

یادداشت جلسه‌ی ششم

- برای مطالعه‌ی دقیق‌تر تعاریف و یا حل کردن مسائل بیشتر حتماً به یک کتاب مرجع مراجعه کنید.
- چند سؤال آموزشی، اضافه بر سؤالاتی که در کلاس مطرح شد آمده تا برای تمرین بیشتر حل کنید.

نظریه گراف:

منفی یک) ثابت کنید مجموع درجات راس‌ها در هر گراف دو برابر تعداد یال‌های گراف است، یعنی

$$\sum d(v_i) = 2|E|$$

صفر) در هر گراف، زوج راس با درجه‌ی فرد وجود دارد.

یک) ثابت کنید تعاریف زیر (برای درخت) هم ارز هستند.

- ۱- گراف همبند و بدون دور.
- ۲- گراف $n-1$ یالی و بدون دور.
- ۳- گراف $n-1$ راسی و همبند.
- ۴- گرافی که در آن بین هر دو راس u و v دقیقاً یک مسیر یکتا وجود دارد.

دو)

- الف- ثابت کنید هر درخت با دست کم ۲ راس، حداقل ۲ راس درجه یک (برگ) دارد.
- ب- ثابت کنید درخت T با ماکسیمم درجه‌ی Δ ، دست کم Δ تا برگ دارد.

سه) ثابت کنید هر گشت بسته به طول فرد شامل یک دور فرد می‌شود.

چهار) قضیه‌ی هاول حکیمی را ثابت کنید.

قضیه‌ی هاول- حکیمی می‌گوید دنباله‌ی $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \dots \leq d_n$ گرافیک است اگر و تنها اگر دنباله‌ی $d_1, d_2, \dots, d_{n-d_n-1}, d_{n-d_n+1}-1, d_{n-d_n+2}-1, \dots, d_{n-1}-1$ (دنباله‌ای که با کم کردن ۱ واحد از $\Delta = d_n$ عضو آخر دنباله پس از حذف d_n به دست می‌آید).

پنج) هر گراف کامل جهت‌دار n راسی را یک تورنمنت n راسی می‌گوییم. در یک تورنمنت پادشاه راسی است به هر راس دیگر مسیر جهت‌دار حداکثر به طول ۲ دارد.

الف- ثابت کنید هر تورنمنت n راسی دست کم یک پادشاه دارد.

ب- ثابت کنید یک تورنمنت نمی‌تواند دقیقاً دو پادشاه داشته باشد.

شش) تعداد گراف‌های همبند n راسی بیشتر است یا گراف‌های ناهمبند n راسی؟

هفت) یک گراف را خود مکمل می‌نامیم اگر با مکمل‌اش یکریخت باشد. شرط لازم و کافی روی n بیابید که به طوری که دست کم یک گراف n راسی خود مکمل وجود داشته باشد.

هشت) گراف G با درجه‌ی کمینه‌ی δ را در نظر بگیرید.

الف- ثابت کنید G ، یک دور با طول حداقل $\delta+1$ دارد.

ب- اگر G دست کم $2\delta+1$ یال داشته باشد، ثابت کنید G یک دور به طول حداقل $2\delta+1$ دارد.

نه) ثابت کنید در هر گراف جهت‌دار مجموعه‌ای از رئوس مانند S وجود دارد به طوری که هیچ یالی بین دو راس از این مجموعه نباشد و به ازای هر راس از $G-S$ (راس‌هایی از گراف که در S حضور ندارند) مانند v ، مسیری به طول حداکثر ۲ از یکی از اعضای S به v وجود داشته باشد.

ده) تعداد یال‌های یک گراف $2n$ راسی بدون مثلث (دور سه‌تایی) حداکثر چندتا است؟