میانترم ریاضی۱

دانشگاه صنعتی شریف-آذر۱۴۰۲

پاسخ تشریحی: مهندس شاه ابراهیمی

به‌نام خدا

تاریخ: ۰۲/۹/۲۳
شماره: ....
پیوست: ....

دانشکدهٔ علوم ریاضی

امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۱ (گروه‌های ۱ تا ۴)

مدّت امتحان: ۳ ساعت

۲۲–۰۱۵

نیمسال اوّل ۰۳–۰۲

- این امتحان شامل ۶ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچهٔ امتحانی بنویسید. استفاده از ماشین حساب و نیز هرگونه پرسش و پاسخ در طول جلسهٔ امتحان ممنوع است.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و حتی‌الامکان از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.

سؤال ۱. تابع f را با ضابطهٔ زیر در نظر بگیرید:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{n} & : x=\frac{1}{n},\ n=1,2,3,\dots \\ x^2 & \text{در غیر اینصورت :} \end{cases}$$

نشان دهید تابع f در نقطهٔ صفر پیوسته است ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

سؤال ۲. فرض کنید $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که بر (a,b) مشتق‌پذیر است و $f(a)=f(b)=0$. نشان دهید $a<c<b$ وجود دارد به طوری که $f'(c)=f(c)$. (راهنمایی: تابع g با ضابطهٔ $g(x)=e^{-x}f(x)$ را در نظر بگیرید.)

سؤال ۳. مجموعهٔ تمام نقاطی از صفحه که در رابطهٔ

$$3x^y-y^x=e^x+e^y$$

صدق می‌کنند یک منحنی در صفحه تشکیل می‌دهند که از نقطهٔ (e,e) می‌گذرد. نشان دهید در یک همسایگی از e می‌توان از رابطهٔ بالا y را بر حسب تابعی مشتق‌پذیر از x نوشت و سپس معادلهٔ خط مماس بر منحنی این تابع را در نقطهٔ (e,e) به دست آورید.

سؤال ۴. گوشهٔ سمت راست پایینی در یک نوار کاغذی به عرض a سانتی‌متر را مانند شکل طوری برمی‌گردانیم که روی ضلع بالایی نوار قرار بگیرد و نیز خط تایی که به دست می‌آید دو ضلع مجاور نوار را قطع کند. کمترین طول ممکن برای این خط تا چقدر است؟

سؤال ۵. تابع f را با ضابطهٔ زیر در نظر بگیرید:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

(الف) جدولی را به دست آورید که تغییرات تابع f را از نظر صعودی و نزولی بودن و نیز از نظر محدب و مقعر بودن روی کل دامنهٔ تعریف آن مشخص می‌کند. سپس نقاط ماکزیمم و مینیمم موضعی f را بیابید و نمودار تابع f را رسم کنید.

(ب) با استفاده از قسمت (الف)، به ازای هر عدد مثبت a، اعداد a^e و e^a را از نظر بزرگی و کوچکی با هم مقایسه کنید.

سؤال ٦. توابع f و g را با ضابطه‌های زیر در نظر بگیرید:

$$f(x) = \sin x \quad , \quad g(x) = \left(x - \frac{\pi}{۴}\right) \cos x.$$

(الف) چندجمله‌ای‌های تیلور مرتبهٔ دوم f و g را حول نقطهٔ $\frac{\pi}{۴}$ به همراه جمله‌های خطا به دست آورید.

(ب) مقدار حد زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \left(\frac{۱}{\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) \cos x} - \frac{۱}{\sin x - \frac{\sqrt{۲}}{۲}} \right).$$

توزیع نمره.
سؤال ۱: ۵+۵ نمره،
سؤال ۲: ۱۵ نمره،
سؤال ۳: ۱۵ نمره،
سؤال ۴: ۲۰ نمره،
سؤال ۵: ۱۲+۸ نمره،
سؤال ٦: ۱۰+۱۰ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره

پاسخ سوال۱:

(فصل حد)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n} & x=\frac{1}{n} \quad n=1,2,3,\cdots\\ x^2 & x\neq\frac{1}{n} \quad n=1,2,3,\cdots\end{cases}$$

$$x=\frac{1}{n}\xrightarrow{x\to 0} n\to\infty$$

$$\xrightarrow{x=\frac{1}{n}}\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\rfloor$$

$$\xrightarrow{x\neq\frac{1}{n}}\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x^2=0\rfloor$$

بنابراین تابع در مبدا پیوسته است.

$$\to f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{1}{n}}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n}\right)=1\rfloor$$

$$\xrightarrow{x\neq\frac{1}{n}}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0\rfloor$$

بنابراین تابع در مبدا مشتق پذیر نیست.

پاسخ سوال۲:

(فصل مشتق-قضیه رول)

$$\to g(x)=e^{-x}f(x)\to\begin{cases}g(a)=e^{-a}f(a)\\ g(b)=e^{-b}f(b)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{f(a)=f(b)=0}\underline{g(a)=g(b)=0}\Big|\xrightarrow{\text{Rolle's Theorem}}\exists c\in(a,b)\ \Big|\ \underline{g'(c)=0}\Big|$$

$$\to g'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)$$

$$\xrightarrow{x=c}g'(c)=-e^{-c}f(c)+e^{-c}f'(c)=e^{-c}(f'(c)-f(c))$$

$$\xrightarrow{g'(c)=0}e^{-c}(f'(c)-f(c))=0\to f'(c)-f(c)=0\to\underline{f'(c)=f(c)}\Big|$$

پاسخ سوال ۳:

(فصل مشتق-ترکیب مشتق ضمنی و متعالی و خط مماس-سوال مشابه جزوه ریاضی۱ مهندس شاه ابراهیمی)

$$\to f(x,y)=3x^{y}-y^{x}-e^{x}-e^{y}=0$$

$$\xrightarrow[y=e]{x=e} f(e,e)=3e^{e}-e^{e}-e^{e}-e^{e}=0$$

$$\to \frac{dy}{dx}=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=-\frac{3yx^{y-1}-y^{x}\ln y-e^{x}}{3x^{y}\ln x-xy^{x-1}-e^{y}}$$

برای اینکه ثابت کنیم می توان تابع yرا در یک همسایگی eبر حسب xنوشت باید نشان دهیم مخرج کسر مخالف صفر است، بنابراین داریم:

$$\xrightarrow[y=e]{x=e} 3e^{e}\ln e-ee^{e-1}-e^{e}=3e^{e}-e^{e}-e^{e}=e^{e}\neq 0$$

$$\xrightarrow[y=e]{x=e} \frac{dy}{dx}=-\frac{3ee^{e-1}-e^{e}\ln e-e^{e}}{3e^{e}\ln e-ee^{e-1}-e^{e}}=-\frac{3e^{e}-e^{e}-e^{e}}{3e^{e}-e^{e}-e^{e}}=-\frac{e^{e}}{e^{e}}=\boxed{-1}$$

$$\xrightarrow{y-y_0=m(x-x_0)} y-e=-1(x-e)\to \boxed{x+y=2e}$$

فصل سوم: مشتق | ریاضیات عمومی ۱

مثال ۳) معادله خط مماس بر منحنی $y^x+x^y=2$ در نقطه (۱,۱) را بیابید.

$$y^x+x^y=2\to e^{Lny^x}+e^{Lnx^y}=2\to e^{xLny}+e^{yLnx}=2$$

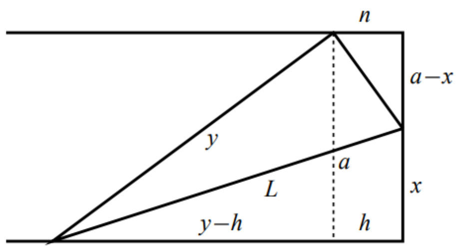
$$\xrightarrow{(\ )'} Lnye^{xLny}+\frac{xy'}{y}e^{xLny}+y'Lnxe^{yLnx}+\frac{y}{x}e^{yLnx}=0$$

$$\xrightarrow{(x,y)=(1,1)} (0+y')e^{0}+(0+1)e^{0}=0\to \boxed{y'=-1}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله خط}} y-y_0=m(x-x_0)\to y-1=-1(x-1)\to \boxed{y+x=2}$$

پاسخ سوال ۴:

(فصل کاربرد مشتق-بهینه سازی-تمارین آخر فصل آدامز-سوال حل شده شماره۳ در کانال تلگرامی *@EbiMath*)



پاسخ سوال ۳)

@EbiMath

$$x^2 = h^2 + (a-x)^2 \Rightarrow h^2 = 2ax - a^2$$
$$y^2 = a^2 + (y-h)^2 \Rightarrow h^2 = 2hy - a^2$$

hence $hy = ax$. Then

$$\begin{aligned} L^2 &= x^2 + y^2 = x^2 + \frac{a^2x^2}{h^2} \\ &= x^2 + \frac{a^2x^2}{2ax - a^2} = \frac{2ax^3}{2ax - a^2} \end{aligned}$$

for $\frac{a}{2} < x \le a$. Clearly, $L \to \infty$ as $x \to \frac{a}{2}+$, and $L(a) = \sqrt{2}a$. For critical points of L^2:

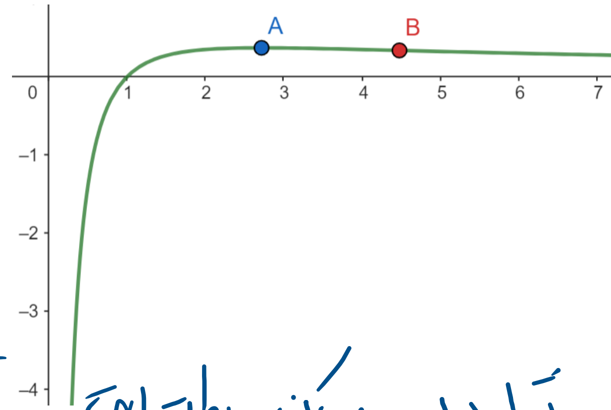
$$\begin{aligned} 0 = \frac{d(L^2)}{dx} &= \frac{(2ax - a^2)(6ax^2) - (2ax^3)(2a)}{(2ax - a^2)^2} \\ &= \frac{2a^2x^2(4x - 3a)}{(2ax - a^2)^2}. \end{aligned}$$

The only critical point in $\left(\frac{a}{2}, a\right]$ is $x = \frac{3a}{4}$. Since $L\left(\frac{3a}{4}\right) = \frac{3\sqrt{3}a}{4} < L(a)$, therefore the least possible length for the fold is $\boxed{\frac{3\sqrt{3}a}{4}}$ cm.

@EbiMath

پاسخ سوال ۵:

(فصل مشتق و کاربرد-ترکیب رسم نمودار و قضیه مقدار میانگین-سوال مشابه جزوه جمع مهندس شاه ابراهیمی)



$$f(x)=\frac{\ln x}{x}\longrightarrow \underline{D_f = x>0}\,\Big|$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}\ln x}{\frac{d}{dx}x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

$$\to f'(x)=\frac{-1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}(1-\ln x)$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0}\ln x=1\to \boxed{x=e}\to \underline{f(e)=\frac{1}{e}}\,\Big|$$

$x=e$

$f'(x)$	+	−
شیب	صعودی	نزولی

نقطه $(e \text{ و } \frac{1}{e})$ ماکزیمم مطلق است.

$$\to f''(x)=\frac{-2}{x^3}(1-\ln x)-\frac{1}{x^3}=\frac{2\ln x}{x^3}-\frac{3}{x^3}=\frac{1}{x^3}(2\ln x-3)$$

$$\xrightarrow{f''(x)=0}2\ln x-3\to \ln x=\frac{3}{2}\to \boxed{x=e^{\frac{3}{2}}}\to \underline{f(e^{\frac{3}{2}})=\frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}}}\,\Big|$$

نقطه $(e^{3/2} \text{ و } \frac{3/2}{e^{3/2}})$ عطف است.

$x=e^{3/2}$

نقطه عطف است.

$f''(x)$	−	+
	محدب	مقعر

$0<x<e^{3/2}\longrightarrow$ محدب

$x>e^{3/2}\longrightarrow$ مقعر

قضیه مقدار میانگین:

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)} \qquad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\frac{\ln b}{b}-\frac{\ln a}{a}}{b-a} \quad , \quad f'(c)=\frac{1}{c^2}(1-\ln c)$$

$$\begin{cases}\xrightarrow{0<a<c<e} f'(c)>0\to \dfrac{\frac{\ln e}{e}-\frac{\ln a}{a}}{e-a}>0\to \dfrac{\ln e}{e}>\dfrac{\ln a}{a}\to \ln e^a>\ln a^e\to \underline{e^a>a^e}\,\Big| \\ \xrightarrow{0<e<c<a} f'(c)<0\to \dfrac{\frac{\ln a}{a}-\frac{\ln e}{e}}{a-e}<0\to \dfrac{\ln a}{a}<\dfrac{\ln e}{e}\to \ln a^e<\ln e^a\to \underline{a^e<e^a}\,\Big|\end{cases}$$

بنابراین فارغ از مقدار $a>0$ همواره $e^a>a^e$ برقرار است.

کلاس آنلاین ریاضی ۱
جمع بندی میانترم
مهندس شاه ابراهیمی
@EbiMath

مثال۳۰) ۱. تابع $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ را در نظر بگیرید.

الف) تعیین کنید f روی چه بازه یا بازه‌هایی اکیداً صعودی و روی چه بازه یا بازه‌هایی، اکیداً نزولی است.

ب) مقدار ماکسیمم تابع f روی دامنه $\mathbb{R}^+$ را محاسبه کنید و تعیین کنید در چه نقطه یا نقاطی رخ می‌دهد.

پ) مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ را محاسبه کنید.

ت) تعیین کنید f روی چه بازه یا بازه‌هایی تابعی محدب و روی چه بازه یا بازه‌هایی مقعر است.

ث) نقاط عطف f را تعیین کنید.

ج) نمودار f را رسم کنید. *(دانشگاه صنعتی شریف-۱۴۰۲)*

حل:

کلاس آنلاین ریاضی ۱
جمع بندی میانترم
مهندس شاه ابراهیمی
@EbiMath

مثال۶۵) فرض کنید $x>0$ و $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$. در اینصورت ماکزیمم مطلق تابع $f(x)$ را یافته و نشان‌دهید:

الف) $e^{\pi} > \pi^e$

ب)اگر $b>a\geq e$ آنگاه $\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}$

ج)برای هر $b>a>e$ داریم $a^b > b^a$ *(دانشگاه صنعتی شریف-تمرین۱۳۹۹)*

حل:

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)} \xrightarrow{(a,b)} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

$$\to \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{b^{\frac{1}{b}}-a^{\frac{1}{a}}}{b-a}$$

$$\to f'(c)=\frac{1}{c^2}(1-\ln c)e^{\frac{\ln c}{c}} \xrightarrow{e<c} f'(c)<0$$

$$\to \frac{b^{\frac{1}{b}}-a^{\frac{1}{a}}}{b-a}<0 \to b^{\frac{1}{b}}-a^{\frac{1}{a}}<0 \to b^{\frac{1}{b}}<a^{\frac{1}{a}}$$

$$\xrightarrow{()^{ab>0}} b^a<a^b$$

پاسخ سوال ۶:

(ترکیبی فصل مشتق و حد-بسط تیلور و حد مبهم)

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+(x-x_0)^2\frac{f''(x_0)}{2}+(x-x_0)^3\frac{f'''(x_0)}{6}+\cdots}$$

$$\xrightarrow{\text{order } 2} p(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+(x-x_0)^2\frac{f''(x_0)}{2}$$

$$\xrightarrow[x_0=\frac{\pi}{4}]{f(x)=\sin x} \sin x=\sin(\frac{\pi}{4})+(x-\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{4})+(x-\frac{\pi}{4})^2\frac{-\sin(\frac{\pi}{4})}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\frac{\pi}{4})^2}$$

$$\xrightarrow{E=(x-x_0)^3\frac{f'''(x)}{6}} E=(x-\frac{\pi}{4})^3\frac{-\cos(c)}{6}\to |E|\le (x-\frac{\pi}{4})^3\frac{M}{6}\xrightarrow{M=1}|E|\le\frac{1}{6}(x-\frac{\pi}{4})^3$$

$$\xrightarrow[x_0=\frac{\pi}{4}]{g(x)=\cos x} \cos x=\cos(\frac{\pi}{4})-(x-\frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{4})+(x-\frac{\pi}{4})^2\frac{-\cos(\frac{\pi}{4})}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\frac{\pi}{4})^2$$

$$\xrightarrow{h(x)=(x-\frac{\pi}{4})g(x)} h(x)=(x-\frac{\pi}{4})\cos x=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\frac{\pi}{4})^3}$$

$$\xrightarrow{E=(x-x_0)^3\frac{f'''(x)}{6}} E=(x-\frac{\pi}{4})^3\frac{\sin(c)}{6}\to |E|\le (x-\frac{\pi}{4})^3\frac{M}{6}\xrightarrow{M=1}|E|\le\frac{1}{6}(x-\frac{\pi}{4})^3$$

برای حل حد کافیست بعد از مخرج مشترک گیری، بسط تیلور توابع به دست آمده را در آن جایگذاری کنیم. بنابراین:

$$\to \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{(x-\frac{\pi}{4})\cos x}-\frac{1}{\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}-(x-\frac{\pi}{4})\cos x}{((x-\frac{\pi}{4})\cos x)(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2})}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4})+\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4})^2}{(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4}))(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{2})}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4})^2}{\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4})^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\frac{\pi}{4})^2}{\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4})^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$