



راهسازی

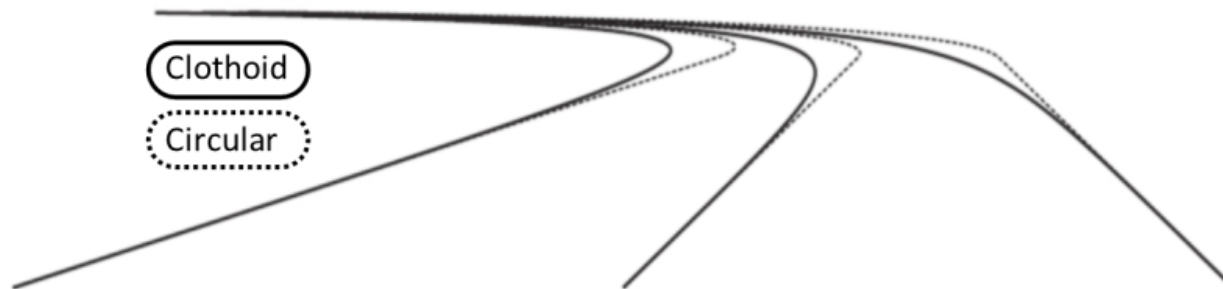
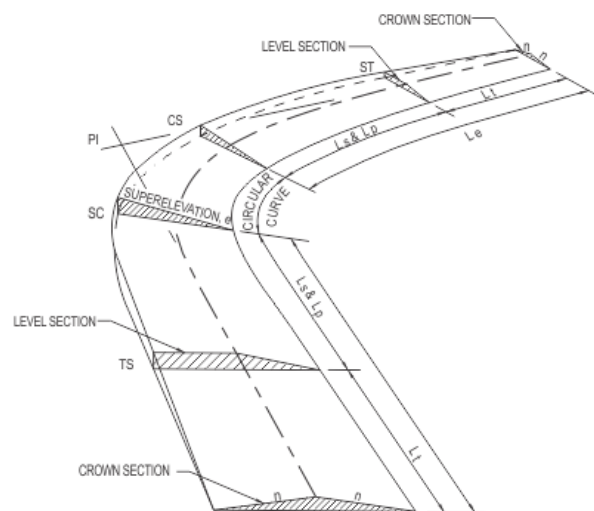
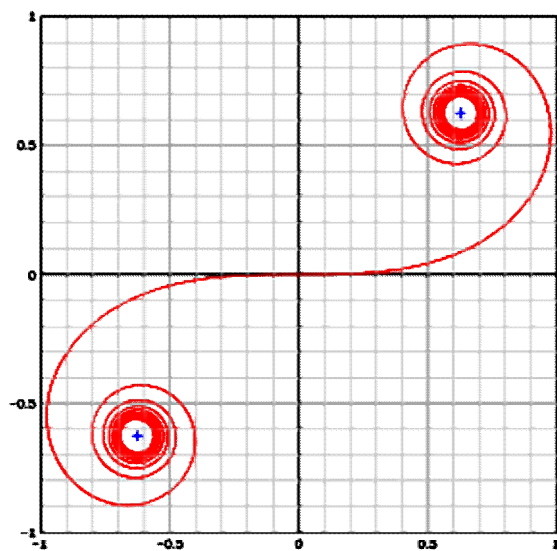
نیمسال اول 95-96

دانشگاه الزهراء (س)

محمد احمدی

فصل 5: قوس های افقی (بخش دوم)

قوس های پیوندی



قوس کلوتوئید

۴-۳-۱- تعریف

۱ یک قوس کلوتوئید یک منحنی اتصال تدریجی است که شعاع آن از بینهایت (شعاع) خط راست تا صفر (شعاع نقطه) تغییر می‌نماید. بهمین خاطر به منحنی کلوتوئید، حلزون یا مارپیچ نیز گفته می‌شود. در طرح هندسی راه معمولاً شاخه‌ای از کلوتوئید از شعاع بینهایت تا شعاع R مورد استفاده قرار می‌گیرد. هر چه طول کلوتوئید بزرگتر باشد، میزان تغییر در شعاع نقاط مختلف جزئی‌تر است. قوسهای کلوتوئید معمولاً برای اتصال سایر قوسها به مسیر راه مورد استفاده قرار می‌گیرند. آنها می‌توانند بصورت کلوتوئید دویل، کلوتوئید معکوس و یا C شکل نیز به یکدیگر متصل گردند، از مهمترین موارد کاربرد قوس کلوتوئید استفاده از آن بصورت اتصال کلوتوئید - دایره - کلوتوئید در طرح هندسی جاده‌ها می‌باشد.

۴-۳-۲- معادلات کلی کلوتوئید

در هنگام حرکت یک وسیله نقلیه در قوس مقدار نیروی گریز از مرکز مؤثر بر وسیله نقلیه از معادله زیر به دست می‌آید.

در این رابطه r شعاع انحنا در هر نقطه از مسیر می‌باشد $P = \frac{WV^2}{gr}$ با توجه به اینکه مقادیر وزن وسیله نقلیه و شتاب ثقل ثابت می‌باشند بنابراین اگر سرعت طراحی قوس نیز ثابت در نظر گرفته شود با افزایش یا کاهش شعاع، مقدار نیروی گریز از مرکز به ترتیب کاهش یا افزایش خواهد یافت. در ابتدای قوس کلوتوئید ($l = 0$)، مقدار شعاع کلوتوئید برابر شعاع خط راست یعنی بینهایت می‌باشد. با افزایش طول کلوتوئید به تدریج شعاع کلوتوئید کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش طول کلوتوئید نیروی گریز از مرکز افزایش می‌یابد. بنابراین

$$P \approx \frac{wv^2}{rg}$$

$$l \approx \frac{wv^2}{rg} \text{ و } P \approx 1$$

ثابت $w, v, g =$

(لذا خواهیم داشت) $l \approx \frac{1}{r}$

بنابراین

$$l \times r = R \times L = \text{ثابت} = A^2 \quad (1)$$

A	پارامتر کلوتوئید
L	طول کل کلوتوئید
R	شعاع مقطع انتهایی کلوتوئید
l	طول کلوتوئید در هر نقطه دلخواه
r	شعاع کلوتوئید در هر نقطه دلخواه

در این رابطه

می‌باشد.

شکل ۴-۱۱ اجزای یک قوس کلوتوئید را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل قراردادهای کلی زیر در مورد معرفی اجزای کلوتوئید بکار می‌رود.

T = نقطه ابتدایی قوس کلوتوئید

TA = مماس اصلی

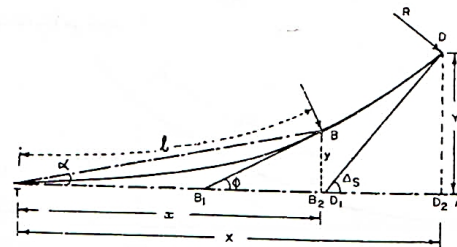
D = نقطه برخورد کلوتوئید به دایره

B = نقطه دلخواه روی کلوتوئید به فاصله l از ابتدای آن

r = شعاع در مقطع B

ϕ = شیب مماس به کلوتوئید در نقطه دلخواه B نسبت به مماس ابتدایی

α = زاویه انحراف کلوتوئید در نقطه دلخواه B



شکل ۴-۱۱ اجزای یک قوس کلوتوئید

۴-۳-۳- نمایش کارترین قوس کلوتوئید

برای این منظور مماس ابتدایی قوس را به عنوان محور x ها و محور عمود بر آن را به عنوان محور y ها در نظر می گیریم. برای محاسبه مقادیر x و y در هر مقطع از قوس بصورت زیر عمل می کنیم. فرض کنید که کمان BC را در فاصله ای به اندازه l روی قوس جدا نماییم.

ϕ ، زاویه بین مماس BB_1 و مماس ابتدایی TA می باشد.

$\phi + \delta\phi$ ، زاویه بین مماس CC_1 و مماس ابتدایی TA است.

مقادیر x و y نسبت به نقطه مرکزی B محاسبه می شود.

$$\frac{dx}{dl} = \cos \phi$$

$$dx = \cos \phi \cdot dl$$

با استفاده از بسط تیلور خواهیم داشت:

$$dx = dl \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \dots \right)$$

$$L = K\sqrt{\phi}$$

$$dl = \frac{K}{2\phi^{1/2}} d\phi$$

$$dx = \frac{K}{2} \left(\phi^{-1/2} - \frac{\phi^{3/2}}{2!} + \frac{\phi^{5/2}}{4!} - \dots \right) d\phi$$

با انتگرال گیری از رابطه فوق نتیجه می شود که:

$$x = k \left(\phi^{1/2} - \frac{\phi^{5/2}}{10} + \frac{\phi^{9/2}}{216} - \dots \right)$$

$$x = k\phi^{1/2} \left(1 - \frac{\phi^2}{10} + \frac{\phi^4}{216} - \dots \right)$$

$$x = l \left(1 - \frac{\phi^2}{10} + \frac{\phi^4}{216} - \dots \right)$$

$$\phi = \frac{L^2}{K^2}$$

از طرفی داریم:

بنابراین:

$$x = l \left(1 - \frac{l^2}{10k^2} + \frac{l^4}{216k^4} - \dots \right)$$

$\Delta S = \phi_d$ = شیب مماس به کلوتوئید در انتهای قوس نسبت به مماس ابتدایی

$l =$ فاصله روی قوس از T تا B

$A =$ پارامتر قوس کلوتوئید

با توجه به خصوصیت کلوتوئید داریم

$$lr = LR = \text{ثابت}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{RL}$$

$$\frac{1}{r} = \text{انحناء} = \frac{d\phi}{dL}$$

$$\frac{d\phi}{dL} = \frac{1}{RL} \Rightarrow d\phi = \frac{ldL}{RL}$$

$$\phi = \frac{l^2}{2RL} + C \rightarrow \text{انتگرال گیری}$$

$$l = 0 \text{ و } \phi = 0$$

$$C = 0 \rightarrow \text{پس}$$

$$\phi = \frac{l^2}{2RL}$$

(۲)

$$\phi_d = \Delta S = \frac{L}{rR}$$

$l = L$ می باشد بنابراین:

رابطه (۲) یک رابطه اصلی در مورد قوس های کلوتوئید است. رابطه فوق را به صورت زیر نیز می توان نمایش داد.

$$l = \sqrt{2RL\phi} = K\sqrt{\phi} \quad (۳)$$

با استفاده از روابط (۲) و (۳) داریم.

$$\frac{\phi}{\phi_d} = \left(\frac{1}{L} \right)^2$$

(۴)

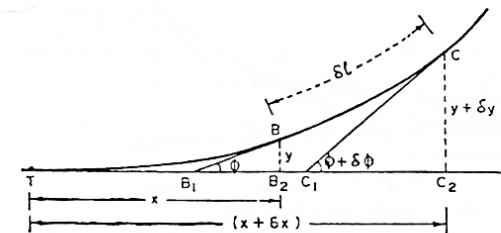
$$K = \sqrt{2RL}$$

$$A = \frac{K}{\sqrt{2}}$$

$$A = \sqrt{RL}$$

(۵)

A پارامتر کلوتوئید نامیده می شود.



شکل ۴-۱۲
منحنی کلوتوئید
در مختصات کارترین

$$\Rightarrow \phi = 24^{\circ} 5' 41''$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\phi}{3} = 8^{\circ} 1' 5''$$

با جای‌گذاری مقادیر ϕ در معادله ۲ داریم:

$$r_{\min} = \frac{1}{\sqrt{12M \sin(24^{\circ} 5' 41'') \cos^5(24^{\circ} 5' 41'')}} \quad (10)$$

$$r_{\min} = \frac{1}{1/762\sqrt{M}}$$

$$r_{\min} = 1/39\sqrt{RL} \quad (11)$$

بنابراین انحنای قوس سهمی درجه سه در ابتدا از $\phi = 0$ به تدریج افزایش پیدا می‌کند تا در زاویه $\phi = 24^{\circ} 5' 41''$ شعاع انحنای آن برابر $r = 1/39\sqrt{RL}$ می‌شود. با توجه به این نکته که بعد از این مقطع شعاع انحناء شروع به افزایش می‌کند به این دلیل بعد از مقطع فوق، دیگر منحنی برای اتصال کاربردی نخواهد داشت.

یکی از مهمترین موارد کاربرد قوس کلوئید بصورت قوس سهمی درجه ۳ باشد که برای تقاطع‌های ۱۲° به پایین به کار می‌رود. مزیت این نوع قوس در ساده بودن روابط و همچنین نیاز نداشتن به جدول پیاده کردن در هنگام اجرا می‌باشد. همچنین در زوایای کوچک مقدار اختلافی که به سبب تقریب به کار گرفته شده ایجاد می‌شود، بسیار ناچیز است. اما باید توجه نمود که در زوایای بزرگ این میزان خطا بیشتر می‌گردد.

$$k = \sqrt{2RL}$$

$$x = l(1 - \frac{l^2}{40R^2L^2} + \frac{l^4}{3456R^4L^4} - \dots) \quad (5)$$

به همین طریق در مورد y نیز می‌توان نوشت:

$$\frac{dy}{dl} = \sin \phi$$

$$dy = dl \sin \phi$$

$$dy = dl (\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \dots)$$

$$dl = \frac{k}{2\phi^{1/2}}$$

پس داریم

$$dy = \frac{k}{2} (\phi^{1/2} - \frac{\phi^{5/2}}{6} + \frac{\phi^{9/2}}{120} - \dots)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه فوق خواهیم داشت:

$$y = k(\frac{\phi^{3/2}}{3} - \frac{\phi^{7/2}}{42} + \frac{\phi^{11/2}}{1320} - \dots)$$

$$y = k \phi^{1/2} \frac{\phi}{3} (1 - \frac{\phi^2}{14} + \frac{\phi^4}{440} - \dots)$$

با قرار دادن مقدار $k\phi^{1/2} = 1$ داریم:

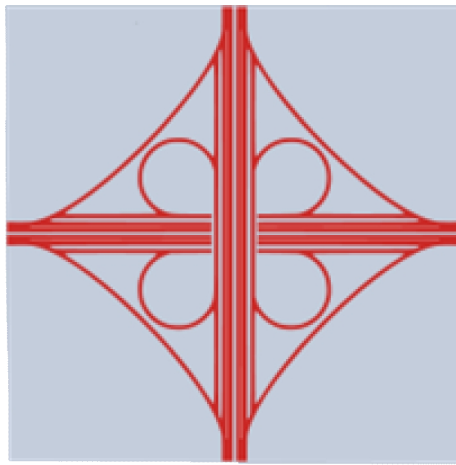
$$y = \frac{l^3}{3k^2} (1 - \frac{\phi^2}{14} + \frac{\phi^4}{440} - \dots)$$

$$\phi = \frac{l^2}{k^2}$$

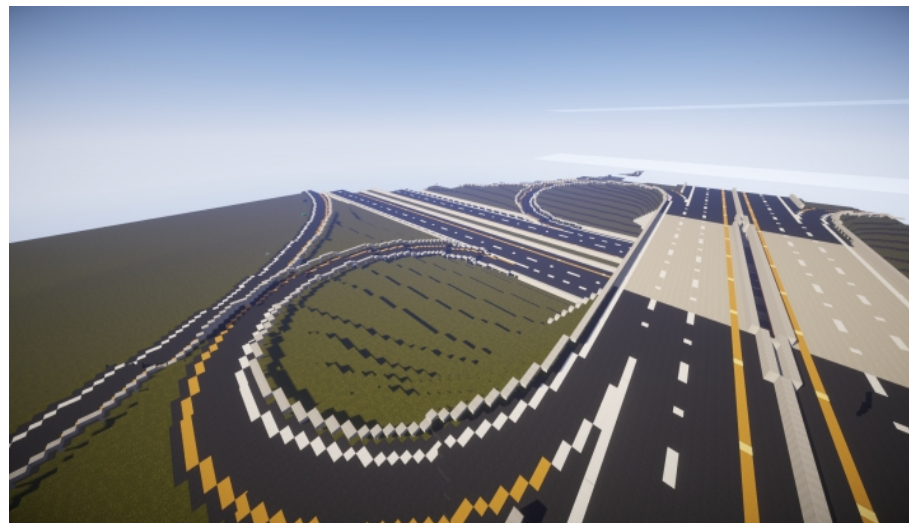
$$y = \frac{l^3}{3k^2} (1 - \frac{l^2}{14k^2} + \frac{l^4}{440k^4} - \dots)$$

$$y = \frac{l^3}{6RL} (1 - \frac{l^2}{56R^2L^2} + \frac{l^4}{4032R^4L^4} - \dots) \quad (6)$$

فرمول‌های بدست آمده برای x و y پیچیده می‌باشد. می‌توان با کمی تقریب فرمول‌های ساده‌تری به دست آورد که در ادامه آمده است.



قوس های شبدری

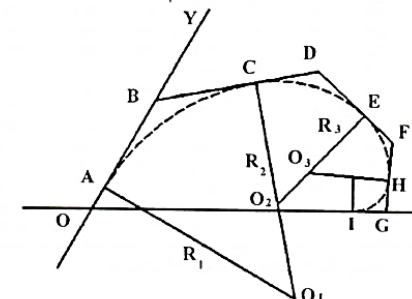


۴-۴-۱- تعریف

قوس‌های شبدری در واقع یک قوس مرکب n مرکزی دایره‌ای و یا قسمتی از یک قوس لیمنسکات است که شکل آنها شبیه به برگ گیاه شبدر می‌باشد. لذا بدین لحاظ این قوس شبدری نامیده می‌شود، قوس‌های شبدری معمولاً در تقاطع‌های غیرهمسطح و برای اتصال راه‌های ورود و خروج شیب‌راه‌های متصل به این تقاطع‌ها به راه‌های مرتفع‌تر و یا پایین‌تر از آنها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۴-۴-۲- قوس شبدری دایره‌ای

همان‌طوری‌که ذکر شد این نوع اتصال یک قوس مرکب دایره‌ای n مرکزی می‌باشد و روش طراحی آن معمولاً از طریق آزمون و خطا صورت می‌پذیرد. در شکل ۴-۱۴ طریقه‌ی ترسیم اتصال شبدری بوسیله‌ی قوس‌های مرکب دایره‌ای به نشان داده شده است. فرض کنید هدف اتصال دو جاده غیرهمسطح در امتداد محورهای X و Y می‌باشد. ابتدا بر روی محور Y به اندازه‌ی طول دلخواه OA جدا می‌کنیم.



شکل ۴-۱۴- طریقه ترسیم قوس شبدری دایره‌ای

- پاره خط BC را با زاویه‌ی دلخواه α_1 نسبت به محور Y رسم می‌کنیم و بر روی آن پاره خط BC را به اندازه AB جدا می‌نماییم.
 سپس به اندازه‌ی دلخواه CD بعد از نقطه‌ی C و در امتداد پاره خط BC مقدار CD را جدا می‌کنیم.
 - پاره خط DE را با زاویه‌ی دلخواه α_2 نسبت به خط BD به اندازه‌ی CD رسم می‌کنیم.
 - پاره خط DE را به اندازه دلخواه EF امتداد می‌دهیم.
 - از نقطه F یک پاره خط با زاویه‌ی دلخواه α_4 رسم می‌کنیم. همان‌طوری‌که در شکل ۴-۱۴ دیده می‌شود این خط محور X را در نقطه‌ی G قطع می‌نماید.
 - پاره خط FH را بر روی خط FG به اندازه طول EF جدا می‌نماییم.
 - به اندازه GH از نقطه G روی محور X جدا می‌کنیم.
 - حال می‌توانیم نقاط A, C, E, H, I را بوسیله‌ی کمان‌های دایره‌ای به هم متصل می‌کنیم. دقت نمایید که پاره خط‌های $(AB = BC)$ و $(CD = DE)$ و $(EF = FG)$ و $(GH = GI)$ طول مماس‌های این کمان‌ها هستند.
 همچنین نقاط O_1, O_2, O_3, O_4 مرکز این کمان‌ها (AC, CB, EH, HI) و R_1, R_2, R_3, R_4 شعاع آنها می‌باشند.
 باید توجه نمود که در این مثال توضیحی قوس شبدری فوق یک قوس مرکب چهار مرکزی می‌باشد.

۴-۴-۳- قوس‌های شبدری ارتباطی^۱

در این نوع اتصال شبدری هیچ‌گونه قوس دایره‌ای بکار نمی‌رود. توجه شود که این نوع قوس‌ها بیشتر در راه‌آهن مورد استفاده قرار می‌گیرند. باین حال در طراحی جاده‌ها و شیب‌راه‌های تقاطع‌های غیرهمسطح نیز این قوس مورد استفاده قرار می‌گیرد. قوس شبدری ارتباطی که در واقع یک قوس لیمنسکات برنولی می‌باشد دارای مزایای زیر است.

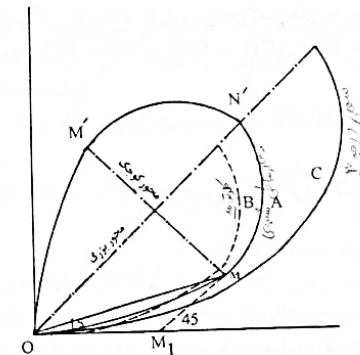
- ۱- شعاع انحنا آن بصورت تدریجی کاهش می‌یابد.
 - ۲- درجه افزایش انحنا قوس همانند قوس کلوئوئید به نحوی است که می‌توان شرایط ایده‌آل را برای هر وضعیت اتصال به راحتی برآورده ساخت.
 - ۳- آزادی کامل را برای گردش اتومبیل‌ها ایجاد می‌کند.
- شکل ۴-۱۵ انواع قوس‌های اتصال را نشان می‌دهد. در این شکل قوس OA یک قوس شبدری ارتباطی است، OB یک قوس کلوئوئید و OC یک قوس سهمی درجه ۳ می‌باشد. برای

1 - Bernoullis Lemniscate

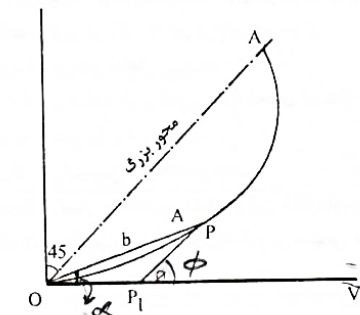
تقاطع‌های با زوایای کوچک تفاوت بسیار کمی بین اشکال این سه نوع قوس وجود دارد. ولی برای زوایای بزرگتر سهمی درجه ۳ بزرگتر از سایر قوسها است. اصولاً قوس سهمی درجه سه زمانی که به مینیم شعاع خود می‌رسد زاویه انحرافی برابر $\phi = 24^\circ 6'$ را داراست و بعد از این مقطع شروع به افزایش شعاع انحنا می‌کند. قوس کلوئوئید و قوس ارتباطی تقریباً تا زاویه انحراف 60° برهم منطبقند. ولی برای زوایای بیشتر از این مقدار، شعاع انحنا قوس ارتباطی بزرگتر از قوس کلوئوئید می‌باشد.

در زاویه انحراف 135° شعاع انحنا قوس ارتباطی در حالت مینیم می‌باشد و بعد از این مقطع، شعاع انحنا قوس افزایش می‌یابد.

در شکل ۴-۱۶ اجزای یک نمونه از قوس شبدری ارتباطی نشان داده شده است.



شکل ۴-۱۵ - انواع قوس‌های ارتباطی مختلف



شکل ۴-۱۶ - قوس شبدری ارتباطی (لینسکات برنولی)

با توجه به شکل ۴-۱۶ فاکتورهای زیر در محاسبات قوس ارتباطی به کار می‌روند.

OV - مماس پایه

OA - خط میانه قوس

P - یک مکان دلخواه روی قوس

P₁P - مماس به قوس در نقطه P

ϕ - زاویه انحراف زاویه بین مماس P₁P و تانژانت پایه

b - طول OP

α - زاویه بین OP و مماس پایه

θ - زاویه بین OP و مماس در مقطع P

معادله‌ی اساسی در قوس‌های شبدری ارتباطی به صورت زیر است:

$$b = k\sqrt{\sin 2\alpha} \quad (1)$$

رابطه‌ی مهم دیگر در این نوع قوس‌ها بدین صورت است که:

$$\tan \theta = b \frac{d\alpha}{db} \quad (2)$$

حال با مشتق‌گیری از رابطه (۱) و استفاده از رابطه (۲) خواهیم داشت:

$$\frac{db}{d\alpha} = \frac{k \cos 2\alpha}{\sqrt{\sin 2\alpha}}$$

$$\tan \theta = k\sqrt{\sin 2\alpha} \frac{\sqrt{\sin 2\alpha}}{K \cos 2\alpha}$$

$$\tan \theta = \tan 2\alpha$$

$$\theta = 2\alpha \quad (3)$$

$$\phi = \alpha + \theta = 3\alpha \quad (4)$$

پس برای قوس‌های ارتباطی زاویه انحراف معادل با سه برابر زاویه پخ می‌باشد. به‌طور

تقریبی این رابطه در مورد قوسهای سهمی درجه‌ی سوم و کلوئوئید نیز صادق است.

رابطه (۴) یک مشخصه‌ی مهم در قوسهای ارتباطی می‌باشد.

شعاع انحنا r در هر نقطه از قوس از معادله کلی زیر به دست می‌آید:

$$r = \frac{[b^2 + (\frac{db}{dx})^2]^{3/2}}{[b^2 + 2(\frac{db}{dx})^2 + b \frac{d^2b}{dx^2}]} \quad (5)$$

در مواردی که زوایا بسیار کوچک هستند می توانیم به صورت زیر عمل کنیم.

$$L = r\alpha \quad (\alpha \text{ بر حسب رادیان}) \quad (11)$$

$$L = \frac{r\alpha}{9/55} \quad (\alpha \text{ بر حسب درجه}) \quad (12)$$

با توجه به رابطه

$$r = \frac{k}{3\sqrt{\sin^2 \alpha}}$$

با افزایش α مقادیر r کاهش می یابد.

حال زمانی که $\alpha_{\max} = 45^\circ$ باشد، داریم $ON = \frac{1}{3} = \frac{k}{3}$ یعنی مقدار حداقل شعاع انحناء برابر با $\frac{1}{3}$ طول خط میانه قوس است.

α	k	α	k
5°	۰/۱۹۱	30°	۰/۱۷۳
10°	۰/۱۸۷	45°	۰/۱۶۸
15°	۰/۱۸۴	40°	۰/۱۶۳
20°	۰/۱۸۱	45°	۰/۱۵۹
25°	۰/۱۷۷		

جدول ۴-۴ - مقادیر متناظر K و α برای قوسهای شبدری ارتباطی

مثال یک: زاویه برخورد بین دو مسیر مستقیم یک جاده 60° است در این تقاطع قوس ارتباطی به کار رفته است شعاع انحناء حداقل این قوس برابر ۱۰۰ متر می باشد. فاکتورهای اساسی این قوس را پیدا کنید.

حل: با توجه به شکل ۴-۱۷ داریم

$$\Delta = 60^\circ$$

$$\hat{A}VM = 90^\circ - \frac{\Delta}{2} = 60^\circ$$

$$\hat{V}AM = \phi = \frac{\Delta}{2} = 30^\circ$$

$$\hat{V}T_1M = \alpha_n = \frac{\phi}{3} = 10^\circ$$

$$T_1\hat{M}V = 90^\circ + 2\alpha_n = 110^\circ$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{K \cos^2 \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha}}$$

$$\frac{d^2b}{dx^2} = -\frac{K}{(\sin^2 \alpha)^{3/2}} (1 + \sin^2 \alpha)$$

با جاگذاری رابطه (۶) در رابطه (۵) داریم:

$$r = \frac{[K^2 \sin^2 \alpha + \frac{K^2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}]^{-3/2}}{[K^2 \sin^2 \alpha + 2 \frac{K^2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - K \sqrt{\sin^2 \alpha} \frac{K}{(\sin^2 \alpha)^{3/2}} (1 + \sin^2 \alpha)]}$$

با ساده کردن رابطه فوق خواهیم داشت:

$$r = \frac{K}{3\sqrt{\sin^2 \alpha}} \quad (7)$$

$$k = \frac{b}{\sqrt{\sin^2 \alpha}}$$

$$r = \frac{b}{3\sqrt{\sin^2 \alpha}} \quad (8)$$

$$k = 3r \sqrt{\sin^2 \alpha}$$

$$k = 3r \frac{b}{k}$$

$$k = \sqrt{3br}$$

همچنین اگر L بیانگر طول قوس متناسب با زاویه انحراف ϕ باشد، خواهیم داشت:

$$\frac{dl}{d\phi} = r \frac{k}{3\sqrt{\sin^2 \alpha}}$$

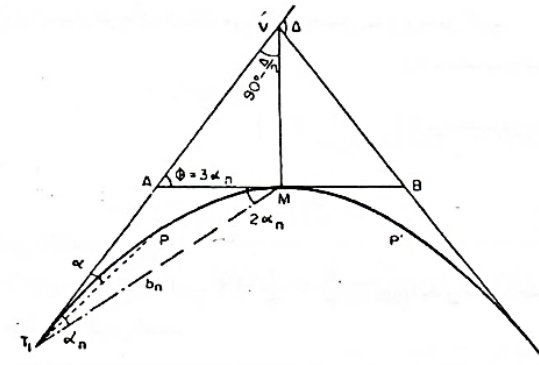
با انتگرال گیری داریم

$$L = \frac{k}{\sqrt{3}} \left(2 \tan^{1/2} \alpha - \frac{1}{5} \tan^{5/2} \alpha + \frac{1}{15} \tan^{7/2} \alpha - \frac{5}{104} \tan^{9/2} \alpha + \dots \right) \quad (9)$$

سری رابطه (۹) بسیار طولانی و محاسبه آن وقت گیر می باشد، این رابطه می تواند با کمی تقریب به صورت زیر ساده گردد:

$$L = \frac{2k\alpha}{\sqrt{3}} \cdot \cos K\alpha = 6r\alpha \sqrt{\cos \alpha} \cdot \cos^2 K\alpha \quad (10)$$

در رابطه فوق K یک ضریب می باشد که مقادیر آن متناسب با α تغییر می کند در جدول ۴-۴ مقادیر متناظر K و α آمده است.



شکل ۴-۱۷ - مختصات قوس ارتباطی شبدری مثال یک

داریم،

$$K = r r \sqrt{\sin 2\alpha}$$

$$r = R = 10.5 \quad \alpha = \alpha_n = 10^\circ$$

$$\Rightarrow k = 175/5$$

بنابراین:

$$b = k \sqrt{\sin 2\alpha} = 175/5 \sqrt{\sin 20^\circ} \quad (13)$$

$$b_n = T_1 M = 175/5 \sqrt{\sin 20^\circ} = 102/6 m$$

همچنین برای محاسبه $T_1 V$ داریم:

$$T_1 V = T_1 M \frac{\sin 110^\circ}{\sin 60^\circ} = 102/6 \frac{\sin 110^\circ}{\sin 60^\circ} = 111/3 m$$