باسمه تعالی

بارم‌بندی آزمون پایان‌ترم درس ریاضی عمومی ۱، بهار ۱۴۰۲

(بارم‌بندی‌ها بر مبنای راه‌حل‌های نوشته شده در صفحات بعدی این فایل است.)

سوال یک. (هم‌گرایی یا واگرایی سری $\sum \frac{1}{n^p + n}$.)

- ۵ نمره: همگرایی سری در حالت $p > 1$.
- ۵ نمره: واگرایی سری در حالت $p \leq 1$.

○ در صورت اشتباه در واگرایی یا هم‌گرایی سری در حالت $p = 1$ ۲ نمره از بخش دوم کسر می‌شود.

سوال دو. (انتگرال ناسره $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$.)

- ۵ نمره: محاسبه تابع اولیه $\frac{\ln x}{x^2}$.
- ۵ نمره: محاسبه حد $\frac{\ln R+1}{R}$ وقتی $R \to +\infty$ و محاسبه نهایی مقدار انتگرال

○ در صورت اثبات درست هم‌گرایی انتگرال بدون محاسبه مقدار، ۵ نمره تعلق می‌گیرد.

○ صرف اشاره به این که انتگرال هم‌گراست (بدون اثبات دقیق) نمره‌ای ندارد.

سوال سه. (تابع $\frac{x}{(1+x)^2}$، محاسبه انتگرال نامعین، انتگرال ناسره و سری تیلور)

هر بخش ۵ نمره دارد و در صورتی که جواب و راه حل درست ارائه شود به میزان درستی نمره تعلق می گیرد.

○ در بخش ب، صرف اشاره به واگرایی انتگرال (بدون اثبات) نمره‌ای ندارد.

○ در بخش پ، صرف اشاره به سری تیلور تابع $\frac{1}{1-x}$ بدون استفاده در محاسبه سری سایر توابع نمره‌ای، تعلق نمی‌گیرد.

○ در بخش پ، اگر صرفاً با محاسبه مشتق ضرایب چند جمله اول سری محاسبه شده باشد، در صورت درستی محاسبات حداکثر ۲ نمره تعلق می‌گیرد.

سوال چهار. (محاسبه حجم حاصل از دوران $y = \sqrt{1 + \cos^2 x}$.)

- ۲ نمره: نوشتن عبارت انتگرالی درست که حاصل آن حجم را می‌دهد.
- ۸ نمره: محاسبه تابع اولیه $\cos^2 x$ و محاسبه انتگرال معین و به دست آوردن مقدار درست حجم

سوال پنج. (تابع $\frac{2e^x}{1+x^2}$. اکیداً صعودی بودن، مشتق وارون و تحدب)

هر بخش ۵ نمره دارد و تنها درصورتی که کاملا درست نوشته شده باشد به میزان درستی نمره تعلق می گیرد.

باسمه تعالی

راه‌حل آزمون پایان‌ترم درس ریاضی عمومی ۱، بهار ۱۴۰۲

---

۱. با ذکر دلیل تعیین کنید برای کدام مقادیر حقیقی مثبت p، سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p + n}$ هم‌گرا و برای کدام مقادیر واگراست.

راه‌حل.

این سری برای هر $p > 1$ هم‌گرا و برای هر $p \leq 1$ واگراست.

ابتدا برای حالتی که $p > 1$، توجه کنید که برای هر n،

$$n^p < n^p + n \ \Rightarrow \ \frac{1}{n^p + n} < \frac{1}{n^p}$$

چون سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ برای $p > 1$ هم‌گراست، طبق آزمون مقایسه، سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p + n}$ نیز در این حالت هم‌گراست.

در حالتی که $p \leq 1$، $n^p \leq n$ و بنابراین

$$n^p + n \leq 2n \ \Rightarrow \ \frac{1}{n^p + n} \geq \frac{1}{2n}$$

در این حالت از آن‌جا که $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست، طبق آزمون مقایسه، نتیجه می‌گیریم سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p + n}$ نیز واگراست.

۲. نشان دهید انتگرال زیر هم‌گراست و مقدار آن را محاسبه کنید.

$$\int_{۱}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{۲}} \mathrm{d}x$$

راه‌حل.
به کمک روش جزء به جزء تابع اولیه $\frac{\ln x}{x^{۲}}$ را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور $u(x) = \ln x$ و $v(x) = \frac{-۱}{x}$ را در نظر می‌گیریم.

$$\int \frac{\ln x}{x^{۲}} \mathrm{d}x = \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{-\ln x}{x} + \int \frac{۱}{x^{۲}} \mathrm{d}x = \frac{-\ln x}{x} - \frac{۱}{x} + C$$

پس

$$\int_{۱}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{۲}} \mathrm{d}x = \Big(\lim_{R\to+\infty} \frac{-\ln R - ۱}{R}\Big) - \Big(\frac{-\ln ۱ - ۱}{۱}\Big) = \Big(\lim_{R\to+\infty} \frac{-\ln R - ۱}{R}\Big) + ۱$$

بنابراین برای محاسبه انتگرال باید حاصل حد $\lim_{R\to+\infty} \frac{-\ln R-۱}{R}$ را بیابیم. اما توجه کنید که $\lim_{R\to\infty} \frac{۱}{R} = ۰$ و حد $\lim_{R\to+\infty} \frac{\ln R}{R}$ طبق قاعده هوپیتال (ابهام $\frac{\infty}{\infty}$) برابر حد زیر است

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{\frac{۱}{R}}{۱} = ۰$$

کنار هم قرار دادن این محاسبات نتیجه می‌دهد انتگرال $\int_{۱}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{۲}} \mathrm{d}x$ هم‌گراست و مقدار آن برابر ۱ است.

توضیح. به عنوان یک راه حل جایگزین برای محاسبه تابع اولیه می‌توان با استفاده از تغییر متغیر (جانشانی) $x = e^{u}$ (معادلاً $u = \ln x$) انتگرال به فرم $\int ue^{-u}\mathrm{d}u$ تبدیل کرد و سپس در این فرم جدید به کمک روش جزء به جزء یا هر روش دیگری تابع اولیه را محاسبه کرد.

۳. تابع $f:\mathbb{R}-\{-۱\}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\dfrac{x}{(۱+x)^{۲}}$ را در نظر بگیرید.

الف) انتگرال نامعین $\int f(x)\mathrm{d}x$ را به دست آورید.

ب) آیا انتگرال $\int_{-۱}^{۱} f(x)\mathrm{d}x$ هم‌گراست؟ (در صورت هم‌گرایی نیازی به محاسبه مقدار انتگرال نیست.)

پ) سری تیلور تابع $f(x)$ حول $x=۰$ را به دست آورید.

راه‌حل.

الف) برای محاسبه انتگرال نامعین $f(x)$ را به صورت مجموع دو کسر با مخرج‌های $x+۱$ و $(۱+x)^{۲}$ می‌نویسیم که صورت‌های آن اعداد ثابت باشند.

$$\frac{x}{(۱+x)^{۲}}=\frac{A}{۱+x}+\frac{B}{(۱+x)^{۲}}=\frac{A(۱+x)+B}{(۱+x)^{۲}}=\frac{Ax+(A+B)}{(۱+x)^{۲}}$$

بنابراین ضریب x و ضریب ثابت در صورت کسر بالا باید با هم برابر باشند که نتیجه می‌دهد

$$A=۱,\ A+B=۰\ \Rightarrow\ A=۱,\ B=-۱$$

پس

$$\frac{x}{(۱+x)^{۲}}=\frac{۱}{۱+x}-\frac{۱}{(۱+x)^{۲}}$$

و در نتیجه

$$\int\frac{x}{(۱+x)^{۲}}\mathrm{d}x=\int\frac{۱}{۱+x}\mathrm{d}x-\int\frac{۱}{(۱+x)^{۲}}\mathrm{d}x=\ln|x+۱|+\frac{۱}{x+۱}+C$$

ب) طبق محاسبه بخش الف

$$\int_{-۱}^{۱}\frac{x}{(۱+x)^{۲}}\mathrm{d}x=\left(\ln|x+۱|+\frac{۱}{x+۱}\right)\Big|_{-۱}^{۱}=(\ln ۲+\frac{۱}{۲})-\lim_{x\to-۱^{+}}\left(\ln(x+۱)+\frac{۱}{x+۱}\right)$$

بنابراین هم‌گرایی انتگرال معادل وجود حد $\lim_{x\to-۱^{+}}\left(\ln(x+۱)+\frac{۱}{x+۱}\right)$ است. در ادامه به محاسبه این حد می‌پردازیم.

$$\lim_{x\to-۱^{+}}\ln(x+۱)+\frac{۱}{x+۱}=\lim_{x\to-۱^{+}}\frac{(x+۱)\ln(x+۱)+۱}{x+۱}$$

ابتدا حد صورت این کسر را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to-۱^{+}}(x+۱)\ln(x+۱)=\lim_{x\to-۱^{+}}\frac{\ln(x+۱)}{\frac{۱}{x+۱}}$$

که با استفاده از قاعده هوپیتال (ابهام $\frac{\infty}{\infty}$) مقدار حد بالا برابر حاصل حد زیر است.

$$\lim_{x\to-۱^{+}}\frac{\frac{۱}{x+۱}}{\frac{-۱}{(x+۱)^{۲}}}=-\lim_{x\to-۱^{+}}(x+۱)=۰$$

پس در مورد حد زیر صورت کسر به ۱ و مخرج کسر به ۰ میل می‌کند، پس کل کسر به بی‌نهایت میل می‌کند و بنابراین انتگرال هم‌گرا نیست. (در واقع با توجه به علامت صورت و مخرج کسر به $+\infty$ میل می‌کند.)

پ) سری تیلور تابع $\frac{۱}{۱-x}$ برابر

$$\sum_{n=۰}^{\infty} x^n = ۱ + x + x^۲ + x^۳ + \cdots$$

خواهد بود. دقت کنید

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{۱}{۱-x}) = \frac{۱}{(۱-x)^۲}$$

پس سری تیلور $\frac{۱}{(۱-x)^۲}$ با مشتق‌گرفتن از سری تیلور $\frac{۱}{۱-x}$ قابل محاسبه است و برابر سری زیر خواهد بود

$$\sum_{n=۰}^{\infty} nx^{n-۱} = ۱ + ۲x + ۳x^۲ + ۴x^۳ + \cdots$$

(این سری را می‌توان به صورت مستقیم با مشتق‌گرفتن از $\frac{۱}{(۱-x)^۲}$ یا استفاده از قاعده حاصل‌ضرب سری‌ها هم محاسبه کرد.)

در ادامه با قرار دادن $-x$ به جای x در عبارت بالا به سری $\frac{۱}{(۱+x)^۲}$ می‌رسیم.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} n(-۱)^{n-۱}x^{n-۱} = ۱ - ۲x + ۳x^۲ - ۴x^۳ + ۵x^۴ - ۶x^۵ + \cdots$$

در نهایت برای رسیدن به سری تیلور تابع $\frac{x}{(۱+x)^۲}$ کافی است سری تیلور بالا را در x ضرب کنیم که برابر زیر خواهد بود.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} n(-۱)^{n-۱}x^{n} = x - ۲x^۲ + ۳x^۳ - ۴x^۴ + ۵x^۵ - ۶x^۶ \cdots$$

توضیح. به عنوان راه‌حل دیگری برای بخش پ، می‌توان با استفاده از محاسبه قسمت الف که تابع اولیه f برابر $\frac{۱}{۱+x} + \ln(x+۱)$ به دست آمده است، ابتدا سری $\frac{۱}{۱+x} + \ln(x+۱)$ را محاسبه کرد و سپس با مشتق گرفتن به سری $f(x)$ رسید.

۴. ناحیه مسطح محدود به منحنی $y = \sqrt{۱ + \cos^۲ x}$ و محور x که بین خط‌های $x = \frac{-\pi}{۲}$ و $x = \frac{+\pi}{۲}$ واقع شده را حول محور x دوران می‌دهیم. حجم ناحیه حاصل چه قدر است؟

راه‌حل.
حجم مورد نظر برابر حاصل انتگرال زیر است.

$$\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{+\frac{\pi}{۲}} \pi\big(\sqrt{۱ + \cos^۲ x}\big)^۲ \mathrm{d}x = \pi \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{+\pi}{۲}} (۱ + \cos^۲ x)\mathrm{d}x$$

برای محاسبه انتگرال $\cos^۲ x$ توجه کنید که $\cos(۲x) = ۲\cos^۲ x - ۱$ و بنابراین $\cos^۲ x = \frac{۱}{۲}(۱ + \cos(۲x))$.
پس

$$\int \cos^۲ x \ \mathrm{d}x = \int \frac{۳}{۲}\mathrm{d}x + \frac{۱}{۲}\int \cos(۲x)\mathrm{d}x = \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۴}\sin(۲x) + C$$

و بنابراین

$$\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{+\pi}{۲}} \cos^۲ x \ \mathrm{d}x = \Big(\frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۴}\sin(۲x)\Big)\Big|_{-\frac{\pi}{۲}}^{+\frac{\pi}{۲}} = \Big(\frac{۱}{۲}\pi + \frac{۱}{۴}(\sin\pi - \sin(-\pi)\Big) = \frac{۱}{۲}\pi.$$

در نتیجه

$$\text{حجم مورد نظر} = \pi \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{+\pi}{۲}} (۱ + \cos^۲ x)\mathrm{d}x = \underbrace{\pi \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{+\pi}{۲}} ۱\mathrm{d}x}_{\pi^۲} + \underbrace{\pi \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{+\pi}{۲}} \cos^۲ x\mathrm{d}x}_{\frac{۱}{۲}\pi^۲} = \frac{۳}{۲}\pi^۲.$$

۵. الف) ثابت کنید تابع $f(x)=\frac{۲e^x}{x^۲+۱}$ تابعی اکیداً صعودی است.

ب) شیب خط مماس به نمودار وارون این تابع در نقطه $(۲,۰)$ را بیابید.

پ) ثابت کنید تابع $f(x)$ روی دامنه $x>۱$ تابعی محدب تعریف می‌کند.

راه‌حل.

الف) برای بررسی اکیداً صعودی بودن تابع علامت مشتق اول آن را بررسی می‌کنیم.

$$f'(x)=\frac{۲e^x(x^۲+۱)-۲x(۲e^x)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۲e^x(x^۲+۱-۲x)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۲e^x(x-۱)^۲}{(x^۲+۱)^۲}$$

به وضوح برای هر مقدار حقیقی x، $f'(x)\geq ۰$ پس تابع صعودی است. برای بررسی اکیداً صعودی بودن تابع، توجه کنید که مشتق f روی بازه‌های $(-\infty,۱)$ و $(۱,+\infty)$ اکیداً مثبت است. این نتیجه می‌دهد f روی بازه‌ها $(-\infty,۱]$ و $[۱,+\infty)$ اکیداً صعودی است و بنابراین در کل $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

ب) اگر وارون تابع را با نماد $f^{-۱}$ نمایش دهیم، طبق قضیه مشتق تابع وارون داریم

$$(f^{-۱})'(۲)=(f^{-۱})'(f(۰))=\frac{۱}{f'(۰)}$$

با توجه به محاسبه مشتق در بخش الف، $f'(۰)=۲$ و لذا $(f^{-۱})'(۲)=\frac{۱}{۲}$. این نتیجه می‌دهد که شیب خط مماس بر نمودار $f^{-۱}$ در نقطه $x=۲$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

پ) کافی است نشان دهیم مشتق دوم تابع برای هر $x>۱$ مثبت است.

$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{۲e^x\big((x-۱)^۲+۲(x-۱)\big)(x^۲+۱)^۲-۲\times ۲x(x^۲+۱)۲e^x(x-۱)^۲}{(x^۲+۱)^۴}\\&=\frac{۲e^x}{(x^۲+۱)^۳}\big(x^۴-۴x^۳+۸x^۲-۴x-۱\big)\end{aligned}$$

چون e^x و $x^۲+۱$ همیشه مثبت هستند، کافی است ثابت کنیم برای هر $x>۱$، $x^۴-۴x^۳+۸x^۲-۴x-۱>۰$. برای سادگی ادامه محاسبات از نماد $g(x)$ برای این چندجمله‌ای درجه ۴ استفاده می‌کنیم.

$$g(x)=x^۴-۴x^۳+۸x^۲-۴x-۱.$$

به وضوح $g(۱)=۰$. با محاسبه مشتق

$$\begin{aligned}g'(x)&=۴x^۳-۱۲x^۲+۱۶x-۴\\g''(x)&=۱۲x^۲-۲۴x+۱۶=۱۲(x-۱)^۲+۴\end{aligned}$$

چون برای هر x، $g''(x)>۰$ تابع $g'(x)$ خود تابعی اکیداً صعودی است و چون $g'(۱)=۴$، برای هر $x>۱$، $g'(x)>g(۱)>۰$. این نتیجه می‌دهد g برای $x>۱$ تابعی اکیداً صعودی است و لذا $g(x)>g(۱)=۰$.

مثبت بودن $g(x)$ برای $x > ۱$ همان طور که در ابتدای راه‌حل اشاره کردیم نتیجه می‌دهد $f''(x) > ۰$ و بنابراین f روی دامنه $x > ۱$ تابعی محدب است.

توضیح. در بخش پ، می‌توان از روش‌های دیگری هم برای مثبت بودن $x^۴ - ۴x^۳ + ۸x^۲ - ۴x - ۱$ در دامنه $x > ۱$ استفاده کرد، برای مثال، با توجه به تساوی زیر

$$g(x) = x^۴ - ۴x^۳ + ۸x^۲ - ۴x - ۱ = (x - ۱)^۴ + ۲(x^۲ - ۱)$$

اگر $x > ۱$، $g(x)$ مجموع دو عبارت مثبت است و در نتیجه خود مثبت است.