

به نام حضرت دوست

(۱)

الف) اگر در هر تورنمنت تعداد یال های ورودی به هر راس را با  $L_i$  و تعداد یال های خروجی را با  $w_i$  نشان دهیم؛ ثابت کنید:

$$\sum W^2 = \sum L^2$$

ب) شرط لازم و کافی روی  $n$  را بیابید که هر تورنمنت قویا همبند  $n$  راسی شامل راسی باشد که پس از حذف آن نیز قویا همبند باشد.

ج) گراف  $n$  راسی  $G$  را در نظر بگیرید برای هر راس مانند  $v$  عکسی از  $G-v$  به شما داده خواهد شد، آیا میتوانید از این  $n$  عکس تشخیص دهید گراف دوبخشی است یا خیر؟

(۲)

الف) اگر  $1 < \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < \binom{n}{k}$ ؛ ثابت کنید  $R(k, k) < n$  (اگر اعداد رمزی را نمیشناسید از سرچ اینترنتی استفاده کنید)

ب) امید ریاضی تعداد بار هایی که نیاز است سکه را پرتاب کنیم تا  $n$  بار عوض شود (حاصل پرتاب با پرتاب قبلی فرق کنید) را بیابید

(۳)

مربع لاتین با اندازه  $n$  در نظر بگیرید؛ ثابت کنید میتوان  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  از خانه های آن ها را انتخاب کرد که هیچ کدام هم سطر یا هم ستون نباشند و برای هر  $1 \leq i \leq n$ ؛ حداکثر دوبار انتخاب شده باشد.