازشود؛ با استفاده از هر دو نوع از مربع‌ها در افراز.

12. 2000 شهر در یک کشور وجوددارد، برخی از جفت شهرها با یک خطِ هواییِ جهت‌دار به هم وصل هستند. برایِ هر شهرِ A، تعدادِ شهرهایِ متصل به A با یک پروازِ جهت‌دار، برابر با 1، 2، 4، 8، 16، ... یا 1024 است. گیرید $S(A)$ تعدادِ مسیرهایِ از A به سایرِ شهرها (متفاوت با A) با دستِ بالا یک شهرِ واسطه باشد. ثابت‌کنید جمعِ $S(A)$ برایِ تمامِ 2000 شهر نمی‌تواند برابر 10000 باشد.

13. یک توده از توپ شاملِ هزار توپِ 10 گرمی و هزار توپِ 9.9 گرمی است. می‌خواهیم دو توده از توپ با تعدادِ برابری توپ در آن‌ها اما با مجموعِ وزنِ متفاوت جداکنیم. کمینه‌یِ تعدادِ وزن‌کردن‌هایِ موردِ نیاز برایِ انجامِ آن چیست؟ (ترازو وزنِ اشیایِ درونِ کفه‌یِ چپ منهایِ وزنِ اشیایِ درونِ کفه‌یِ راست را نشان‌می‌دهد.)

14. هر خانه از یک میزِ 200×200 با سیاه یا سفید رنگ‌شده‌است. تفاوتِ بینِ تعدادِ خانه‌هایِ سیاه و سفید 404 است. ثابت‌کنید مربعی 2×2 وجوددارد که شاملِ تعدادِ فردی از خانه‌هایِ سفید است.

15. 2000 شهر در یک کشور وجوددارد و هر جفت از شهرها را یا جاده‌ای وصل نکرده‌است یا درست یک جاده وصل کرده‌است. یک "مسیرِ دوری" یک مسیرِ ناتهی از جاده‌هاست؛ به گونه‌ای که هر شهر در پایانِ 0 یا 2 جاده در مسیر است. برایِ هر شهر، دستِ‌بالا N مسیرِ دوری وجوددارد که هر دو از این شهر می‌گذرند و شاملِ تعدادِ فردی جاده هستند. ثابت‌کنید که کشور می‌تواند به $2N+2$ جمهوری تقسیم‌شود؛ به گونه‌ای که هیچ دو شهری از جمهوریِ یک‌سان با یک جاده به هم وصل نباشند.

16. هر یک از اعدادِ $1, 2, \ldots, N$ با سیاه یا سفید رنگ‌شده‌است. ما اجازه‌داریم همزمان رنگِ هر سه خانه در یک تصاعدِ حسابی را عوض‌کنیم. برایِ چه اعدادِ N همواره می‌توانیم تمامِ اعداد را سفید کنیم؟

2001

1. یک هدفِ تیراندازی شاملِ یک مثلثِ متساوی‌الاضلاعِ شکسته‌شده به 100 مثلثِ متساوی‌الضلاع با طولِ ضلعِ واحد توسطِ سه مجموعه از خطوطِ موازی است. یک تیرانداز به شکلِ زیر پشتِ سرِ هم به هدف شلیک‌می‌کند: او یکی از مثلث‌های کوچک را هدف‌می‌گیرد و سپس آن مثلث یا یکی از مثلث‌هایِ کوچک که یک ضلعِ مشترک با آن دارد را می‌زند. او ممکن است تیراندازی را در هر زمانی متوقف کند. بیش‌ترین تعدادِ مثلث‌هایی که او می‌تواند مطمئن‌باشد آن‌ها را درست پنج بار زده‌است، چیست؟

2. دو نقطه درونِ یک پنج‌ضلعیِ کوژ داده‌شده‌است. ثابت‌کنید می‌توان چهارتا از رأس‌هایِ پنج‌ضلعی را برگزید؛ به گونه‌ای که چهارضلعی‌ای که آن‌ها شکل‌می‌دهند، شاملِ هر دو نقطه باشد.

3. سه مجموعه از ده خطِ موازی کشیده‌شده‌اند. بیشینه‌یِ ممکنِ تعدادِ مثلث‌هایی که اضلاعِ‌شان رویِ خطوط قراردارند اما درونِ‌شان هیچ‌یک از خطوط را قطع‌نمی‌کند، چیست؟

4. مجموعه‌ای از مربع‌هایِ درونِ یک تخته‌چکرِ نامتناهی "رخ – متصل" نامیده‌می‌شود اگر بتوان بینِ هر دو مربعِ درونِ مجموعه با متناهی حرکتِ مانندِ یک رخ (که یک حرکتِ مانندِ یک رخ، حرکتی است بینِ دو مربعِ متفاوت (اما نه لزوماً مجاور) که در یک سطر یا ستون قراردارند است)، سفرکرد. ثابت‌کنید هر مجموعه‌یِ رخ – متصل از 100 مربع می‌تواند به پنجاه جفت‌مربع افرازشود؛ به گونه‌ای که دو مربعِ در هر جفت، در یک سطر یا ستون قرارداشته‌باشند.

5. یک مجموعه‌یِ نامتناهیِ S از نقاطِ صفحه این شرط را دارد که هیچ مربعِ 1×1 از صفحه شاملِ نامتناهی نقطه از S است. ثابت‌کنید دو نقطه‌یِ A, B از S وجوددارند که برایِ هر نقطه‌یِ دیگرِ X در S، $\min\{XA, XB\} \geq 999AB$ باشد.

6. ثابت‌کنید برایِ هر مجموعه از 117 عددِ سه رقمیِ دوبه‌دو متفاوت، می‌توان 4 زیرمجموعه‌یِ دوبه‌دو متفاوت برگزید؛ به گونه‌ای که جمعِ اعداد در هر زیرمجموعه برابر باشد.

7. یک 2000ضلعی به ما دادهشدهاست که در آن هیچ سه قطری همرس نیستند. هر قطر با یکی از 999 رنگ، رنگمیشود. ثابتکنید یک مثلث وجوددارد که اضلاعَش رویِ قطرهایی از یک رنگ قرارداشتهباشند. (لازمنیست رأسهایِ مثلث رویِ رأیهایِ 2000ضلعی باشند.)

8. "یوری" 2001 سکه که هر یک 1، 2 یا 3 کوپه میارزد، در یک سطر خواباندهاست. برایِ $k = 1, 2, 3$، بینِ هر دو سکهیِ k – کوپهای، دستِکم k سکه نشستهاست. برای چه nهایی یوری میتواند درست n سکهیِ 3 – کوپهای خوابانده‌باشد؟

9. یک شرکت از $2n + 1$ نفر این شرط را دارد که برایِ هر گروهِ n نفری، یک فرد در میانِ $n + 1$تایِ دیگر وجوددارد که هر فرد در گروه را میشناسد. ثابتکنید فردی در شرکت وجوددارد که هر فردِ دیگر را میشناسد. (اگر یک فردِ A یک فردِ B را بشناسد، آنگاه B نیز A را میشناسد.)

10. هر زیرمجموعهیِ $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ از یک خط اجتماعِ 100 بازهیِ بستهیِ دوبهدو متفاوت است. ثابتکنید که اشتراکِ این 100 مجموعه، اجتماعِ نابیشتر از 9901 بازهیِ بستهاست. (یک بازهیِ بسته یک نقطهیِ تنها یا یک پارهخط است.)

11. در یک کشور، جادههایِ یکطرفه برخی از شهرها را در جفتهایی به هم وصلکردهاست؛ به گونهای که برایِ هر دو شهرِ A, B، یک مسیرِ یکتا از A به B وجوددارد که از شهرِ تکراری نمیگذرد. میدانیم که درست 100 شهر در کشور درست یک جادهیِ خروجی دارند. ثابتکنید که میتوان 50 جادهیِ یکطرفهیِ جدید ساخت؛ به گونهای که اگر یک شهرِ تنها بستهشود، باز هم بتوان از هر شهر به هر شهرِ دیگر سفرکرد.

12. هر عددِ $1, 2, \ldots, n^2$ یک بار در یک شبکهیِ $n \times n$ نوشتهشدهاست؛ به گونهای که هر مربع شاملِ یک عدد است. برایِ هر دو مربعِ دادهشده در شبکه، یک بردار از مرکزِ مربعِ شاملِ عددِ بزرگتر به مرکزِ مربعِ دیگر کشیدهشدهاست. اگر جمعِ اعدادِ در هر سطر یا ستون در شبکه برابرباشد، ثابتکنید که جمعِ بردارهایِ کشیدهشده صفر است.

13. دو مجموعه‌یِ متناهیِ S_1, S_2 از چندضلعی‌هایِ کوژ در صفحه با شرطهایِ زیر داده‌شده‌است: (i) برایِ هر چندضلعیِ داده‌شده از S_1 و هر چندضلعیِ داده‌شده از S_2، دو چندضلعی نقطه‌یِ مشترک داشته‌باشند؛ (ii) هر یک از دو مجموعه شاملِ یک جفت از چندضلعی‌هایِ متفاوت باشد. ثابت‌کنید که یک خط وجوددارد که تمامِ چندضلعی‌ها در هر دو مجموعه را قطع‌می‌کند.

14. شرکت‌کنندگانِ یک مسابقه‌یِ انتخابی n پرسش برایِ پاسخ‌دادن دارند. یک پاسخِ درست برایِ iامین پرسش p_i امتیازدارد که p_i یک عددِ درستِ مثبت است. هر پاسخِ نادرست صفر امتیاز می‌گیرد. برایِ هر شرکت‌کننده، کلِ امتیاز او مجموعِ امتیازهایی است که او برایِ پاسخ‌هایِ درست دریافت‌کرده‌است. پس از آن که آزمون نوشته‌شد و امتیازگذاری شد و رتبه‌هایِ شرکت‌کنندگان معلوم‌شد، "یوری" ادعاکرد که با هر پاسخ‌هایِ داده‌شده‌ای از شرکت‌کنندگان، اعدادِ $p_1, p_2, \dots, p_n$ می‌توانند تغییرداده‌شوند؛ به گونه‌ای که رتبه‌بندیِ دیگری را بسازند. بیشینه‌یِ تعدادِ شرکت‌کنندگان در این مسابقه چیست؟

15. در یک کشور از 2001 شهر، برخی از شهرها در جفت‌هایی با جاده‌هایِ دوطرفه به هم وصل هستند. دو شهر که با یک جاده وصل هستند را "مجاور" می‌نامیم. هر شهر با دستِ‌کم یک شهرِ دیگر مجاور است و هیچ‌شهری با هر شهرِ دیگر مجاور نیست. یک مجموعه‌یِ D از شهرها "مسلط" نامیده‌می‌شود اکر هر شهر که در D نیست، با برخی (دستِ‌کم یکی) از شهرهایِ D مجاور باشد. می‌دانیم که هر مجموعه‌یِ مسلط دستِ‌کم شاملِ k شهر است. ثابت‌کنید که کشور می‌تواند به $2001 - k$ جمهوری تقسیم‌شود؛ به گونه‌ای که هیچ دو شهری در یک جمهوری مجاور نباشند.

2002

1. آیا اعدادِ 1 تا 2002^2 می‌توانند در مربع‌هایِ یک تخته‌یِ 2002×2002 نوشته‌شوند؛ به گونه‌ای که برایِ هر مربع، سه عدد در اجتماعِ سطر و ستونَش وجودداشته‌باشند که یکی از آن‌ها، ضربِ دوتایِ دیگر باشد؟ (کلاسِ نهم – روزِ یکم)

2. یک "اژدها" شاملِ تعدادی سر و تعدادی گردن است که هر گردن به دو سر وصل است. وقتی یک سرِ A از اژدها با یک شمشیر زده‌شود، تمامِ گردن‌هایِ سرِ A ناپدیدمی‌شوند، اما گردن‌هایِ جدیدی رشدمی‌کنند که سرِ A را به تمامِ گردن‌هایی که به A وصل نبودند، وصل می‌کند. "هرکول" یک اژدها را با تقسیم‌کردنِ آن به دو قسمت که به هم وصل نیستند، شکست‌می‌دهد. کمینه‌یِ N را بیابید؛ برایِ آن که هرکول بتواند هر اژدها با 100 گردن را با نابیش‌تر از N ضربه شکست‌دهد. (کلاسِ نهم – روزِ یکم)

3. رویِ یک تخته‌شترنج هشت رخ وجوددارد. هیچ دوتایی یک‌دیگر را تهدیدنمی‌کنند. ثابت‌کنید دوتا از فاصله‌هایِ دوبه‌دو متفاوتِ بینِ رخ‌ها، یک‌سان هستند. فاصله‌یِ بین دو رخ، فاصله‌یِ بینِ مرکزهایِ خانه‌هایِ آن‌هاست. (کلاسِ نهم – روزِ دوم)

4. یک خانه‌یِ قرمز و $k > 1$ خانه‌یِ آبی و یک دسته از $2n$ کارت شماره‌گذاری‌شده با اعدادِ 1 تا $2n$، به ما داده‌شده‌است. در ابتدا، دسته رویِ خانه‌یِ قرمز نشسته‌است و در ترتیبی دل‌خواه آرایش‌داده‌شده‌است. در هر حرکت، ما اجازه‌داریم که بالاترین کارتِ یکی از دسته‌ها را برداریم و آن را بالایِ یک خانه‌یِ دیگر بگذاریم که رویِ آن عددِ کارتِ بالا بزرگ‌تر از 1 است یا در یک خانه‌یِ خالی بگذاریم. k داده‌شده‌است. بیشینه‌یِ n چیست؛ برایِ آن‌که همواره بتوان تمامِ کارت‌ها را رویِ یک خانه‌یِ آبی جمع‌کرد. (کلاسِ نهم – روزِ دوم)

*این پرسش در کلاسِ دهم – روزِ دوم هم داده‌شد.

5. 2002 شهر در یک کشورِ پادشاهی وجوددارد. برخی از شهرها با جاده‌هایی به هم وصل هستند؛ به گونه‌ای که اگر تمامِ جاده‌هایِ یک شهر بسته‌شوند، هنوز بتوان بینِ هر دو شهر سفرکرد. هر سال، شاه یک دور بدونِ خودبرخوردی از جاده‌ها

برمی‌گزیند و تمامِ جاده‌های دور را می‌بندد. پس از چند سال، هیچ دور بدونِ خودبرخوردی باقی‌نماند. ثابت‌کنید در آن هنگام دستِ‌کم 2002 شهر وجوددارد که درست یک جاده از هر یک از آن‌ها خارج‌می‌شود. (کلاسِ دهم – روزِ یکم)

6. رویِ یک صفحه متناهی خطِ آبی و قرمز داده‌شده‌است؛ هیچ دوتایی موازی نیستند و هر نقطه‌یِ برخوردِ دو خط از یک رنگ، رویِ خطی دیگر با رنگِ دیگر قراردارد. ثابت‌کنید تمامِ خطوط از یک نقطه‌یِ تنها می‌گذرند. (کلاسِ دهم – روزِ دوم)

*این پرسش در کلاسِ یازدهم – روزِ دوم هم داده‌شد.

7. تعدادی نقطه رویِ یک صفحه داده‌شده‌اند. فرض‌کنید برایِ هر سه‌تایی از آن‌ها یک دستگاهِ مختصاتِ قائم (یا دو محور و یک طولِ واحد تعریف می‌شود) وجوددارد که در آن این سه نقطه مختص‌هایِ صحیح داشته‌باشند. ثابت‌کنید یک دستگاهِ مختصاتِ قائم وجوددارد که در آن تمامِ نقاطِ داده‌شده مختص‌هایِ صحیح دارند. (کلاسِ یازدهم – روزِ یکم)

8. چند مربع در یک شهر وجوددارد. برخی از جفت‌مربع‌ها با یک خیابانِ یک‌طرفه به هم وصل‌شده‌اند؛ به گونه‌ای که درست دو خیابان از هر مربع خارج‌می‌شود. نشان‌دهید شهر می‌تواند به 1014 شهرک تقسیم‌شود؛ به گونه‌ای که هیچ دو مربعی در یک شهرک با یک خیابان به هم وصل‌نباشند و تمامِ خیابان‌هایِ بینِ دو شهرک در یک جهت باشند (از یکی به دیگری یا بالعکس). (کلاسِ یازدهم – روزِ یکم)

2003

1. رویِ یک خط $2k-1$ پارەخطِ سفید و $2k-1$ پارەخطِ سیاه دادەشدەاند. فرض‌کنید که هر پارەخطِ سفید دستِ‌کم k پارەخطِ سیاه و هر پارەخط سیاه دستِ‌کم k پارەخط سفید را قطع‌کند. ثابت‌کنید یک پارەخطِ سیاه وجوددارد که تمامِ پارەخط‌هایِ سفید را قطع‌می‌کند و یک پارەخطِ سفید وجوددارد که تمامِ پارەخط‌هایِ سیاه را قطع‌می‌کند.

2. N شهر در یک کشور وجوددارد. هر دوتا از آن‌ها با یک خیابان یا یک خطِ هوایی به هم وصل هستند. یک توریست می‌خواهد هر شهر را درست یک بار ملاقات‌کند و به شهری که سفر را از آن آغازکرده، بازگردد. ثابت‌کنید او می‌تواند یک شهرِ آغازین برگزیند و مسیر را بسازد؛ به گونه‌ای که نوعِ سفر را دستِ‌بالا یک بار عوض‌کند.

3. یک مجموعه‌یِ متناهیِ X از نقاط و یک مثلثِ متساوی‌الاضلاعِ T رویِ یک صفحه دادەشدەاند. فرض‌کنید که هر زیرمجموعه‌یِ X' از X با نابیش‌تر از 9 عضو، می‌تواند با دو شکل از T و انتقال‌هایَ‌ش پوشاندەشود. ثابت‌کنید تمامِ X می‌تواند با دو شکل از T و انتقال‌هایَ‌ش پوشاندەشود.

4. آیا ممکن است در هر خانه از یک تخته‌شترنجِ نامتناهی یک عدد نوشته‌شود؛ به گونه‌ای که برایِ تمامِ اعدادِ صحیحِ $m,n>100$، جمعِ اعداد در هر مستطیلِ $m\times n$ بر $m+n$ بخش‌پذیر باشد؟

5. بزرگ‌ترین عددِ طبیعیِ N را بیابید؛ به گونه‌ای که برایِ هر آرایشِ اعدادِ $1,2,\dots,400$ در یک تخته‌شترنجِ 20×20، دو عدد در یک سطر یا یک ستون وجودداشته‌باشد که دستِ‌کم به اندازه‌یِ N متفاوت‌باشند.

6. به هر یک از "آنا" و "بورا" یک نوارِ کاغذیِ به اندازه‌یِ کافی بزرگ، دادەشدەاست که در یکی حرفِ A نوشته‌شدەاست و در دیگری حرفِ B نوشته‌شدەاست. هر دقیقه، یکی از آن‌ها (نه لزوماً یکی پس از دیگری)، در چپ یا راستِ کلمه‌یِ نوارَش، کلمه‌یِ نوشته‌شده در نوارِ دیگر را می‌نویسد. ثابت‌کنید روزِ بعد، مطمئن‌خواهیم‌بود که می‌توان کلمه‌یِ رویِ نوارِ "آنا" را به دو قسمت برید و جایِ‌شان را عوض‌کرد تا یک کلمه‌یِ مقلوب ساخته‌شود.

7. 100 شهر در یک کشور وجوددارد. برخی از آن‌ها با جاده به هم وصل هستند. هر چهار شهر با دستِ‌کم دو جاده به هم وصل هستند. فرض‌کنید مسیری وجودنداردکه از هر شهر، درست یک بار بگذرد. ثابت‌کنید دو شهر وجوددارند؛ به گونه‌ای که هر شهرِ دیگر به دستِ‌کم یکی از آن‌ها وصل باشد.

2004

1. هر نقطه‌یِ شبکه‌ای از یک صفحه با یکی از سه رنگ، رنگ‌شده‌است؛ که به موجبِ آن تمامِ سه رنگ استفاده‌شده‌اند. نشان‌دهید می‌توان یک مثلثِ قائم‌الزاویهٔ پیداکرد که سه رأسَش دوبه‌دو رنگ‌هایِ متفاوت داشته‌باشد. (کلاسِ نهم – روزِ یکم)

※این پرسش در کلاسِ دهم – روزِ یکم و کلاسِ یازدهم – روزِ یکم هم آمده‌است.

2. رویِ یک میز، 2004 جعبه وجوددارد و در هر جعبه یک توپ هست. من می‌دانم که برخی از توپ‌ها سفیدند و تعدادِ توپ‌هایِ سفید زوج است. در هر دفعه، من می‌توانم دو جعبه‌یِ دل‌خواه انتخاب‌کنم و بپرسم آیا در جعبه‌ها دستِ‌کم یک توپِ سفید هست یا نه. پس از چه کمینه‌ای از تعدادِ پرسش‌ها من می‌توانم دو جعبه را مشخص‌کنم که در آن‌ها توپِ سفید قرارداشته‌باشد؟ (کلاسِ نهم – روزِ یکم)

3. در قفسه‌ای 2004 تلفن قراردارد؛ هر دوتا از این تلفن‌ها با یک سیم که با یکی از چهار رنگ، رنگ‌شده‌است، به هم وصل هستند. از هر رنگ دستِ‌کم یک سیم وجوددارد. آیا می‌توان هم‌واره چند تلفن انتخاب‌کرد؛ به گونه‌ای که در میانِ سیم‌هایِ دوبه‌دویِ بینِ آن‌ها درست 3 رنگِ وجودداشته‌باشد؟ (کلاسِ نهم – روزِ دوم)

4. اعدادِ طبیعی از 1 تا 100 دورِ یک دایره با این ویژگی آرایش‌داده‌شده‌اند که هر عدد بزرگ‌تر از دو هم‌سایه‌اش یا کوچک‌تر از دو هم‌سایه‌اش است. یک جفت از اعدادِ هم‌سایه "خوب" نامیده‌می‌شود، اگر شما آن جفت را پاک‌کنید، شرطِ بالا، هنوز معتبر باشد. کمینه‌یِ ممکنِ تعدادِ جفت‌هایِ خوب چیست؟ (کلاسِ نهم – روزِ دوم)

5. یک کشور 1001 شهر دارد و هر دو شهر با یک خیابانِ یک‌طرفه به هم وصل هستند. از هر شهر درست 500 جاده شروع‌می‌شود و در هر شهر درست 500 جاده پایان‌می‌یابد. یک جمهوریِ مستقل که شاملِ 668 شهر از 1001 شهر است، خودش را از کشور آزاد می‌کند. ثابت‌کنید می‌توان از هر شهر از این جمهوری به هر شهرِ دیگر از جمهوری دست‌رسی داشت، بدونِ آن‌که مجبور به ترکِ جمهوری باشد. (کلاسِ دهم – روزِ دوم)

6. یک آرایه‌ی مستطیلی 9 سطر و 2004 ستون دارد. در 9×2004 خانه‌ی جدول اعدادِ 1 تا 2004 را، هر یک 9 بار، جای‌می‌دهیم و این کار را به این گونه انجام‌می‌دهیم که دو عدد که در ستونِ یک‌سان هستند، دستِ‌بالا 3تا تفاوت‌داشته‌باشد. کمینه‌ی ممکنِ جمعِ تمامِ اعداد در سطرِ یکم را بیابید. (کلاسِ یازدهم – روزِ یکم)

7. ثابت‌کنید مجموعه‌ای متناهی وجودندارد که شاملِ بیش از $2N$ که $N > 3$، بردار دوبه‌دو ناهم‌خط از صفحه باشد و دو ویژگیِ زیر را داشته‌باشد:

1) برایِ هر N بردارِ دل‌خواه از این مجموعه، همواره $N - 1$ بردارِ دیگر از این مجموعه وجوددارند؛ به گونه‌ای که جمعِ این $2N - 1$ بردار برابر با بردارِ صفر باشد.

2) برایِ هر N بردارِ دل‌خواه از این مجموعه، همواره N بردارِ دیگر از این مجموعه وجوددارند؛ به گونه‌ای که جمعِ این $2N$ بردار برابر با بردارِ صفر باشد.

(کلاسِ یازدهم – روزِ دوم)

8. در یک کشور چند شهر وجوددارد؛ برخی از این شهرها با خطوطِ هوایی به هم وصل هستند؛ به گونه‌ای که یک خطِ هوایی درست دو شهر را به هم وصل‌می‌کند و دو جهتِ پرواز ممکن هستند. هر خطِ هوایی متعلق به یکی از k شرکتِ هواپیمایی است؛ و نیز دو خطِ هوایی از یک شرکتِ هواپیمایی همواره یک نقطه‌ی پایانیِ مشترک دارند. نشان‌دهید می‌توان تمامِ شهرها را به $k + 2$ گروه افرازکرد؛ به گونه‌ای که دو شهر از گروهِ یک‌سان هرگز با یک خطِ هوایی به هم‌دیگر وصل نباشند. (کلاسِ یازدهم – روزِ دوم)

2005

1. "لشا" اعدادِ از 1 تا 22^2 را در خانه‌هایِ یک تخته‌یِ 22×22 می‌گذارد. آیا "اُلگ" همواره می‌تواند دو خانه‌یِ مجاور در ضلع یا رأس انتخاب‌کند که جمعِ اعدادِ آن بر 4 بخش‌پذیر باشد؟ (کلاسِ نهم – روزِ یکم)

2. 365 کارت، داده‌شده‌اند؛ در آن‌ها اعدادِ متفاوت نوشته‌شده‌اند. ما می‌توانیم برایِ هر سه کارت، ترتیبِ اعدادِ نوشته‌شده در آن‌ها را بپرسیم. آیا همواره ممکن‌است که ترتیبِ تمامِ 365 کارت را در 2000 پرسش بیابیم؟ (کلاسِ نهم – روزِ یکم)

3. 100 نفر از 50 کشور، دوتا از هر کشور، دورِ یک دایره هستند. ثابت‌کنید می‌توان آن‌ها را به 2 گروه افرازکرد؛ به گونه‌ای که هیچ دو هم‌وطن و هیچ سه نفرِ متوالی در دایره، در یک گروه نباشند. (کلاسِ نهم – روزِ دوم)

*این پرسش در کلاسِ یازدهم – روزِ دوم هم آمده‌است؛ با این تفاوت که افراد از 25 کشور، چهارتا از هر کشور هستند و باید این افراد را در 4 دسته افرازکنید که هیچ دو هم‌وطن و هیچ دو نفرِ متوالی در یک گروه نباشند.

4. در یک آرایه‌یِ $2 \times n$ اعدادِ حقیقیِ مثبت داریم که جمعِ اعداد در هر یک از n ستون 1 است. نشان‌دهید می‌توان یک عدد در هر ستون انتخاب‌کرد که جمعِ اعدادِ انتخاب‌شده در هر سطر دست‌بالا $\frac{n+1}{4}$ باشد. (کلاسِ دهم – روزِ یکم)

5. 2005 عددِ متفاوتِ $a_1, a_2, \ldots, a_{2005}$ داده‌شده‌اند. با یک پرسش، می‌توان سه اندیسِ $1 \leq i < j < k \leq 2005$ انتخاب‌کرد و مجموعه‌یِ $\{a_i, a_j, a_k\}$ را فهمید (البته بدونِ ترتیب). کمینه‌یِ تعدادِ پرسش‌ها را بیابید که لزوماً تمامِ اعدادِ a_i را بفهمیم. (کلاسِ دهم – روزِ یکم)

*این پرسش در کلاسِ یازدهم – روزِ یکم هم آمده‌است.

6. 16 خانه رویِ یک تخته‌شترنجِ 8×8 انتخاب کرده‌ایم. کمینه‌یِ تعدادِ جفت‌هایِ خانه‌هایِ هم‌سطر یا هم‌ستونِ انتخاب‌شده چیست؟ (کلاسِ دهم – روزِ دوم)

7. یک صفحه‌یِ سفید به خانه‌هایی (به روشِ معمول) افرازشده‌است. یک تعدادِ متناهی از خانه‌ها با سیاه رنگ‌شدند. هر خانه‌یِ سیاه زوج (0، 2 یا 4) خانه‌یِ سفیدِ مجاور دارد. ثابت‌کنید می‌توان هر خانه‌یِ سفید را با سبز یا قرمز رنگ‌کرد؛ به گونه‌ای که هر خانه‌یِ سیاه تعدادِ یک‌سانی از خانه‌هایِ قرمز مجاور و خانه‌هایِ سبزِ مجاور داشته‌باشد.

2006

1. یک تخته‌شترنجِ 15×15 داده‌شده‌است. یک خطِ شکسته‌یِ بسته بدونِ خودبرخوردی می‌کشیم؛ به گونه‌ای که هر یال از خطِ شکسته یک پاره‌خط باشد که مراکز دو خانه‌یِ مجاور از تخته‌شترنج را به هم وصل‌می‌کند. اگر این خطِ شکسته نسبت به قطرِ تخته‌شترنج قرینه‌باشد، آن‌گاه نشان‌دهید طولِ این خطِ شکسته ≤ 200 است. (کلاسِ نهم – روزِ یکم)

*این پرسش برایِ کلاسِ دهم – روزِ یکم هم داده‌شد.

2. یک دایره و 2006 نقطه رویِ این دایره داده‌شده‌اند. "آلباتروس" این 2006 نقطه را با 17 رنگ، رنگ‌می‌کند. پس از آن، "فرانکینفیوتر" برخی از نقاط را با وترهایی به هم وصل‌می‌کند؛ به گونه‌ای که نقاطِ پایانیِ هر وتر رنگِ یک‌سان داشته‌باشند و دو وترِ متفاوت نقطه‌یِ مشترک نداشته‌باشند (حتی نقطه‌یِ پایانی). به این وسیله، فرانکینفیوتر قصددارد تا جایِ ممکن وترهایِ زیادی بکشد، در حالی که آلباتروس در تلاش است تا مانعِ او شود. بیشینه‌یِ ممکنِ تعدادِ وترهایی که فرانکینفیوتر همواره می‌تواند بکشد، چیست؟ (کلاسِ نهم – روزِ یکم)

*این پرسش برایِ کلاسِ دهم – روزِ یکم هم داده‌شد.

3. یک تخته‌شترنجِ 100×100 به دومینو (مستطیل‌های 2×1) برش‌داده‌شده‌است. دو بازی‌کن بازیِ زیر را انجام‌می‌دهند: در هر نوبت، یک بازی‌کن دو خانه‌یِ مجاور را به هم می‌چسباند (که با یک یالِ برشی جداشده‌اند). یک بازی‌کن می‌بازد اگر پس از نوبتَ‌ش، تخته‌شترنجِ 100×100 هم‌بند شود؛ یعنی بین هر دو خانه یک مسیر وجودداشته‌باشد که هیچ یالی را قطع‌نمی‌کند. کدام بازی‌کن استراتژیِ برد دارد، بازی‌کنِ شروع‌کننده یا حریفَ‌ش؟ (کلاسِ نهم – روزِ دوم)

4. یک مربعِ 3000×3000 با دومینو (یعنی مستطیلِ 2×1) به روشِ دل‌خواه فرش‌شده‌است. نشان‌دهید که می‌توان دومینوها را با سه رنگ، رنگ‌کرد؛ به گونه‌ای که تعدادِ دومینوهایِ هر رنگ یک‌سان باشد و هر دومینوی d دست‌بِالا دوتا مجاور با رنگِ یک‌سان با d داشته‌باشد. دو دومینو "مجاور" نامیده‌می‌شوند اگر یک خانه از یک دومینو یک ضلعِ مشترک با یک خانه از دیگری داشته‌باشد. (کلاسِ دهم – روزِ دوم)

5. رویِ یک مستطیلِ 69×49 شکل‌گرفته با یک شبکه از مربع‌هایِ مشبک، تمامِ 70×50 نقطه‌یِ شبکه‌ای با آبی رنگ‌شده‌اند. دو نفر بازیِ زیر را انجام‌می‌دهند: در هر گام، یک بازی‌کن دو نقطه‌یِ آبی را قرمز می‌کند و یک پاره‌خط بینِ آن دو نقطه می‌کشد (پاره‌خط‌هایِ متفاوت می‌توانند هم‌دیگر را قطع‌کنند). پاره‌خط‌ها به این روش کشیده‌می‌شوند، تا زمانی که تمامِ نقاطِ آبی، با قرمز رنگ‌شوند. در این لحظه، بازی‌کنِ یکم تمامِ پاره‌خط‌ها را جهت‌می‌دهد؛ یعنی هر پاره‌خطِ AB را می‌گیرد و آن را با یکی از دو بردارِ $\overrightarrow{AB}$ یا $\overrightarrow{BA}$ جای‌گزین می‌کند. اگر بازی‌کنِ یکم موفق‌شود تمامِ پاره‌خط‌هایِ کشیده‌شده را جهت‌دار کند؛ به گونه‌ای که جمعِ تمامِ بردارهایِ حاصل $\vec{0}$ شود، آن‌گاه او می‌برد؛ در غیرِ این صورت بازی‌کنِ دوم می‌برد. کدام بازیکن یک استراتژیِ برد دارد؟ (کلاسِ یازدهم – روزِ یکم)

6. در یک اردوگاهِ توریستی، هر فرد دستِ‌کم 50 و دستِ‌بالا 100 دوست در میانِ افرادِ دیگرِ اردوگاه دارد. نشان‌دهید می‌توان یک پیراهن به هر فرد هدیه‌داد؛ به گونه‌ای که پیراهن‌ها (دستِ‌بالا) 1331 رنگِ متفاوت داشته‌باشند و هر فرد 20 دوست داشته‌باشد که تمامِ پیراهن‌هایِ دوبه‌دویِ آن‌ها رنگ‌هایِ متفاوت داشته‌باشند. (کلاسِ یازدهم – روزِ دوم)

2007

1. اعدادِ $1, 2, \ldots, 100$ در خانه‌هایِ یک جدولِ 10×10 نوشته‌شده‌اند، هر عدد یک بار نوشته‌شده‌است. با یک حرکت، "نظر" می‌تواند اعدادِ درونِ هر دو خانه‌ای را جابجاکند. ثابت‌کنید او می‌تواند پس از دستِبالا 35 حرکت، یک جدول بسازد که در آن جمعِ اعدادِ هر دو خانه‌یِ مجاور (با ضلع)، مرکب باشد. (کلاسِ هشتم، روزِ یکم)

2. یک جادوگر به نامِ "آریوتیون" و دست‌یارَش "آمایاک" قصددارند ابر - شعبده‌بازی زیر را نمایش‌دهند. یک دایره رویِ تخته در اتاق کشیده‌می‌شود. تماشاگران 2007 نقطه رویِ این دایره مشخص‌می‌کنند، پس از آن آمایاک یکی از آن‌ها را پاک‌می‌کند. سپس آریوتیون به اتاق می‌آید و یک نیم‌دایره نشان‌می‌دهد که نقطه‌یِ پاک‌شده به آن تعلق‌دارد. توضیح‌دهید چگونه آریوتیون و آمایاک می‌توانند این ابر – شعبده‌بازی را نمایش‌دهند. (کلاسِ هشتم – روزِ یکم)

3. دو بازی‌کن به نوبت، قطرهایِ یک $(2n + 1)$ضلعیِ منتظم را می‌کشند $(n > 1)$. کشیدنِ یک قطر که کشیده‌شده‌است یا با تعدادِ فردی از قطرهایِ کشیده‌شده برخورددارد، ممنوع است. بازی‌کنی که حرکتِ مجاز ندارد، می‌بازد. چه‌کسی استراتژیِ برد دارد؟ (کلاسِ نهم – روزِ یکم)

4. در هر رأسِ یک 100ضلعیِ کوژ، دو عدد نوشته‌شده‌است. ثابت‌کنید می‌توان یک عدد از هر رأس پاک‌کرد؛ به گونه‌ای که اعدادِ باقی‌مانده در هر دو رأسِ مجاور متفاوت‌باشند. (کلاسِ نهم – روزِ دوم)

*این پرسش در کلاسِ یازدهم – روزِ دوم هم داده‌شد.

5. وجوهِ یک مکعبِ $9 \times 9 \times 9$ به مربع‌هایِ واحد تقسیم‌شده‌است. پوسته‌یِ بیرونیِ این مکعب با 243 نوارِ 1×2 پوشانده‌شده‌است. ثابت‌کنید تعدادِ نوارهایِ خمیده فرد است. (کلاسِ دهم – روزِ یکم)

6. "آریوتیون" و "آمایاک" یک شعبده‌یِ تأثیرگذارِ دیگر را نمایش‌می‌دهند. یک تماشاگر رویِ یک تخته یک دنباله از N رقم (دهدهی) می‌نویسد. آمایاک دو رقمِ مجاور را با یک دیسکِ سیاه پنهان‌می‌کند. سپس آروتیون می‌آید و هردو عدد (و ترتیبِشان) را می‌گوید. برایِ چه کم‌ترین Nای آن‌ها می‌توانند یک شعبده نمایش‌دهند؟ (کلاسِ دهم – روزِ یکم)

*این پرسش در کلاسِ یازدهم – روزِ یکم هم داده‌شد.

7. یک مجموعه از $n > 2$ بردارِ فرضی داده‌شده‌است. یک بردار از این مجموعه "بلند" نامیده‌می‌شود، اگر طولِ آن ناکم‌تر از طولِ جمعِ دیگر بردارها در این مجموعه باشد. ثابت‌کنید اگر هر بردار بلند باشد، آن‌گاه جمعِ تمامِ بردارها صفر است. (کلاسِ دهم – روزِ دوم)

8. یک چندوجهیِ F داده‌شده‌است. رأسِ A از آن درجه‌یِ 5 و دیگر رأس‌ها درجه‌یِ 3 دارند. یک رنگ‌آمیزی از یال‌هایِ F "خوب" نامیده‌می‌شود اگر برایِ هر رأس جز A، تمام سه یالِ آن رنگ‌هایِ متفاوت داشته‌باشند. تعدادِ رنگ‌آمیزی‌هایِ خوب بر 5 بخش‌پذیر نیست. ثابت‌کنید یک رنگ‌آمیزیِ خوب وجوددارد که در آن سه یالِ متوالی با شروع از A، یکسان رنگ‌شده‌باشند. (کلاسِ دهم – روزِ دوم)

9. یک گرافِ بدونِ جهت با N رأس داده‌شده‌است. برایِ هر مجموعه از k رأس $(1 \le k \le N)$، دست‌بِالا $2k - 2$ یال وجوددارند که رأس‌هایِ این مجموعه را به هم وصل‌می‌کنند. ثابت‌کنید که یال‌ها می‌توانند با دو رنگ، رنگ‌شوند؛ به گونه‌ای که هر دور شاملِ یال‌هایی از هردو رنگ باشد. گراف ممکن است یال‌هایِ چندگانه داشته‌باشد. (کلاسِ یازدهم – روزِ دوم)

2008

1. فاصله‌یِ بینِ دوخانه‌یِ یک تخته‌شترنجِ نامتناهی، کمینه‌یِ تعدادِ حرکاتِ موردِ نیاز برایِ حرکت‌دادن یک شاه از یکی به دیگری در نظر گرفته‌می‌شود. سه خانه با فاصله‌هایِ دوبه‌دویِ برابر با 100 از تخته انتخاب‌شده‌اند. چند خانه وجوددارند که از هر یک از آن سه خانه فاصله‌یِ 50 داشته‌باشند؟ (کلاسِ نهم – روزِ دوم)

2. 3^{2k} سکه‌یِ ظاهراً یک‌سان، که یکی از آن‌ها تقلبی و سبک‌تر از بقیه است، داده‌شده‌است. به هم‌این ترتیب سه ترازویِ ظاهراً یک‌سانِ بدونِ وزنه که یکی از آن‌ها شکسته‌است (و خروجی‌هایِ نابرابر با وضعیتِ واقعی تحویل‌می‌دهد)، داریم. چگونه می‌توانیم سکه‌یِ تقلبی را در $3k + 1$ توزین پیداکنیم؟ (کلاسِ نهم – روزِ دوم)

3. ستون‌هایِ یک تخته‌یِ $n \times n$ با 1 تا n نشان‌دار شده‌اند. اعدادِ $1, 2, \ldots, n$ در تخته آرایش‌داده‌شده‌اند؛ به گونه‌ای که اعداد در هر سطر و هر ستون دوبه‌دو متفاوت هستند. یک خانه را "خوب" گوییم اگر عددِ درونِ آن بزرگ‌تر از نشانِ ستونَ‌ش باشد. برایِ چه nهایی یک آرایش وجوددارد که در آن هر سطر شاملِ تعدادِ یک‌سانی خانه‌یِ خوب باشد؟ (کلاسِ دهم – روزِ یکم)

4. رویِ صفحه‌یِ کارتزین چند مستطیل با اضلاعِ موازی با محورهایِ مختصات، کشیده‌شده‌اند. فرض‌کنید که هر دو مستطیل بتوانند با یک خطِ افقی یا عمودی برش‌داده‌شوند. نشان‌دهید می‌توان یک خطِ افقی و یک خطِ عمودی کشید؛ به گونه‌ای که هر مستطیل با دستِ‌کم یکی از این دو خط بریده‌شود. (کلاسِ دهم – روزِ دوم)

5. در یک تورنمنتِ شترنج، $2n + 3$ شترنج‌باز شرکت‌می‌کنند. هر دو بازی‌کن درست یک بازی انجام‌می‌دهند. برنامه به گونه‌ای است که هیچ دو مسابقه‌ای در یک زمان برگزارنمی‌شوند و هر بازی‌کن پس از شرکت‌کردن در یک مسابقه، در دستِ‌کم n مسابقه‌یِ (متوالی) بعدی حضور ندارد. ثابت‌کنید یکی از بازی‌کنانی که در مسابقه‌یِ افتتاحیه بازی‌کرده، در مسابقه‌یِ اختتامیه هم بازی‌خواهدکرد. (کلاسِ یازدهم – روزِ دوم)

2009

1. n فنجان دورِ یک دایره آرایش‌داده‌شده‌اند. زیرِ یکی از فنجان‌ها یک سکه پنهان‌شده‌است. در هر حرکت، مجاز است 4 فنجان انتخاب‌کرد و بودنِ یا نبودنِ سکه زیرِ این فنجان‌ها را فهمید. پس از آن، فنجان‌ها به جایِ‌شان بازمی‌گردند و سکه به یکی از دو خانه‌یِ هم‌سایه می‌رود. کمینه‌یِ تعدادِ حرکت‌هایِ موردِ نیاز برایِ آن‌که سرانجام بفهمیم سکه کجاست، چیست؟ (کلاسِ نهم – روزِ یکم)

2. آیا می‌توان اعدادِ صحیحِ مثبت را با 2009 رنگ، رنگ‌کرد اگر بدانیم که هر رنگ تعدادِ نامتناهی عددِ صحیح را رنگ‌می‌کند و نتوان سه عدد که با سه رنگِ متفاوت رنگ‌شده‌اند را پیداکرد که ضربِ دوتا از آن‌ها برابر با سومی باشد؟ (کلاسِ نهم – روزِ دوم)

3. هر هشت مربعِ رویِ قطرِ یک تخته‌شترنج را مانندِ یک حصار درنظرمی‌گیریم. رخی رویِ تخته‌شترنج حرکت‌می‌کند؛ به گونه‌ای که رویِ هر مربع بیش‌از یک بار نمی‌رود و رویِ مربع‌هایِ حصار هم نمی‌رود (مربع‌هایی که رخ از آن‌ها می‌گذرد به منزله‌یِ یک مربع که رویِ آن رفته، پنداشته‌نمی‌شود). بیشینه‌یِ تعداد دفعاتی که رخ از حصار می‌پرد چیست؟ (کلاسِ نهم – روزِ دوم)

4. دورِ یک دایره 2009 عددِ صحیحِ نامنفی نابزرگ‌تر از 100 وجوددارند. اگر دو عدد بعد از یک‌دیگر نشسته‌باشند، می‌توان هردویِ آن‌ها را 1تا افزایش‌داد. این کار را دستِ‌بالا k بار می‌توان انجام‌داد. کمینه‌یِ k چیست؛ به گونه‌ای که بتوان تمامِ اعدادِ دورِ دایره را برابر ساخت؟ (کلاسِ دهم – روزِ یکم)

5. یک درختِ متناهیِ T و تناظرِ $f : T \to T$ داده‌شده‌است. ثابت‌کنید یک رأسِ a وجوددارد که $f(a) = a$ یا دو رأسِ مجاورِ a, b وجوددارند که $f(a) = b$ و $f(b) = a$. (کلاسِ دهم – روزِ دوم)

6. در یک کشور، برخی از شهرها با جاده به هم وصل‌شده‌اند. جاده‌ها هم‌دیگر را تنها در شهرها ملاقات می‌کنند. در هر شهر، یک تابلو وجوددارد که کم‌ترین طولِ جاده‌هایِ آغازشده در این شهر و گذرنده از تمامِ شهرهایِ دیگر رویِ آن نوشته‌شده‌است (راه‌ها می‌توانند از برخی از شهرها بیش از یک بار بگذرند و لزوماً به شهرِ آغازین بازنمی‌گردند).

ثابت‌کنید 2 عددِ دل‌خواه در تابلوها نمی‌توانند بزرگـتر یا کوچکـتر از 1.5 بار از دیگری باشند. (کلاسِ یازدهم – روزِ یکم)

7. یک مجموعه‌یِ M از نقاطِ (x, y) با مختص‌هایِ صحیح با شرطِ $x^2 + y^2 \leq 10^{10}$ داده‌شده‌است. دو بازی‌کن یک بازی انجام‌می‌دهند و به‌ترین حرکت‌ها را در نوبتِ‌شان انجام‌می‌دهند. یکی از آن‌ها یک نقطه در حرکتِ نخستَ‌ش نشان‌دار می‌کند. پس از آن، در هر حرکت، بازی‌کنِ حرکت‌دهنده، یک نقطه نشان‌دار می‌کند که نشان‌دار نشده است و آن را به نقطه‌یِ نشان‌دارشده‌یِ قبلی وصل‌می‌کند. بنابراین، آن‌ها خطِ شکسته‌یِ بسته می‌کشند. باید طولِ یال‌هایِ این خطِ شکسته اکیداً افزایشی باشد. بازی‌کنی که نتواند یک حرکت انجام‌دهد، می‌بازد. چه کسی یک استراتژیِ برد دارد؟ (کلاسِ یازدهم – روزِ یکم)

※ این شرط هم باید گفته‌شود : نشان‌دارکردنِ یک نقطه‌یِ متقارن با یکی از نقطه‌های نشان‌دارشده نسبت به مبدأِ دستگاهِ مختصات مجاز نیست.

8. k رخ رویِ یک تخته‌شترنجِ 10×10 وجوددارد. تمامِ مربع‌هایی که دستِ‌کم یک رخ آن‌ها را تهدیدمی‌کند را نشان‌دار می‌کنیم (فرض‌می‌کنیم مربعی که رخ رویِ آن است نیز توسطِ رخ تهدیدمی‌شود). بیشینه‌یِ مقدارِ k چیست؛ به گونه‌ای که آرایشی از k رخ با شرطِ زیر وجودداشته‌باشد: پس از برداشتنِ هر رخ از تخته‌شترنج، دستِ‌کم یک مربع توسطِ هیچ‌یک از رخ‌هایِ باقی‌مانده تهدیدنشود. (کلاسِ یازدهم – روزِ دوم)

※شکلِ بیانِ پرسش به صورتِ بالا درست نیست. شکل درست:

k رخ رویِ یک تخته‌شترنجِ 10×10 وجوددارد. تمامِ مربع‌هایی که دستِ‌کم یک رخ آن‌ها را تهدیدمی‌کند را نشان‌دار می‌کنیم (فرض‌می‌کنیم مربعی که رخ رویِ آن است نیز توسطِ رخ تهدیدمی‌شود). بیشینه‌یِ مقدارِ k چیست؛ به گونه‌ای که آرایشی از k رخ با شرطِ زیر وجودداشته‌باشد: پس از برداشتنِ هر رخ از تخته‌شترنج، دستِ‌کم یک مربعِ نشان‌دار توسطِ هیچ‌یک از رخ‌هایِ باقی‌مانده تهدیدنشود.

2010

1. 24 مدادِ متفاوت از 4 رنگِ متفاوت و 6 مداد از هر رنگ داده‌شده‌است. آن‌ها به 6 بچه داده‌شدند؛ به گونه‌ای که هر یک 4 مداد گرفتند. کمینه‌یِ تعدادِ بچه‌هایی که می‌توانید تصادفاً انتخاب‌کنید؛ به گونه‌ای که مطمئن باشید مدادهایی از همه‌یِ رنگ‌ها دارید، چیست؟ (کلاسِ نهم – روزِ یکم)

※این پرسش برایِ کلاسِ دهم – روزِ یکم هم داده‌شد؛ با این تفاوت که 40 مداد، 10تا از هر رنگ و 10 بچه وجوددارد.

2. 100 عددِ حقیقیِ متفاوتِ دل‌خواه به 100 نقطه رویِ یک دایره نسبت‌داده‌شده‌اند. ثابت‌کنید می‌توانید همواره 4 نقطه‌یِ متوالی انتخاب‌کنید؛ به گونه‌ای که جمعِ دو عددِ نسبت‌داده‌شده به نقاطِ بیرونی همواره بزرگ‌تر از جمعِ دو عددِ نسبت‌داده‌شده به نقاطِ درونی باشد. (کلاسِ نهم – روزِ یکم)

※این پرسش در کلاسِ دهم – روزِ یکم هم داده‌شد.

3. 100 سیب رویِ یک میز با مجموعِ وزنِ 10 کیلوگرم وجوددارد. هر سیب ناکمتر از 25 گرم وزن دارد. سیب‌ها باید برایِ 100 بچه برش‌داده‌شوند؛ به گونه‌ای که هر بچه 100 گرم بگیرد. ثابت‌کنید می‌توانید آن را انجام‌دهید؛ به گونه‌ای که هر قطعه ناکمتر از 25 گرم وزن داشته‌باشد. (کلاسِ نهم – روزِ یکم)

4. هر یک از 1000 شیطانک، یک کلاه دارد، قرمز رویِ درون و آبی رویِ بیرون یا برعکس. یک شیطانک با یک کلاه که بیرونِ آن قرمز است، تنها می‌تواند دروغ‌بگوید و یک شیطانک با یک کلاه که بیرونِ آن آبی است، تنها می‌تواند راست‌بگوید. یک روز هر شیطانک به هر شیطانکِ دیگر گفت :"بیرونِ کلاهِ تو قرمز است". در طولِ روز، برخی از شیطانک‌ها کلاه‌هایِ‌شان را در برخی زمان‌ها در طولِ روز برگرداندند (یک شیطانک می‌تواند آن را بیش از یک بار در روز انجام‌دهد). کمینه‌یِ ممکنِ تعدادِ دفعاتی که کلاه‌ها برگردانده‌می‌شوند، را بیابید. (کلاسِ نهم – روزِ دوم)

5. در یک کشور برخی از جفت‌هایِ شهرها با خطوطِ هواییِ دوطرفه‌یِ مستقیم به هم وصل هستند. از هر شهر می‌توانیم به هر شهرِ دیگر سفرکنیم (ممکن است با یک پرواز نباشد). می‌دانیم که اگر هر مسیرِ دوری (یعنی شهرهایِ شروع و پایانَش یک‌سان هستند) را درنظربگیریم، شاملِ تعدادِ فردی پرواز باشد و اگر تمامِ پروازهایِ این مسیر را ببندیم، آن‌گاه

بتوانیم دو شهر پیداکنیم؛ به گونه‌ای که نتوانیم از یکی به دیگری پروازکنیم. ثابت‌کنید می‌توانیم تمامِ کشور را به 4 ناحیه تقسیم‌کنیم؛ به گونه‌ای که هر پرواز شهرهایی از ناحیه‌هایِ مختلف را وصل‌کند. (کلاسِ دهم – روزِ دهم)

6. رویِ یک نمودارِ $n \times n$ که $n \geq 4$، n نشانِ $+$ در خانه‌هایِ یکی از قطرها و یک نشانِ $-$ در تمامِ خانه‌هایِ دیگر قراردارند. می‌توانید تمامِ نشان‌هایِ یک سطر یا یک ستون را از $+$ به $-$ و از $-$ به $+$ تغییردهید. ثابت‌کنید همواره پس از متناهی عمل، n یا بیش‌تر مثبت خواهیدداشت. (کلاسِ یازدهم – روزِ یکم)

7. در یک مدرسه‌یِ شبانه‌روزی، 9 موضوع، 512 دانش‌آموز و 256 اتاق وجوددارد (دو نفر در هر اتاق). برایِ هر دانش‌آموز یک مجموعه (زیرمجموعه‌ای از 9 موضوع) از موضوع‌ها وجوددارد که دانش‌آموز به آن علاقه‌مند است. هر دانش‌آموز یک مجموعه‌یِ متفاوت از موضوع‌ها دارد. ثابت‌کنید تمامِ مدرسه می‌تواند دورِ یک دایره قراردادەشود؛ به گونه‌ای که هر جفت از هم‌اتاقی‌ها دو نفر داشته‌باشند که کنارِ هم قرارگرفته‌باشند و آن جفت‌ها از دانش‌آموزها که کنارِ هم ایستاده‌اند، هم اتاقی نباشند و شرطِ زیررا هم داشته‌باشند: یکی از دو دانش‌آموز به تمامِ موضوعاتی که دانش‌آموزِ دیگر به آن‌ها علاقه‌دارد، علاقه‌داشته‌باشد و نیز درست یک موضوعِ بیش‌تر داشته‌باشد. توجه کنید که دو نفر که هم‌اتاقی هستند، باید مجاور باشند. (کلاسِ یازدهم – روزِ دوم)

*شکلِ بیانِ پرسش به صورتِ بالا کمی نامفهوم است. پرسش را به شکلِ زیر هم می‌توان مطرح‌کرد:

زیرمجموعه‌هایِ مجموعه‌یِ $\{1, 2, \ldots, 9\}$ به 256 دسته‌یِ دوتایی به صورتِ دل‌خواه افرازشده‌است. نشان‌دهید می‌توان این زیرمجموعه‌ها را دورِ یک دایره چید، به گونه‌ای که هر دو زیرمجموعه که در یک دسته هستند، مجاور باشند و هر دو زیرمجموعه که در یک دسته نیستند، ولی مجاورند، تفاضل متقارنِ 1 داشته‌باشند.

2011

1. یک 2011ضلعیِ کوژ رویِ تخته کشیده‌شده‌است. پیتر کشیدن را ادامه‌می‌دهد و قطرهایِ آن را می‌کشد؛ به گونه‌ای که هر قطرِ جدیدِ، نابیش‌تر از یکی از قطرهایِ کشیده‌شده را قطع‌کند. بیشینه‌یِ تعدادِ قطرهایی که پیتر می‌تواند بکشد، چیست؟ (کلاسِ نهم – روزِ یکم)

2. تعدادی پیش‌خوان در برخی از خانه‌هایِ یک تخته‌یِ 100×100 وجوددارد. خانه‌ای را "خوب" گویید اگر تعدادِ زوجی پیش‌خوان در خانه‌هایِ مجاور با ضلع داشته‌باشد. آیا می‌تواند درست یک خانه خوب باشد؟ (کلاسِ نهم – روزِ دوم)

3. در هر خانه‌یِ یک جدول با n سطر و ده ستون، یک رقم نوشته‌شده‌است. می‌دانیم برایِ هر سطرِ A و هر دو ستون، هم‌واره می‌توانید یک سطر پیداکنید که ارقامِ متفاوتی با A داشته‌باشد تنها وقتی که آن با دو ستون تقاطع‌داده‌شود. ثابت‌کنید $n \geq 512$. (کلاسِ دهم – روزِ یکم)

4. گرافِ G 3 – رنگ‌پذیر نیست. ثابت‌کنید گراف می‌تواند به 2 گرافِ M, N تقسیم‌شود؛ به گونه‌ای که M، 2 – رنگ‌پذیر نباشد و N، 1 – رنگ‌پذیر نباشد. (کلاسِ دهم – روزِ دوم)

5. یک تخته‌یِ 2010×2010 به شکل‌هایِ گوشه – شکل از سه خانه افرازشده‌است. ثابت‌کنید می‌توان یک خانه در هر شکل را نشان‌دارکرد؛ به گونه‌ای که هر سطر و هر ستون تعدادِ یک‌سانی از خانه‌هایِ نشان‌دار داشته‌باشند. (کلاسِ دهم – روزِ دوم)

※منظور از شکل‌هایِ گوشه – شکل از سه خانه همان ال – ترومینو است.

6. 999 دانش‌مند وجوددارد. هر دو دانش‌مند، جفتِشان به درست 1 موضوع علاقه‌دارند و برایِ هر موضوع، درست 3 دانش‌مند وجوددارند که به آن موضوع علاقه‌دارند. ثابت‌کنید می‌توان 250 موضوع انتخاب‌کرد؛ به گونه‌ای که هر دانش‌مند به دستِ‌بالا 1 موضوع علاقه‌داشته‌باشد. (کلاسِ یازدهم – روزِ یکم)

7. ده اتومبیل در یک جاده حرکت‌می‌کنند. چند شهر در جاده وجوددارد. هر اتومبیل با یک سرعتِ ثابت از شهرها عبورمی‌کند و با یک سرعتِ ثابتِ متفاوت بیرونِ شهرها حرکت‌می‌کند (اتومبیل‌هایِ متفاوت ممکن است سرعت‌هایِ متفاوت داشته‌باشند). 2011 نقطه رویِ جاده وجوددارد. اتومبیل‌ها نمی‌توانند در نقاط سبقت‌بگیرند. ثابت‌کنید 2 نقطه وجوددارند؛ به گونه‌ای که اتومبیل‌ها از این نقاط با ترتیبِ یکسان عبورمی‌کنند. (کلاسِ یازدهم – روزِ یکم)

8. بیش از n^2 سنگ رویِ میز وجوددارد. پیتر و واسیا یک بازی انجام‌می‌دهند. پیتر شروع‌می‌کند. بازی‌کن نوبت‌دار، می‌تواند به تعدادِ هر عددِ اولِ کم‌تر از n، یا مضربی از n یا 1 سنگ بردارد (البته بازی‌کن باید دستِ‌کم 1 سنگ بردارد). ثابت‌کنید پیتر هم‌واره می‌تواند آخرین سنگ را بردارد (صرفِ نظر از استراتژیِ واسیا). (کلاسِ یازدهم – روزِ دوم)