

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

مقدمه

آشنایی با مباحث ریاضیات مهندسی

سید محمد جعفری

۱- مبحث اول: اعداد مختلط

معادله درجه دو:

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow a = 1, b = 2, c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 8 = -4 < 0$$

دلتا منفی شد لذا ریشه حقیقی ندارد.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

فکر اعداد مختلط به ذهن می‌رسد:

۲- مبحث دوم: سری فوریه

سری تیلور (Taylor series):

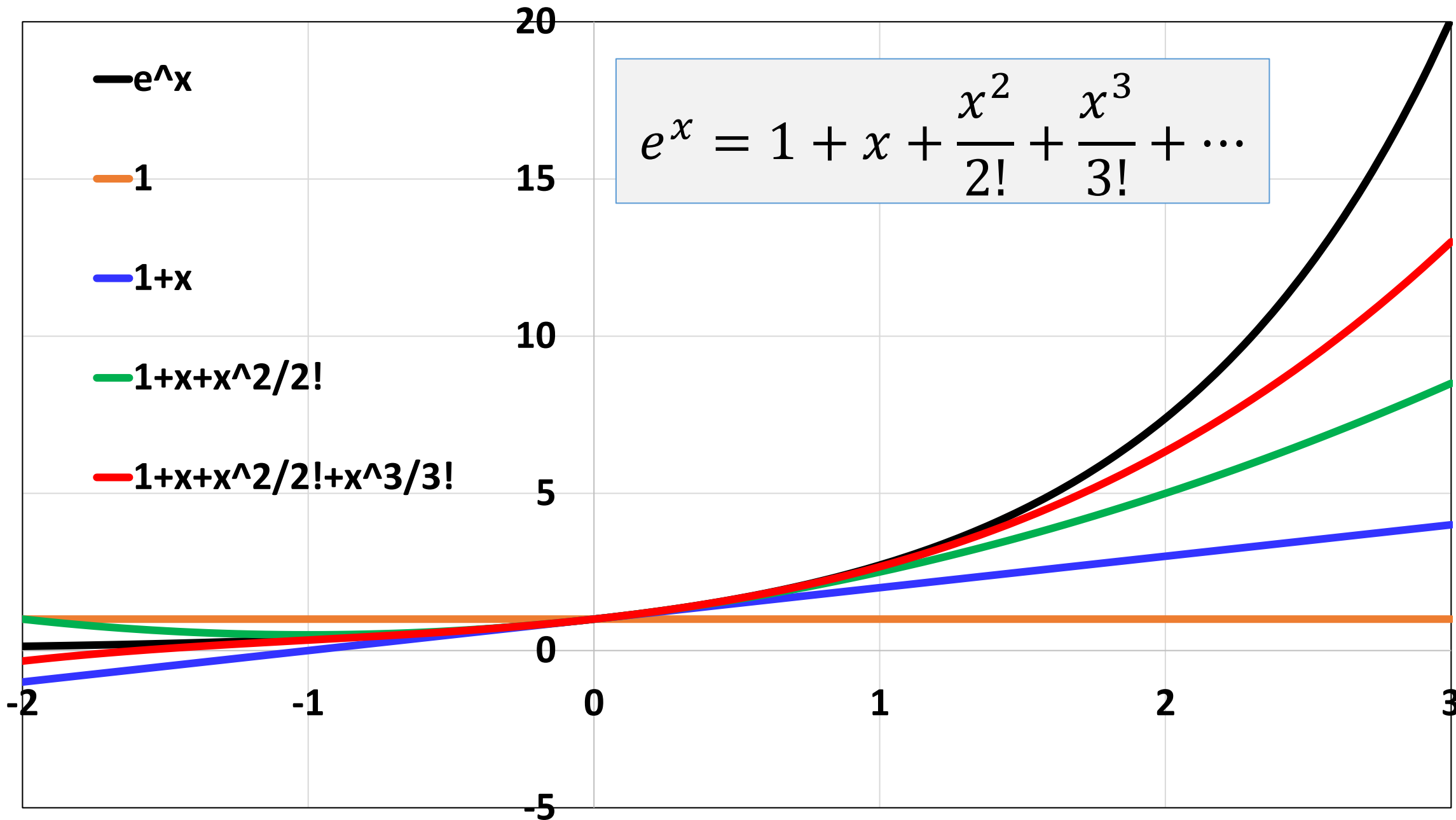
نمایش یک تابع به صورت مجموع بی‌نهایت جمله از مشتق‌های تابع در یک نقطه

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$



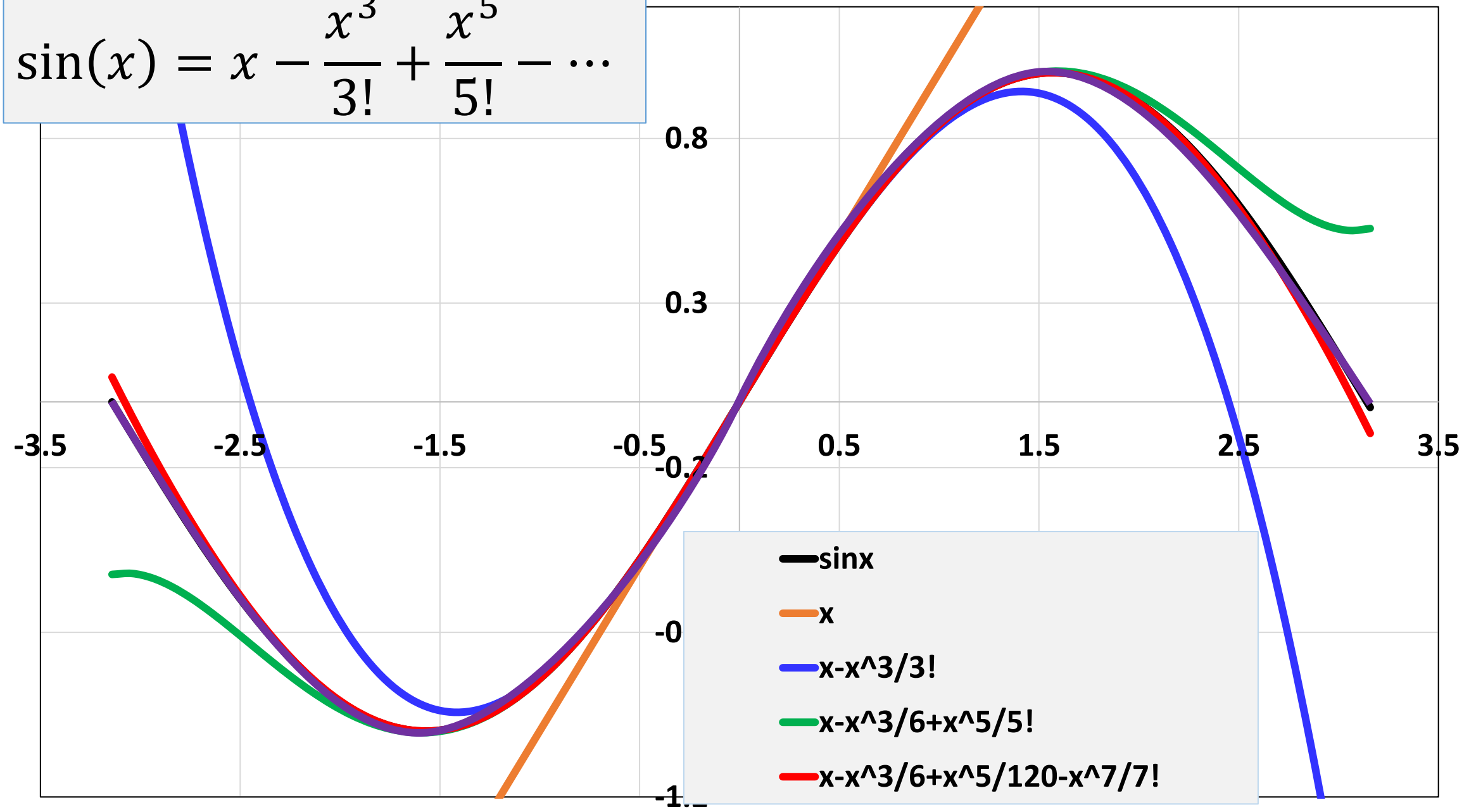
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad \text{for } |x| < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots \quad \text{for } |x| > 1$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$



۳- مبحث سوم: معادلات دیفرانسیل جزئی

روش مهندسی:

☐ تبدیل یک مسئله به یک مدل (مدل سازی)

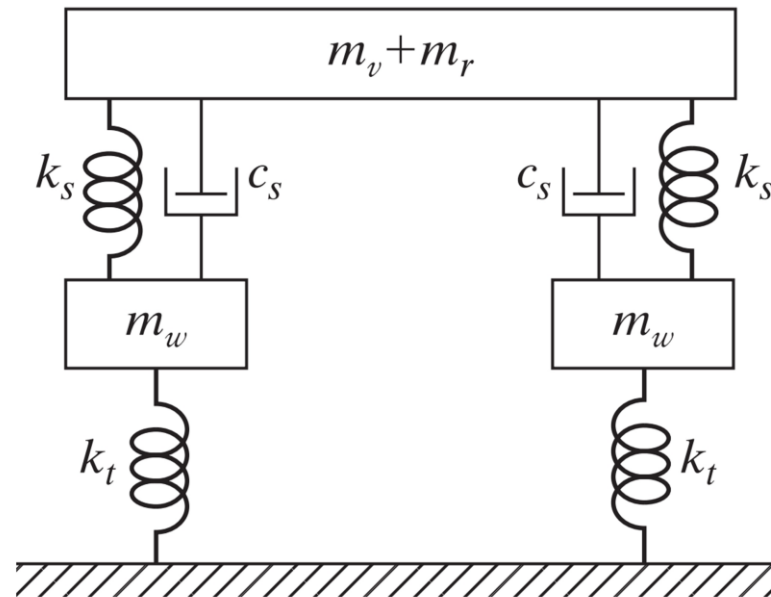
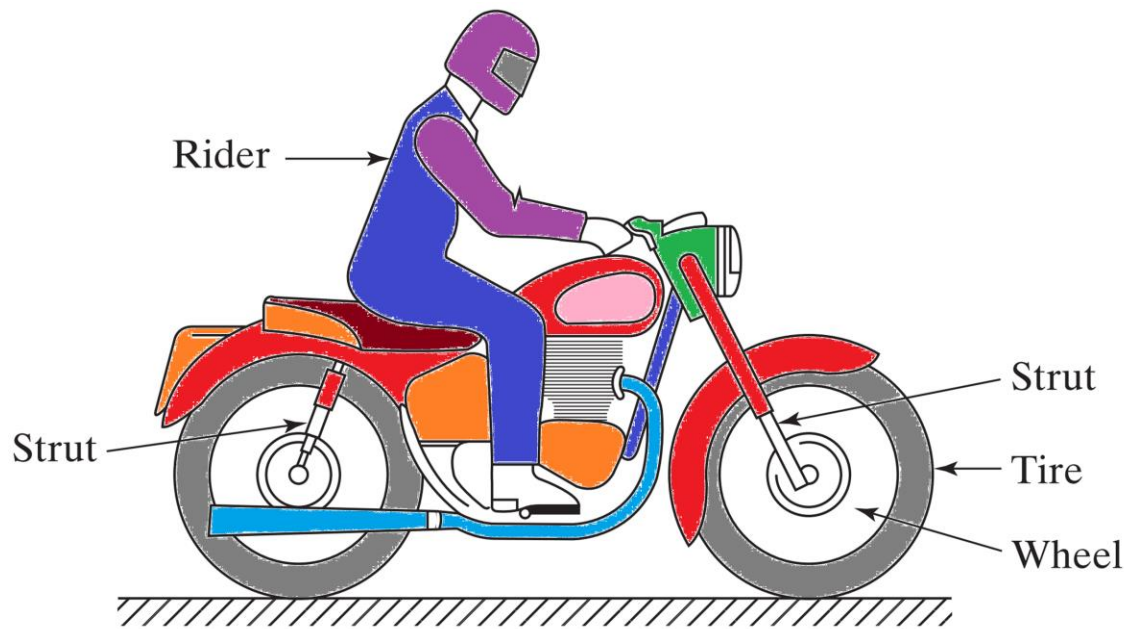
☐ فرض‌های ساده‌کننده (ساده‌سازی)

☐ استخراج معادلات حاکم

☐ حل معادلات و رسم نمودارهای لازم

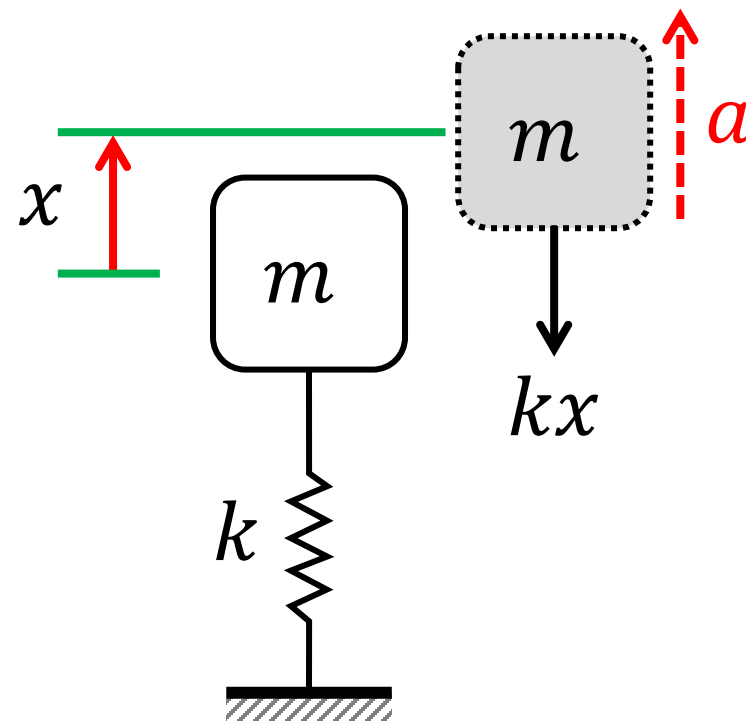
☐ بررسی و تفسیر نتایج

☐ پیش بینی رفتار برای مسئله واقعی



قانون نیوتن

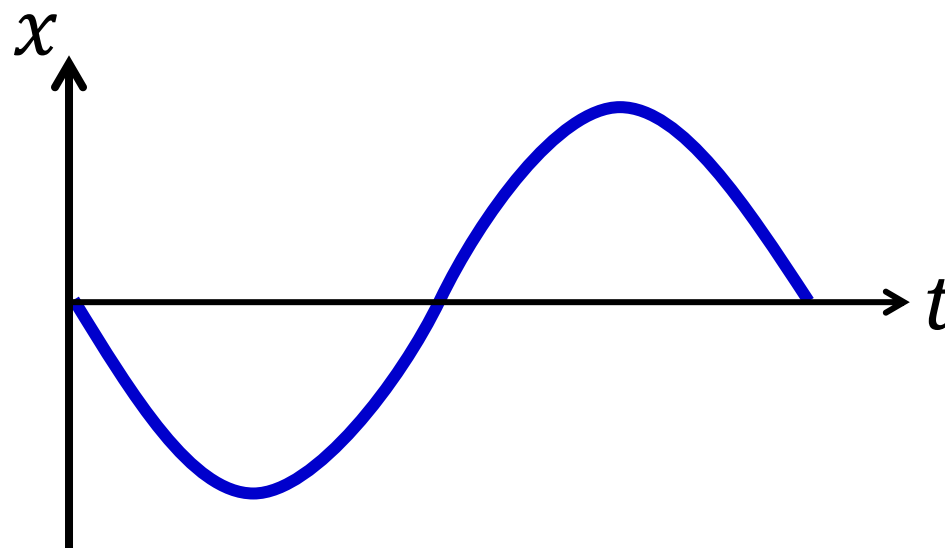
$$\sum F = ma \rightarrow -kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$



معادله دیفرانسیل مرتبه‌ای (ODE): $m\ddot{x} + kx = 0$

پاسخ ← درس معادلات دیفرانسیل

$$x(t) = A \sin \omega t$$

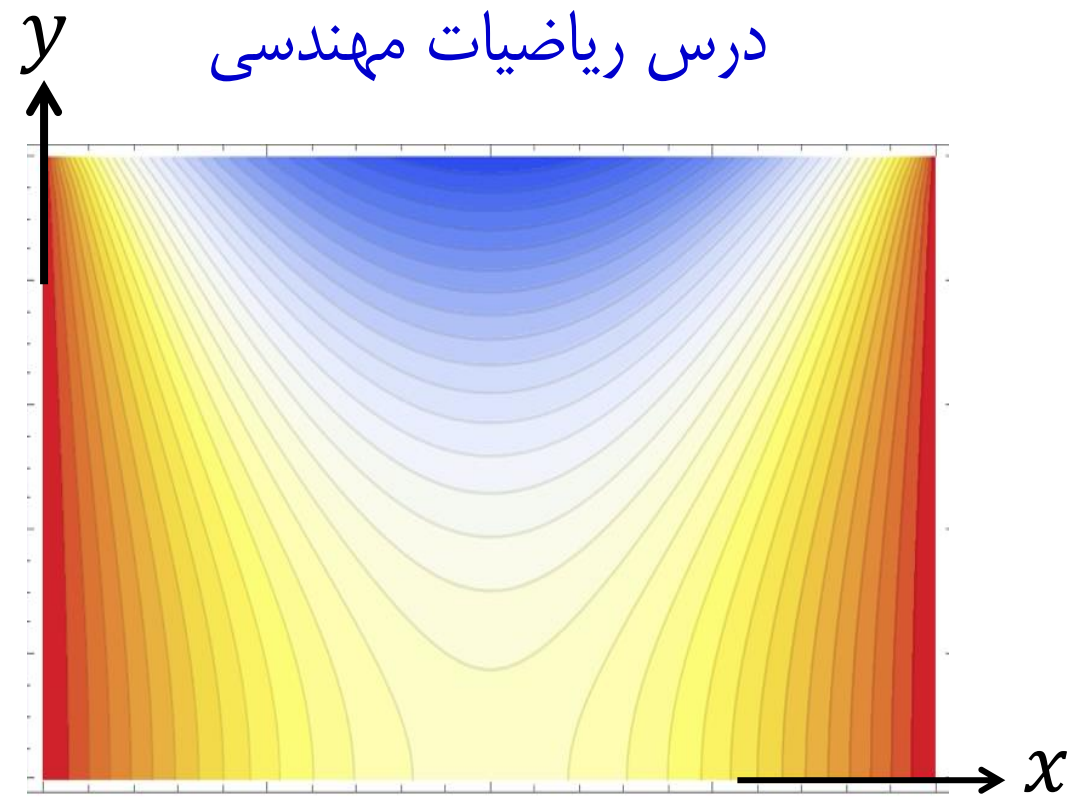
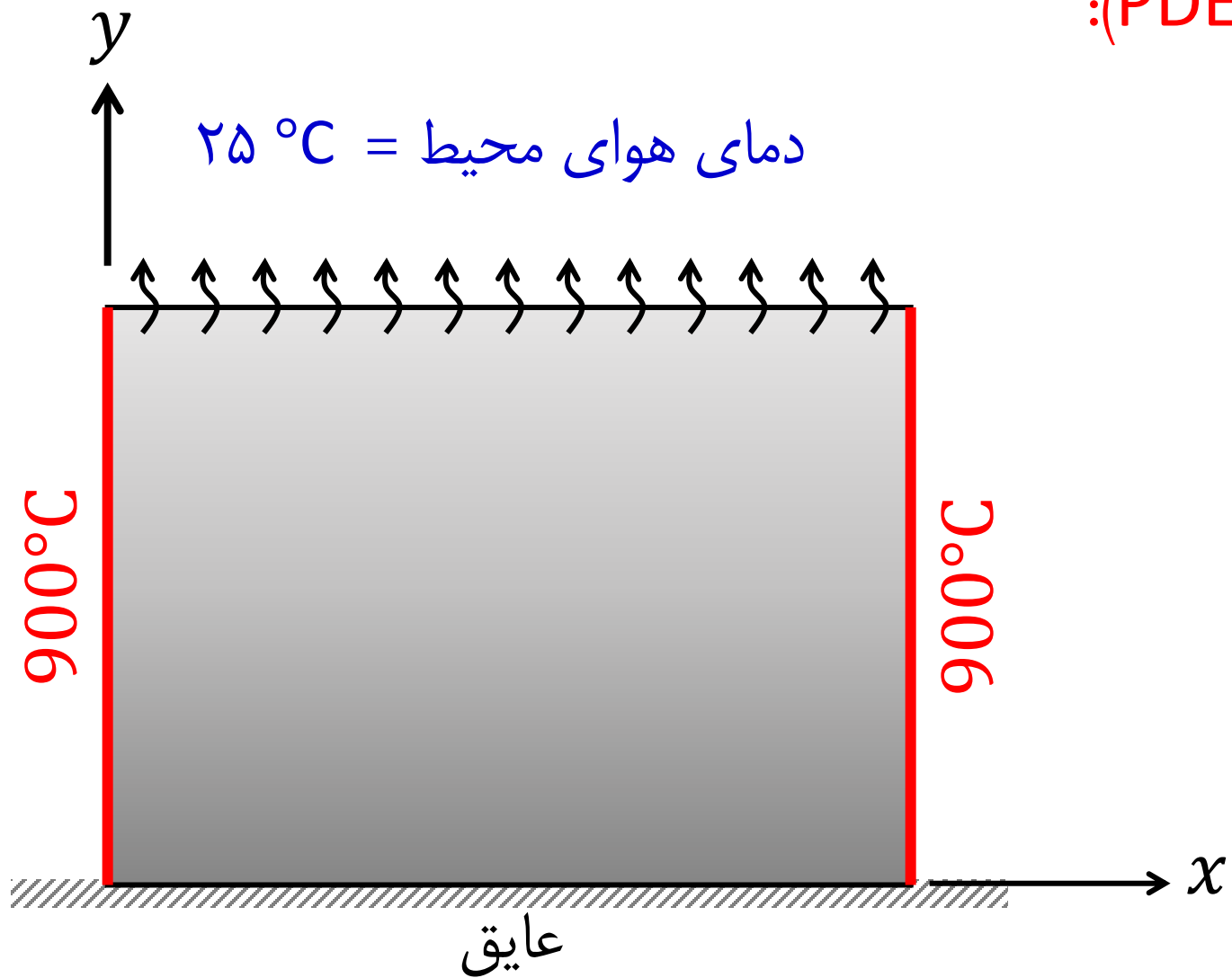


معادله انتقال گرمای هدایتی

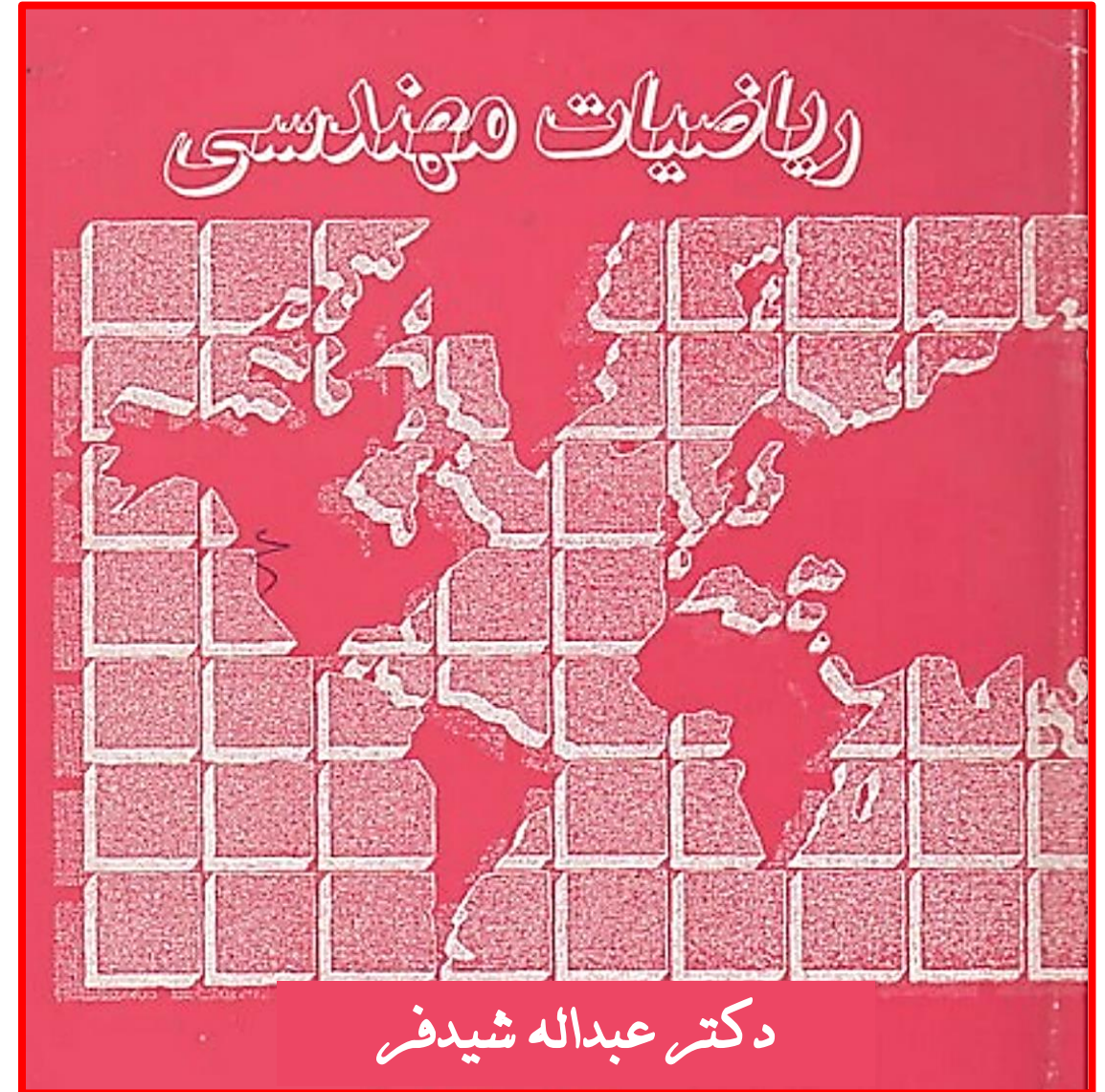
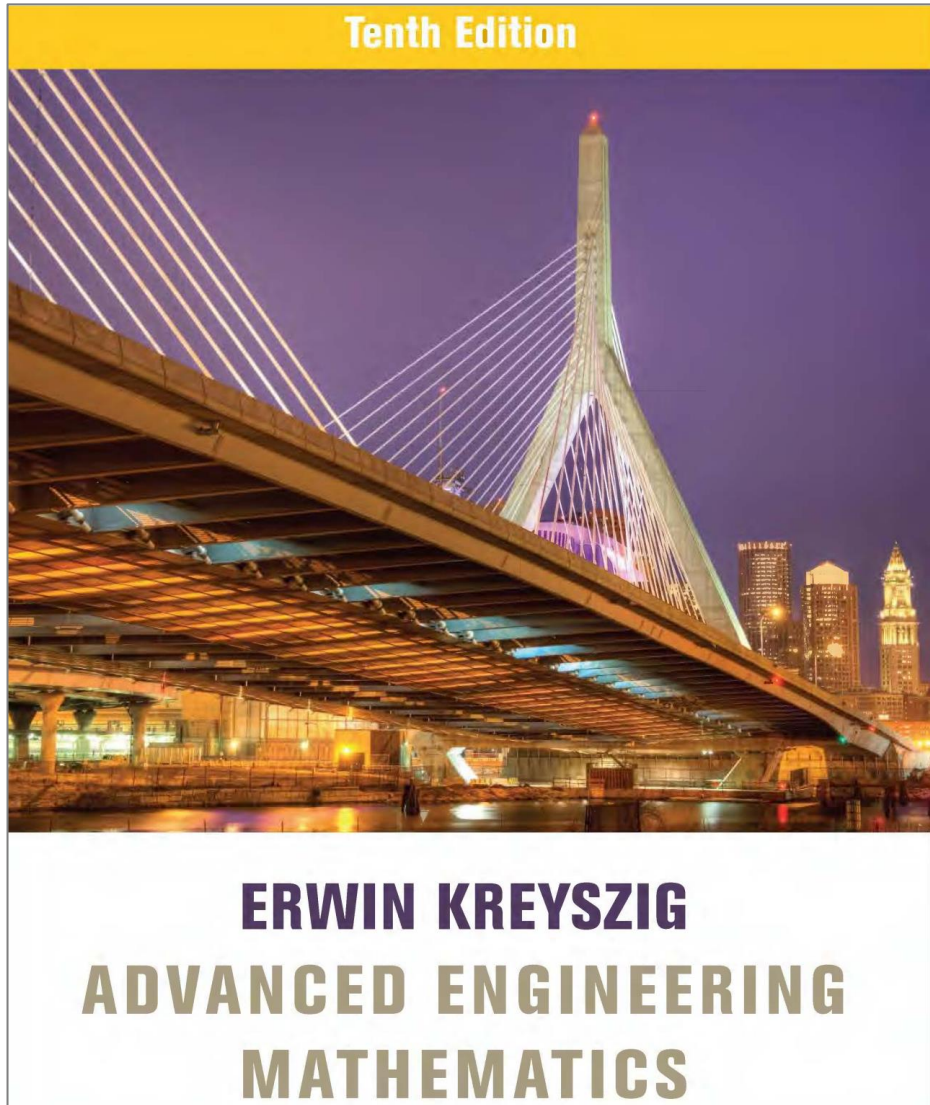
دو بعدی : $\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$

معادله دیفرانسیل جزئی (PDE):

درس ریاضیات مهندسی



مراجع



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی مهندسی

فصل ۱: تحلیل مختلط

بخش ۱: معرفی اعداد مختلط

توسط: سید محمد جعفری

۱- اعداد مختلط (Complex numbers)

معادله درجه دو:

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow a = 1, b = 2, c = 2$$

دلتا منفی شد لذا ریشه حقیقی ندارد. $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 8 = -4 < 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ضرب ریشه‌ها: } \frac{c}{a} = 2 \\ \text{جمع ریشه‌ها: } -\frac{b}{a} = -2 \end{array} \right\} \text{جمع ریشه‌ها و ضرب آنها عبارتند از:}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

فکر اعداد مختلط به ذهن میرسد:

عدد موهومی $\sqrt{-1}$ = (Imaginary number)

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \times (-1)} = \sqrt{4} \times \sqrt{-1} = 2\sqrt{-1}$$

$$i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = 2\sqrt{-1} = 2i$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i = \begin{cases} x_1 = -1 + i \\ x_2 = -1 - i \end{cases}$$

عدهای x_1 , x_2 عدد مختلط (complex number) هستند:

عدهای مختلط یک قسمت حقیقی (x) و یک قسمت موهومی (y) دارند: $z = x + iy$

$$\begin{cases} \text{قسمت موهومی: } Im(z) = y \\ \text{قسمت حقیقی: } Re(z) = x \end{cases}$$

مثال:

$$x^2 + 6x + 13 = 0 \quad a = 1, b = 6, c = 13$$

$$\Delta = 36 - 4(1)(13) = -16 < 0$$

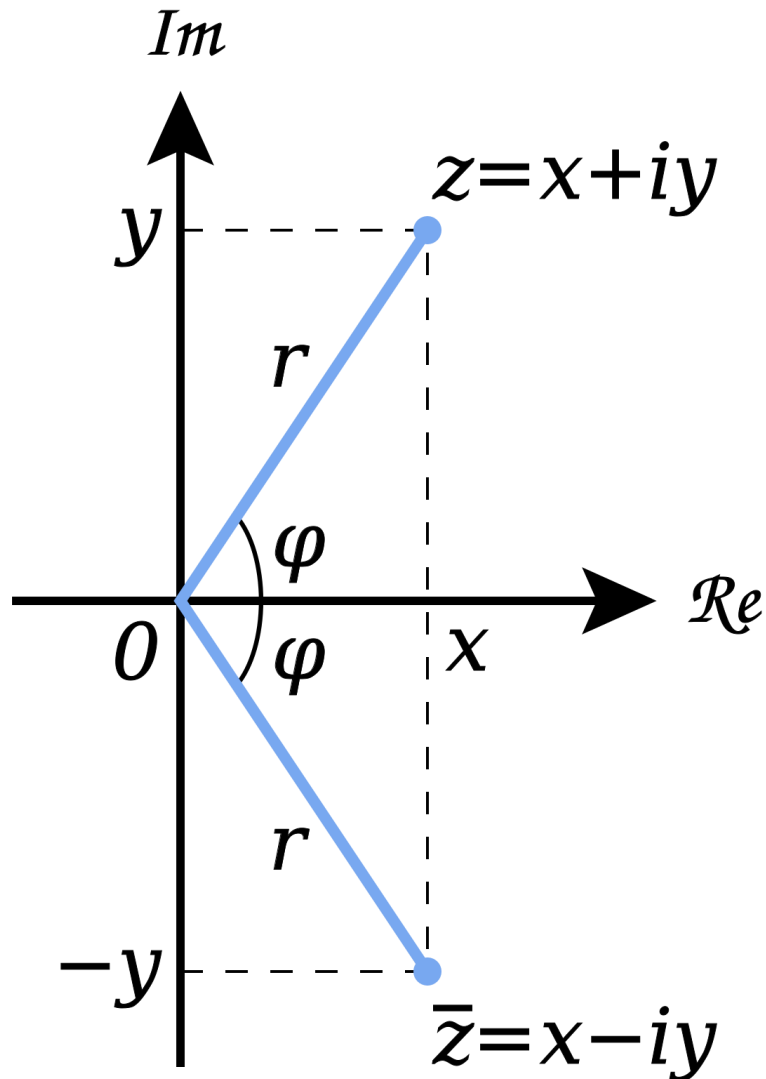
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} = -3 \pm 2i$$

x_1 و x_2 تنها در بخش موهومی خود با یک علامت منفی با هم تفاوت دارند.

به این اعداد مزدوج مختلط (Complex conjugate) گویند.

$$\begin{cases} \textcolor{red}{Im}(x_1) = 2 \\ \textcolor{blue}{Re}(x_1) = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} \textcolor{red}{Im}(x_2) = -2 \\ \textcolor{blue}{Re}(x_2) = -3 \end{cases}$$

عدد مزدوج مختلط (complex conjugate number)



عدد مختلط: $z = x + iy$

مزدوج عدد مختلط: $\bar{z} = x - yi$

مثال:

$$z = 2 - 3i$$

$$\bar{z} = 2 + 3i$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی مهندسی

فصل ۱: تحلیل مختلط

بخش ۲: جبر اعداد مختلط

توسط: سید محمد جعفری

۲- جبر اعداد مختلط

از آنجا که عدد موهومی i همان $\sqrt{-1}$ است. جبر اعداد مختلط مانند جبر رادیکال‌ها است:

$$(a + b\sqrt{c}) + (d + e\sqrt{c}) = (a + d) + (b + e)\sqrt{c}$$

۲-۱- جمع اعداد مختلط:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1 + y_1\sqrt{-1}) \pm (x_2 + y_2\sqrt{-1})$$

$$= (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)\sqrt{-1}$$

$$= (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

۲-۲- ضرب اعداد مختلط:

$$(a + b\sqrt{c}) \times (d + e\sqrt{c}) = ad + ae\sqrt{c} + bd\sqrt{c} + bec$$

$$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + y_1 y_2 i^2$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

مثال:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 \quad \blacksquare$$

عبارت $x^2 + y^2$ برابر است با توان دوم اندازه عدد مختلط z : $\square$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2$$

یادداشت:

□ دو عدد مزدوج مختلط اندازه برابر دارند اما با هم برابر نیستند.

□ دو عدد مختلط وقتی با هم برابرند که قسمت‌های حقیقی با هم و قسمت‌های موهومی

نیز با هم مساوی باشند.

$$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$$

فرض:

$$z_1 = z_2 \leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ \& } y_1 = y_2$$

۲-۳- تقسیم اعداد مختلط:

گویا کردن کسرها:

$$\frac{A}{a + b\sqrt{c}} \xrightarrow[\text{Rationalisation}]{\text{Realisation}}$$

$$\frac{A}{a + b\sqrt{c}} \times \frac{a - b\sqrt{c}}{a - b\sqrt{c}} = A \frac{a - b\sqrt{c}}{a^2 - b^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2}$$

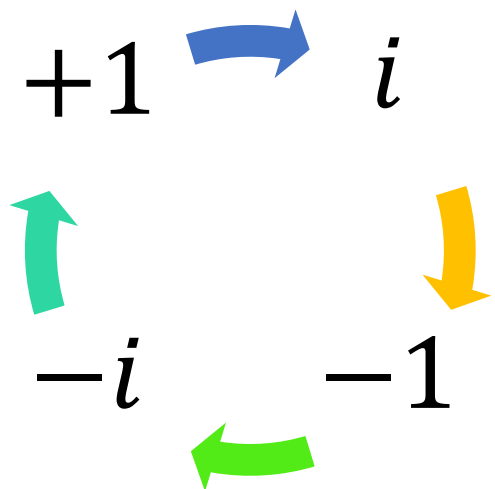
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x^2 + y^2}$$

مثال: معکوس یک عدد مختلط:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} \times \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

مثال: معکوس عدد مختلط $z = 3 + 4i$ را بیابید.

$$\frac{1}{3 + 4i} = \frac{1}{3 + 4i} \times \frac{3 - 4i}{3 - 4i} = \frac{3 - 4i}{3^2 + 4^2} = \frac{3}{25} - i \frac{4}{25}$$



یادداشت: تمام اتحادهای جبری مانند اتحاد دوجمله‌ای برای اعداد مختلط نیز قابل اجرا هستند با این تفاوت که باید در زمان به توان رساندن عدد i ، دقت کرد.

$$\begin{cases} i^1 = +i & i^5 = +i \\ i^2 = -1 & i^6 = -1 \\ i^3 = -i & i^7 = -i \\ i^4 = +1 & i^8 = +1 \end{cases}$$

$$i^n = \begin{cases} +i & n = 4k + 1 \\ -1 & n = 4k + 2 \\ -i & n = 4k + 3 \\ +1 & n = 4k \end{cases}$$

مثال: جواب معادله روبه رو را بیابید و صحت آن را بررسی کنید.

$$(x + 1)^2 = -9$$

پاسخ:

$$x + 1 = \sqrt{-9} = \sqrt{9(-1)} = \pm 3\sqrt{-1} = \pm 3i \rightarrow x_{1,2} = -1 \pm 3i$$

بررسی پاسخ:

$$[(-1 + 3i) + 1]^2 = (3i)^2 = (3)^2(i)^2 = 9(-1) = -9$$

$$[(-1 - 3i) + 1]^2 = (-3i)^2 = (-3)^2(i)^2 = 9(-1) = -9$$

نمایش برداری اعداد مختلط:

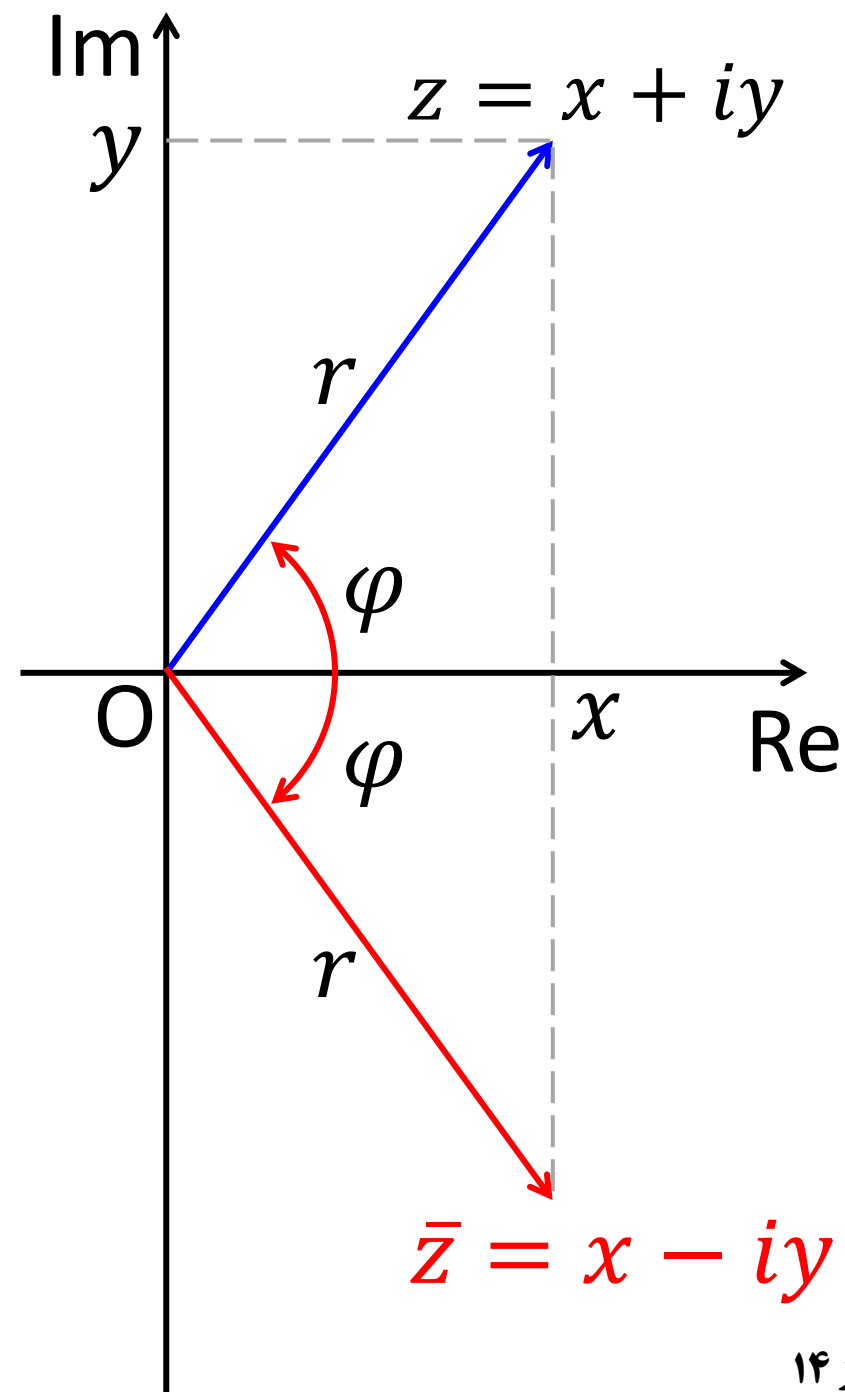
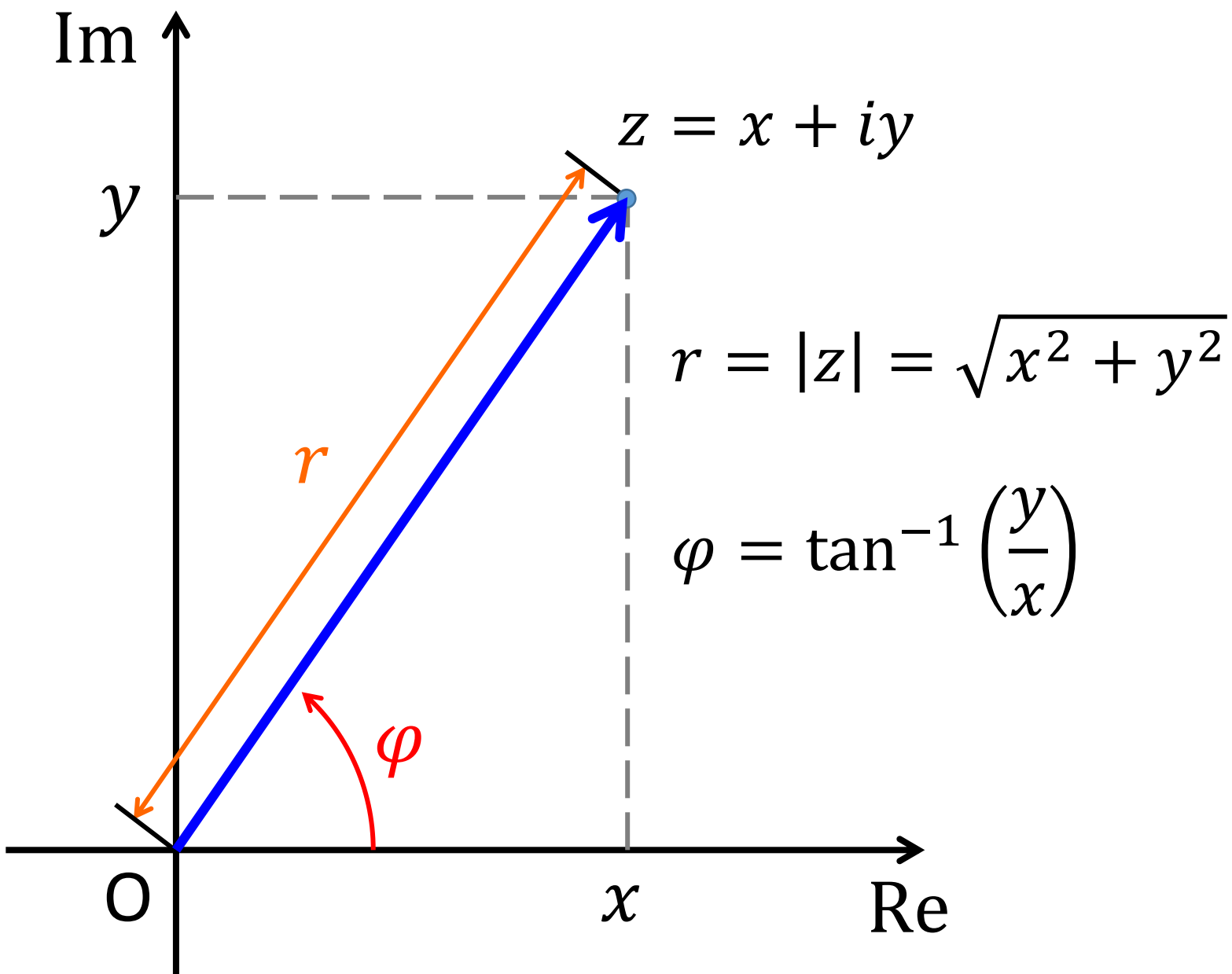
یادداشت: اعداد مختلط اساساً بردار نیستند، اما آنها را به صورت برداری تعریف می‌کنیم تا بتوانیم برخی ویژگی‌ها را بهتر و راحت‌تر به دست آوریم مثلاً زاویه دو بردار نسبت به هم

□ مقدار یک عدد مختلط یا اندازه یک عدد مختلط:

$$z = x + iy$$

Absolute value (modulus or magnitude): $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

□ زاویه یک عدد مختلط با محور افقی (آرگومان): $\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$

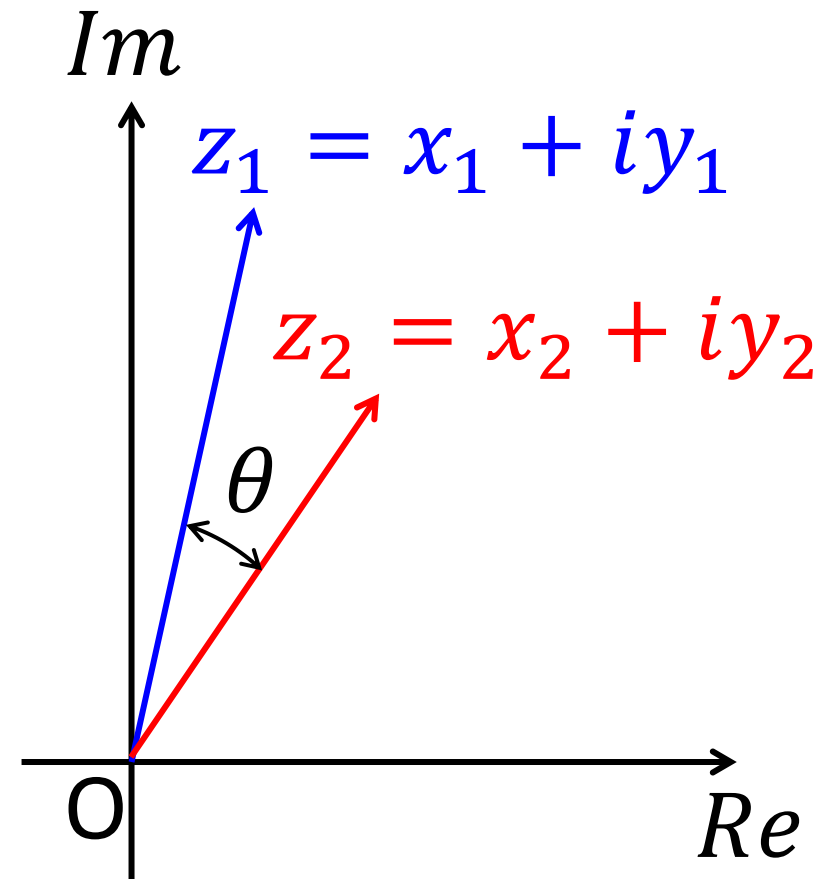


$$z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 + y_1y_2 \quad \square \text{ ضرب داخلی (Dot product)}$$

$$|z_1 \times z_2| = x_1y_2 - x_2y_1 \quad \square \text{ ضرب خارجی (Cross product)}$$

$$\cos \theta = \frac{z_1 \cdot z_2}{|z_1||z_2|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{|z_1 \times z_2|}{|z_1||z_2|} = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$



برخی اتحادها (اثبات به عهده خواننده):

$$1. \overline{(z_1 \pm z_2)} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

$$2. \overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$3. \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$4. z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$5. z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$$

$$6. |z| = |\bar{z}|$$

$$7. z\bar{z} = |z|^2$$

$$8. |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$9. \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

ادامه برخی اتحادها:

$$10. \left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

نامساوی سه تایی:

$$11. |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$$

مشابه قانون کسینوس ها:

$$12. (z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} z_1^{n-k} z_2^k$$

اتحاد دو جمله ای:

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی مہندسی

فصل ۱: تحلیل مختلط

بخش ۳: قضیہ اساسی جبر

توسط: سید محمد جعفری

۳- قضیه اساسی جبر (Fundamental theorem of algebra)

قضیه اساسی جبر: هر چندجمله‌ای با ضرایب مختلط، دارای حداقل یک ریشه مختلط است. به عبارت دیگر میدان اعداد مختلط یک میدان بسته جبری است.

نتیجه: هر چندجمله‌ای ناصفر با ضرایب حقیقی و از درجه n ، دارای دقیقاً n ریشه مختلط است.

این قضیه را کارل فردریش گاوس ریاضی‌دان شهیر آلمانی، در ۲۰ سالگی به عنوان رساله دکترا اثبات نمود.

https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_theorem_of_algebra

در حل معادله درجه دوم وقتی $(\Delta < 0)$ ، پاسخ معادله به صورت دو عدد مزدوج مختلط است. اما قضیه اساسی جبر حالت کلی‌تری را بیان می‌کند:

هرگاه عدد مختلط $z = x + iy$ ریشه یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد، آنگاه مزدوج آن نیز ریشه آن عبارت خواهد بود:

چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

نتیجه: در حل معادلات چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی، جواب‌های مختلط به صورت مزدوج (دوتایی) ظاهر می‌شوند.

مثلاً یک معادله درجه ۵ با ضرایب حقیقی، نمی‌تواند ۳ ریشه مختلط داشته باشد زیرا باید تعداد ریشه‌های مختلط زوج باشد.

۱ ریشه حقیقی و

۴ ریشه مختلط

۳ ریشه حقیقی و

۲ ریشه مختلط

۵ ریشه حقیقی

حالت‌های ریشه‌های معادله درجه ۵ با ضرایب حقیقی

با یک مثال می‌توان قضیهٔ اساسی جبر را بررسی کرد. می‌دانیم اگر $z_m, \dots, z_1$ ریشه‌های یک چندجمله‌ای باشند، می‌توان نوشت:

$$P_m(x) = (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_m)$$

اگر z عدد مختلط باشد و $\bar{z}$ نیز مزدوج آن باشد، و این دو عدد در هم ضرب شوند،

ضرب غیر حقیقی ایجاد نمی‌کنند:

$$z = a + ib, \bar{z} = a - ib$$

$$\begin{aligned} \rightarrow (x - z)(x - \bar{z}) &= (x - a - ib)(x - a + ib) \\ &= (x - a)^2 + b^2 \end{aligned}$$

و از آنجا که تنها عاملی که می‌تواند اثر موهومی بودن هر عدد مختلط را از بین ببرد، مزدوج آن است؛ پس اگر z ریشه معادله باشد ولی $\bar{z}$ ریشه معادله نباشد، آنگاه ضرایب معادله حتماً غیر حقیقی خواهند بود.

توجه: لزومی ندارد همه ضرایب غیر حقیقی باشد؛ کافی است تنها یک ضریب غیر حقیقی در بین ضریب‌های یک چند جمله‌ای وجود داشته باشد تا این قضیه را شامل نشود.
نتیجه پایانی: اگر تابع f یک چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد، خواهیم داشت:

$$1. f(z) = 0 \rightarrow f(\bar{z}) = 0 \qquad 2. \overline{f(z)} = f(\bar{z})$$

قضیه دوم شکل عمومی‌تری از قضیه اول دارد که در اینجا اثبات نمی‌کنیم.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

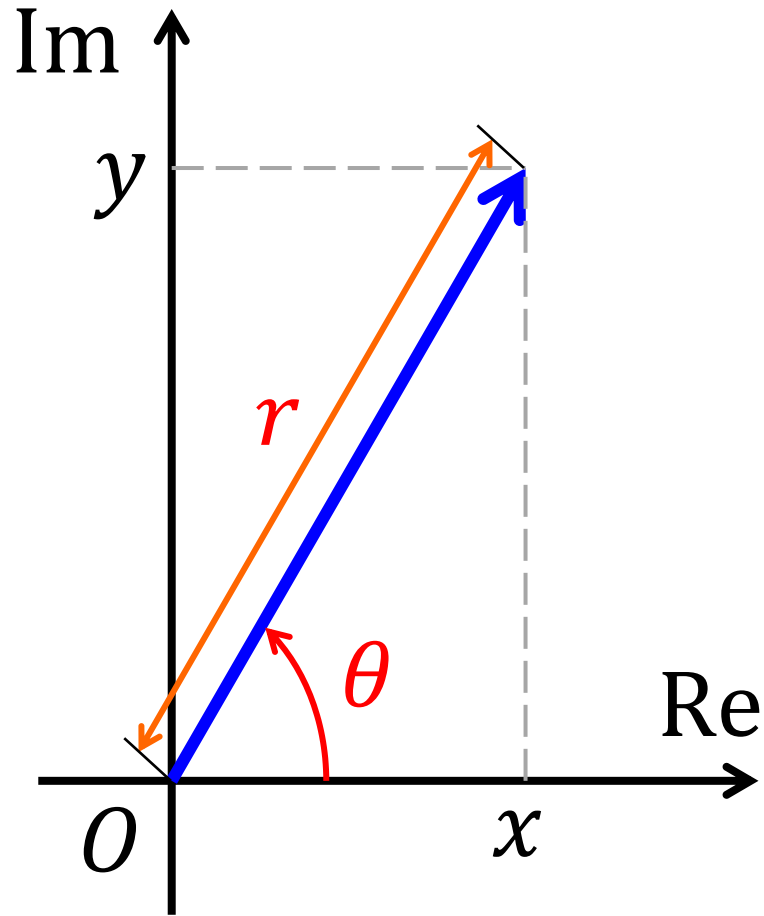
ریاضی مهندسی

فصل ۱: تحلیل مختلط

بخش ۴: شکل مثلثاتی (قطبی) اعداد مختلط

توسط: سید محمد جعفری

۴- شکل مثلثاتی (قطبی) اعداد مختلط



شکل دکارتی (کارتزین) اعداد مختلط $z = x + iy$ را شناختیم.

اساس دستگاه قطبی بیان مختصات یک نقطه با دو ویژگی است:

۱- فاصله هر نقطه تا مبدأ و ۲- زاویه نقطه با محور افقی

$$z = x + iy$$

مقدار یک عدد مختلط: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

زاویه یک عدد مختلط با محور افقی (آرگومان): $\theta = \arg(z) = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$

آرگومان عدد z ، منحصر به فرد نیست، یعنی اگر θ آرگومان یک عدد مختلط باشد، $\theta + 2\pi$ نیز می‌تواند آرگومان z باشد. پس آرگومان z منحصر به فرد نیست، لذا برای یکسان کردن پاسخ‌ها قرارداد می‌کنیم که آرگومان اصلی عدد مختلط را بین π و $-\pi$ فرض کنیم و آرگومان اصلی را با حرف بزرگ Arg نمایش می‌دهیم.

غیر منحصر به فرد: $\rightarrow \arg(z)$

$$\arg(z) = \text{Arg}(z) + 2k\pi \quad \text{منحصر به فرد: } \rightarrow -\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \pi$$

حال می‌توانیم x و y را بر حسب اندازه عدد مختلط و آرگومان آن بنویسیم:

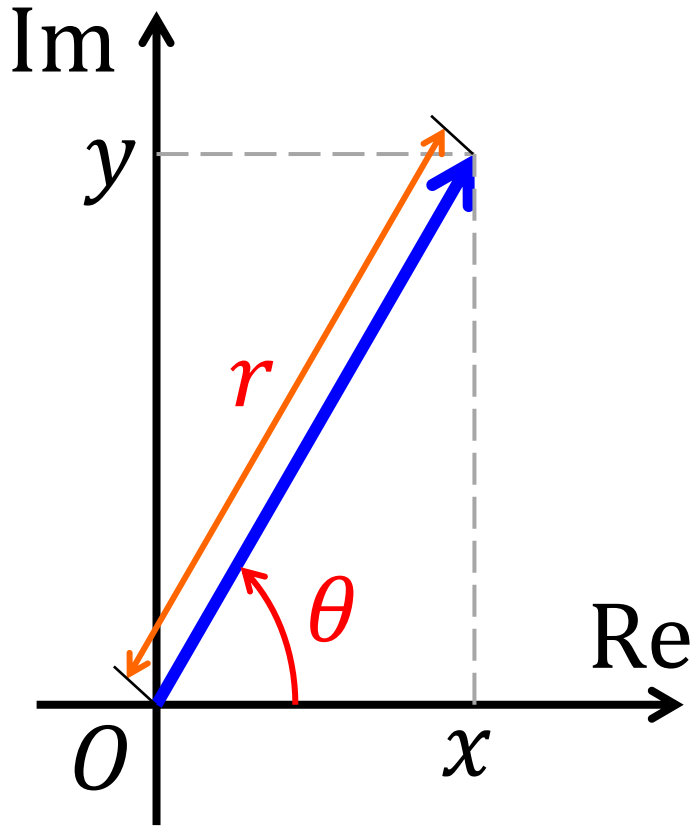
$$\theta = \text{Arg}(z), r = |z|$$

$$y = r \sin \theta, x = r \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$z = x + iy = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

$$= r(\cos \theta + i \sin \theta)$$



این شکل را نمایش مثلثاتی (قطبی) عدد مختلط گویند.

Trigonometric or Polar form

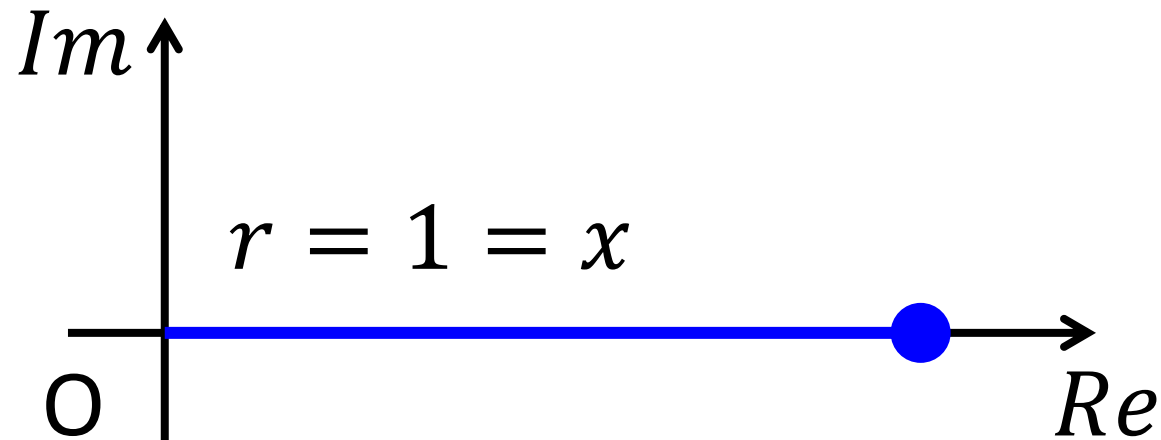
مثال: شکل مثلثاتی (قطبی) اعداد مختلط زیر را بنویسید:

$$z = 1 \rightarrow |z| = 1$$

(الف)

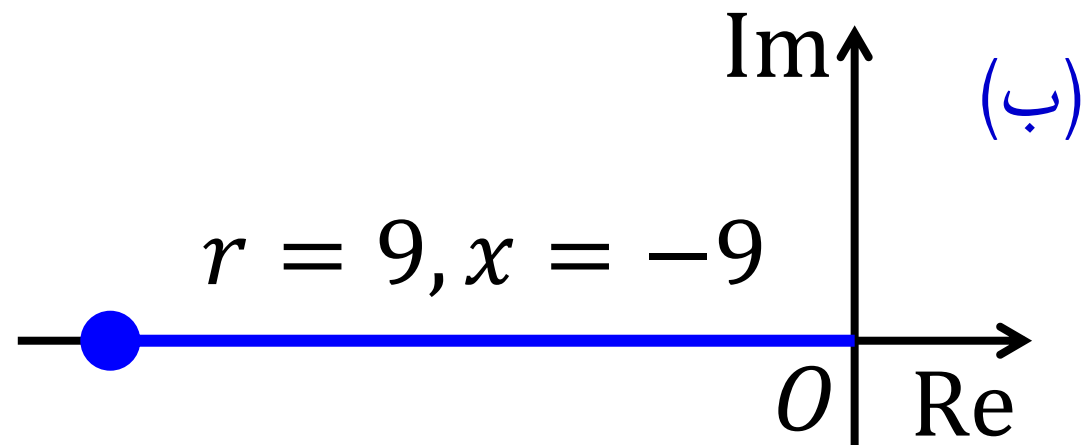
$$\theta = 0 \rightarrow z = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

$z = 1$	الف:
$z = -9$	ب:
$z = 5i$	ج:
$z = 1 - i\sqrt{3}$	د:
$z = -1 - i$	ه:



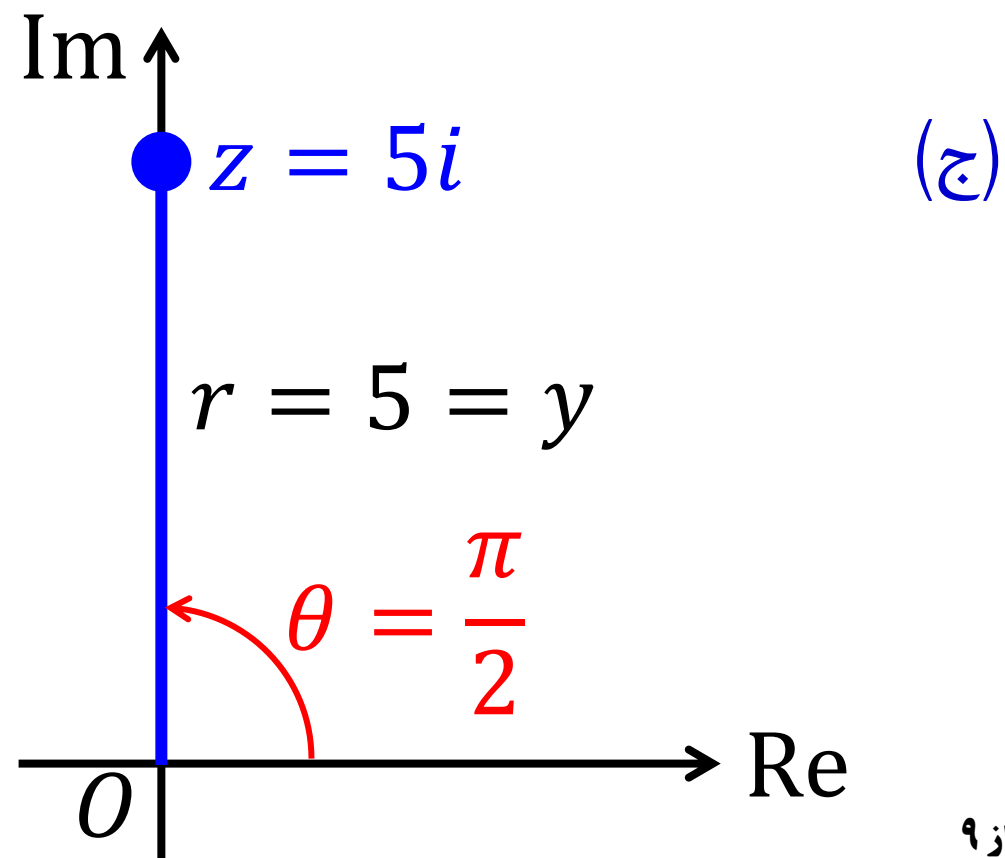
$$z = -9 \rightarrow |z| = 9$$

$$\theta = \pi \rightarrow z = 9(\cos \pi + i \sin \pi)$$



$$z = 5i \rightarrow |z| = 5, \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$z = 5 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$



$$z = 1 - i\sqrt{3} \quad \rightarrow |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2 \quad (د)$$

$$\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3}/1) = \tan^{-1}(-\sqrt{3})$$

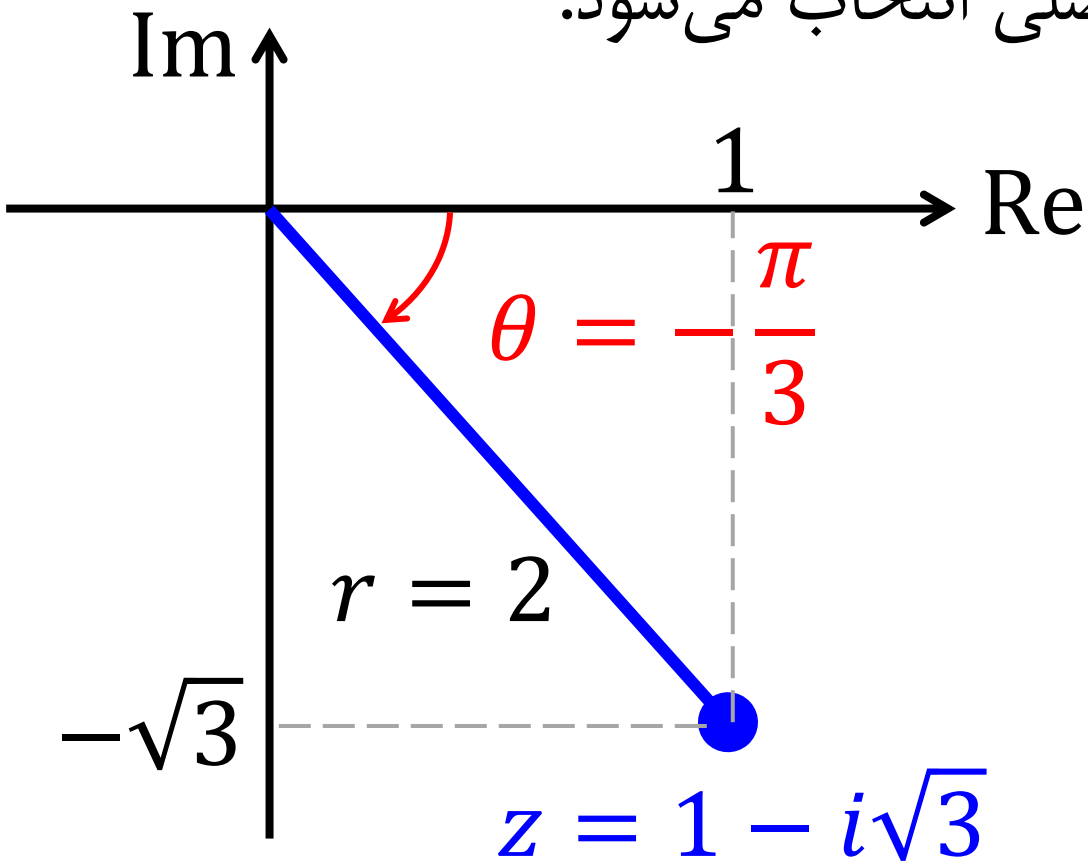
برای θ دو جواب داریم:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} & \square \text{ در ربع دوم:} \\ \theta = -\frac{\pi}{3} & \square \text{ در ربع چهارم:} \end{array} \right.$$

□ عدد مختلط ما نیز در ربع چهارم قرار دارد.

□ همچنین باید آرگومان اصلی در بازه $[-\pi, \pi]$ باشد.

□ پس مقدار $\theta = -\pi/3$ به عنوان آرگومان اصلی انتخاب می‌شود.



$$z = 1 - i\sqrt{3}$$

$$= 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right]$$

$$z = -1 - i, |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad (۵)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-1}{-1} \right) = \tan^{-1}(1)$$

برای θ دو جواب داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \frac{\pi}{4} \\ \theta = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4} \end{array} \right.$$

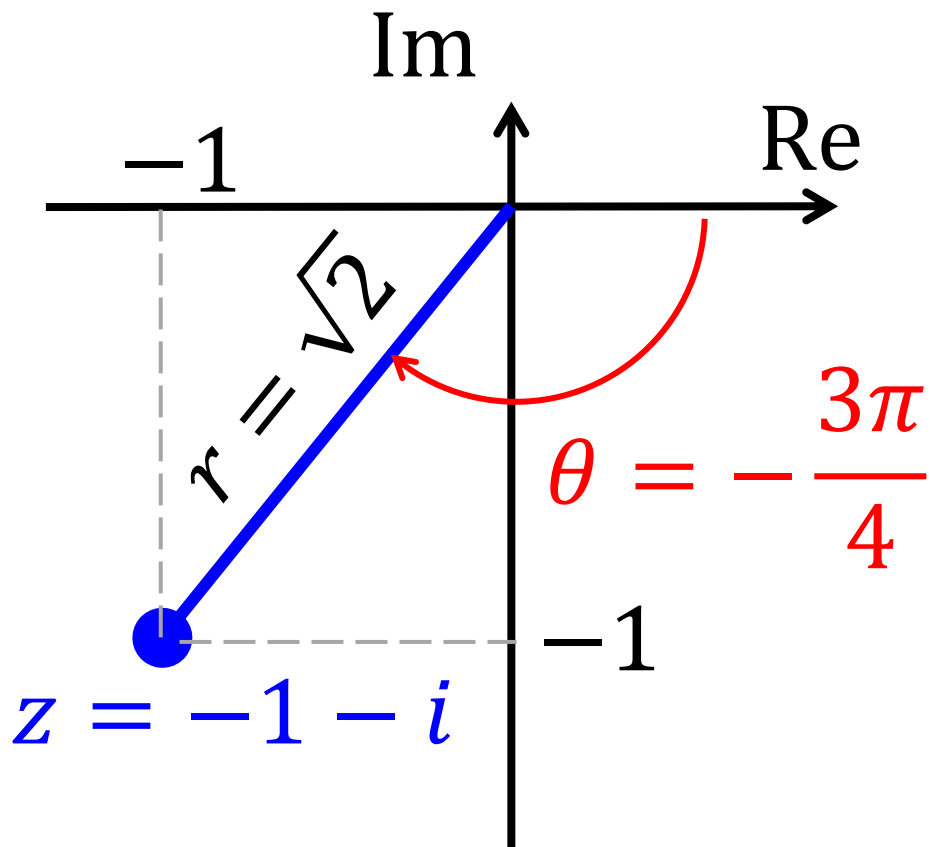
□ در ربع اول:

□ در ربع سوم:

پس جواب آرگومان اصلی در ربع سوم است: $\theta = -\frac{3\pi}{4}$

$$z = -1 - i$$

$$= \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right]$$



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی مهندسی

فصل ۱: تحلیل مختلط

بخش ۵: توابع مختلط

توسط: سید محمد جعفری

۵- شکل نمائی اعداد مختلط (The Exponential Form of a Complex Number)

۵-۱- قضیه دموآور (Abraham de Moivre)

ابراهام دو موآور (۱۶۶۷ - ۱۷۵۴) یک ریاضی‌دان در زمینهٔ نظریهٔ احتمالات اهل فرانسه بود.

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

اثبات با بسط مکلاورن (Maclaurin Series):

کالین مک لورین (Colin Maclaurin) فیزیکدان اسکاتلندی که شاگرد اسحاق نیوتن بود و در سال ۱۷۱۷ میلادی (۲۹۱ سال پیش) در سن ۱۹ سال و ۷ ماهگی حایز رتبه استادی شد.

$$e^{\theta} = 1 + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right)$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

پس تا الان سه شکل نمایش اعداد مختلط را داریم:

۱- دکارتی (کارتزین): $z = x + iy$ Cartesian form:

۲- مثلثاتی (قطبی): $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ Polar form:

۳- نمائی: $z = re^{i\theta}$ Exponential form:

مثال: شکل دکارتی اعداد زیر را بنویسید: (الف) $e^{i\frac{\pi}{4}}$ (ب) e^{-i} (ج) $2e^{i\pi}$

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 + 0.707i \quad \blacksquare$$

$$e^{-i} = \cos(-1) + i \sin(-1) = 0.540 - i(0.841) \quad \blacksquare$$

یادآوری: زاویه‌ها بر حسب رادیان هستند.

$$2e^{i\pi} = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2[-1 + i(0)] = -2 \quad \blacksquare$$

نمایش نمایی در جبر اعداد مختلط خیلی کار را ساده‌تر می‌کند. فرض کنید داشته باشیم:

$$\begin{cases} z_1 = r_1 e^{i\theta_1} = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \\ z_2 = r_2 e^{i\theta_2} = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \end{cases}$$

ضرب:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

تقسیم:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

توان:

$$z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

$$= r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

مثال: عدد $z = 1 + i$ را با دو نمایش دکارتی و نمایی، به توان ۳ برسانید:

دکارتی:

$$\begin{aligned} z^3 &= (1 + i)^3 = 1^3 + 3(1)(i)^2 + 3(1)^2(i) + (i)^3 \\ &= 1 - 3 + 3i - i = -2 + 2i \end{aligned}$$

نمایی:

$$z = 1 + i = \left\{ r = \sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4} \right\} \rightarrow z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z^3 = \left(\sqrt{2} \right)^3 \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^3 = 2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -2 + 2i$$

□ یادداشت ۱: در توان‌های بزرگتر برتری نمایش نمایی بر دکارتی بیشتر دیده می‌شود.

□ یادداشت ۲: در ضرب، تقسیم و توان از آرگومان اصلی استفاده می‌شود.

۵-۲- ریشه‌گیری از اعداد مختلط

برای ریشه‌گیری فقط یک ریشه نداریم: $w = \sqrt[n]{z} \rightarrow w^n - z = 0$

یعنی در اینجا w که ریشه n ام عدد z است در اصل جواب معادله $w^n - z = 0$ است.

پس طبق اصل اساسی جبر باید دقیقاً n ریشه مختلط داشته باشد، پس برای اینکه بتوانیم ریشه n ام یک عدد را بیابیم، از آرگومان‌های دیگر نیز استفاده می‌کنیم. پس می‌توان اینگونه نوشت:

$$w = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$$

$$z = r e^{i\theta} \rightarrow w = z^{\frac{1}{n}} = (r)^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} \rightarrow w = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}$$

□ با استفاده از آرگومان اصلی تنها به یک جواب می‌رسیم.

□ برای یافتن دیگر ریشه‌ها بدین گونه رفتار می‌کنیم:

$$z = r e^{i(\theta + 2k\pi)} \rightarrow z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \quad \blacksquare$$

□ برای یافتن تمام پاسخ‌های مستقل، باید k را از صفر تا $n - 1$ جایگذاری کنیم.

□ از این به بعد پاسخ‌ها تکراری خواهند بود.

مثال: ریشه سوم $z = 1 - i$ را بیابید:

$$z = 1 - i = \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \rightarrow z = \sqrt{2} e^{\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i}$$

$$w = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} e^{\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right)i} = \sqrt[6]{2} e^{\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right)i}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 0 \rightarrow w_1 = \sqrt[6]{2}e^{-\frac{\pi}{12}i} = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right) \\ k = 1 \rightarrow w_2 = \sqrt[6]{2}e^{\frac{7\pi}{12}i} = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) \\ k = 2 \rightarrow w_3 = \sqrt[6]{2}e^{\frac{15\pi}{12}i} = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{15\pi}{12} + i \sin \frac{15\pi}{12} \right) \end{array} \right.$$

$$k = 3 \rightarrow w_4 = \sqrt[6]{2}e^{\frac{23\pi}{12}i} \quad \text{حال اگر } k = 3 \text{ را قرار دهیم، خواهیم داشت:}$$

$$\frac{23\pi}{12} = \frac{(24 - 1)\pi}{12} = 2\pi - \frac{\pi}{12}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) \\ \sin\left(\frac{23\pi}{12}\right) = +\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) \end{cases} \rightarrow w_4 = w_1$$

نکته:

□ چون ضرایب معادله $w^3 - 1 + i = 0$ حقیقی نبودند، ۳ ریشه مختلط غیرحقیقی داشتیم و

هیچ ریشه‌ای مزدوج نیستند.

□ اما اگر بخواهیم ریشه یک عدد حقیقی را در فضای اعداد مختلط به دست آوریم، جفت مزدوج

خواهیم داشت.

مثال: ریشه سوم $z = 1$ را بیابید:

ریشه سوم عدد مختلط $z = 1$ یعنی پاسخ معادله $w^3 - 1 = 0$

$$z = 1 \rightarrow \{r = 1, \theta = 0\} \rightarrow z = 1e^{(0+2k\pi)i} = e^{2k\pi i}$$

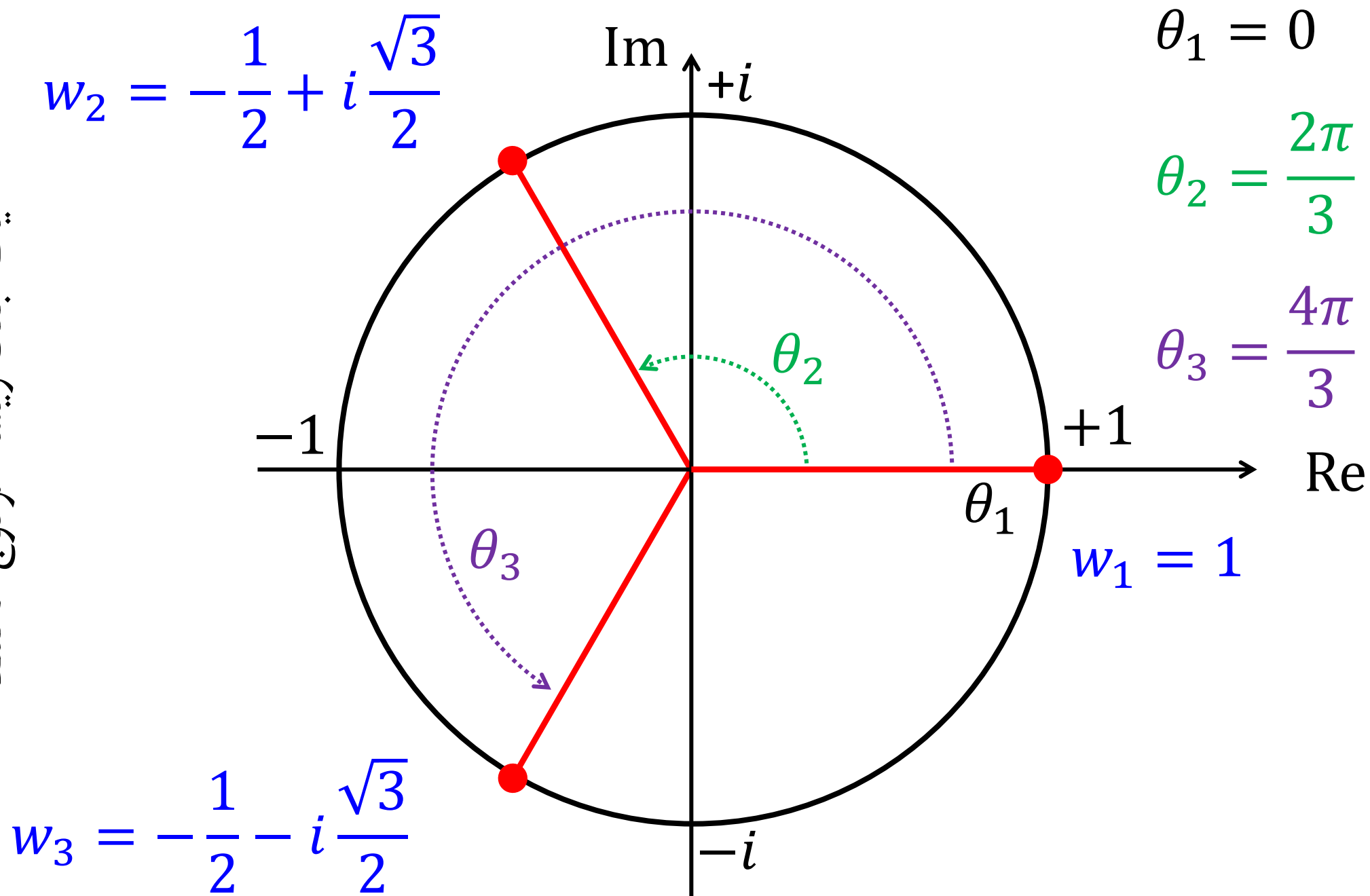
$$w = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{1} \rightarrow w = e^{\frac{2k\pi i}{3}}, k = 0, 1, 2$$

$$k = 0 \rightarrow w_1 = e^0 = 1$$

$$k = 1 \rightarrow w_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 2 \rightarrow w_3 = e^{\frac{4\pi i}{3}} = \cos(4\pi/3) + i \sin(4\pi/3) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

یک جفت ریشه مزدوج مختلط



مثال: ریشه چهارم $z = -1$ را بیابید:

برای اینکه ریشه عدد مختلط $z = -1$ را به دست بیاوریم، یعنی باید معادله $w^4 = -1$ را حل کنیم.

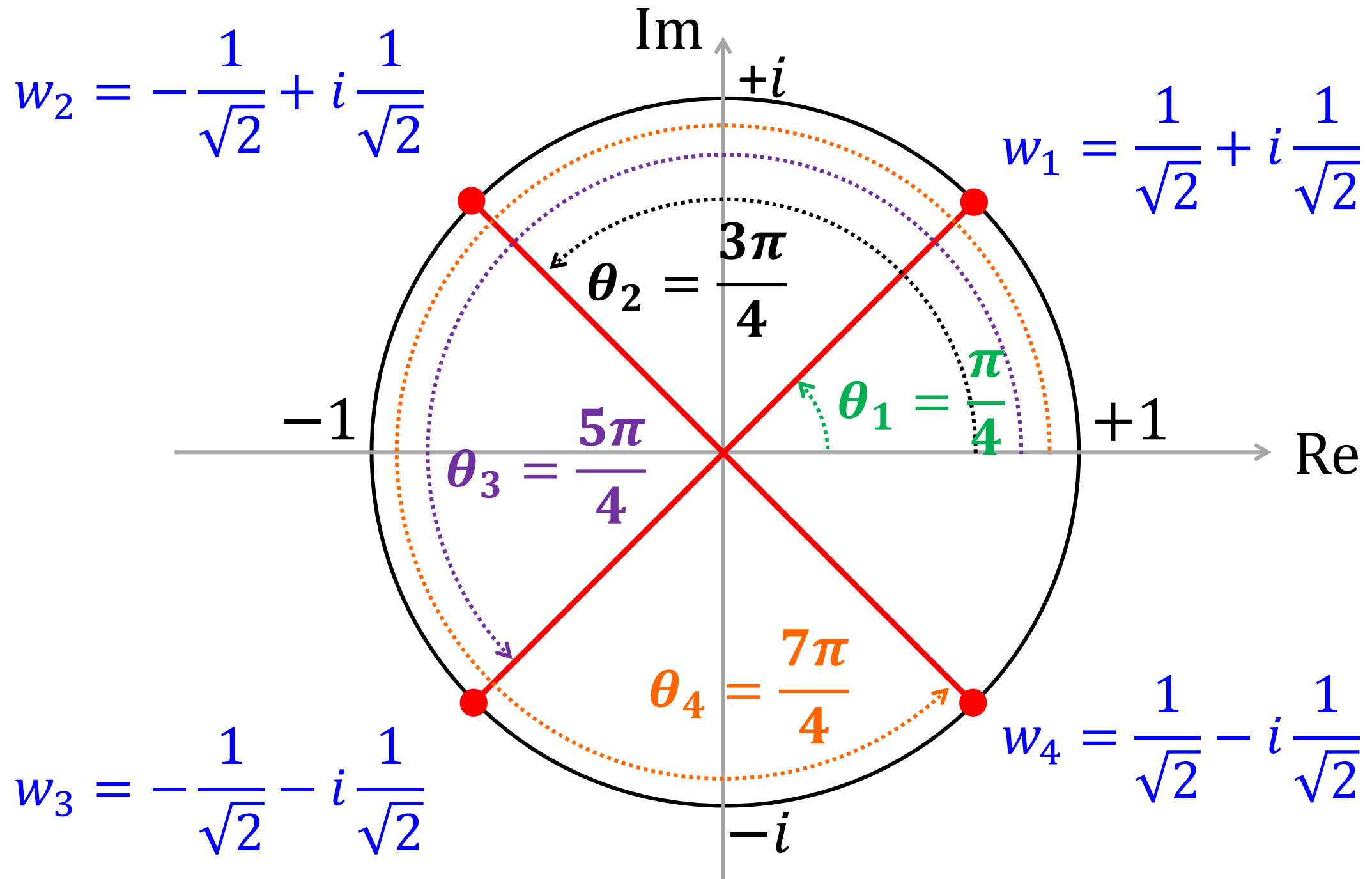
$$z = -1 = 1e^{(\pi+2k\pi)i} \rightarrow w = \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{-1} \rightarrow w = e^{\frac{(\pi+2k\pi)i}{4}}$$

$$k = 0 \rightarrow w_1 = e^{\frac{\pi}{4}i} = \cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4) = \left(1/\sqrt{2}\right) + i\left(1/\sqrt{2}\right)$$

$$k = 1 \rightarrow w_2 = e^{\frac{3\pi}{4}i} = \cos(3\pi/4) + i \sin(3\pi/4) = -0.7 + 0.7i$$

$$k = 2 \rightarrow w_3 = e^{\frac{5\pi}{4}i} = \cos(5\pi/4) + i \sin(5\pi/4) = -0.7 - 0.7i$$

$$k = 3 \rightarrow w_4 = e^{\frac{7\pi}{4}i} = \cos(7\pi/4) + i \sin(7\pi/4) = 0.7 - 0.7i$$



مثال: مقدار عبارت روبه‌رو را بیابید:

$$w = \sqrt[3]{\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^2}$$

□ راهبرد: ابتدا شکل مختلط اعداد $z_1 = 1 - i$ و $z_2 = \sqrt{3} + i$ را به دست می‌آوریم.

□ سپس تقسیم آنها را یافته و به توان ۲ می‌رسانیم و در آخر ریشه سوم می‌گیریم.

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}, \quad z_2 = \sqrt{3} + i = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$\rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{1-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)i} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5\pi}{12}i}$$

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5\pi}{12}i}\right)^2 = \frac{1}{2}e^{-\frac{5\pi}{6}i}$$

$$w = \sqrt[3]{\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}e^{-\frac{5\pi}{6}i}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}e^{\frac{-\frac{5\pi}{6}+2k\pi}{3}i}, k = 0,1,2$$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}e^{-\frac{5\pi}{18}i}, \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}e^{\frac{7\pi}{18}i}, \quad w_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}e^{\frac{19\pi}{18}i} \quad \blacksquare$$

مثال: معادلهٔ روبه‌رو را حل کنید. $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$

برای معادلاتی که ضرایب آن برابر ۱ است، کافی است طرفین را در $1 - z$ ضرب کنیم:

$$(1 - z)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4) = 0$$

$$1 - z^5 = 0 \rightarrow z^5 = 1 \rightarrow z = \sqrt[5]{1}$$

پس ریشه‌های پنجم عدد ۱ جواب‌های این معادله خواهند بود.

$$w = 1 = e^{2k\pi i} \rightarrow z = w^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{2k\pi i}{5}}$$

$$k = 0 \rightarrow z_1 = 1$$

$$z = w^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{2k\pi}{5}i}$$

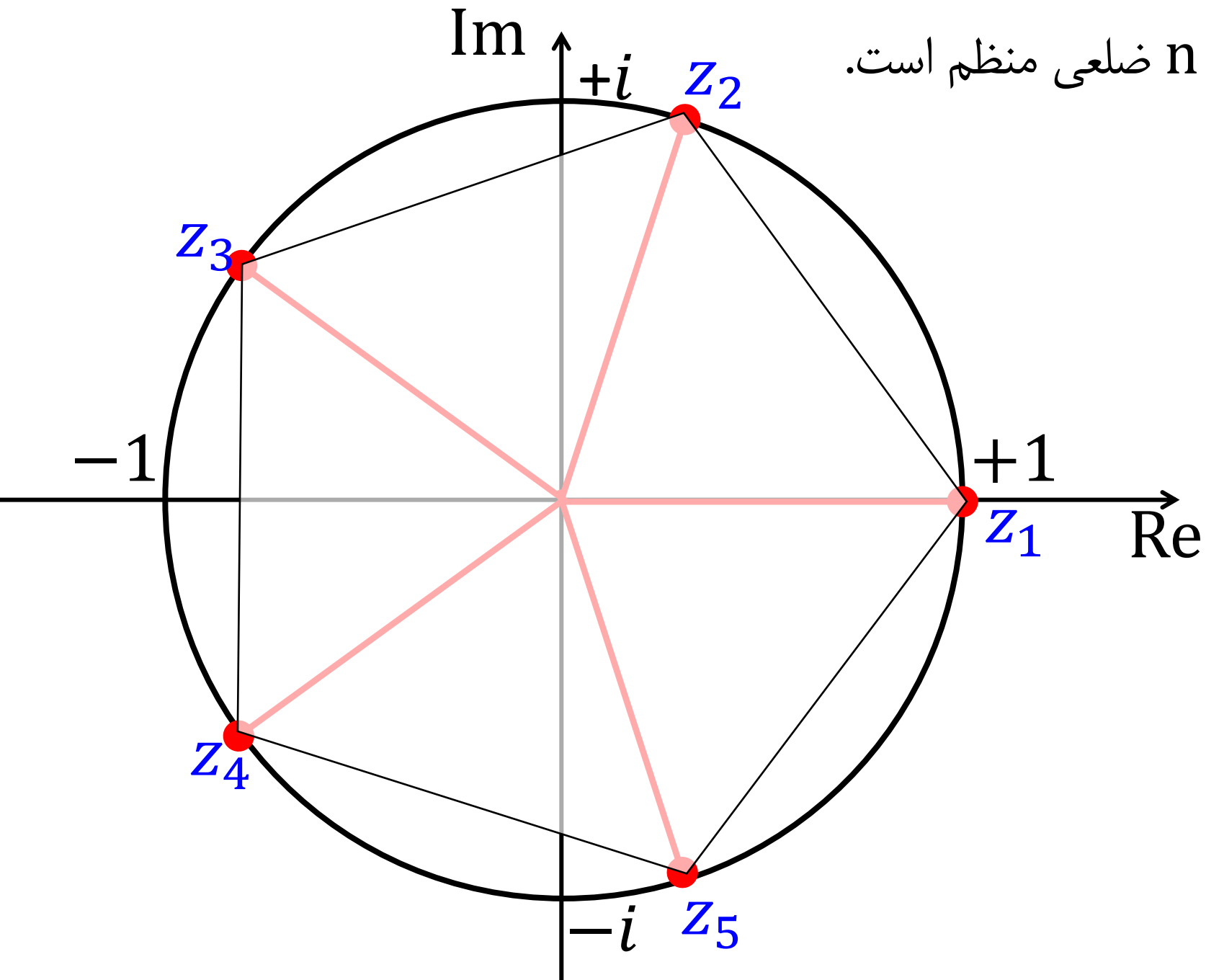
$$k = 1 \rightarrow z_2 = e^{\frac{2\pi}{5}i} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$k = 2 \rightarrow z_3 = e^{\frac{4\pi}{5}i} = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$k = 3 \rightarrow z_4 = e^{\frac{6\pi}{5}i} = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$k = 4 \rightarrow z_5 = e^{\frac{8\pi}{5}i} = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

ریشه‌های n ام عدد ۱ ، همواره یک n ضلعی منظم است.



۵-۳- ارتباط معادلات مثلثاتی و نمایش نمایی اعداد مختلط

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta \rightarrow \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

♦ سمت راست عبارتهای بالا بیانگر فضای مختلط و سمت چپ کاملاً حقیقی است.

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

مثال: معادلهٔ روبه‌رو را اثبات کنید:

$$\sin x \cos y = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \times \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

$$= \frac{e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)} - e^{-i(x+y)}}{4i}$$

$$= \frac{e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}}{4i} + \frac{e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)}}{4i}$$

$$\begin{aligned}
 \sin y \cos x &= \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \times \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\
 &= \frac{e^{i(x+y)} + e^{-i(x-y)} - e^{i(x-y)} - e^{-i(x+y)}}{4i} \\
 &= \frac{e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}}{4i} - \frac{e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)}}{4i}
 \end{aligned}$$

$$\sin x \cos y + \sin y \cos x = \frac{e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}}{2i} = \sin(x + y) \quad \blacksquare$$

$$\sin x \cos y - \sin y \cos x = \frac{e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)}}{2i} = \sin(x - y) \quad \blacksquare$$

$$\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

مثال: معادله زیر را اثبات کنید:

$$\cos^3 \theta = \left[(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) / 2 \right]^3$$

$$= \frac{1}{8} \left[(e^{i\theta})^3 + 3(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta}) + 3(e^{i\theta})(e^{-i\theta})^2 + (e^{-i\theta})^3 \right]$$

$$= \frac{1}{8} (e^{i3\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-i3\theta})$$

$$4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta = \frac{e^{i3\theta}}{2} + \frac{3e^{i\theta}}{2} + \frac{3e^{-i\theta}}{2} + \frac{e^{-i3\theta}}{2} - \frac{3e^{i\theta}}{2} - \frac{3e^{-i\theta}}{2}$$

$$= \frac{e^{i3\theta} + e^{-i3\theta}}{2} = \cos 3\theta \quad \blacksquare$$

۵-۴- توان n ام یک عدد مختلط

اگر z عددی مختلط با اندازه ۱ باشد، داریم:

$$z = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

حال توان n ام عدد z را محاسبه کنیم:

$$z^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

از اتحاد دو جمله‌ای یا بسط نیوتن (Binomial expansion) استفاده می‌کنیم:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} z^n &= \binom{n}{0} \cos^n \theta (i \sin \theta)^0 + \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta (i \sin \theta)^1 \\ &+ \cdots + \binom{n}{n} \cos^0 \theta (i \sin \theta)^n \end{aligned}$$

$$z^n = \binom{n}{0} \cos^n \theta + i \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta \\ - i \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta + \dots$$

با تساوی قرار دادن این عبارت با معادله زیر خواهیم داشت:

$$z^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$\begin{cases} \text{Re: } \cos n\theta = \binom{n}{0} \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta - \dots \\ \text{Im: } \sin n\theta = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \theta \sin^5 \theta - \dots \end{cases}$$

مثال: با استفاده از بسط $(1 + i)^n$ مقدار سری روبه‌رو را بیابید.

$$I = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots$$

برای به دست آوردن $(1 + i)^n$ از دو روش بسط نیوتن و مثلثاتی استفاده می‌کنیم.

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \rightarrow (1 + i)^n = \sqrt{2}^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

$$\odot \rightarrow \{x = 1, y = i\}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} i + \binom{n}{2} i^2 + \binom{n}{3} i^3 + \binom{n}{4} i^4 + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}i - \binom{n}{2} - \binom{n}{3}i + \binom{n}{4} + \binom{n}{5}i + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

با مساوی قرار دادن طرفین و جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی داریم:

$$\begin{cases} \text{Re: } \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} \\ \text{Im: } \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4} \quad \blacksquare \end{cases}$$

مثال: معادلهٔ روبه‌رو را حل کنید.

$$(z + i)^n = (z - i)^n$$

ابتدا دو سمت را بر $(z - i)^n$ تقسیم می‌کنیم:

$$\left(\frac{z + i}{z - i} \right)^n = 1$$

می‌دانیم که شکل نمایی عدد ۱ به صورت $e^{2k\pi i}$ است: $1 = e^{2k\pi i}$

حال از طرفین ریشهٔ n ام می‌گیریم:

$$\left(\frac{z + i}{z - i} \right)^n = e^{2k\pi i} \rightarrow z + i = e^{\frac{2k\pi}{n} i} (z - i)$$

$$z - e^{\frac{2k\pi}{n}i} z = -i - ie^{\frac{2k\pi}{n}i}$$

$$\left(1 - e^{\frac{2k\pi}{n}i}\right) z = -i \left(1 + e^{\frac{2k\pi}{n}i}\right)$$

$$\rightarrow z = i \frac{1 + e^{\frac{2k\pi}{n}i}}{-1 + e^{\frac{2k\pi}{n}i}} \quad \blacksquare$$

فقط در اینجا $k = 0$ موجب صفر شدن مخرج می‌شود و $k \neq 0$ قابل قبول است.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی مهندسی

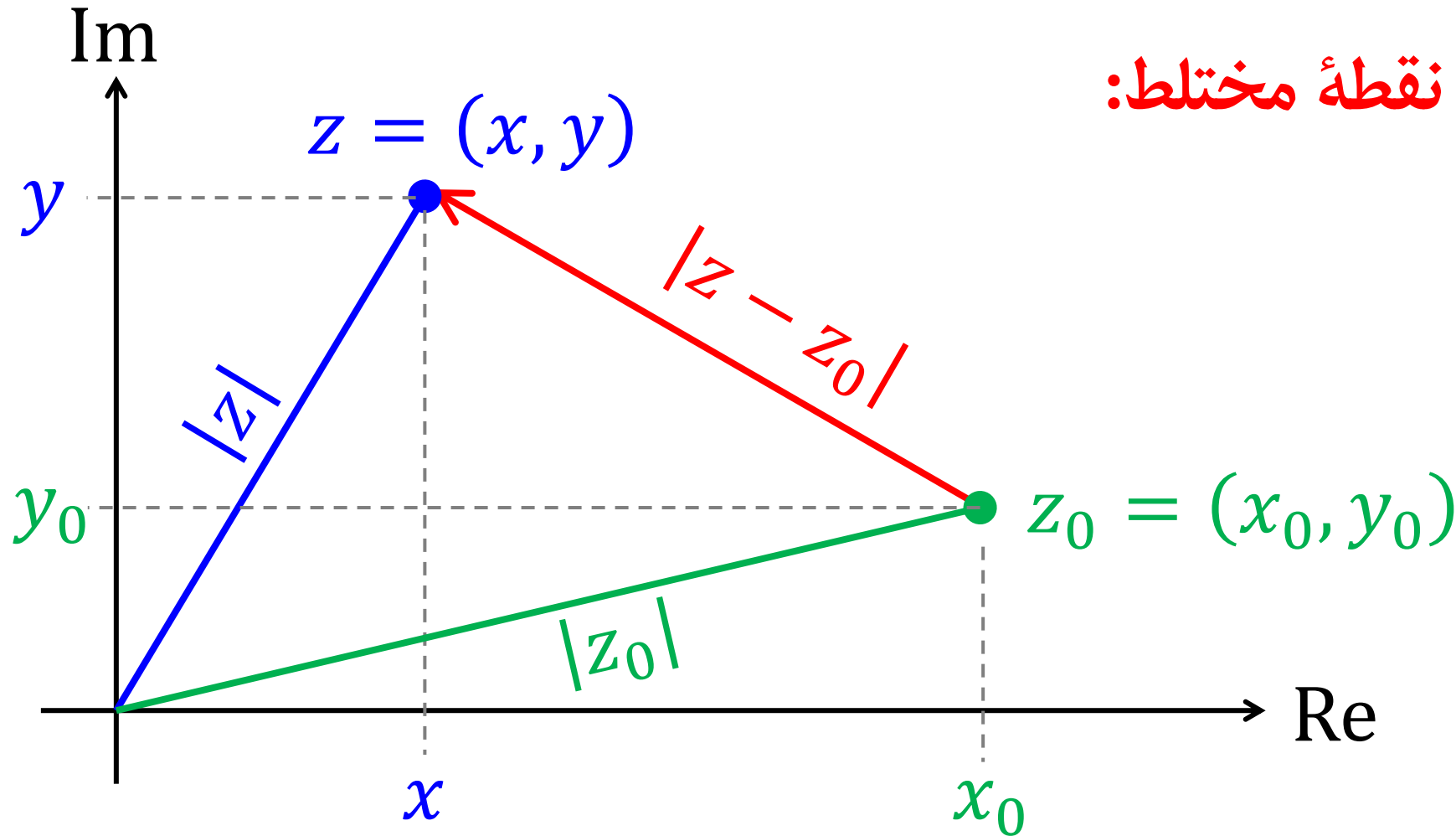
فصل ۱: تحلیل مختلط

بخش ۶: توابع مختلط

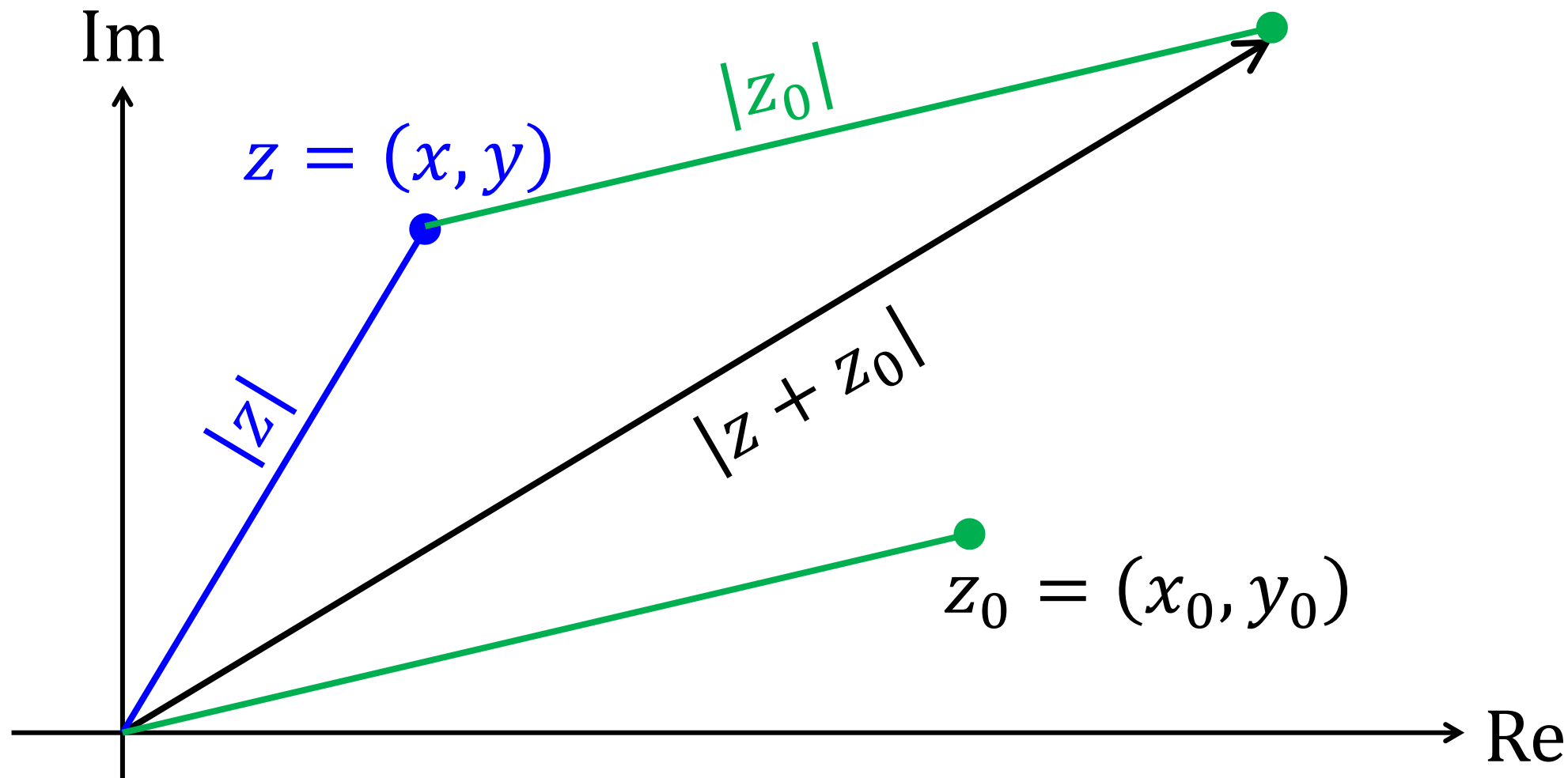
توسط: سید محمد جعفری

٦- توابع مختلط (Complex Functions)

٦-١- فاصله بين دو نقطه مختلط:



$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$



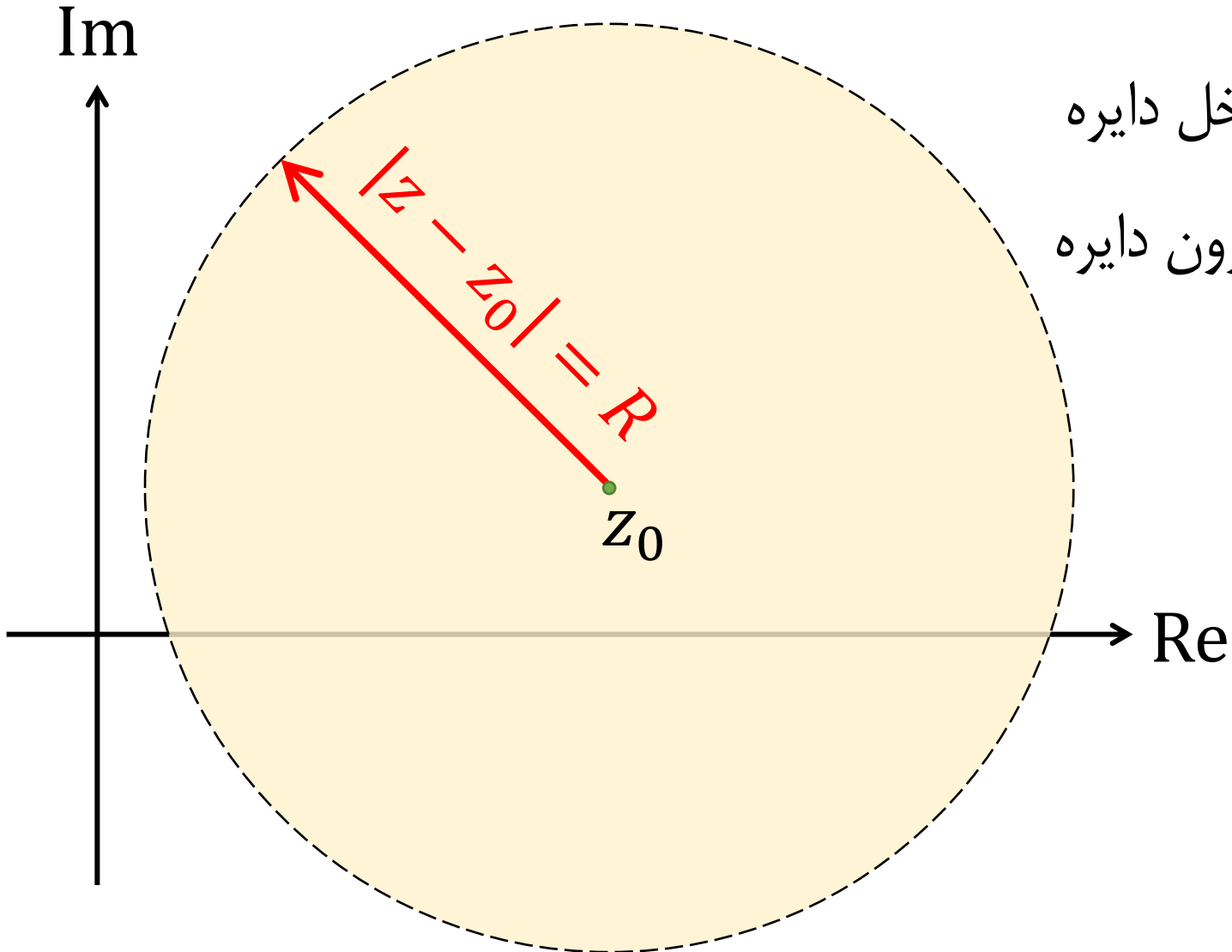
$$|z + z_0| = \sqrt{(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2}$$

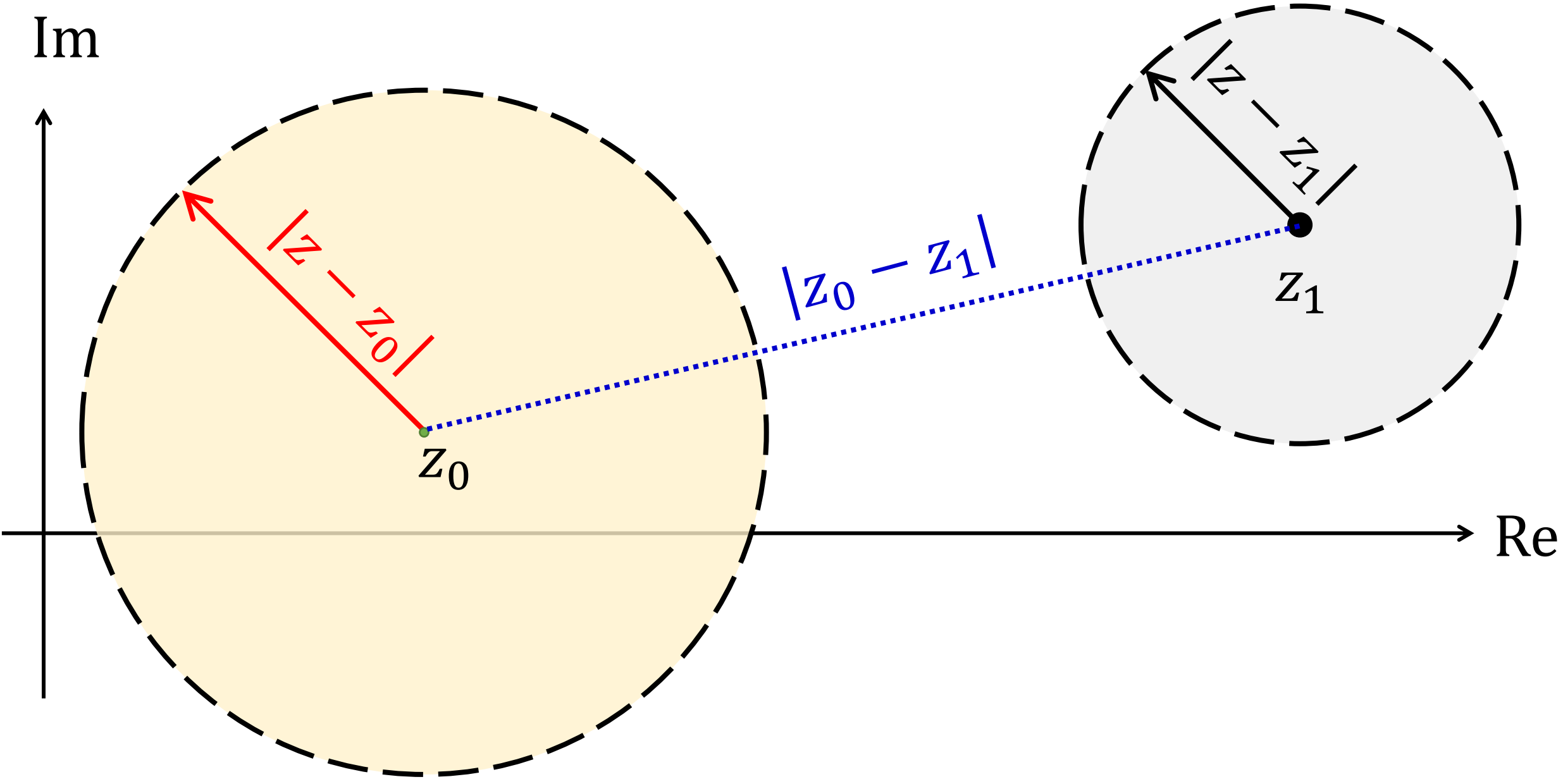
اگر R یک عدد حقیقی باشد، آنگاه:

معادله $|z - z_0| = R > 0$ ، بیانگر معادله دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع R است.

□ نامعادله $|z - z_0| < R$ یعنی نقاط داخل دایره

□ نامعادله $|z - z_0| > R$ یعنی نقاط بیرون دایره



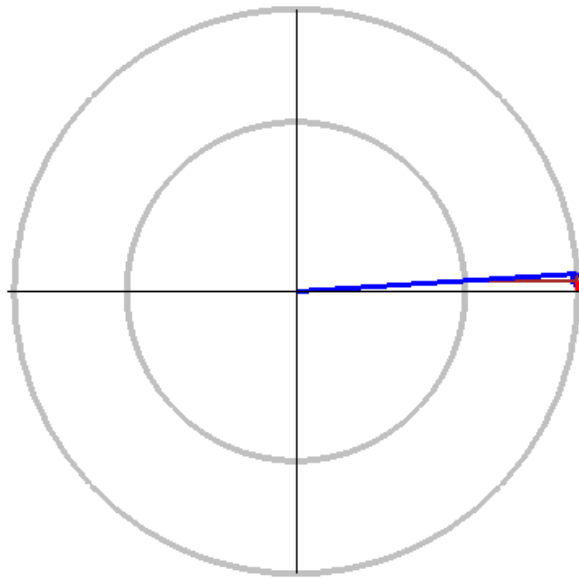
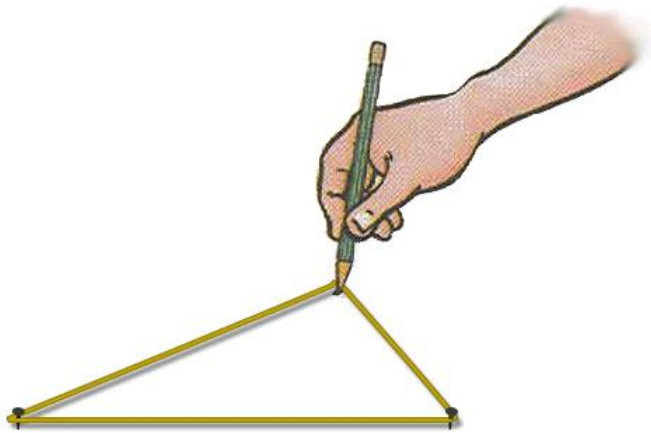


معادله * $|z - z_0| + |z - z_1| = R$ سه حالت دارد:

۱- اگر $|z_0 - z_1| = R$ باشد، معادله * بیانگر پاره خط واصل بین دو نقطه z_0 و z_1 خواهد بود.

۲- اگر $|z_0 - z_1| > R$ باشد، معادله * هیچ شکل و ناحیه‌ای را توصیف نمی‌کند.

۳- اگر $|z_0 - z_1| < R$ باشد، معادله * بیانگر یک بیضی (Ellipse) با کانون‌های z_0 و z_1 خواهد بود که R قطر بزرگ آن است.



معادله $** |z - z_0| - |z - z_1| = R$ سه حالت دارد:

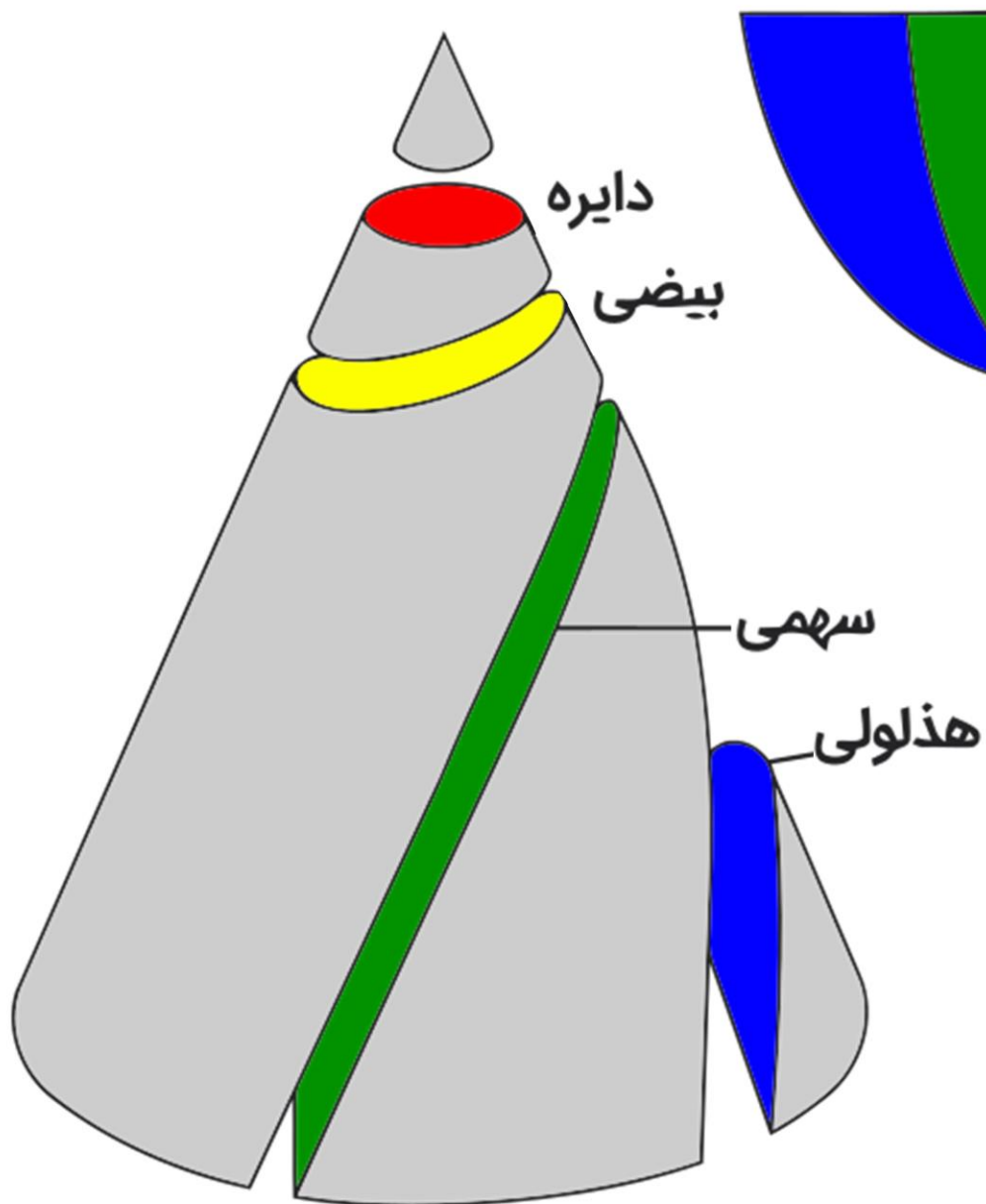
۱- اگر $|z_0 - z_1| = R$ باشد، معادله $**$ بیانگر یک نیم خط در امتداد خط واصل بین دو نقطه

z_0 و z_1 خواهد بود که از z_1 شروع می شود.

۲- اگر $|z_0 - z_1| < R$ باشد، معادله $**$ هیچ شکل و ناحیه ای را توصیف نمی کند.

۳- اگر $|z_0 - z_1| > R$ باشد، معادله $**$ بیانگر یک هذلولی (Hyperbola) با کانون های z_0

و z_1 خواهد بود که R قطر بزرگ آن است.



دایره: $x^2 + y^2 = R^2$

بیضی: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

سهمی: $y^2 = 4ax$

هذلولی: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\left| \frac{z - z_0}{z - z_1} \right| = k > 0 \quad ***$$

رابطه روبه رو نیز بیانگر دو حالت است:

□ اگر $k = 1$ باشد، معادله *** بیانگر عمود منصف پاره خطی با دو سر z_0 و z_1 است.

□ اگر $k \neq 1$ باشد، معادله *** یک دایره با شعاع R به معادله زیر است که مرکز آن روی خط

$$R = \frac{k}{|k^2 - 1|} |z_1 - z_0|$$

واصل بین z_0 و z_1 است.

□ برای اثبات روابط گفته شده کافی است به جای z از $x + iy$ استفاده کرد تا روابطی بین x و y

بدست آید و با رسم آنها به شکل‌های گفته شده رسید.

مثال: مساحت ناحیه روبه رو را بیابید:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{z+i} \right) \geq 1$$

کافی است به جای z از $x + iy$ استفاده کنیم:

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{x+iy+i}$$

$$= \frac{1}{x+i(y+1)} \times \frac{x-i(y+1)}{x-i(y+1)} = \frac{x-i(y+1)}{x^2+(y+1)^2} \quad \text{گویا کردن کسر:}$$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{z+i} \right) = \frac{x}{x^2+(y+1)^2} = 1$$

با در نظر گرفتن قسمت حقیقی آن داریم:

$$x = x^2 + (y+1)^2 \rightarrow (x^2 - x) + (y+1)^2 = 0$$

$$x^2 - x = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{4} \quad *$$

معادله * بیانگر یک دایره به مرکز $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ و شعاع $R = \frac{1}{2}$ است.

پس مساحت ناحیه داخل آن برابر است با: $S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \quad \blacksquare$

مثال: مکان هندسی نقاطی که در معادله زیر صدق می کنند، به دست آورید:

$$\left| \frac{z - 1 + i}{2z - 3i} \right| = \frac{1}{2}$$

$$z = x + iy \rightarrow \frac{z - 1 + i}{2z - 3i} = \frac{x + iy - 1 + i}{2x + 2iy - 3i} = \frac{(x - 1) + i(y + 1)}{(2x) + i(2y - 3)}$$

$$\frac{|z - 1 + i|}{|2z - 3i|} = \frac{\sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2}}{\sqrt{(2x)^2 + (2y - 3)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{(x - 1)^2 + (y + 1)^2}{(2x)^2 + (2y - 3)^2} = \frac{1}{4}$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{4}(2x)^2 + \frac{1}{4}(2y-3)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1$$

$$x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4}$$

$$\rightarrow y = 0.1x + 0.05 \quad \blacksquare$$

پس مکان هندسی مورد نظر یک خط مستقیم است.

۶-۲- ناحیه‌ها و تعاریف روی ناحیه‌ها

□ ۱. صفحه مختلط (complex plane): صفحه‌ای شامل دستگاه مختصاتی با محورهای متعامد به

صورت افقی (محور حقیقی) و عمودی (موهومی) است. واحد محور X (۱) و واحد محور y (i) است.

□ ۲. فاصله بین هر نقطه z تا نقطه دلخواه z_0 که به صورت $|z - z_0|$ نشان داده می‌شود، می‌تواند

نشانگر یک قرص دایره‌ای بدین صورت باشد:

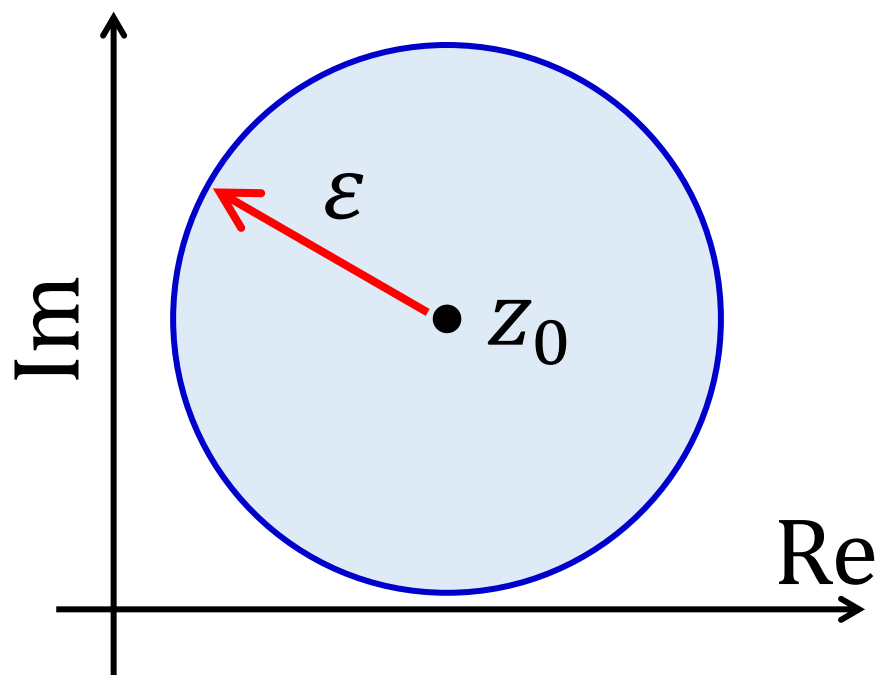
□ قرص دایره‌ای باز (Open Ball): $|z - z_0| < R$

□ قرص دایره‌ای بسته: $|z - z_0| \leq R$

۳- قرص باز با شعاع بی‌نهایت کوچک ε ، یک همسایگی از z_0 نامیده می‌شود و بدین شکل نشان داده می‌شود (نماد مجموعه اعداد مختلط به صورت $\mathbb{C}$ است):

$$N_\varepsilon(z_0) = \{z \mid z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < \varepsilon\}$$

حال اگر خود z_0 را حذف کنیم به همسایگی محذوف z_0 می‌رسیم:



$$N'_\varepsilon(z_0) = N_\varepsilon(z_0) - \{z_0\}$$

۴- فرض کنید S مجموعه‌ای از نقاط در صفحه مختلط $\mathbb{C}$ باشد.

□ **نقطه داخلی:** $z_0 \in S$ را یک نقطه داخلی S می‌نامیم، هرگاه یک همسایگی از z_0 موجود باشد

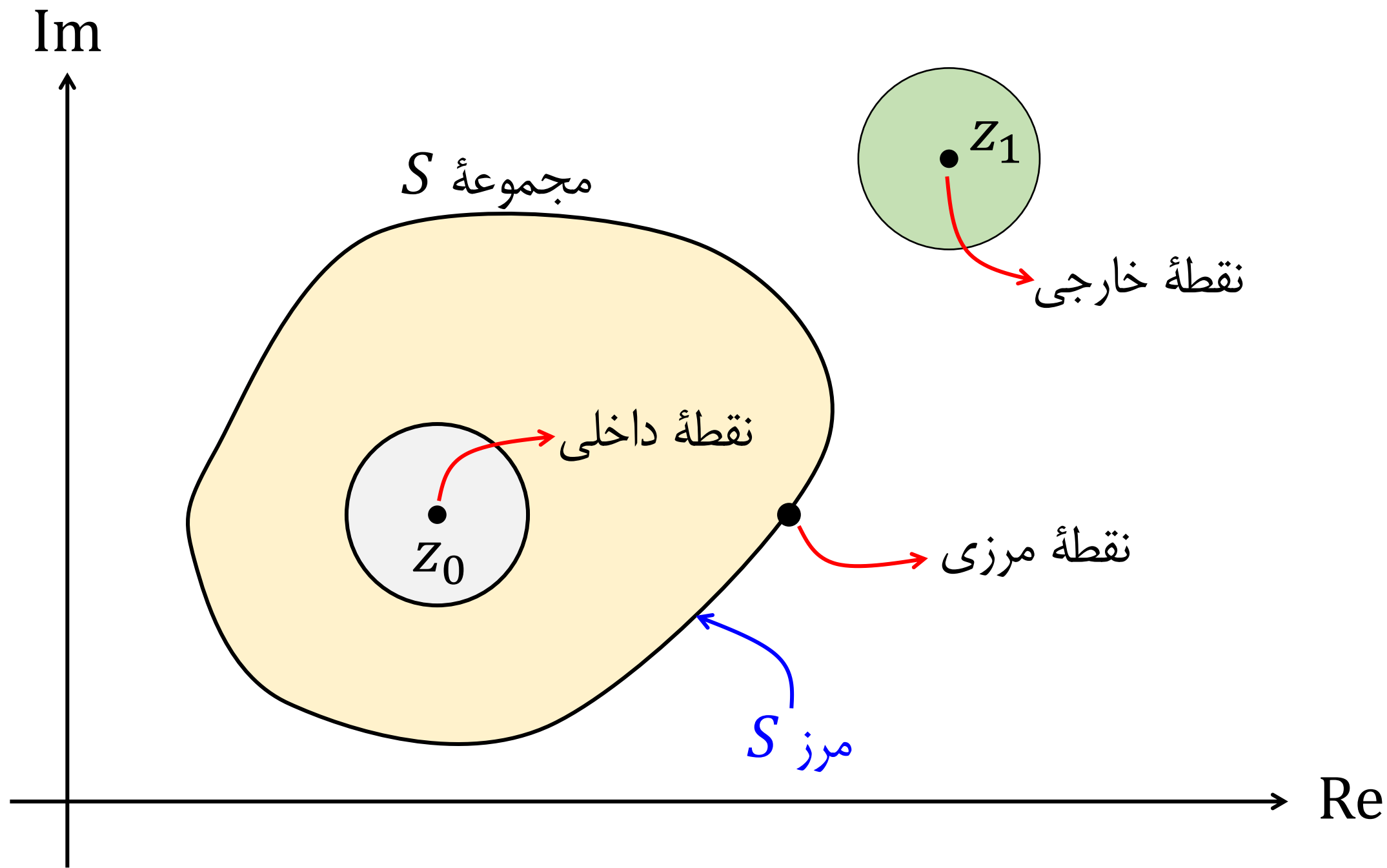
به نحوی که $N_\varepsilon(z_0) \subset S$.

□ **نقطه خارجی:** نقطه z_1 را یک نقطه خارجی S گوئیم، هرگاه یک همسایگی از z_1 یافت شود

که $N_\varepsilon(z_1) \subset \mathbb{C} - S$ باشد.

□ **نقطه مرزی:** هرگاه نقطه‌ای نه داخلی و نه خارجی باشد، نقطه مرزی S نامیده می‌شود و

مجموعه تمام نقاط مرزی S را مرز S گویند.



۵- مجموعه S را باز گوئیم، هرگاه هر نقطه متعلق به آن یک نقطه داخلی باشد (یعنی مرز نداشته باشد) و مجموعه S را بسته گوئیم، هرگاه مکمل آن باز باشد (یعنی مرز داشته باشد).

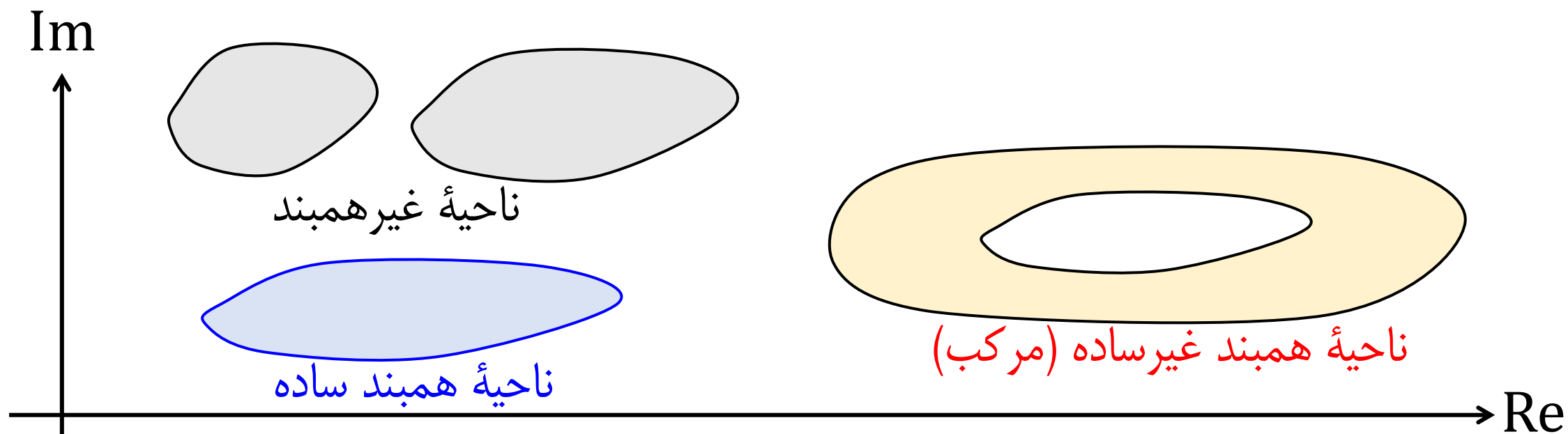
۶- مجموعه S را کراندار گوئیم، هرگاه داشته باشیم:

$$\exists N \in \mathbb{R} \mid \forall z \in S, |z| < N$$

۷- مجموعه S را همبند گوییم، اگر هر دو نقطه دلخواه آن را بتوان با یک خط شکسته به هم وصل کرد به گونه‌ای که تمام آن خط شکسته درون S قرار داشته باشد.

□ مجموعه همبند باز را حوزه می‌نامیم.

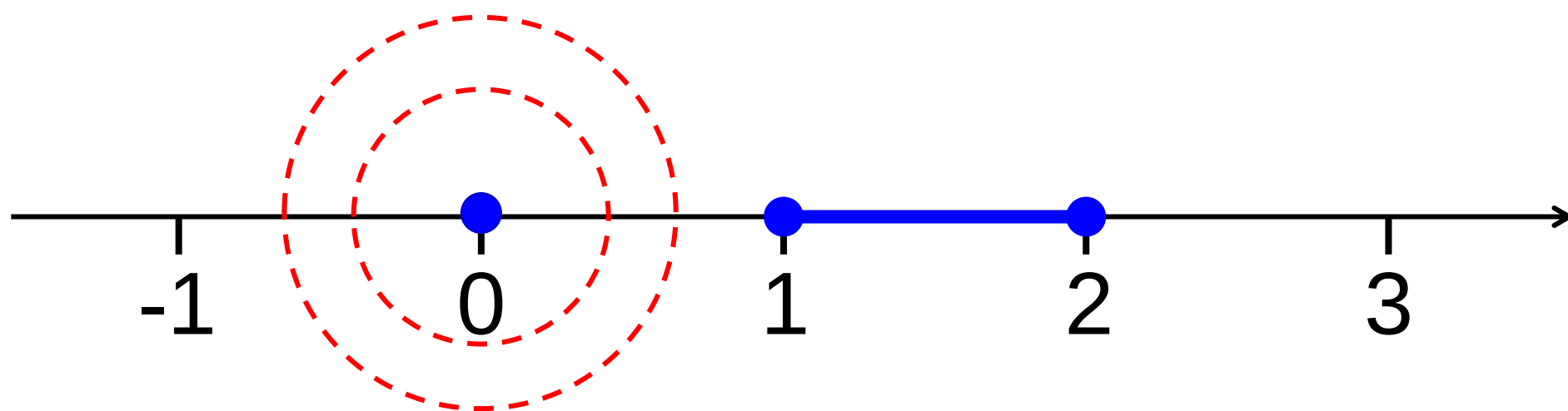
□ مجموعه S را همبند ساده گوییم اگر هر منحنی بسته واقع در S را بتوان در یک نقطه منقبض کرد به گونه‌ای که ضمن انقباض منحنی مذکور، همواره در S واقع باشد.



۸- هرگاه S ناحیه‌ای از صفحه مختلط باشد و z_0 متعلق به S باشد:

الف: z_0 را یک نقطه مجزای S گویند (Isolated point)، هرگاه z_0 دارای یک همسایگی باشد که

شامل نقطه دیگری از S نیست.



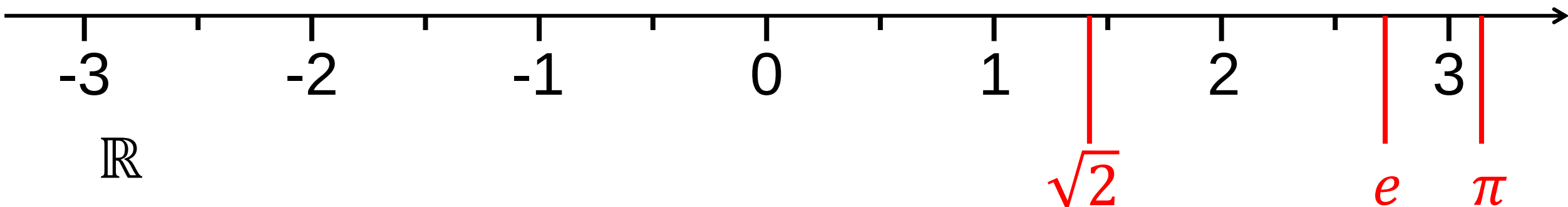
$$A = \{0\} \cup [1, 2]$$

ب: z_0 را یک نقطه انباشتگی یا حدی S گویند (limit point (or cluster point or accumulation point)، هرگاه هر همسایگی z_0 شامل حداقل یک نقطه عضو S باشد (غیر از z_0))، در نتیجه شامل بی‌نهایت نقطه عضو S خواهد بود.

□ نقطه حدی می‌تواند عضو مجموعه S باشد یا نباشد و این موضوع در تعریف مذکور تأثیری ندارد.

□ یک مجموعه متناهی دارای نقطه حدی نیست.

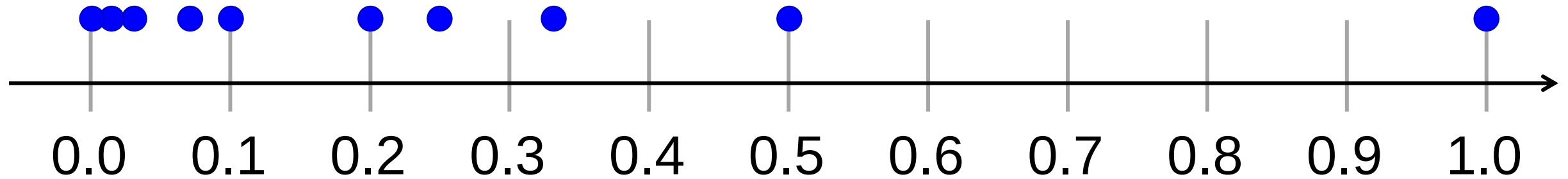
□ نقطه حدی در تعریف مفاهیمی چون حد پدیدار می‌گردد.



□ با در نظر گرفتن اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ ، اگر $A = (0,1]$ باشد، آنگاه نقطه 0، یک نقطه حدی بازه A است. همچنین عدد 0.5 نیز نقطه حدی دیگر آن است. در واقع هر نقطه بازه $(0,1]$ ، یک نقطه حدی A است؛ ولی هیچ عضو دیگر اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ ، نقطه حدی A نیست.

□ مجموعه نامتناهی $\mathbb{N}$ (مجموعه اعداد طبیعی = Natural number) نقطه حدی ندارد.

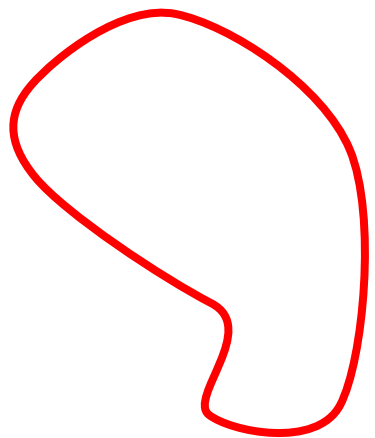
□ مجموعه اعداد زیر، تنها یک نقطه انباشتگی در مبدأ دارد. هیچ یک از نقاط دیگر A نقطه حدی آن نیست:



$$A = \left\{ S_n = \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

۹- منحنی C با معادله پارامتری $z(t) = x(t) + i y(t)$ که $t \in [a, b]$ را بسته گوئیم هرگاه:

$$z(a) = z(b)$$

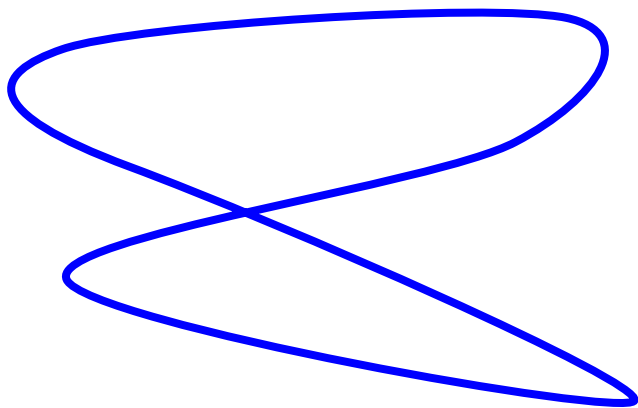


۱۰- اگر یک منحنی خود را قطع نکند یعنی برای هر t_1 و t_2 داشته باشیم:

$$t_1 \neq t_2 \longrightarrow z(t_1) \neq z(t_2)$$

Jordan curves

در این صورت منحنی را ساده گوئیم.



۱۱- هر منحنی ساده بسته را یک خم جُردن (Jordan curve) می گوئیم.

Non-Jordan curves

۱۲- منحنی که دارای مشتقات پیوسته باشد، هموار (smooth continuous curve) نامیده می‌شود. یک منحنی قطعه‌ای هموار است هرگاه متشکل از تعداد متناهی منحنی هموار باشد که انتهای هر یک به ابتدای دیگری وصل باشد. این منحنی را کانتور (Contour) نیز می‌نامیم.

۱۳- اگر منحنی C یک خم جردن باشد، مکمل آن از دو مجموعه مجزا تشکیل می‌شود. یکی میدانی کراندار موسوم به درون، دیگری میدانی بی‌کران موسوم به بیرون که خم C مرز این دو میدان است.

۶-۳- تعریف تابع مختلط

□ فرض کنید S مجموعه‌ای از اعداد مختلط باشد.

□ در این حالت تابع مختلط $w = f(z)$ که در S تعریف شده است، عبارت است از روشی که به هر

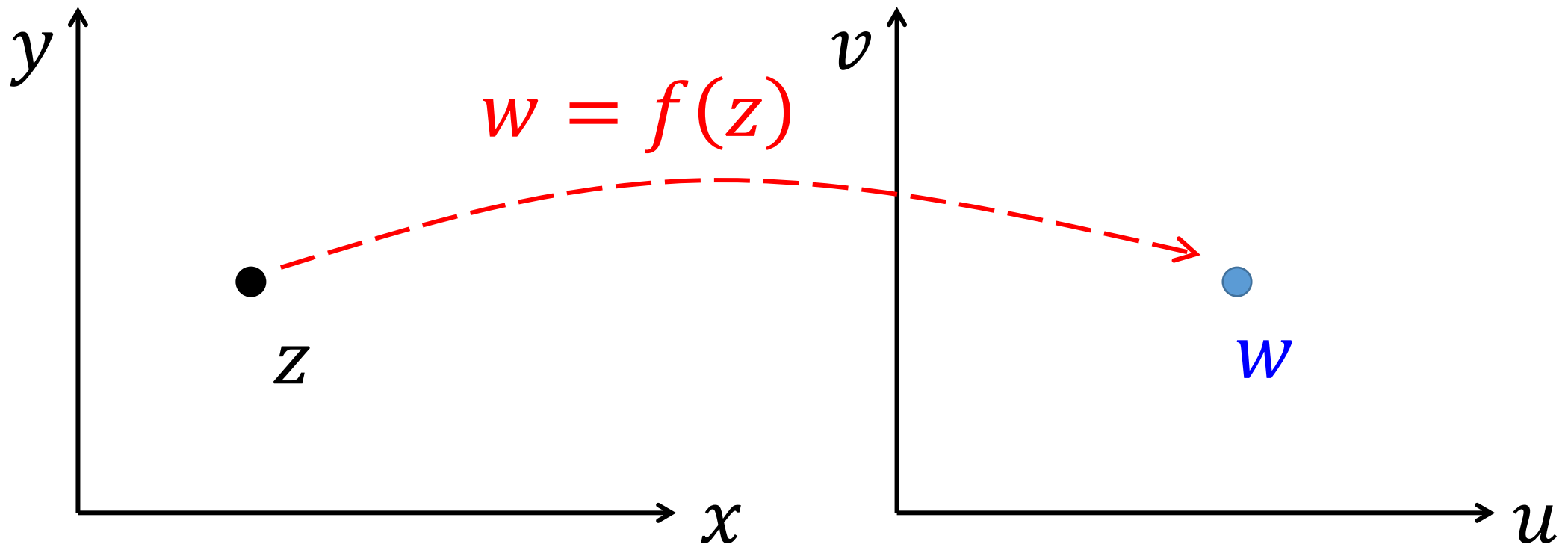
عدد مختلط در S یک عدد مختلط مانند w را نسبت می‌دهد.

□ مجموعه S را حوزه تعریف تابع $f(z)$ و مجموعه اعداد مختلطی را که w اختیار می‌کند، برد تابع

می‌نامیم.

□ به بیان ساده‌تر می‌توان گفت تابع مختلط دستگاهی است که ورودی آن عدد مختلط $z = x + iy$

و خروجی آن $w = u + iv$ است.



$$z = x + iy \longrightarrow \boxed{f(z)} \longrightarrow w = u + iv$$

پس دو شکل نمایش برای توابع مختلط داریم: $w = f(z)$ و $w = u + iv$

مثال: تابع مختلط $w = f(z) = z^2 + 1$ را به شکل دیگر $w = u + iv$ بازنویسی کنید:

پاسخ: به جای $z = x + iy$ قرار می‌دهیم:

$$w = f(z) = z^2 + 1 = (x + iy)^2 + 1$$

$$= x^2 + 2ixy + i^2y^2 + 1$$

$$= (x^2 - y^2 + 1) + i(2xy)$$

$$w = u + iv \rightarrow u = x^2 - y^2 + 1, v = 2xy$$

پس داریم:

مثال: برعکس مثال قبل را حل کنید:

روش اول:

$$w = u + iv \rightarrow w = (x^2 - y^2 + 1) + i(2xy)$$

$$z = x + iy, \bar{z} = x - iy \rightarrow x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

پس می‌خواهیم شکل $w = f(z)$ را به دست آوریم:

$$\rightarrow w = \left[\left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 - \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 + 1 \right] + i \left(2 \times \frac{z + \bar{z}}{2} \times \frac{z - \bar{z}}{2i} \right)$$

$$\begin{aligned}
w &= \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 - \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 + 1 + \frac{(z + \bar{z})(z - \bar{z})}{2} \\
&= \left(\frac{z^2 + \bar{z}^2 + 2z\bar{z}}{4} \right) - \left(\frac{z^2 + \bar{z}^2 - 2z\bar{z}}{4i^2} \right) + 1 + \frac{z^2}{2} - \frac{\bar{z}^2}{2} \\
&= \frac{z^2}{4} + \frac{\bar{z}^2}{4} + \frac{z\bar{z}}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{\bar{z}^2}{4} - \frac{z\bar{z}}{2} + 1 + \frac{z^2}{2} - \frac{\bar{z}^2}{2} \\
&= z^2 + 1 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

روش دوم (ساده تر):

□ فرض: $x = z, y = 0$

□ نکته: برای استفاده از این روش باید تابع تحلیلی باشد (بعداً به آن پرداخته می شود)

$$w = (x^2 - y^2 + 1) + i(2xy) \rightarrow \begin{cases} x \rightarrow z \\ y \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$w = (z^2 - 0 + 1) + i(2 \times z \times 0) = z^2 + 1 \quad \blacksquare$$

نمایش نمایی توابع مختلط:

برای اینکار قرار می‌دهیم:

$$\left. \begin{array}{l} z = re^{i\theta} \\ \bar{z} = re^{-i\theta} \end{array} \right\} \begin{array}{l} r = \sqrt{|z\bar{z}|} \\ \frac{z}{\bar{z}} = e^{2i\theta} \rightarrow 2i\theta = \ln\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) \end{array}$$

نمایش مثلثاتی (قطبی) توابع مختلط:

برای تبدیل شکل دکارتی به شکل قطبی، داریم:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

در توابع تحلیلی که بعداً توضیح داده می‌شود، نیز می‌توان از جایگذاری زیر استفاده کرد:

$$\begin{cases} r \rightarrow z \\ \theta \rightarrow 0 \end{cases}$$

مثال: شکل قطبی تابع روبه‌رو را به دست آورید. $f(z) = z + \frac{1}{z} + \operatorname{Re}(z^2)$

تک تک جملات را به شکل قطبی جایگذاری می‌کنیم:

$$f(z) = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} + \operatorname{Re}(r^2 \cos 2\theta + ir^2 \sin 2\theta)$$

$$f(z) = r \cos \theta + ir \sin \theta + \frac{1}{r} \cos \theta - \frac{i}{r} \sin \theta + r^2 \cos 2\theta$$

$$f(z) = \left(r \cos \theta + r^2 \cos 2\theta + \frac{1}{r} \cos \theta \right) + i \left(r \sin \theta - \frac{1}{r} \sin \theta \right) \quad \blacksquare$$

مثال: تابع روبه‌رو را به بر حسب تابعی از Z بازنویسی کنید.

$$w = 3^x \sin(y \ln 3) - i3^x \cos(y \ln 3)$$

پاسخ:

$$\begin{cases} x \rightarrow z \\ y \rightarrow 0 \end{cases} \rightarrow w = 3^z \sin(0 \times \ln 3) - i3^z \cos(0 \times \ln 3) = -i3^z$$

$$\rightarrow w = f(z) = -i3^z \quad \blacksquare$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی مهندسی

فصل ۱: تحلیل مختلط

بخش ۷: حد و مشتق، قسمت اول: حد

توسط: سید محمد جعفری

۷-۱- حد و پیوستگی توابع مختلط (Limit, continuity)

حد توابع مختلط مانند حد توابع دو متغیری است و بدین شکل تعریف می‌شود:

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف z_0 تعریف شده باشد،

در این صورت $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ است، هرگاه:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |z - z_0| < \delta \rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

تابع $f(z)$ را در $z = z_0$ پیوسته گوئیم هرگاه: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

□ اگر $f(z)$ را به شکل دکارتی بنویسیم، آنگاه از دو تابع دو متغیری تشکیل می‌شود.

□ حد تابع $f(z)$ برابر می‌شود با مجموع حد این دو تابع:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z_0 = (x_0, y_0)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) + i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y)$$

پس برای حد و پیوستگی تابع $f(z)$ می‌توان حد و پیوستگی توابع u و v را بررسی کرد.

در توابع مختلط، حدهای بی‌نهایت نیز داریم که بدین صورت تعریف می‌شوند:

۱- تابع $w = f(z)$ دارای حد در بی‌نهایت است هرگاه وقتی $|z| \rightarrow \infty$ ، $f(z)$ به سمت عددی متناهی و مشخص میل کند.

شرط آنکه $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0$ باشد برقراری شرط منطقی زیر است:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 ; |z| > M \rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

پس در حدهایی که $z \rightarrow \infty$ است، کافی است اندازه z یعنی r یا $|z|$ ، به بی‌نهایت میل کنند.

۲- حد تابع $w = f(z)$ در z_0 بی‌نهایت است هرگاه وقتی $z \rightarrow z_0$ ، $|f(z)|$ به سمت

بی‌نهایت میل کند.

شرط آنکه داشته باشیم $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ این است که:

$$\forall N > 0, \exists \delta > 0 ; 0 < |z - z_0| < \delta \rightarrow |f(z)| > N$$

۳- اگر $|z| \rightarrow \infty$ و داشته باشیم $|f(z)| \rightarrow \infty$ در این شرایط تابع $w = f(z)$ حد بی‌نهایت در بی‌نهایت دارد.

شرط آنکه حد $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ برقرار باشد این است که:

$$\forall N > 0, \exists M > 0 ; |z| > M \rightarrow |f(z)| > N$$

نکته ۱: تمام قضایای حد بویژه قاعده هوییتال، در حد توابع مختلط نیز برقرار است.

نکته ۲: برای بررسی وجود حد توابع u و v می‌توانیم دو مسیر مختلف را مانند حد توابع دو متغیری بررسی کنیم.

مثال: با استفاده از تعریف حد، ثابت کنید:

$$\lim_{z \rightarrow 3i} z^2 = -9$$

ابتدا تعریف را می‌نویسیم:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; 0 < |z - 3i| < \delta \rightarrow |z^2 - (-9)| < \varepsilon$$

$$|z^2 - (-9)| = |z - 3i||z + 3i| < \varepsilon$$

حال از آخر شروع می‌کنیم:

می‌دانیم که $|z - 3i| < \delta$ است اما باید حدی برای $|z + 3i|$ بیابیم. برای اینکار فرض

می‌کنیم $\delta = 1$ باشد. در این صورت کافی است در $|z + 3i|$ عبارت $z - 3i$ را بسازیم:

$$|z - 3i| < \delta = 1 \rightarrow |z + 3i| = |(z - 3i) + 6i|$$

حال از نامساوی مثلثی داریم:

$$|z + 3i| = |(z - 3i) + 6i| < (|z - 3i| + |6i| = 1 + 6)$$

$$\rightarrow |z + 3i| < 7$$

مشخص شد با فرض $\delta = 1$ بالاترین کران برای $|z + 3i|$ برابر ۷ است. پس داریم:

$$|z^2 + 9| = |z + 3i||z - 3i| < 7\delta \leq \varepsilon \rightarrow 0 \leq \delta \leq \frac{\varepsilon}{7}$$

□ پس دو مقدار برای حد δ یافتیم یک مقدار $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$ ، مقدار بعدی را نیز فرض کردیم $\delta = 1$ باشد.

□ ولی جواب مسأله آن مقداری است که اشتراک این دو مقدار باشد، پس کمینه δ را فرض می‌کنیم:

$$\delta_{\max} = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{7} \right\} \rightarrow 0 < \delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{7} \right\}$$

□ در نتیجه کاری که در اثبات حد می‌کنیم این است که به ازاء هر ε باید بتوانیم کران بالایی برای δ بیابیم.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}}$$

مثال: بررسی کنید که حد روبه‌رو وجود دارد یا خیر.

□ برای اینکار دو روش داریم:

۱. از دو مسیر جداگانه به $z = 0$ نزدیک می‌شویم و بررسی می‌کنیم که آیا پاسخ حد به مسیر بستگی دارد؟ اگر پاسخ به مسیر وابسته بود، یعنی حد وجود ندارد چون جواب حد باید یکتا باشد.
۲. روی خط $y = mx$ به $z = 0$ نزدیک می‌شویم. اگر مقدار حد به m بستگی داشت یعنی به ازاء هر m یک جواب دارد، حد وجود نخواهد داشت.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + iy}{x - iy}$$

مسیر: $y = mx$ 

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + imx}{x - imx}$$

$$= \frac{1 + im}{1 - im} \quad \blacksquare$$

این مقدار به m بستگی دارد، پس حد موجود نیست.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z}$$

مثال: با استفاده از مختصات قطبی، مقدار حد را بیابید:

□ برای اینکه $z \rightarrow 0$ باشد، باید $r \rightarrow 0$ را داشته باشیم.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2}{r (\cos \theta + i \sin \theta)}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{\cos \theta + i \sin \theta} = 0 \times \text{کرانه‌دار} = 0$$

پس حد موجود و برابر با صفر است زیرا مقدار آن به θ بستگی ندارد.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی مهندسی

فصل ۱: تحلیل مختلط

بخش ۷: حد و مشتق، قسمت دوم: مشتق

توسط: سید محمد جعفری

۷-۲- مشتق پذیری و مشتق توابع مختلط (Differentiability, Derivative):

تعریف مشتق توابع مختلط مانند تعریف مشتق در توابع حقیقی است:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

□ مشتق تابع $f(z)$ در نقطه‌ای خاص مانند $z = z_0$ بدین صورت است:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

حال اگر $f(z) = u + iv$ و $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ را جایگذاری کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{[u + \Delta u + i(v + \Delta v)] - (u + iv)}{\Delta z} \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \end{aligned}$$

برای اینکه این مشتق موجود باشد:

یکبار در ابتدا $\Delta x \rightarrow 0$ میل می‌دهیم و بار دیگر $\Delta y \rightarrow 0$

$$\Delta x = 0: f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \frac{1}{i} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta y}$$

$$= \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Delta y = 0: f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

دو مقدار که از دو مسیر متفاوت به دست آمده‌اند، باید برابر باشند تا مشتق موجود باشد.

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases}$$

□ پس شرط مشتق پذیر بودن تابع $f(z)$ ، این است که معادلات بالا برقرار باشند.

□ بعداً در قضایای کشی-ریمان اثبات می کنیم که این شرط، یک شرط لازم است و کافی نیست.

قوانین مشتق در توابع مختلط:

$$(1) (cf)' = cf',$$

$$(2) (f + g)' = f' + g'$$

$$(3) (fg)' = f'g + fg'$$

$$(4) \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(5) (z^n)' = nz^{n-1}$$

ثابت کنید: $(z^n)' = nz^{n-1}$

□ از تعریف مشتق تابع $f(z)$ در نقطه $z_0 \in \mathbb{C}$ شروع می‌کنیم:

$$(z^n)' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^n - z_0^n}{\Delta z}$$

$$(z_0 + \Delta z)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z_0^{n-j} (\Delta z)^j$$

از بسط دوجمله داریم:

$$= z_0^n + nz_0^{n-1}\Delta z + \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} z_0^{n-j} (\Delta z)^j$$

□ پس ساده شده کسر در تعریف مشتق بدین شرح است:

$$\frac{(z_0 + \Delta z)^n - z_0^n}{\Delta z} = nz_0^{n-1} + \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} z_0^{n-j} (\Delta z)^{j-1}$$

□ حال می‌توان تعریف مشتق را به دست آورد:

$$(z^n)' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^n - z_0^n}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[nz_0^{n-1} + \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} z_0^{n-j} (\Delta z)^{j-1} \right] = nz_0^{n-1} \quad \blacksquare$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی مهندسی

فصل ۱: تحلیل مختلط

بخش ۷: حد و مشتق، قسمت سوم: قضایای کشی-ریمان (دکارتی)

توسط: سید محمد جعفری

۷-۳- قضایای کُشی-ریمان (در مختصات دکارتی)

□ قضیهٔ اول کُشی-ریمان (Cauchy–Riemann):

❖ تابع مختلط $f(z)$ را بدین صورت در نظر بگیرید.

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = u + iv$$

□ حال فرض کنید تابع $f(z)$ مشتق‌پذیر باشد.

□ برای بررسی مشتق، می‌توان مقدار z را در دو راستای حقیقی و موهومی تغییر داد.

□ پس مشتق تابع $f(z)$ در قالب حد، بدین شکل قابل بیان است:

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z + t) - f(z)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z + it) - f(z)}{it}$$

□ در معادله قبل t مقداری حقیقی است.

□ همچنین تعریف مشتق را می‌توان در قالب u و v ، بدین شکل بازنویسی کرد:

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z+t) - f(z)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x+t, y) + iv(x+t, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x+t, y) - u(x, y)}{t} + i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x+t, y) - v(x, y)}{t}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad *$$

حال فرض کنید حد فوق در راستای مقدار موهومی it محاسبه شود. در این حالت می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z + it) - f(z)}{it}$$

$$= -i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y + t) + iv(x, y + t) - u(x, y) - iv(x, y)}{t}$$

$$= -i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y + t) - u(x, y)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x, y + t) - v(x, y)}{t}$$

$$= -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad **$$

با توجه به مشتق پذیر بودن f ، می توان گفت که بخش های حقیقی و موهومی در دو عبارت $*$ و $**$ با هم برابر هستند. در نتیجه با اعمال این برابری داریم:

$$\text{معادلات کشی-ریمان: } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

نهایتاً مشتق تابع بدین صورت است:

در یک نقطه مشخص مثلاً در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0$ ، مقدار مشتق تابع برابر است با:

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)} = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)}$$

مثال: مشتق تابع مختلط $z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$ را بیابید.

مشتقات جزئی بخش‌های حقیقی و موهومی نسبت به متغیرهای x و y برابرند با:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(2xy)}{\partial x} = 2y = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} = -(-2y) = 2y$$

توجه: در هنگام مشتق‌گیری نسبت به x ، متغیرهای دیگر (مثلاً در اینجا y)، ثابت فرض می‌شوند و

برعکس.

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i(2y)$$

□ قضیه دوم کشی-ریمان:

□ هرگاه u و v در تابع $f(z) = u + iv$ در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0$ در معادلات کشی-

ریمان صدق کرده و در یک همسایگی از نقطه (x_0, y_0) پیوسته و دارای مشتق اول پیوسته باشند، آنگاه $f'(z_0)$ موجود است.

□ در کل می توان گفت: شرط لازم و کافی برای مشتق پذیری تابع $f(z)$ در $z = z_0$ این است

که توابع u, v, u_x, v_x, u_y, v_y پیوسته بوده و در رابطه کشی-ریمان صدق کنند.

حال بر اساس مشتق پذیر بودن چند تعریف داریم:

۱- نقطه تحلیلی (Analytic point): هرگاه تابع $w = f(z)$ در نقطه $z = z_0$ و اطراف آن مشتق پذیر باشد، آن نقطه، تحلیلی نامیده می شود. پس می توان گفت تابع در هسایگی نقطه تحلیلی، مشتق پذیر است.

۲- نقطه تکین (singular point): هرگاه تابع $w = f(z)$ در نقطه $z = z_0$ مشتق پذیر نباشد ولی در اطراف آن مشتق پذیر باشد، آن نقطه، نقطه تکین نامیده می شود. پس می توان گفت تابع در هسایگی محذوف نقطه تکین، مشتق پذیر است.

۳- تابع تام (Analytic Function): هرگاه تابع f در تمام حوزه دامنه خود تحلیلی باشد، تابع تام نامیده می شود.

مثال: تابع $f(z) = 2x + 3iy$ در چه نقاطی مشتق پذیر است؟

برای مشتق پذیری باید معادلات کشی-ریمان را بررسی کنیم:

$$\begin{cases} u = 2x \rightarrow u_x = 2, u_y = 0 \\ v = 3y \rightarrow v_x = 0, v_y = 3 \end{cases} \rightarrow u_x \neq v_y$$

نتیجه نشان می دهد تابع f در هیچ نقطه ای مشتق پذیر نیست.

مثال: تابع $f(z) = x^2 + iy^2$ در چه نقاطی تحلیلی است.

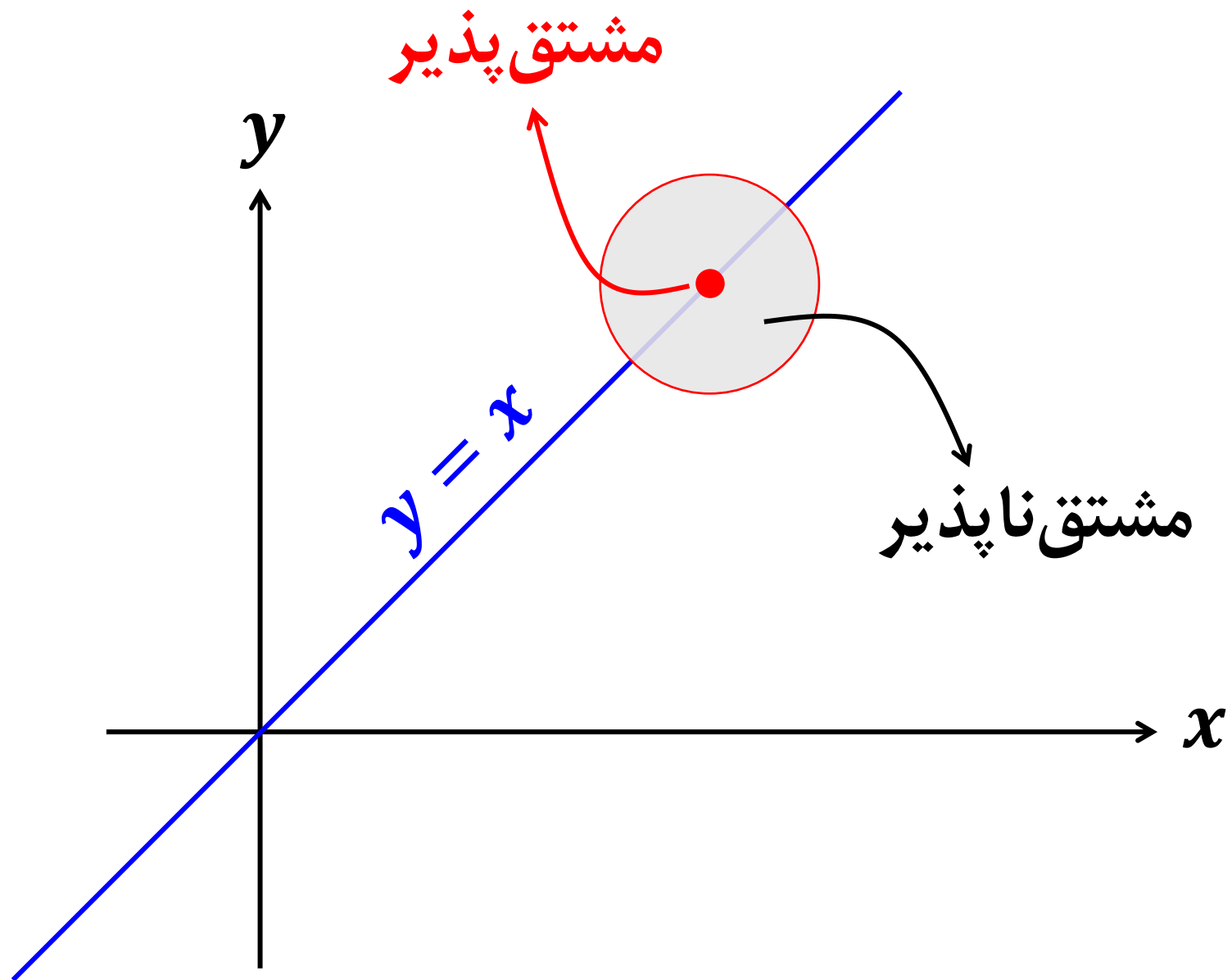
$$\begin{cases} u = x^2 \rightarrow u_x = 2x, u_y = 0 \\ v = y^2 \rightarrow v_x = 0, v_y = 2y \end{cases}$$

$$u_y = -v_x, u_x = v_y \rightarrow 2x = 2y \rightarrow x = y$$

□ پس تابع $f(z)$ فقط روی نقاط خط $x = y$ مشتق پذیر است.

□ اما تابع $f(z)$ ، در هیچ نقطه‌ای حتی روی خط $y = x$ ، تحلیلی نیست زیرا تابع در تمام

نقاط در همسایگی این خط، مشتق ناپذیر است.



مثال: نشان دهید که تابع $f(z) = \sqrt{xy}$ در نقطه $z = 0$ در معادله کشی-ریمان صدق می‌کند ولی در این نقطه دارای مشتق نیست.

$u = \sqrt{xy}$ و $v = 0$. حال بررسی معادله کشی-ریمان در نقطه $z = (0,0)$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(\Delta x, 0) - u(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x \times 0} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(0, \Delta y) - v(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0 \quad \rightarrow u_x = v_y$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(\Delta x, 0) - v(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(0, \Delta y) - u(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{0 \times \Delta y} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0$$

$$\rightarrow v_x = -u_y$$

□ پس تابع $f(z) = \sqrt{xy}$ در نقطه $z = 0$ در معادله کشی-ریمان صدق می کند.

□ حال مشتق تابع را در مبدأ بررسی می کنیم:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\Delta x + i\Delta y}$$

از طرفی روی خط $y = x$ داریم: $\Delta x = \Delta y$. این تساوی را در تعریف مشتق جایگزین می‌کنیم:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta x| |\Delta y|}}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta x| |\Delta x|}}{\Delta x + i\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x + i\Delta x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(0^-) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x + i\Delta x} = -\frac{1}{1+i} \\ f'(0^+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x + i\Delta x} = \frac{1}{1+i} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{حال باید مشتق چپ و راست را بررسی کرد:} \\ \text{مشتق تابع در مبدأ یعنی } f'(0) \text{ وجود ندارد.} \end{array}$$

مثال: تابع روبه‌رو در کدام نقاط مشتق‌پذیر است؟ $f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

از شکل دکارتی استفاده می‌کنیم:

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ v = -\frac{y}{x^2 + y^2} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ -u_y = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow v_x = -u_y$$

$$\begin{cases} u_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ v_y = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow u_x = v_y$$

□ توابع u ، v ، u_x ، v_x ، u_y و v_y پیوسته بوده و در رابطه کشی-ریمان صدق می کنند.

□ پس تابع $f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ در همه نقاط مشتق دارد بجز مبدأ که در دامنه تابع نمی گنجد:

لذا می توان گفت $z = 0$ یک نقطه تکین است. $|z|^2 = 0 \rightarrow z = 0$

نکته: وجود توابعی چون $\text{Re}(z)$ ، $\text{Im}(z)$ ، $\bar{z}$ ، $|z|$ و $\text{Arg}(z)$ باعث می‌شود تابع تحلیلی نشود ولی در مثال بالا هم $\bar{z}$ داشتیم و هم $|z|$ با این حال تابع بجز در مبدأ، در همه جا تحلیلی بود. دلیل این امر این است که می‌توانستیم تابع را ساده کنیم:

پس در اصل تابع قبل بدین شکل است:

$$|z|^2 = z\bar{z} \rightarrow f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$$

ولی توابع زیر قطعاً تحلیلی نیستند زیرا در آنها جمله‌های غیرتحلیلی ساده نمی‌شوند:

$$f(z) = z \text{Arg}(z), \quad f(z) = 3\text{Re}(z) + iz, \quad f(z) = \frac{\bar{z}}{\text{Im}(z)}$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی مهندسی

فصل ۱: تحلیل مختلط

بخش ۷: حد و مشتق، قسمت چهارم: تابع همساز

توسط: سید محمد جعفری

۷-۴- تابع همساز (Harmonic function):

اگر تابع حقیقی دو متغیری $\varphi(x,y)$ ، در دو شرط زیر صدق کند، تابع φ همساز است:

□ دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته در D باشد.

□ و در معادله لاپلاس دو بعدی نیز صدق کند.

$$\text{Laplace's Equation: } \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

□ فرض کنید تابع $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ در حوزه D تحلیلی باشد یعنی:

□ در همه نقاط و همسایگی آنها مشتق پذیر است و در **CRE** صدق می کند:

$$\text{CRE: } \begin{cases} u_x = v_y \rightarrow u_{xx} = v_{yx} \\ u_y = -v_x \rightarrow u_{yy} = -v_{xy} \end{cases} \rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

پس اگر تابع $f(z)$ تحلیلی باشد، تابع حقیقی u ، همساز خواهد بود و تابع حقیقی v را مزدوج همساز آن گویند. بنابراین می توان قضیه زیر را بیان کرد:

□ شرط لازم و کافی برای تحلیلی بودن تابع مختلط $f(z)$ این است که تابع حقیقی u ، همساز باشد.

مثال: ثابت کنید تابع $f(z) = z^2$ تحلیلی یا تام است.

پاسخ:
$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$$

قسمت حقیقی یعنی $u = x^2 - y^2$ مشتقات دوم پیوسته دارد و داریم:

$$u_{xx} = 2, u_{yy} = -2 \rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

نتیجه: تابع حقیقی u ، همساز است پس تابع مختلط $f(z)$ ، تام است.

مثال: آیا تابع $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 5$ همساز است؟ تابع $f(z)$ را بیابید.

□ نکته: هر تابع همساز می تواند قسمت حقیقی یک تابع مختلط باشد.

□ برای یافتن این تابع مختلط مراحل زیر را طی می کنیم:

۱- ابتدا باید اثبات کنیم تابع u همساز است یعنی دارای مشتقات دوم پیوسته است:

$$\begin{cases} u_x = 3x^2 - 3y^2 \rightarrow u_{xx} = 6x \\ u_y = -6xy \rightarrow u_{yy} = -6x \end{cases} \rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

پس تابع حقیقی u ، همساز است.

۲- حال که تابع u همساز است یعنی در معادلات کوشی-ریمان صدق می کند. پس داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \rightarrow v(x, y) = 3x^2y - y^3 + C_1(x) \\ -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = +6xy \rightarrow v(x, y) = 3x^2y + C_2(y) \end{array} \right.$$

با اجتماع دو جمله قبل، تابع v بدست می آید:

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + C$$

۳- حال می‌توان شکل دکارتی تابع $f(z)$ را نوشت:

$$f(z) = (x^3 - 3xy^2 - 5) + i(3x^2y - y^3 + C)$$

۴- حال با قرار دادن x و y به دو روش زیر می‌توان شکل مختلط تابع را یافت:

روش اول: $x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ (طولانی است)

روش دوم:

$$\begin{cases} x \rightarrow z \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow f(z) = [z^3 - 3z(0) - 5] + i[3z^2(0) - (0)^3 + C]$$

$$f(z) = z^3 - 5 + iC \quad \blacksquare$$

مثال: تابع تحلیلی $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ را در نظر بگیرید.

اگر $v(x,y) = 2y(x + 1)$ باشد، تابع را بر حسب z بیابید.

پاسخ: چون تابع تحلیلی است، پس u و v مزدوج همساز یکدیگر هستند و در معادلات

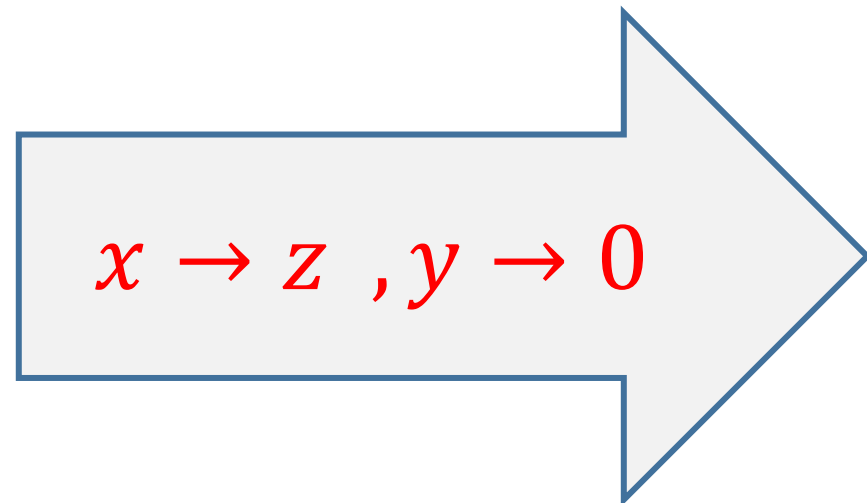
کشی-ریمان صدق می کنند پس داریم:

$$\begin{cases} u_x = v_y = 2x + 2 \rightarrow u(x, y) = x^2 + 2x + C_1(y) \\ u_y = -v_x = -2y \rightarrow u(x, y) = -y^2 + C_2(x) \end{cases}$$

از اجتماع دو جمله قبل، داریم:

$$u(x, y) = x^2 + 2x - y^2 + C$$

$$f(x, y) = (x^2 + 2x - y^2 + C) + i [2y(x + 1)]$$



$$f(z) = z^2 + 2z + C \blacksquare$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی مهندسی

فصل ۱: تحلیل مختلط

بخش ۷: حد و مشتق، قسمت پنجم: قضایای کشی-ریمان (قطبی)

توسط: سید محمد جعفری

۷-۵- معادلات کُشی-ریمان (در مختصات قطبی)

□ تا الان تمام قضایای مشتق در شکل دکارتی بررسی شد.

□ این قضایا همگی در شکل قطبی نیز صادق هستند.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

معادله کُشی ریمان در دستگاه مستطیلی:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

معادله کُشی ریمان در دستگاه قطبی:

$$U(r, \theta) = u(x, y) , V(r, \theta) = v(x, y)$$

اثبات:

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) , x = r \cos \theta , y = r \sin \theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow 2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x \rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y \cos^2 \theta}{x^2} = -\frac{r \sin \theta \cos^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta} = -\frac{\sin \theta}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta , \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}$$

به همین شکل اثبات می شود:

Chain rule:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = u_r \cos \theta - u_\theta \frac{\sin \theta}{r}$$

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = u_r \sin \theta + u_\theta \frac{\cos \theta}{r}$$

$$v_x = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = v_r \cos \theta - v_\theta \frac{\sin \theta}{r}$$

$$v_y = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = v_r \sin \theta + v_\theta \frac{\cos \theta}{r}$$

معادلهٔ کشی ریمان در دستگاه مستطیلی:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \oplus, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \oplus \oplus$$

$$\oplus \rightarrow u_r \cos \theta - u_\theta \frac{\sin \theta}{r} = v_r \sin \theta + v_\theta \frac{\cos \theta}{r} \quad *$$

$$\oplus \oplus \rightarrow v_r \cos \theta - v_\theta \frac{\sin \theta}{r} = -u_r \sin \theta - u_\theta \frac{\cos \theta}{r} \quad **$$

$$* \rightarrow \left(u_r - \frac{v_\theta}{r} \right) \cos \theta - \left(\frac{u_\theta}{r} + v_r \right) \sin \theta = 0 \quad \boxplus$$

$$** \rightarrow \left(v_r + \frac{u_\theta}{r} \right) \cos \theta + \left(u_r - \frac{v_\theta}{r} \right) \sin \theta = 0 \quad \boxplus \boxplus$$

$$\boxtimes \times \cos \theta \rightarrow \left(u_r - \frac{v_\theta}{r} \right) \cos^2 \theta - \left(\frac{u_\theta}{r} + v_r \right) \cos \theta \sin \theta = 0$$

$$\boxplus \boxplus \times \sin \theta \rightarrow \left(v_r + \frac{u_\theta}{r} \right) \sin \theta \cos \theta + \left(u_r - \frac{v_\theta}{r} \right) \sin^2 \theta = 0$$

$$\text{جمع:} \left(u_r - \frac{v_\theta}{r} \right) (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 0 \rightarrow u_r = \frac{v_\theta}{r}$$

$$\boxtimes \times (-\sin \theta) + \boxplus \boxplus \times \cos \theta \rightarrow v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \text{به همین شکل اثبات می شود:}$$

جمع بندی

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

معادلهٔ کشی ریمان در دستگاه قطبی:

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) e^{-i\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - i \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) e^{-i\theta}$$

برای اثبات معادلات قبل هم می‌توان از تعریف مستقیم مشتق هم می‌توان استفاده کرد.

و برای همساز بودن نیز معادلهٔ لاپلاس قطبی بدین صورت است:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0$$

معادلهٔ لاپلاس قطبی:

استفاده از شکل قطبی در مواردی کار را بسیار راحت‌تر می‌سازد. 

مثال: ثابت کنید تابع $f(z) = z^4$ تحلیلی است.

□ برای اثبات تحلیلی بودن تابع باید ابتدا قسمت حقیقی و موهومی را بدست آوریم.

□ با استفاده از شکل قطبی، مسأله راحت تر حل می شود.

$$f(z) = z^4, z = re^{i\theta}$$

$$f(z) = r^4 e^{i4\theta} = \underbrace{r^4 \cos 4\theta}_{u(r,\theta)} + i \underbrace{r^4 \sin 4\theta}_{v(r,\theta)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 4r^3 \cos 4\theta, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 4r^3 \sin 4\theta$$

تابع $f(z)$ هم در همه نقاط مشتق پذیر است و هم در معادلات کُشی-ریمان صدق می کند لذا

تحلیلی یا تام است.

مثال: قسمت موهومی تابع تحلیلی $f(z)$ برابر است با: $v(r, \theta) = \theta + r^2 \cos \theta$

مطلوب است محاسبه: $f'(1 + i)$

پاسخ: چون تابع تحلیلی است پس مشتق پذیر است و داریم:

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) e^{-i\theta}$$

قسمت $\frac{\partial v}{\partial r}$ قابل محاسبه است ولی u را نداریم:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 2r \cos \theta$$

اما طبق معادلات کشی-ریمان می دانیم:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{r} (1 - r^2 \sin \theta)$$

پس می توان نوشت:

$$f'(z) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) e^{-i\theta}, \quad z = 1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$f'(z) = \left[\frac{1}{r} (1 - r^2 \sin \theta) + i 2r \cos \theta \right] e^{-i\theta} \quad \left(r = \sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} f'(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}) &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - 2 \sin \frac{\pi}{4} \right) + i 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \right] e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ &= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + i 2\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + 2i \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} + i \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی مهندسی

فصل ۱: تحلیل مختلط

بخش ۱: توابع خاص، قسمت اول: تابع چند جمله‌ای

توسط: سید محمد جعفری

۸- توابع خاص

۸-۱- تابع چند جمله‌ای (Polynomial):

یک تابع مختلط چند جمله‌ای درجه n ام در حالت کلی بدین شکل است:

$$f(z) = C_n z^n + C_{n-1} z^{n-1} + \dots + C_2 z^2 + C_1 z + C_0$$

□ ضرایب $C_0, C_1, \dots, C_n$ اعداد مختلط ثابتی هستند.

$$f(z) = (1 + i)z^2 + 2z - 3i$$

یک نمونه از تابع چند جمله‌ای:

$$C_0 = -3i, C_1 = 2, C_2 = 1 + i$$

نکات:

□ تابع چند جمله‌ای همواره مشتق پذیر است.

□ مشتق گیری از تابع چند جمله‌ای به روش توابع حقیقی است.

□ اگر همه ضرایب $C_0, C_1, \dots, C_n$ اعداد حقیقی باشند، آنگاه به ازای هر z_0 داریم:

$$|f(z_0)| = |f(\bar{z}_0)|$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی مہندسی

فصل ۱: تحلیل مختلط

بخش ۱: توابع خاص، قسمت دوم: تابع گویا

توسط: سید محمد جعفری

۸- توابع خاص

۸-۲- تابع گویا (Rational function):

□ اگر $g(z)$ و $h(z)$ هر دو تابع چند جمله‌ای باشند، آنگاه تابع حاصل از نسبت آنها یعنی

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

را تابع گویا گویند.

□ توابع گویا در همه نقاط تحلیلی و مشتق‌پذیرند بجز در ریشه‌های مخرج که این ریشه‌ها نقاط

تکین تابع حساب می‌شوند؛ البته به شرطی که همزمان ریشه صورت هم نباشند.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی مهندسی

فصل ۱: تحلیل مختلط

بخش ۱: توابع خاص، قسمت سوم: تابع نمایی

توسط: سید محمد جعفری

۸- توابع خاص

۸-۳- تابع نمایی (Exponential function):

تابع نمایی بدین صورت تعریف می‌شود:

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

$$= e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$= e^x \cos y + i e^x \sin y$$

پس می‌توان نوشت: $|e^z| = e^x$, $\text{Arg}(e^z) = y$

برای بررسی تحلیلی بودن داریم:

$$u(x, y) = e^x \cos y, u, u_x, u_y \rightarrow \text{پیوسته}$$

$$\begin{cases} u_x = e^x \cos y \rightarrow u_{xx} = e^x \cos y \\ u_y = -e^x \sin y \rightarrow u_{yy} = -e^x \cos y \end{cases} \rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

تابع نمایی، تابعی تام است یعنی در همه دامنۀ خود مشتق پذیر است.

😊 **نکته:** تابع نمایی مختلط، تابعی متناوب است و دوره تناوب آن $2\pi i$ است زیرا

$$f(z + 2\pi i) = e^{z+2\pi i} = e^z \times e^{2\pi i}$$

$$= e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z = f(z)$$

پس ناحیه $-\pi < y < \pi$ ، ناحیه بنیادی تابع e^z است و بعد از آن تابع تکرار می شود.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی مہندسی

فصل ۱: تحلیل مختلط

بخش ۱: توابع خاص، قسمت چهارم: تابع لگاریتم طبیعی

توسط: سید محمد جعفری

۸-۴- تابع لگاریتم طبیعی (Natural logarithm):

تابع لگاریتم طبیعی عدد مختلط را با $\ln z$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنند:

$$f(z) = \ln z = \ln(|z|e^{i\theta}) = \ln|z| + \ln e^{i\theta} = \ln|z| + i\theta$$

همچنین می دانیم که θ ، آرگومان عدد مختلط z است. یعنی:

$$\theta = \text{Arg}(z), \quad -\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$$

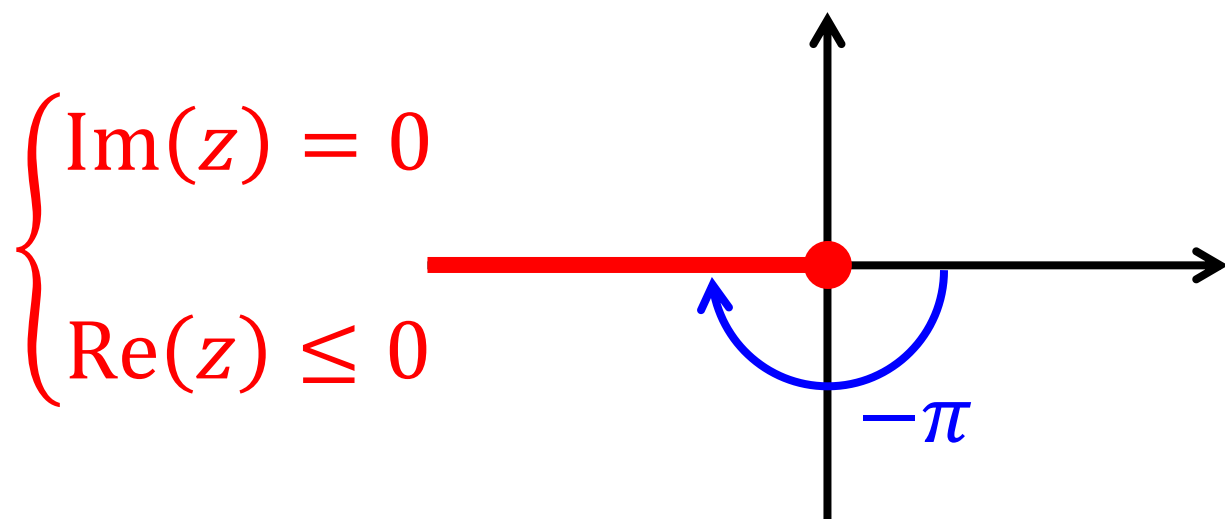
$$f(z) = \ln z = \ln|z| + i \text{Arg}(z)$$

اگر آرگومان z در بازه $[-\pi, \pi]$ باشد، مقدار لگاریتم را مقدار اصلی گویند.

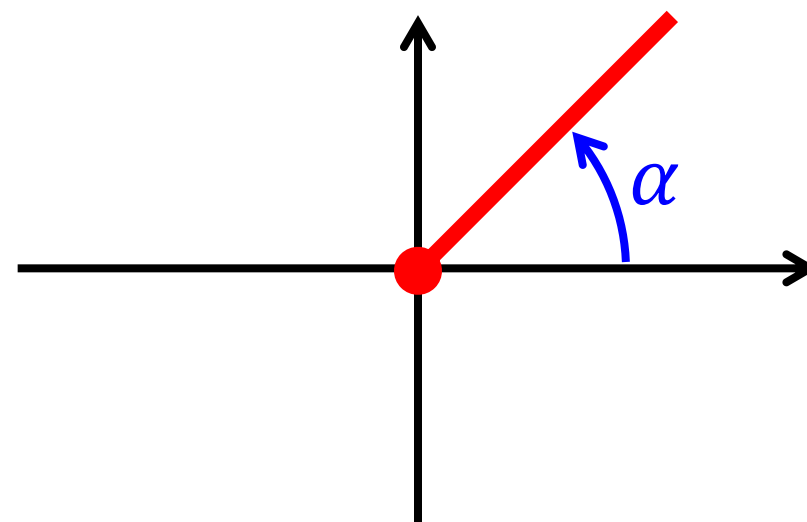
□ پس در مقدار اصلی لگاریتم $\theta \neq -\pi$ است و خط $\theta = -\pi$ را شاخه اصلی لگاریتم گویند

که تابع بجز این خط در بقیه نقاط صفحه مختلط مشتق پذیر است.

□ اگر $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$ باشد، خط $\theta = \alpha$ بریدگی یا شاخه اصلی محسوب می شود.



$$-\pi < \theta \leq \pi$$



$$\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$$

مثال: تابع روبه‌رو در چه نقاطی تحلیلی نیست؟ $f(z) = \ln(e^z + 1)$

روش اول: اگر مقدار تابع لگاریتم را مقدار اصلی فرض کنیم، پس کافی است برای یافتن نقاط غیرتحلیلی قرار دهیم:

$$f(z) = \ln(e^z + 1) = \ln[g(z)] \rightarrow \text{Arg}[g(z)] = -\pi$$

برای اینکه $\text{Arg}[g(z)]$ روی خط $\theta = -\pi$ قرار گیرد، کافی است داشته باشیم:

$$\text{Im}[g(z)] = 0, \quad \text{Re}[g(z)] \leq 0$$

زیرا نقاطی که روی این خط هستند، قسمت موهومی صفر و قسمت حقیقی منفی دارند.

$$g(z) = e^z + 1 = 1 + e^{x+iy} = \underbrace{1 + e^x \cos y}_{\text{Re}} + i \underbrace{e^x \sin y}_{\text{Im}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 + e^x \cos y \leq 0 \\ e^x \sin y = 0 \xrightarrow{e^x \neq 0} \sin y = 0 \rightarrow y = n\pi \end{cases}$$

اگر $\sin y = 0$ باشد، دو حالت برای $\cos y$ داریم:

$$\rightarrow \begin{cases} y = (2k + 1)\pi \rightarrow \cos y = -1 \\ y = 2k\pi \rightarrow \cos y = +1 \end{cases}$$

حال دو حالت قبل باید بررسی شوند یعنی $y = (2k + 1)\pi$ و $y = 2k\pi$:

$$\begin{cases} \cos y = -1 \rightarrow 1 + e^x \cos y = 1 - e^x \leq 0 \rightarrow e^x \geq 1 \rightarrow x \geq 0 \\ \cos y = +1 \rightarrow 1 + e^x \cos y = 1 + e^x \leq 0 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

پاسخ نهایی:

$$x \geq 0 \quad \text{و} \quad y = (2k + 1)\pi$$

یعنی در این شرایط تابع $\ln(e^z + 1)$ تحلیلی نیست.

روش دوم: مقابل لگاریتم را برابر صفر قرار دهیم زیرا لگاریتم صفر تعریف نشده است.

$$f(z) = \ln g(z) \rightarrow g(z) = 0 \quad \text{شاخه اصلی}$$

$$e^z + 1 = 0 \rightarrow e^z = -1 \rightarrow z = \ln(-1)$$

حال عدد -1 را به صورت قطبی می‌نویسیم:

$$-1 = e^{\pi i} \rightarrow z = \ln(-1) = \ln(e^{\pi i}) = \pi i \rightarrow z = \pi i$$

□ البته تابع لگاریتم نیز مانند تابع نمایی متناوب است و دوره تناوب آن $2k\pi i$ است.

□ پس جواب اصلی بدین شکل است:

$$z = \pi i + 2k\pi i = (2k + 1)\pi i$$

لگاریتم در به دست آوردن توان‌های عمومی نیز کاربرد دارد.

مثال: مقدار عدد روبه‌رو را محاسبه کنید:

$$z = i^i$$

برای اینکار از دو سمت $\ln$ می‌گیریم:

$$z = i^i \rightarrow \ln z = \ln i^i = i \ln i$$

$$i = e^{\frac{\pi}{2}i} \rightarrow \ln z = i \ln e^{\frac{\pi}{2}i} = i \times \frac{\pi}{2} i = -\frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow z = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0.2079 \quad \blacksquare$$

مثال: مقادیر خواسته شده را محاسبه کنید:

$$A = 2^{1+i}, B = (1+i)^{1-i}$$

$$A = 2^{1+i} \rightarrow \ln A = \ln 2^{1+i} = (1+i) \ln 2$$

$$A = e^{(1+i) \ln 2} = e^{\ln 2} \times e^{i \ln 2} = 2 \times e^{i \ln 2}$$

$$A = 2[\cos(\ln 2) + i \sin(\ln 2)] \blacksquare$$

$$B = (1 + i)^{1-i} \rightarrow \ln B = \ln(1 + i)^{1-i} = (1 - i) \ln(1 + i)$$

$$B = e^{(1-i) \ln(1+i)} = e^{\ln(1+i)} \times e^{-i \ln(1+i)}$$

$$= (1 + i) \times e^{-i \ln(1+i)} = (1 + i) \times e^{-i \ln(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})}$$

$$= (1 + i) \times e^{-i[\ln \sqrt{2} + \ln(e^{\frac{\pi}{4}i})]} = (1 + i) \times e^{-i(\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i)}$$

$$= (\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}) \times e^{-i \ln \sqrt{2}} \times e^{\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}) \times e^{i(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2})}$$

$$= \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}\right) \right] = 2.8 + 1.3i \quad \blacksquare$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی مہندسی

فصل ۱: تحلیل مختلط

بخش ۱: توابع خاص، قسمت پنجم: تابع ہندلولی

توسط: سید محمد جعفری

۸- توابع خاص

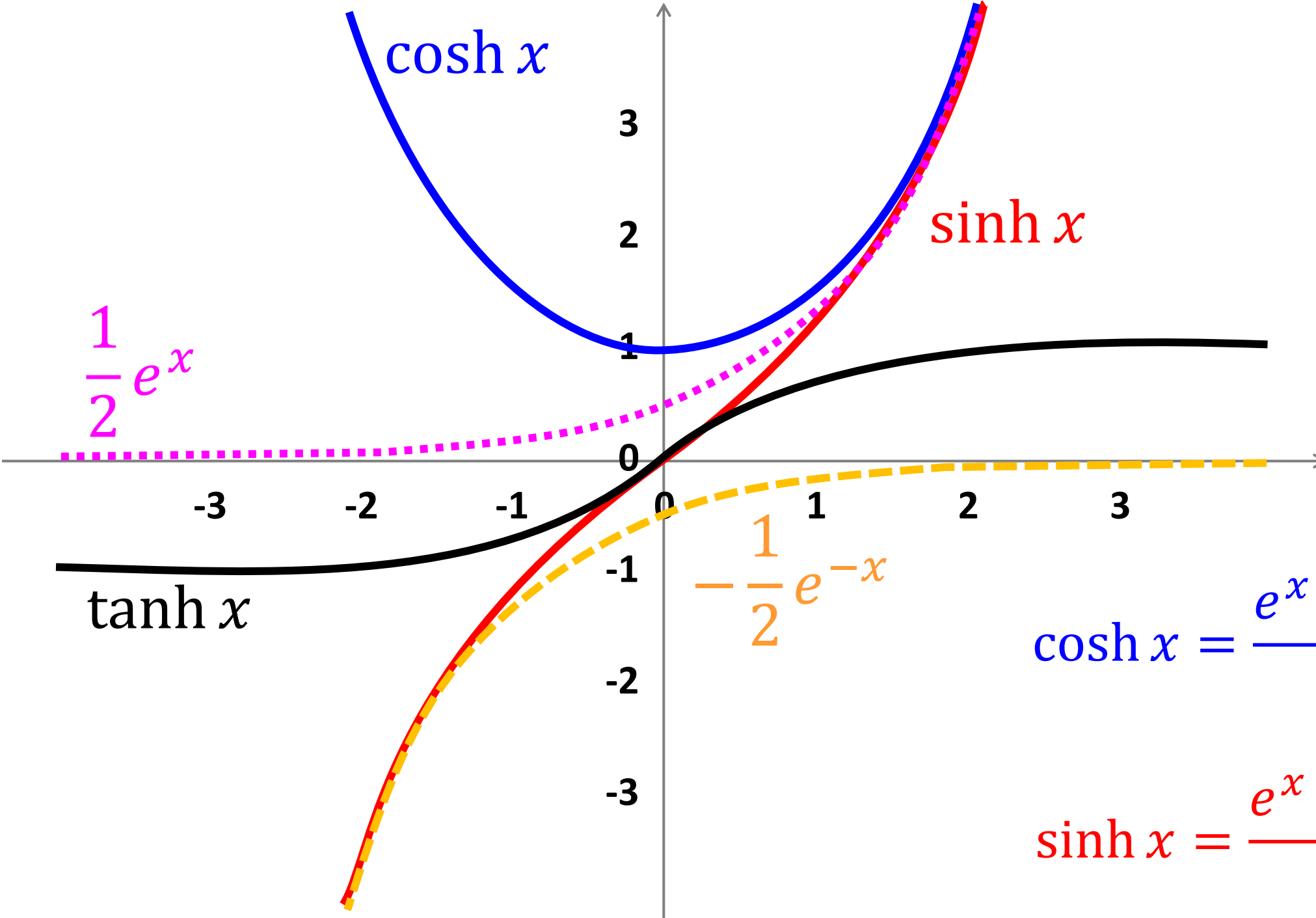
۸-۵- توابع هذلولی (Hyperbolic functions):



نمونه‌هایی از توابع هذلولی



نمونه‌هایی دیگر از توابع هذلولی



$\cosh x$

$\sinh x$

$\frac{1}{2}e^x$

$-\frac{1}{2}e^{-x}$

$\tanh x$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

قبل از اینکه به سراغ توابع هذلولی مختلط برویم یادآوری می‌کنیم که هر تابع را می‌توان به صورت مجموع یک **تابع زوج** و یک **تابع فرد** نوشت:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{Even}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{Odd}}$$

مثال: تابع نمایی e^x را به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد بنویسید:

$$e^x = \underbrace{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}_{f(x)} + \underbrace{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}_{g(x)}$$

حال دو تابع متولد شده از e^x یعنی $f(x)$ و $g(x)$ را بررسی می‌کنیم:

$$\rightarrow f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = g(x), \quad g'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = f(x)$$

$$f^2(x) - g^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$$

حال این معادلات را با معادلات مثلثاتی مقایسه می‌کنیم:

$$f(x) = (e^x + e^{-x})/2, g(x) = (e^x - e^{-x})/2$$

توابع مثلثاتی

تابع $f(x)$ زوج و تابع $g(x)$ فرد است

تابع $\cos x$ زوج و تابع $\sin x$ فرد است

$$f'(x) = g(x)$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$f^2 - g^2 = 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

مقایسه: بین تابع $f(x)$ و $\cos x$ و همچنین دو تابع $g(x)$ و $\sin x$ شباهت وجود دارد.

به همین سبب تابع $f(x)$ را به $\cos x$ و تابع $g(x)$ و $\sin x$ ربط می‌دهیم اما تفاوت عمده آنها در این معادله است:

$$f^2 - g^2 = 1 \rightarrow x^2 - y^2 = 1 \text{ (Hyperbolic function)}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \text{ (Circular Functions)}$$

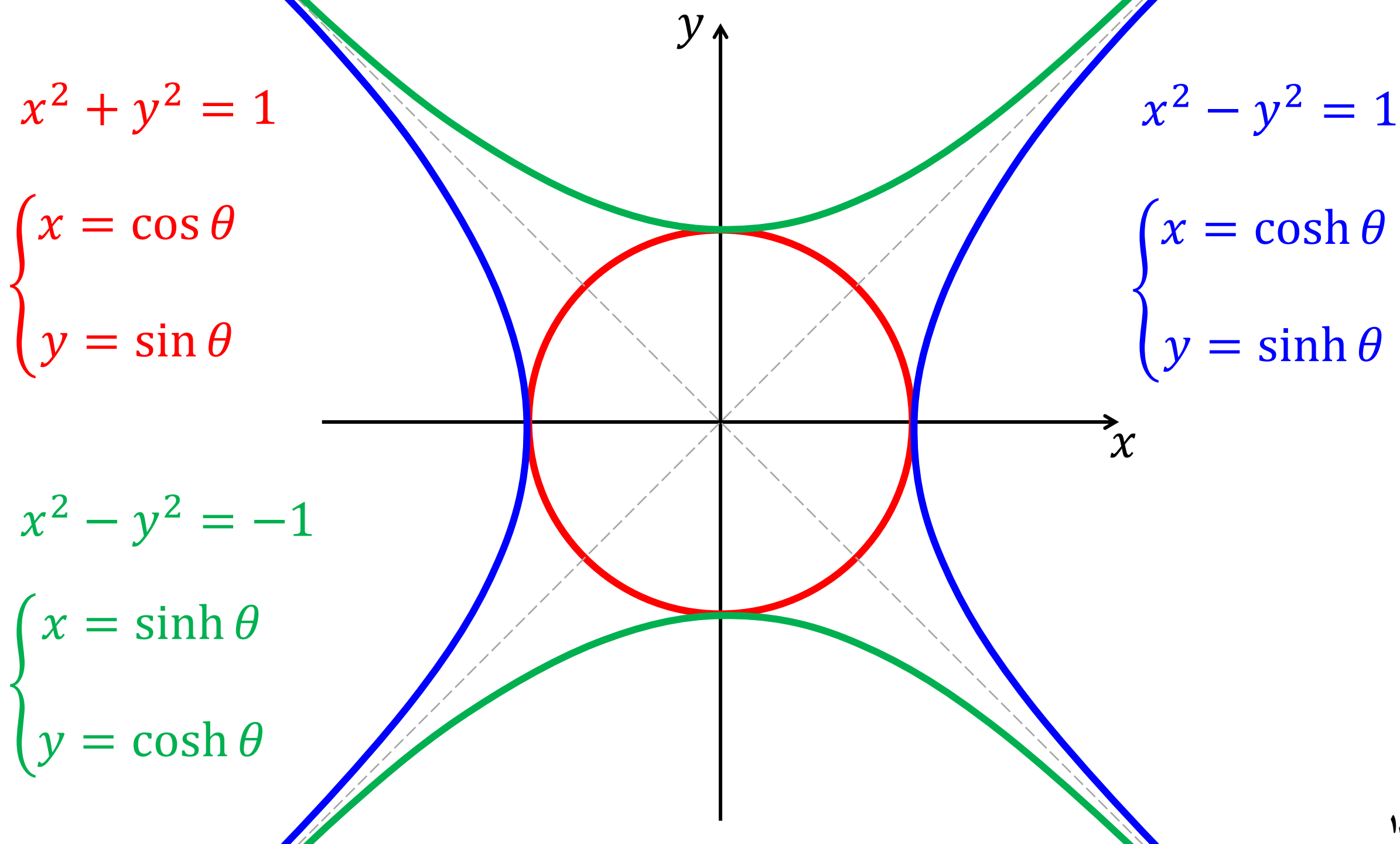
رابطه بین f و g از جنس رابطه هذلولی ولی رابطه بین $\sin x$ و $\cos x$ از جنس رابطه دایروی است.

□ کسینوس هذلولی یا کسینوس هایپربولیک:

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

□ سینوس هذلولی یا سینوس هایپربولیک:

$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$



و با استفاده از قضیهٔ دموآور می‌توان اثبات کرد:

$$\cosh(ix) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$$

$$\begin{cases} \cosh(ix) = \cos x & \cos(ix) = \cosh(x) \\ \sinh(ix) = i \sin x & \sin(ix) = i \sinh(x) \end{cases}$$

حال می‌توان همین توابع را در فضای مختلط بیان کرد:

$$\begin{aligned} f(z) = \cos z &= \cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) \\ &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \end{aligned}$$

$$u = \cos x \cosh y, v = -\sin x \sinh y$$

$$u_{xx} + u_{yy} = -\cos x \cosh y + \cos x \cosh y = 0$$

□ پس تابع $\cos Z$ تابعی تحلیلی است.

□ نکته: برای به دست آوردن قسمت حقیقی و موهومی این توابع از روابط زیر استفاده می‌شود.

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\cosh(a \pm b) = \cosh a \cosh b \pm \sinh a \sinh b$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\sinh(a \pm b) = \sinh a \cosh b \pm \cosh a \sinh b$$

$$\begin{aligned}\sin z &= \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) \\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cosh z &= \cosh(x + iy) = \cosh x \cosh(iy) + \sinh x \sinh(iy) \\ &= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sinh z &= \sinh(x + iy) = \sinh x \cosh(iy) + \cosh x \sinh(iy) \\ &= \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y\end{aligned}$$

تمام توابع مثلثاتی و هذلولی مانند $\cos z$ که اثبات شد، تحلیلی هستند و توابع دیگر نیز مانند توابع حقیقی تعریف می‌شوند.

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \qquad \text{برای مثال:}$$

اما نکته جالب این است که توابع مثلثاتی مختلط بر خلاف توابع حقیقی می‌توانند مقدار بزرگتر از یک (۱) نیز بگیرند.

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y}$$

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$$

البته با توجه به اینکه $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ و $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ است، می‌توان نوشت:

$$\sqrt{0 + \sinh^2 y} \leq |\cos z| \leq \sqrt{1 + \sinh^2 y}$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \rightarrow |\sinh y| \leq |\cos z| \leq |\cosh y|$$

$$|\sinh y| \leq |\sin z| \leq |\cosh y|$$

به همین روش داریم:

مثال: مقدار توابع $f(z) = \sin z$ و $f(z) = \cos z$ را در نقطه z_0 بیابید.

$$z_0 = \frac{\pi}{2} + i \left[\ln(2 + \sqrt{3}) \right]$$

$$x = \frac{\pi}{2}, y = i \left[\ln(2 + \sqrt{3}) \right]$$

$$f(z_0) = \sin \left\{ \frac{\pi}{2} + i \left[\ln(2 + \sqrt{3}) \right] \right\} = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$= \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 \cosh \left[\ln(2 + \sqrt{3}) \right] + i \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 \sinh y$$

$$= \cosh \left[\ln(2 + \sqrt{3}) \right] = \frac{e^{\ln(2+\sqrt{3})} + e^{-\ln(2+\sqrt{3})}}{2}$$

ادامه پاسخ:

$$f(z_0) = \frac{e^{\ln(2+\sqrt{3})} + e^{\ln(2+\sqrt{3})^{-1}}}{2} = \frac{(2 + \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3})^{-1}}{2}$$

این عبارت را جداگانه حساب می کنیم:

$$(2 + \sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$f(z_0) = \frac{2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}}{2} = 2 \quad \blacksquare$$

همانطور که می‌بینید مقدار تابع مقداری بزرگتر از ۱ شد. برای تابع کسینوس نیز از روابط مثلثات حقیقی استفاده می‌کنیم که در اینجا نیز صادق هستند.

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \rightarrow \cos^2 z + (2)^2 = 1 \rightarrow \cos^2 z = -3$$

$$\rightarrow \cos z = \sqrt{-3}$$

$$-3 = 3e^{i\pi} \rightarrow \sqrt{-3} = \sqrt{3}e^{\frac{2k\pi+\pi}{2}i} = \sqrt{3}e^{\frac{2k+1}{2}\pi i}$$

$$k = 0 \rightarrow \sqrt{-3} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{3} \rightarrow \cos z = i\sqrt{3}$$

$$k = 1 \rightarrow \sqrt{-3} = \sqrt{3}e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i\sqrt{3} \rightarrow \cos z = -i\sqrt{3}$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی مهندسی

فصل ۱: تحلیل مختلط

بخش ۱: توابع خاص، قسمت ششم: تابع وارون مثلثاتی و هذلولی

توسط: سید محمد جعفری

۸- توابع خاص

۸-۶- تابع وارون مثلثاتی و هذلولوی:

۸-۶-۱- تابع وارون مثلثاتی: همانطور که در توابع حقیقی، وارون داریم و در اینجا نیز وارون توابع

مختلط را می‌یابیم: برای مثال داریم:

$$w = \sin^{-1} z \rightarrow z = \sin w$$

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \times \frac{e^{iw}}{e^{iw}} \rightarrow z = \frac{e^{2iw} - 1}{2ie^{iw}}$$

$$e^{2iw} - 1 = 2ize^{iw} \rightarrow (e^{iw})^2 - 2iz(e^{iw}) - 1 = 0 \rightarrow A = e^{iw}$$

$$\rightarrow A^2 - 2izA - 1 = 0 \rightarrow A = \frac{2iz \pm \sqrt{-4z^2 + 4}}{2} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$$

$$A = e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2} \rightarrow iw = \ln \left(iz \pm \sqrt{1 - z^2} \right)$$

دو طرف را در $-i$ پیش ضرب می‌کنیم، با اینکار داریم:

$$w = \sin^{-1} z = -i \ln \left(iz \pm \sqrt{1 - z^2} \right) \quad \blacksquare$$

به همین روش برای $\cos^{-1} z$ و $\tan^{-1} z$ نیز داریم:

$$w = \cos^{-1} z = -i \ln \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

$$w = \tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln \left(\frac{i + z}{i - z} \right)$$

۲-۶- تابع وارون هذلولی: در مورد توابع هذلولی نیز تابع $\cosh^{-1} z$ ثابت می‌کنیم:

$$w = \cosh^{-1} z \rightarrow z = \cosh w$$

$$z = \frac{e^w + e^{-w}}{2} \rightarrow e^w + e^{-w} = 2z \quad \xrightarrow{\times e^w} e^{2w} + 1 = 2ze^w$$

$$\rightarrow (e^w)^2 - 2z(e^w) + 1 = 0$$

$$e^w = z + \sqrt{z^2 - 1} \quad \text{حل معادله درجه ۲:}$$

$$w = \cosh^{-1} z = \ln \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right) \quad \blacksquare$$

مثال: مقدار $A = \tan^{-1} \sqrt{3}$ را بیابید.

$$A = \tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln \left(\frac{i + z}{i - z} \right) = \frac{i}{2} \ln \left(\frac{i + \sqrt{3}}{i - \sqrt{3}} \right)$$

$$\rightarrow i + \sqrt{3} = 2e^{\frac{\pi}{6}i}, \quad i - \sqrt{3} = 2e^{\frac{5\pi}{3}i}$$

$$A = \frac{i}{2} \ln \left(\frac{2e^{\frac{\pi}{6}i}}{2e^{\frac{5\pi}{3}i}} \right) = \frac{i}{2} \ln \left(e^{-\frac{2\pi}{3}i} \right) = \frac{i}{2} \times \left(-\frac{2\pi}{3}i \right) = \frac{\pi}{3} \quad \blacksquare$$

مثال: مشتق تابع $\cos^{-1} z$ را بیابید.

چون تابع $\cos z$ مشتق پذیر است، پس وارون آن نیز مشتق دارد و برای محاسبه داریم:

$$w = \cos^{-1} z = -i \ln \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

$$(\cos^{-1} z)' = -i \frac{1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}}}{z + \sqrt{z^2 - 1}} \quad \text{می دانیم: } (\ln u)' = \frac{u'}{u}, \text{ پس داریم:}$$

$$= -i \frac{\frac{\sqrt{z^2 - 1} + z}{\sqrt{z^2 - 1}}}{z + \sqrt{z^2 - 1}} = \frac{-i}{\sqrt{z^2 - 1}} \quad \blacksquare$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی مہندسی

فصل ۱: تحلیل مختلط

بخش ۹: معادلات

توسط: سید محمد جعفری

۹- معادلات

۹-۱- معادلات مختلط جبری درجه n

معادلات مختلط درجه n فقط در حالت‌های ساده درجه ۱ تا ۴ حل تحلیلی دارند. برای درجات بزرگتر، فعلاً حل تحلیلی نداریم مگر اینکه با تجزیه به عوامل پایین‌تر تبدیل کنیم:

$$az + b = 0 \rightarrow z = -\frac{b}{a}$$

درجه اول (Linear equation):

درجه دوم (Quadratic equation):

$$az^2 + bz + c = 0, b \neq 0 \rightarrow z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

درجه سوم (Cubic equation):

پاسخ کاردانو (Cardano)

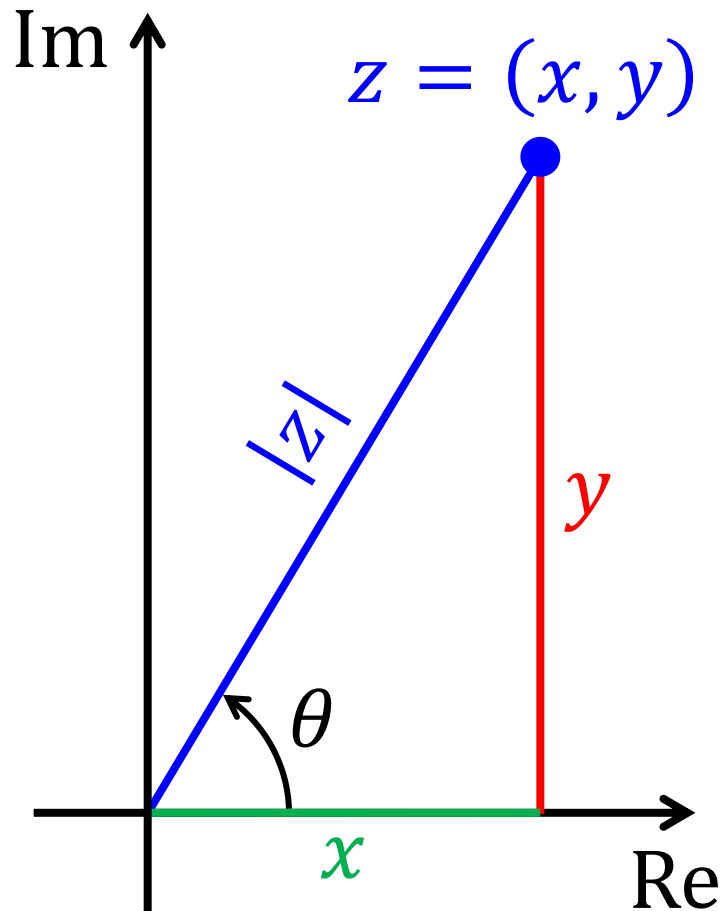
$$\begin{cases} z_1 = S + T - \frac{b}{3a} \\ z_{2,3} = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} (S - T) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}} \\ T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q = \frac{3ac - b^2}{9a^2} \\ R = \frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3} \end{cases}$$

۹-۲- جذر گرفتن از اعداد مختلط

در این بین جذر گرفتن از اعداد مختلط نیز حالت خاصی از معادله درجه دوم محسوب می‌شود که برای آن معادله ساده‌ای را اثبات می‌کنیم. فرض کنید:



$$z = x + iy$$

$$z = |z|e^{i(\theta+2k\pi)}, k = 0, 1$$

$$z = \begin{cases} z_1 = |z|e^{i\theta} \\ z_2 = |z|e^{i(\theta+2\pi)} \end{cases}$$

برای جذر گرفتن داریم:

$$\sqrt{z} = \begin{cases} \sqrt{z_1} = \sqrt{|z|} e^{i\frac{\theta}{2}} \\ \sqrt{z_2} = \sqrt{|z|} e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)} \end{cases}$$

فرق نسبت‌های مثلثاتی $\frac{\theta}{2}$ و $\pi + \frac{\theta}{2}$ این است که هم $\cos$ و هم $\sin$ منفی می‌شود.

$$\sqrt{z} = \pm \sqrt{|z|} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$iz^2 + (1 + i)z - \frac{1}{4} + i = 0$$

مثال: معادلهٔ روبه‌رو را حل کنید:

$$a = i, b = 1 + i, c = -\frac{1}{4} + i \rightarrow z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1 + i)^2 - 4i \left(i - \frac{1}{4} \right) = 1 + 2i - 1 + 4 + i$$

$$z = \frac{-(1 + i) \pm \sqrt{4 + 3i}}{2i} = \frac{-i - 1 \pm \sqrt{4 + 3i}}{2i} *$$

حال برای محاسبه $\sqrt{4 + 3i}$ از معادله قبل استفاده می‌کنیم:

$$w = 4 + 3i, |w| = \sqrt{25} = 5, \theta = \tan^{-1} \left(\frac{3}{4} \right) = 0.64 \text{ rad}$$

$$w = 4 + 3i = |w|e^{i\theta} = 5e^{0.64i}$$

$$\sqrt{w} = \sqrt{|w|} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) = \sqrt{5}(\cos 0.32 + i \sin 0.32)$$

$$\sqrt{w} = 2.12 + 0.71i$$

$$* \rightarrow z = \frac{-i - 1 \pm \sqrt{4 + 3i}}{2i} = \frac{-i - 1 \pm \sqrt{w}}{2i}$$

$$= \frac{-i - 1 \pm (2.12 + 0.71i)}{2i}$$

$$\begin{cases} \text{For positive sign: } z_1 = -0.145 - 0.56i \\ \text{For negative sign: } z_2 = -0.85 + 1.56i \end{cases} \blacksquare$$

مثال: ریشه‌های معادله $z^3 - 2z - 4 = 0$ را بیابید.

می‌توان دریافت یک ریشه معادله $z = 2$ است. پس معادله را بدین صورت تجزیه می‌کنیم:

$$z^3 - 2z - 4 = (z - 2)(z^2 + 2z + 2) = 0$$

$$z^2 + 2z + 2 = 0 \rightarrow z = -1 \pm \sqrt{1 - 2} = -1 \pm i$$

→ Roots: $\{2, -1 + i, -1 - i\}$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

فصل ۲: تحلیل فوریه

مفهوم ضرب داخلی و ضرب پیچشی

توسط: سید محمد جعفری

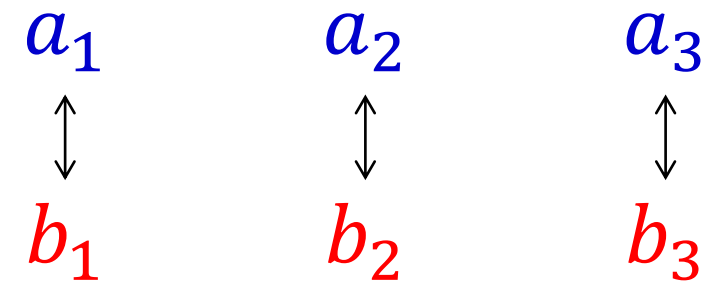
۱- مفهوم ضرب داخلی و ضرب پیچشی

- در تحلیل برداری دو نوع ضرب داریم که مقدار هر دو اسکالر است.
- کاربرد ضرب داخلی: در مباحث مختلف بویژه در تحلیل‌های برداری مثل زاویه بین دو بردار، تصویر یک بردار در یک راستا
- کاربرد ضرب پیچشی (convolution): در آمار، بینایی رایانه‌ای، پردازش تصویر، پردازش سیگنال و معادلات دیفرانسیل

اگر بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بدین شکل باشند: $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$

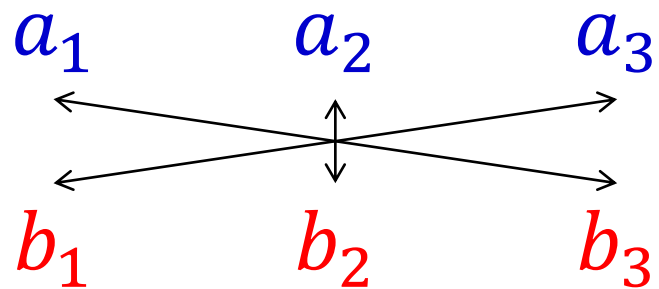
ضرب داخلی:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$



ضرب پیچشی:

$$\vec{A} * \vec{B} = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1$$



در ضرب داخلی عناصر نظیر به نظیر در هم ضرب می‌شوند ولی در ضرب پیچشی عنصر اول بردار $\vec{A}$ در عنصر آخر بردار $\vec{B}$ ، عنصر دوم $\vec{A}$ در عنصر یکی مانده به آخر $\vec{B}$ و به همین روش عنصر آخر $\vec{A}$ در عنصر اول $\vec{B}$ ضرب می‌شود و اصطلاحاً جایگشتی پیچشی دارد.

۱-۱- ضرب داخلی (Inner product – Dot product):

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

پس اگر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ، n عنصر داشته باشند:

$$\vec{A} * \vec{B} = \sum_{i=1}^n a_i b_{n-i+1}$$

حال همین مفهوم را می‌توان به تابع نیز تعمیم داد.

در بردارها چون عناصر گسسته دارند از علامت مجموع یعنی $\sum$ ، برای جمع می‌توان استفاده کرد ولی در توابع چون پیوسته‌اند به جای علامت مجموع از علامت انتگرال یعنی $\int$ استفاده می‌کنیم زیرا مفهوم علامت $\int$ در وهله اول به معنای جمع است.

ضرب داخلی دو تابع:

پس اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در دامنه مشترک $[a,b]$ داشته باشیم، ضرب داخلی آنها بدین شکل تعریف می‌شوند:

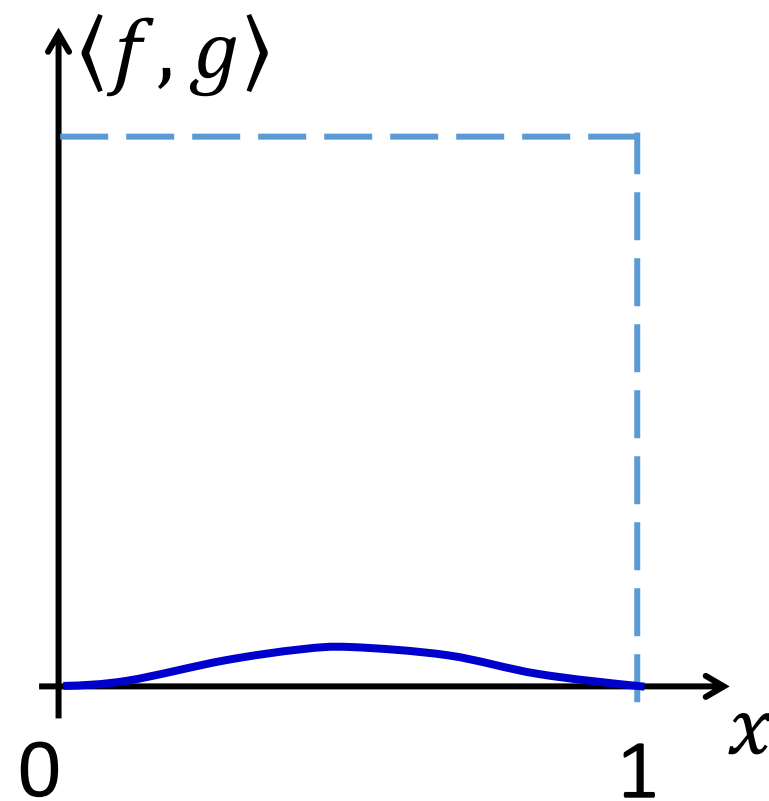
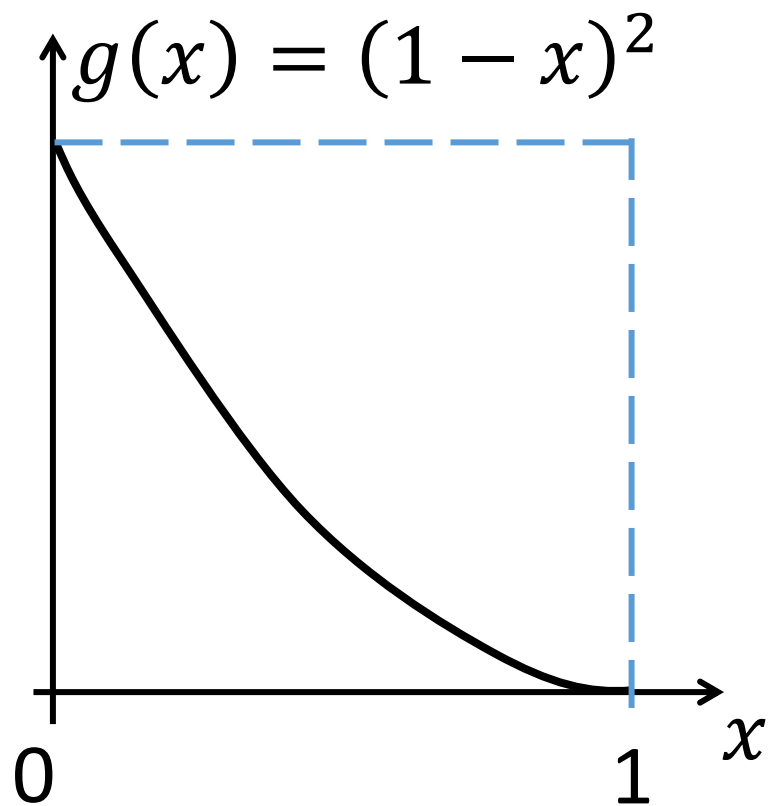
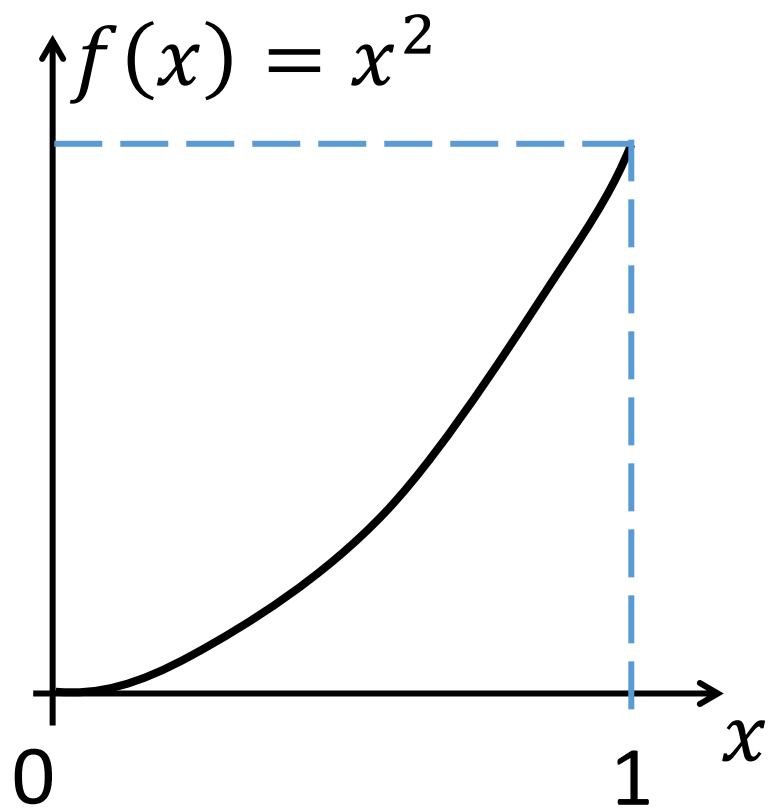
$$(f \cdot g)(x) = \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$f(x) = x^2, g(x) = (1 - x)^2$$

مثال:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 x^2(1 - x)^2 dx = \frac{1}{30}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + C = \frac{1}{30}$$



۱-۲- ضرب پیچشی (Convolution – Generalized product):

ضرب پیچشی $f(x)$ و $g(x)$ در سه دامنه $[a, b]$ ، $[-\infty, \infty]$ و $[0, x]$ بدین شرح است:

$$(f * g)(x) = \int_a^b f(x)g(b + a - x)dx = \int_a^b g(x)f(b + a - x)dx$$

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x - s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - s)g(s)ds$$

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(s)g(x - s)ds = \int_0^x f(x - s)g(s)ds$$

مفهوم پیچش (کانولوشن) دو تابع f و g :

□ این تعریف به صورت انتگرال حاصلضرب دو تابع که یکی از آنها نسبت به محور عمودی

مختصات آینه‌ای شده و روی آن یکی می‌لغزد، تعریف می‌شود.

□ با این تعریف، کانولوشن یک نوع خاص از **تبدیل انتگرالی** است.

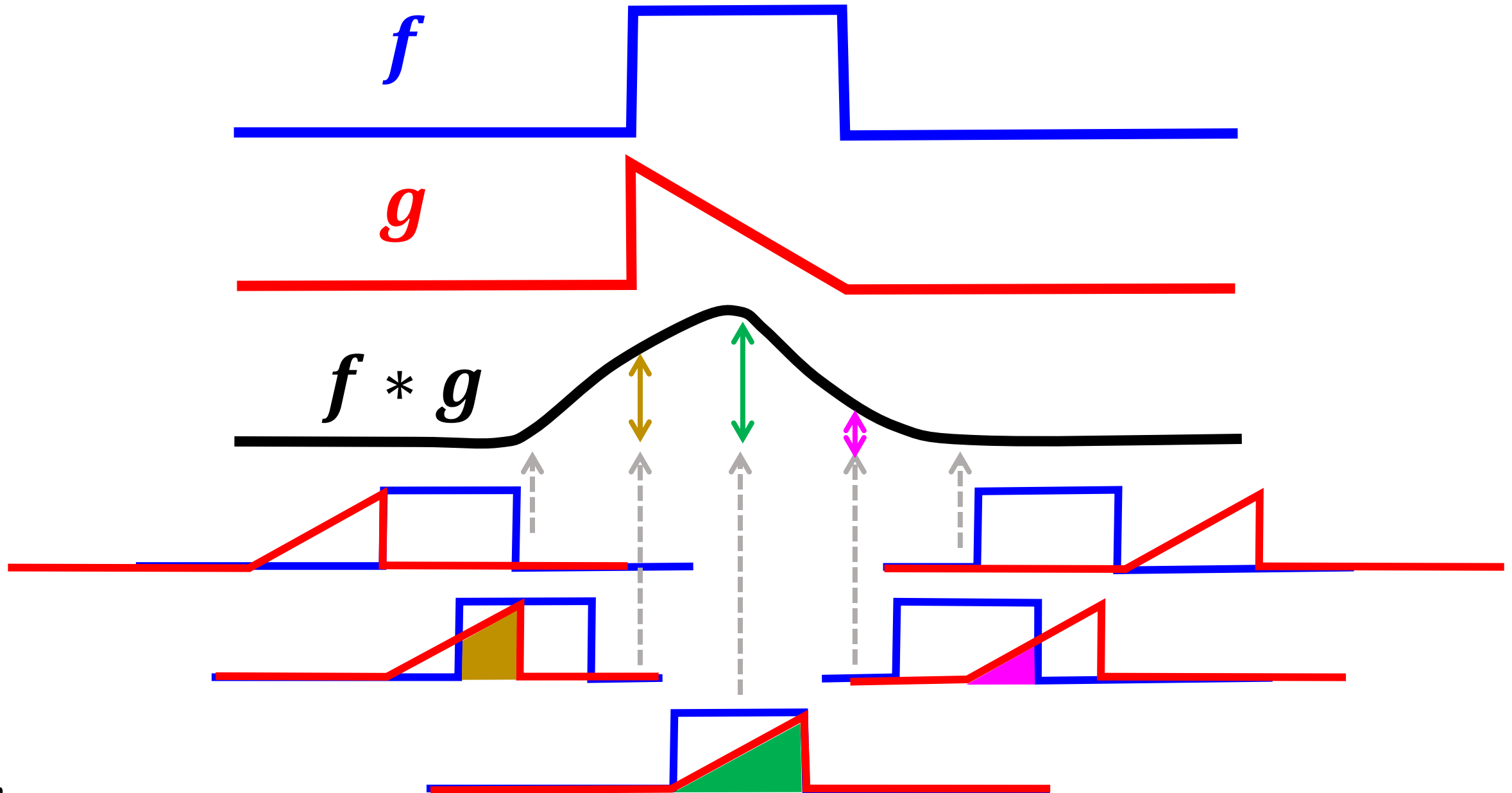
□ کاربرد پیچش دو تابع:

❖ پاسخ یک سامانه خطی غیر متغیر با زمان به انواع ورودی‌ها

❖ پردازش سیگنال‌های حاصل از داده‌برداری

❖ پردازش تصاویر

Visual illustration of convolution



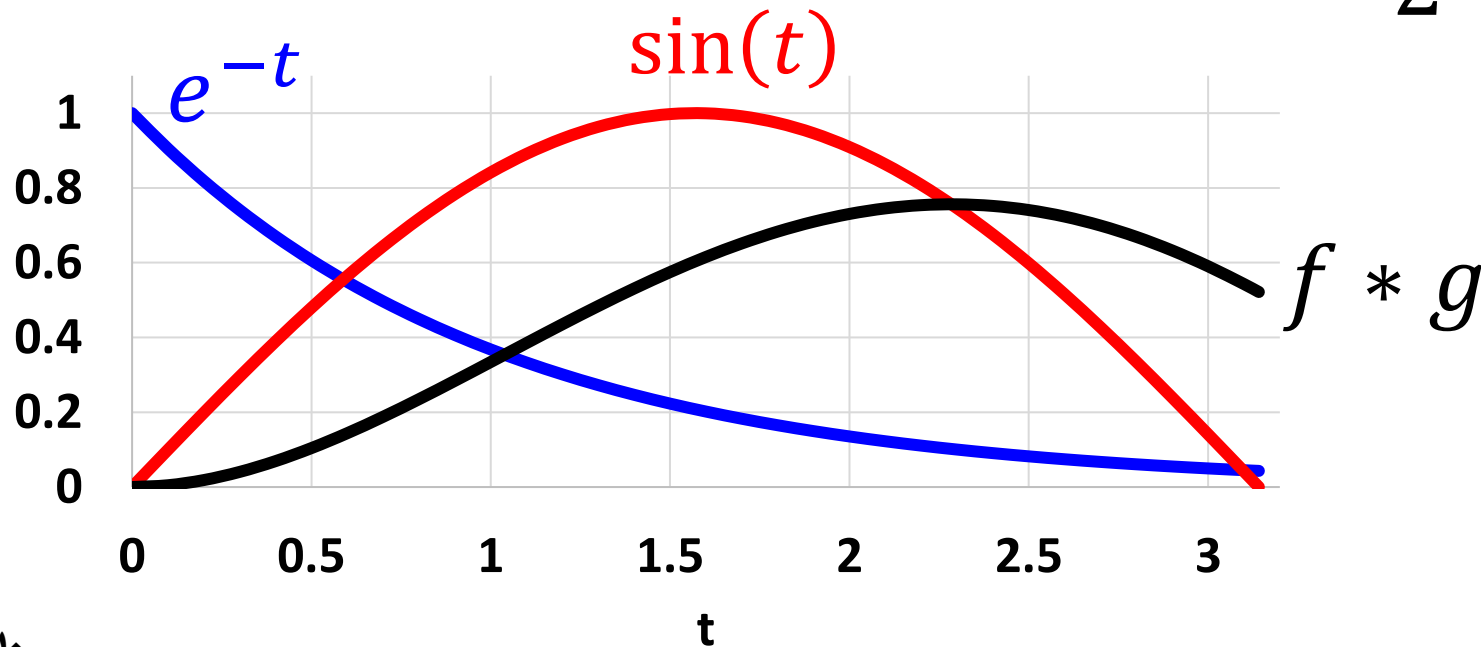
$$f(t) = e^{-t}$$

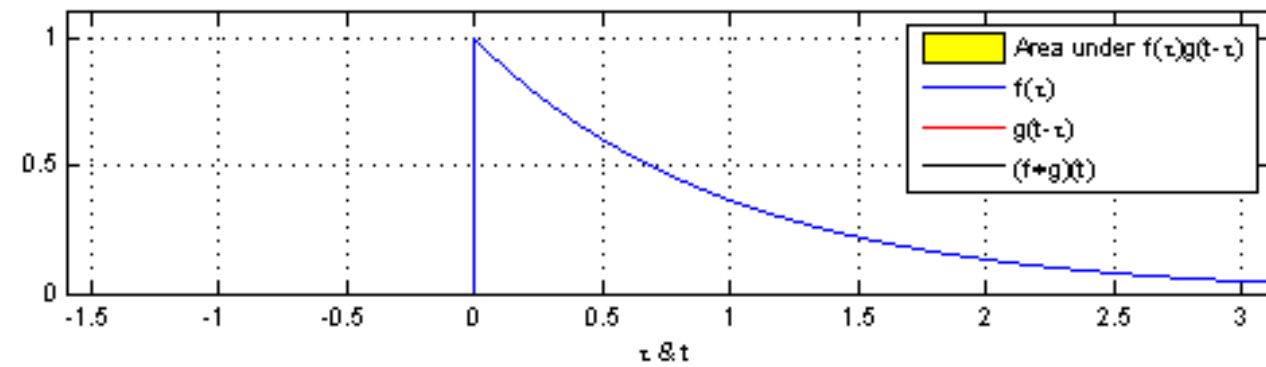
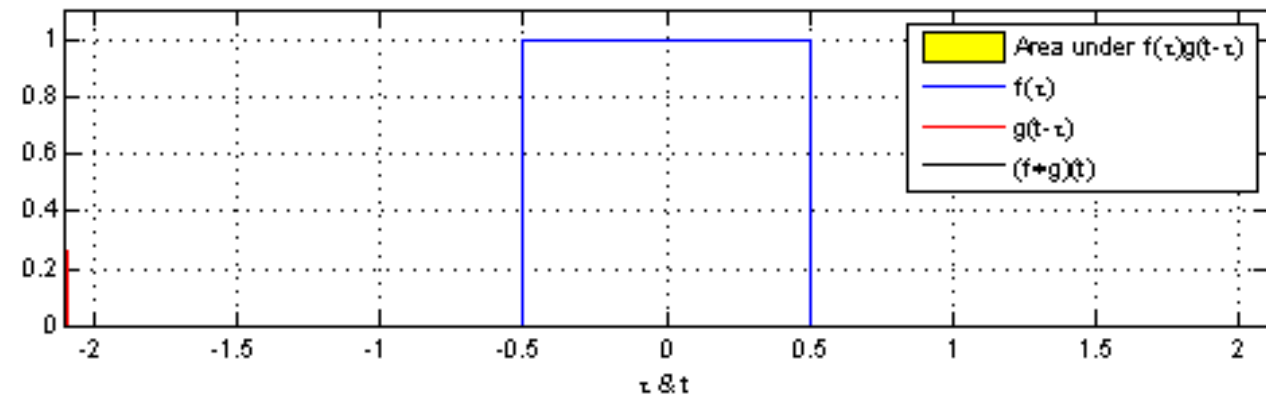
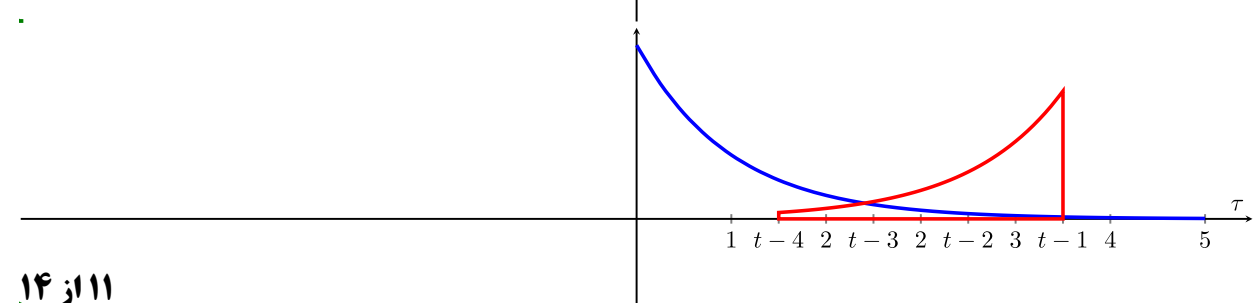
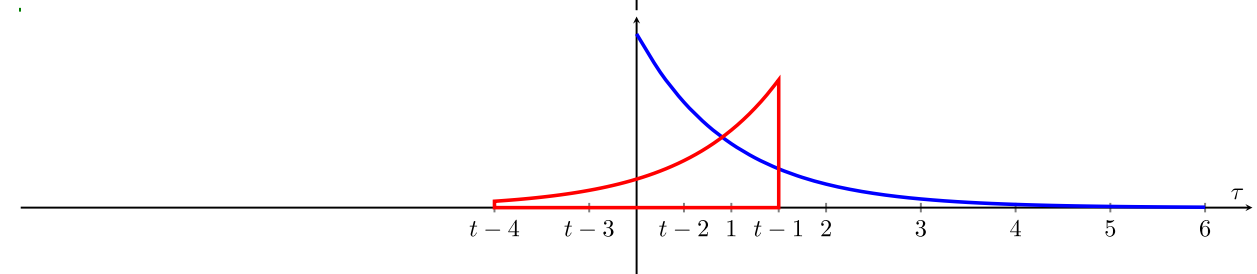
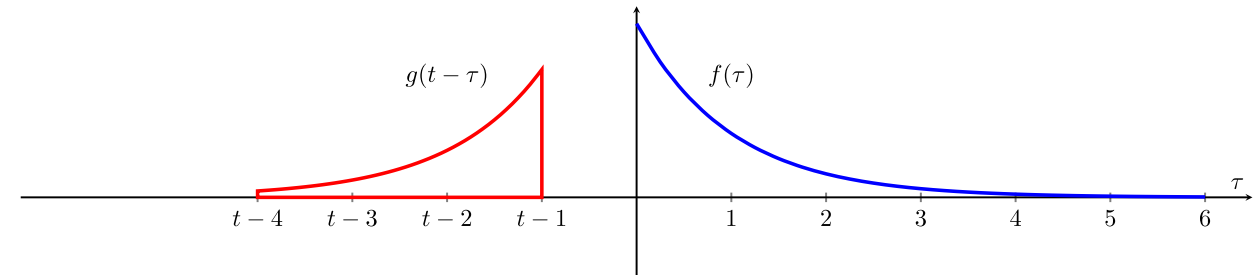
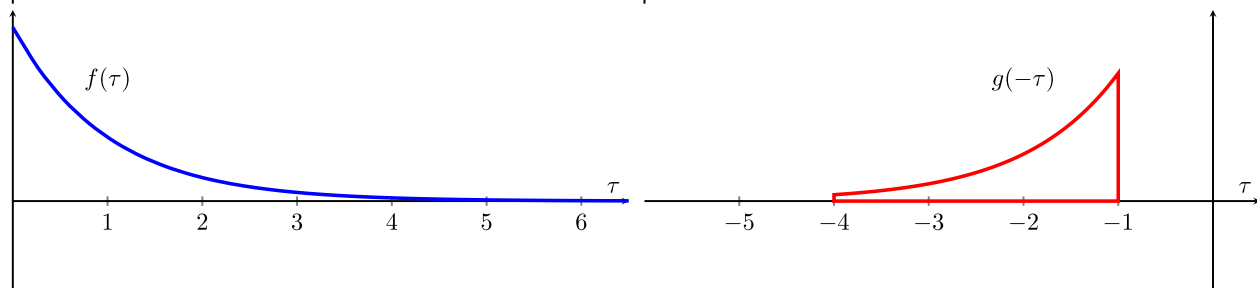
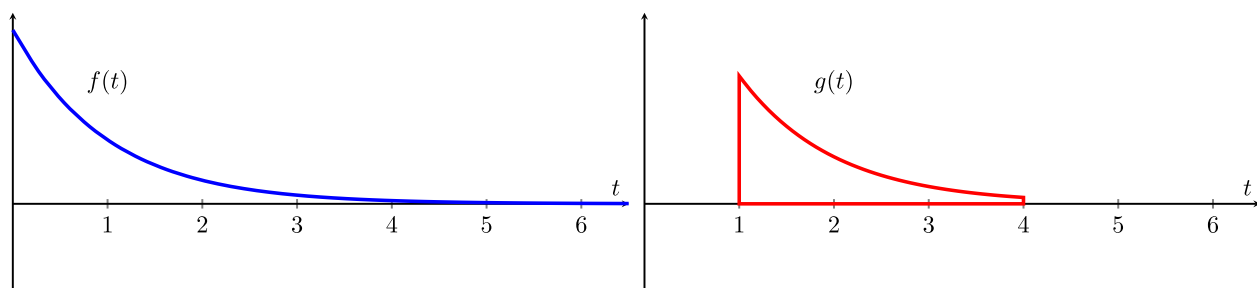
$$g(t) = \sin(t)$$

مثال:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)ds = \int_0^t e^{-s} \sin(t-s) ds$$

$$= \frac{1}{2}(e^{-t} + \sin t - \cos t)$$





ویژگی‌های ضرب پیچشی:

- 1. Commutativity:** (اشتراکی) $f * g = g * f$
- 2. Associativity:** (مشارکت) $f * (g * h) = (f * g) * h$
- 3. Distributivity:** (توزیع) $f * (g + h) = f * g + f * h$
- 4. Neutral element:** (عنصر خنثی) $f * 0 = 0$
- 5. Complex conjugation:** (مزدوج مختلط) $\overline{f * g} = \bar{f} * \bar{g}$

6. Identity element: (عنصر هویت)

$$f * \delta = f \rightarrow f(t) * \delta(t) = \int_0^t f(s) \delta(t-s) ds = f(t)$$

7. Differentiation: (مشتق) $(f * g)' = f' * g = f * g'$

8. Integration: (انتگرال)

$$\int (f * g)(x) dx = \left(\int f(x) dx \right) \left(\int g(x) dx \right)$$

یک حالت خاص:

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

$$G(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau$$

$$(F * g)(t) = (f * G)(t) = \int_{-\infty}^t (f * g)(\tau) d\tau$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

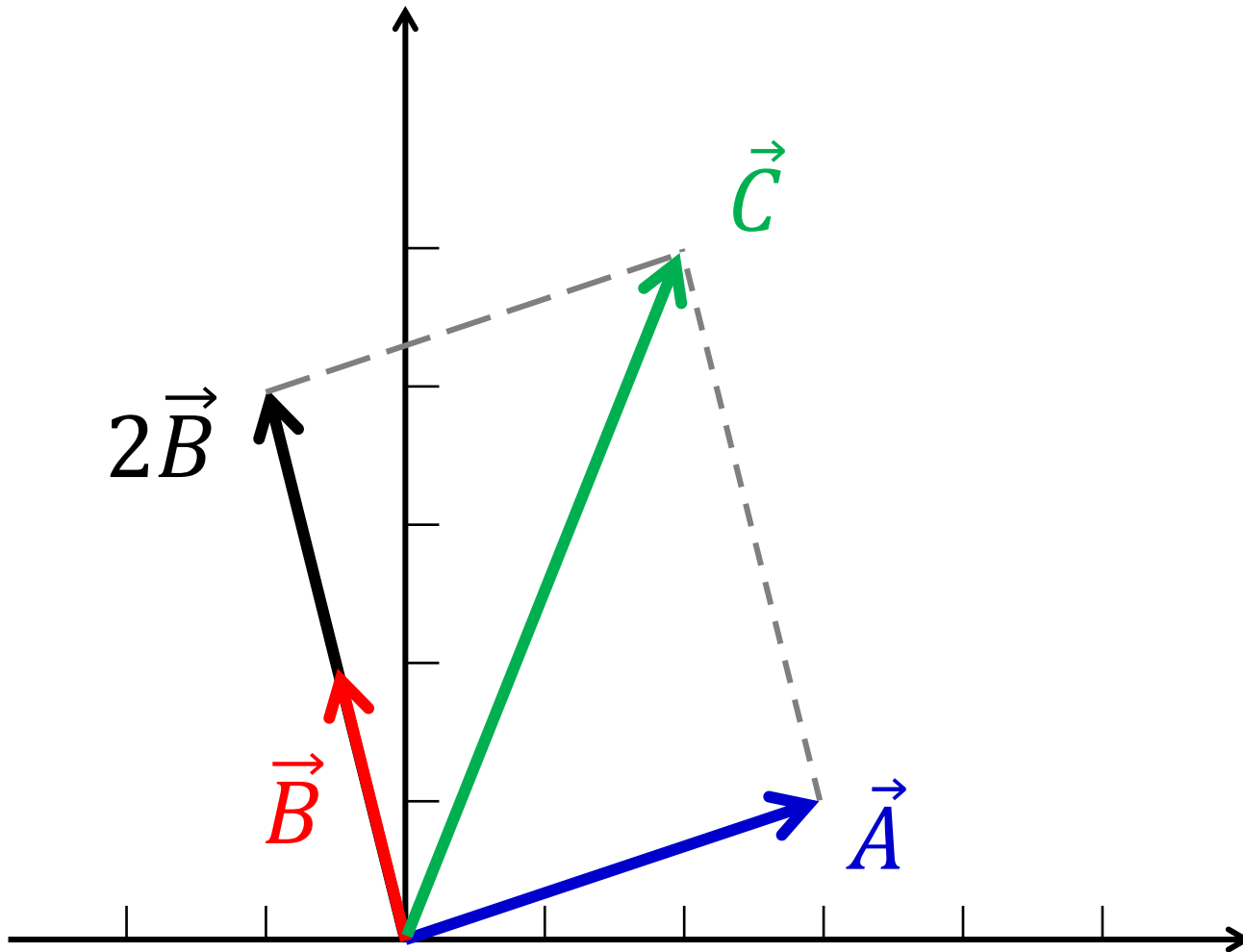
فصل ۲: تحلیل فوریه

مفهوم تعامد دو تابع

توسط: سید محمد جعفری

۲- مفهوم تعامد

در تحلیل برداری می‌توان هر بردار را به صورت جمع دو بردار نوشت:



$$\begin{cases} \vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} \\ \vec{B} = -0.5\hat{i} + 2\hat{j} \end{cases}$$

$$\vec{C} = \vec{A} + 2\vec{B}$$

$$\vec{C} = 2\hat{i} + 5\hat{j}$$

□ حال اگر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را یک‌ه‌کنیم، خواهیم داشت: $\vec{C} = a\vec{\lambda}_A + b\vec{\lambda}_B$

□ برای یافتن a و b باید تصویر بردار $\vec{C}$ را روی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ پیدا کنیم که برای اینکار از ضرب داخلی استفاده می‌کنیم.

□ اما نکته اینجاست که علاوه بر بردار $\vec{C}$ ، خود بردار $\vec{A}$ نیز در راستای بردار $\vec{B}$ تصویر دارد و برعکس بردار $\vec{B}$ نیز در راستای بردار $\vec{A}$ تصویر دارد و از هم مستقل نیستند.

□ به همین سبب برای اینکه برداری همچون بردار $\vec{C}$ را در دو راستای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ تصویر کنیم و بر حسب آنها بنویسیم، باید این دو بردار (در اصل این دو راستا) بر هم عمود باشند و شرط عمود بودن دو بردار این است که ضرب داخلی آنها صفر باشد.

پس به طور خلاصه داریم:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{C} = a\vec{\lambda}_A + b\vec{\lambda}_B : \left\{ \begin{array}{l} a = \vec{C} \cdot \vec{\lambda}_A \\ b = \vec{C} \cdot \vec{\lambda}_B \end{array} \right.$$

$$\vec{\lambda}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \quad \vec{\lambda}_B = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$$

□ حال همین مفهوم را می‌توان به توابع نیز تعمیم داد یعنی تابعی مانند $h(x)$ را می‌توان بر حسب مجموع چند تابع نوشت به شرط آنکه آن توابع، متعامد (Orthogonal) باشند.

□ تعامد در توابع را می‌توان بدین صورت با ضرب داخلی، مشخص کرد:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0 \quad \text{دو تابع } f \text{ و } g \text{ را در بازه } [a,b] \text{ متعامد گوئیم هرگاه:}$$

و اگر توابع f و g متعامد باشند، تابع سومی مانند $h(x)$ را می‌توان بر حسب آنها نوشت:

$$h(x) = af(x) + bg(x)$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مہندسی

فصل ۲: تحلیل فوریہ

توابع متعامد

توسط: سید محمد جعفری

۳- توابع متعامد

بر اساس تعریف تعامد دو تابع، توابع گوناگونی داریم که در بازه‌های مشخصی متعامد باشند.

مانند دو تابع روبه‌رو که در بازه $[-2, 2]$ متعامد هستند:

$$f(x) = x, g(x) = \frac{x^4}{8} + x^2$$

$$\langle f, g \rangle(x) = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

$$\rightarrow \int_{-2}^2 x \left(\frac{x^4}{8} + x^2 \right) dx = 0$$

تابع وزن (weight function):

تابع سومی که در دو تابع ضرب می‌شود تا ضرب داخلی آنها صفر شود.

$$\int_a^b W(x) f(x) g(x) dx = 0$$

در اینجا تابع $W(x)$ به عنوان وزن دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ عمل می‌کند.

مثال: دو تابع زوج همچون x^2 و $x^4 + |x|$ برای اینکه در بازه $[-a, a]$ انتگرالشان صفر شود، نیاز دارند در عاملی ضرب شوند تا تابع فرد شود و این عامل می‌تواند یک تابع فرد مانند x^3 باشد. پس تابع x^3 تابع وزن برای تعامد دو تابع x^2 و $x^4 + |x|$ در بازه $[-a, a]$ است.

$$\int_{-a}^a (x^2)(x^4 + |x|)dx \neq 0$$

$$\times W(x) = x^3 \rightarrow \int_{-a}^a (x^3)(x^2)(x^4 + |x|)dx = 0$$

یادداشت (۱):

طول یک بردار یا نُرم (Norm) یک تابع در ضرب داخلی با خودش تعریف می‌شود:

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int f^2(x) dx$$

یادداشت (۲): چند جمله‌ای‌های متعامد خاص و پرکاربرد:

□ چند جمله‌ای‌های هرْمیت (Hermite polynomials)

□ چند جمله‌ای‌های لژاندر (Legendre polynomials)

□ چند جمله‌ای‌های لاگر (Laguerre polynomials)

□ چند جمله‌ای‌های چبیشف (Chebyshev polynomials)

Hermite polynomials: $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$

Legendre polynomials: $\tilde{P}_n(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} (-x)^k$

Laguerre polynomials: $L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مہندسی

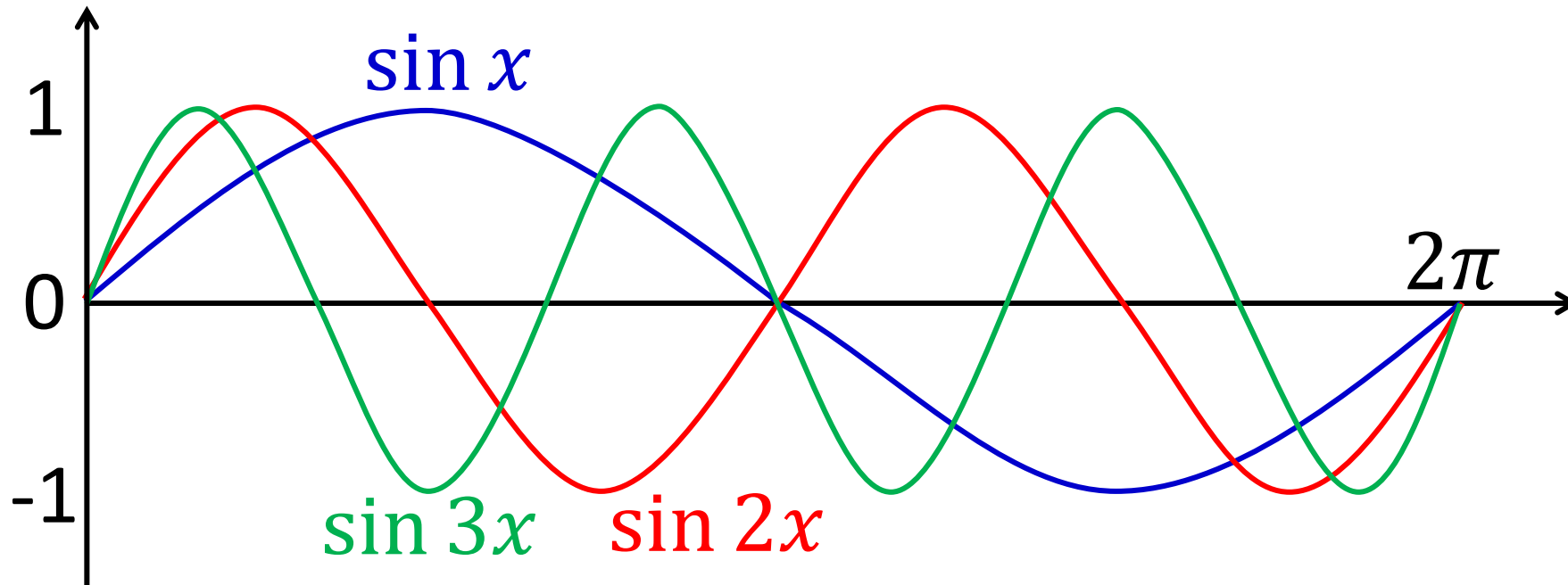
فصل ۲: تحلیل فوریہ

توابع متعامد مثلثاتی

توسط: سید محمد جعفری

۴- توابع متعامد مثلثاتی

توابع مثلثاتی $\sin nx$ و $\cos nx$ ، مهمترین و پرکاربردترین توابع متعامد در ریاضیات اند.



در ادامه ابتدا ثابت می‌کنیم توابع مثلثاتی $\sin mx$ و $\cos nx$ در $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ متعامد اند.

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$$

اثبات تعامد توابع مثلثاتی:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx$$

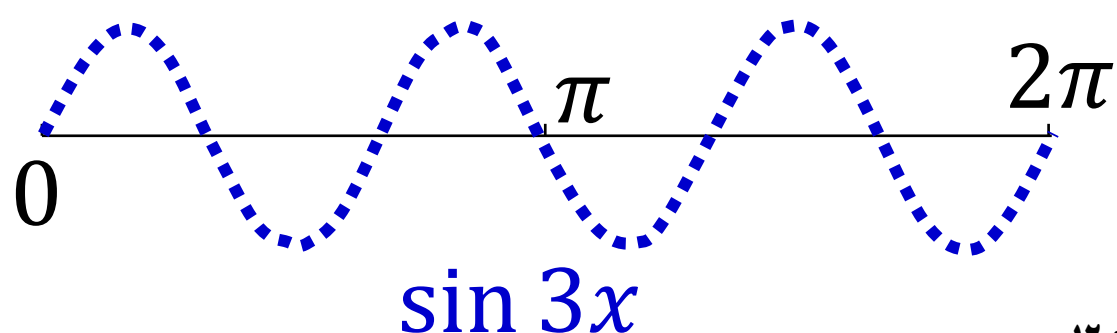
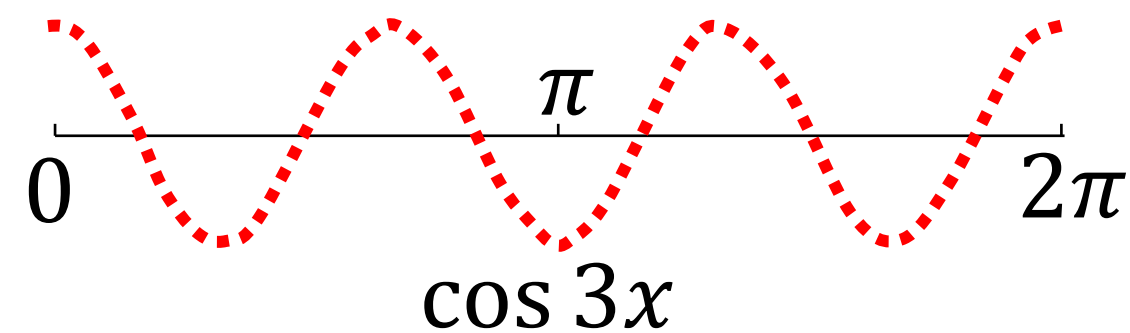
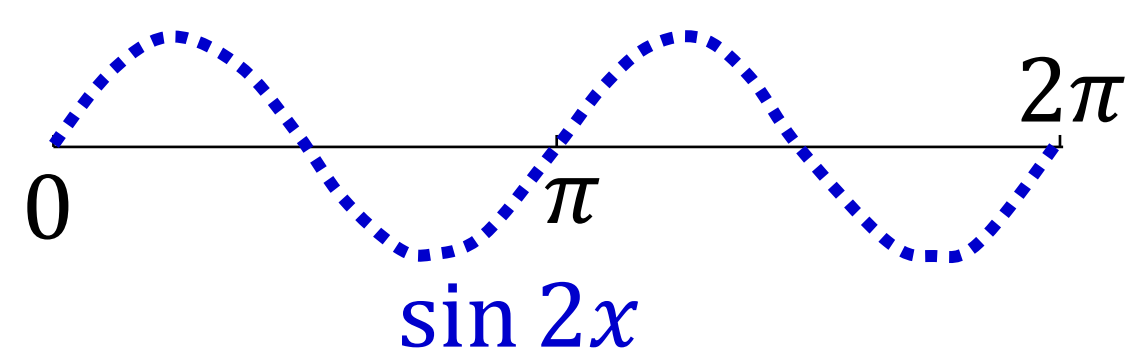
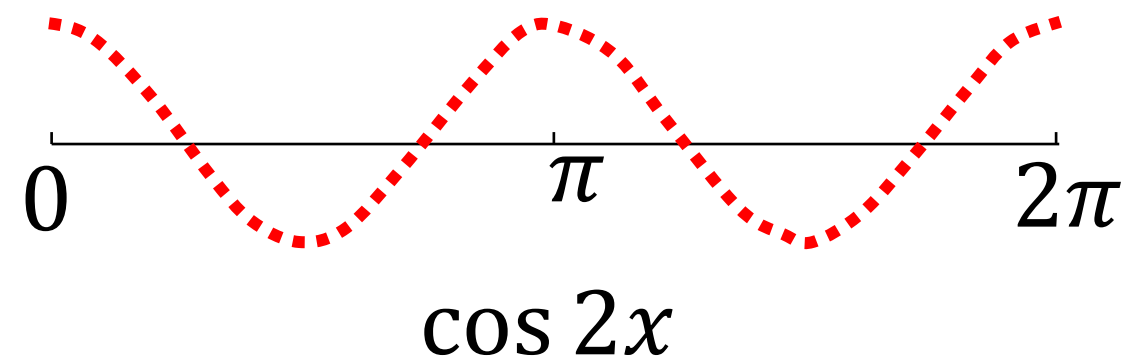
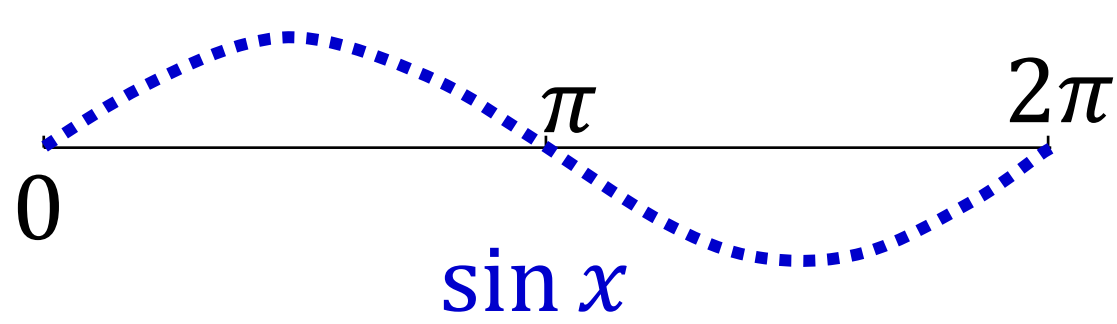
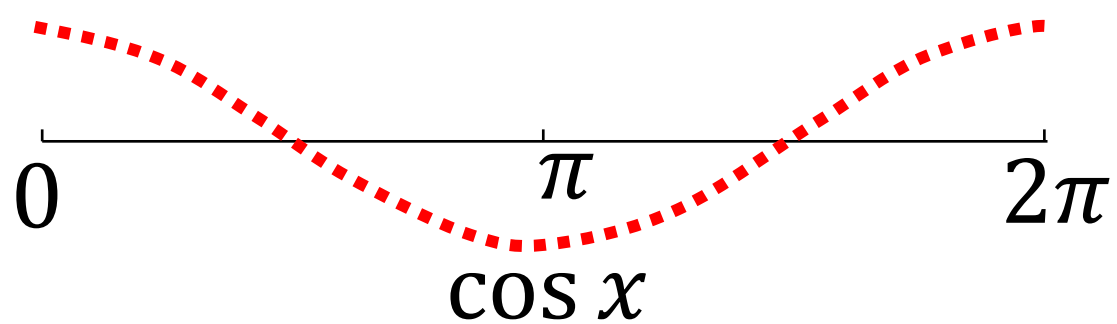
$$= \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \frac{1}{2} [\sin(m-n)x - \cos(m+n)x] dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos(m-n)x}{m-n} - \frac{\cos(m+n)x}{m+n} \right]_{\alpha}^{\alpha+2\pi} = 0$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$$

پس داریم:

یعنی توابع سینوسی و کسینوسی در یک دامنه به طول 2π متعامد اند.



نکته ۱: توابع مثلثاتی بر خود نیز متعامدند زیرا:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

نکته ۲: توابع مثلثاتی و توابع ثابت نیز متعامدند زیرا:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} A \cos mx \, dx = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} B \sin mx \, dx = 0$$

نتیجه: توابع ثابت A ، سینوسی $\sin nx$ و کسینوسی $\cos nx$ ، در بازه‌ای به طول 2π

متعامد اند و می‌توان توابع را بر حسب مجموع آنها نوشت.

نکته: توابع مثلثاتی و توابع ثابت همگی توابعی متناوب اند و مجموع توابع متناوب نیز

متناوب خواهد بود. پس برای اینکه بتوان یک تابع را بر حسب توابع متناوب نوشت، لازم

است که خود آن تابع متناوب باشد.

نتیجه کلی: اگر تابع $f(x)$

۱- متناوب با دوره تناوب 2π باشد.

۲- انتگرال پذیر باشد (برای انتگرال پذیری کافی است مشتق چپ و راست تابع در هر نقطه موجود باشد ولی الزاماً برابری نیازی نیست)

آنگاه می توان تابع $f(x)$ را بدین صورت بر حسب مجموع توابع ثابت، سینوسی و کسینوسی نوشت:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

اینکه تابعی را به صورت مجموع عدد و سینوس و کسینوس بدون توان بنویسیم، اصطلاحاً **سری فوریه تابع** (Fourier Series) گویند.



Joseph Fourier

یادداشت: دو شرط نباید فراموش شوند:

۱- متناوب با دوره 2π

۲- موجود بودن مشتق چپ و راست در هر نقطه

مثال: سری فوریه تابع $\sin^3 x$ را بنویسید.

در مورد تابع $f(x) = \sin^3 x$ باید گفت:

۱- تابعی متناوب با دوره تناوب $T = 2\pi$ است (شرط اول برقرار است)

۲- انتگرال پذیر است زیرا مشتق آن $f'(x) = 3 \cos x \sin^2 x$ در هر نقطه موجود و متناهی است (شرط دوم نیز برقرار است)

پس سری فوریه دارد یعنی می توان آن را به صورت مجموع سینوس و کسینوس بدون توان نوشت.

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \rightarrow \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$$

□ حال تابع $\sin^3 x$ را به صورت مجموع جمله‌های سینوسی نوشتیم.

□ با مقایسه با **سری فوریه** می‌توان گفت:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \begin{cases} n = 1 \rightarrow b_1 = \frac{3}{4} \\ n = 3 \rightarrow b_3 = -\frac{1}{4} \\ n \neq 1 \text{ and } n \neq 3 \rightarrow b_n = 0 \end{cases}$$

مثال: سری فوریۀ توابع $y_1(x) = 3$ و $y_2(x) = \cos 5x$ را بنویسید.

هر دو تابع متناوب هستند و سری فوریۀ آنها خودشان می باشند زیرا آنها را می توان به صورت مجموعی از اعداد و جملات سینوسی و کسینوسی نوشت.

$$y_1(x) = 3 \rightarrow a_0 = 3, a_n = b_n = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

$$y_2(x) = \cos 5x \rightarrow$$

$$a_0 = 0, a_5 = 1, a_n = 0 \quad n \neq 5, b_n = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

مثال: سری فوریه تابع متناوب روبه‌رو با دوره تناوب $T = 2\pi$ را بنویسید:

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

□ خود پرسش اشاره کرده است که تابع متناوب است (شرط اول را دارد).

□ ولی نمی‌توان برای آن سری فوریه نوشت زیرا مشتق‌پذیر نیست و این تابع در مبدأ

مشتق متناهی ندارد.

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{x^2} \right) x \cos \frac{1}{x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \pm \infty$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

فصل ۲: تحلیل فوریه

معادلات اوپلر

توسط: سید محمد جعفری

۵- معادلات اوایلر در سری فوریه

□ تا کنون سری فوریه توابع ساده‌ای را بررسی کردیم. حال اگر تابع به سادگی توابع قبل نباشد باید به سراغ معادلات کلی برویم.

□ ابتدا سری فوریه تابع متناوب و انتگرال‌پذیر $f(x)$ را بدین صورت فرض می‌کنیم:

تابعی متناوب با دوره تناوب: $T = 2\pi$ $f(x)$:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad *$$

حال از دو سمت معادله در بازه $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ ، انتگرال می‌گیریم.

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} a_n \cos nx dx + \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} b_n \sin nx dx \right)$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} a_n \cos nx dx = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} b_n \sin nx dx = 0$$

طبق تعامد می دانیم:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} a_0 dx = a_0 \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} dx = 2\pi a_0$$

$$\rightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) dx$$

□ خوب تا اینجا عدد ثابت در نوشتن یک تابع بر حسب مجموع یک عدد ثابت و توابع

سینوسی و کسینوسی به دست آمد.

□ برای یافتن ضرایب a_n ها که ضرایب کسینوس در سری فوریه اند، کافی است جملات

را در عبارت $\cos mx$ ضرب کرده و انتگرال بگیریم:

$$f(x) \cos mx = a_0 \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos mx \cos nx + b_n \cos mx \sin nx)$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos mx \, dx = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} a_0 \cos mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} a_n \cos mx \cos nx \, dx + \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} b_n \cos mx \sin nx \, dx \right)$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} a_0 \cos mx \, dx = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} b_n \cos mx \sin nx \, dx = 0$$

طبق قضیهٔ تعامد، در مورد انتگرال اول و سوم داریم:

در دومین انتگرال $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} a_n \cos mx \cos nx \, dx$ باید مجموع را باز کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} a_n \cos mx \cos nx \, dx =$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} a_1 \cos mx \cos x \, dx + \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} a_2 \cos mx \cos 2x \, dx$$

$$+ \cdots + \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} a_m \cos mx \cos mx \, dx + \cdots$$

طبق قضیهٔ تعامد همهٔ انتگرال‌ها صفر خواهند شد بجز انتگرالی که $m = n$ باشد.

پس داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} a_n \cos nx \cos nx \, dx = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} a_n \cos^2 nx \, dx = a_n \pi$$

لذا داریم:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos nx \, dx = a_n \pi \rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

برای یافتن b_n (ضریب جمله‌های سینوسی در سری فوریه)، نیز با ضرب عبارت $\sin mx$ در معادله * و انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \sin mx \, dx = b_n \pi$$

$$\rightarrow b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

معادلاتی که بدین شکل به دست آمدند، به **معادلات اوایلر** موسوم اند.

پس به طور خلاصه سری فوریۀ تابع $f(x)$ بدین شرح است:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad * \quad \text{سری فوریۀ تابع } f(x)$$

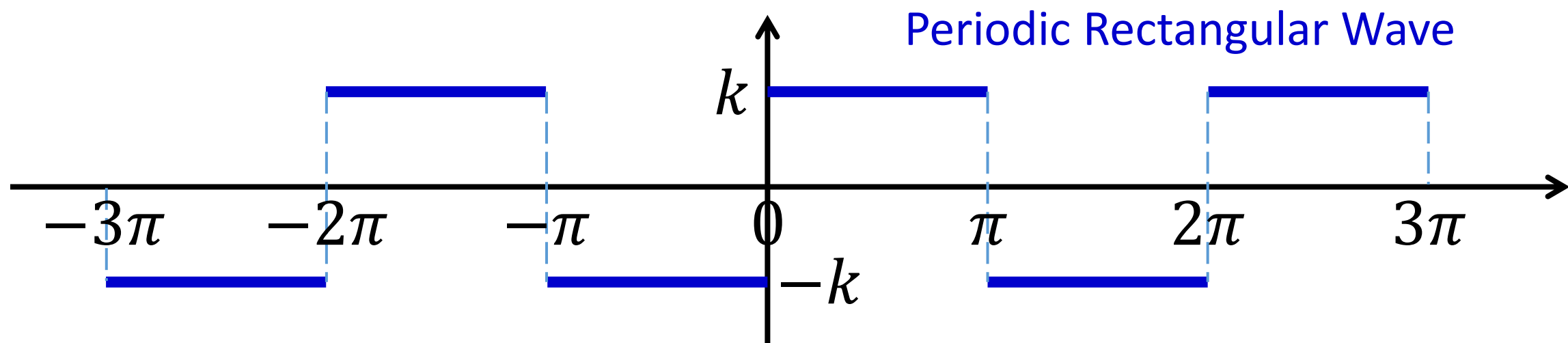
$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) dx \quad \text{مساحت زیر نمودار } f(x)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos nx dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \sin nx dx$$

مثال: ضرایب سری فوریۀ تابع موج مربعی متناوب را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{if } -\pi < x < 0 \\ +k & \text{if } 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$



اینگونه توابع در اعمال نیروهای خارجی در سامانه‌های مکانیکی و نیروهای محرک در

سامانه‌های مکاترونیکی وجود دارند.

پاسخ:

□ مقدار تابع در یک تک نقطه مانند مبدأ تأثیری در مقدار انتگرال ندارد. لذا مقدار تابع در نقاط x

$$= 0, \pm \pi \text{ بدون تعریف اند.}$$

□ برای محاسبه ضرایب سری فوریه ابتدا سراغ ضریب a_0 می‌رویم:

□ با توجه به تعریف ضریب a_0 می‌فهمیم که مقدار این ضریب ارتباط مستقیم با مقدار سطح زیر

نمودار در بازه تعریف شده دارد.

□ با توجه به نمودار مقدار مساحت زیر نمودار صفر است. لذا مقدار ضریب a_0 برابر صفر خواهد بود: $a_0 = 0$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos nx dx \rightarrow (\alpha = -\pi)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-k) \cos nx dx + \int_0^{\pi} (k) \cos nx dx \right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[-k \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 + k \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-k) \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} (k) \sin nx \, dx \right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[k \frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 - k \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right]$$

$$b_n = \frac{k}{n\pi} [\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos(n\pi) + \cos 0]$$

$$b_n = \frac{2k}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] \quad \text{می دانیم } \cos(-\theta) = \cos \theta, \cos 0 = 1$$

$$\cos \pi = -1, \cos 2\pi = 1, \cos 3\pi = -1 \quad \text{کمی بررسی عبارت } \cos n\pi :$$

$$\cos n\pi = \begin{cases} -1 & n \text{ فرد} \\ +1 & n \text{ زوج} \end{cases} \rightarrow 1 - \cos(n\pi) = \begin{cases} 2 & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{4k}{(2n+1)\pi}$$

پس سری فوریۀ تابع $f(x)$ برابر است با:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4k}{(2n+1)\pi} \sin(2n+1)x \quad \blacksquare$$

به صورت گسترده سری فوریۀ $f(x)$ برابر است با:

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \right)$$

کمی این سری را بررسی می‌کنیم و با اصل تابع مقایسه می‌کنیم:

$$S_1 = \frac{4k}{\pi} \sin x \quad \text{جمله اول سری برابر است با:}$$

جمله اول و دوم سری برابر است با:

$$S_2 = \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \right)$$

□ همانگونه که مشاهده می شود ضریب جملات بعدی بشدت کوچک می شوند و لذا سهم

آنها در تشکیل سری فوریه ناچیز می شود.

□ در ادامه با شکل نیز نشان می دهیم که بیشترین سهم را در شکل دهی سری فوریه چند

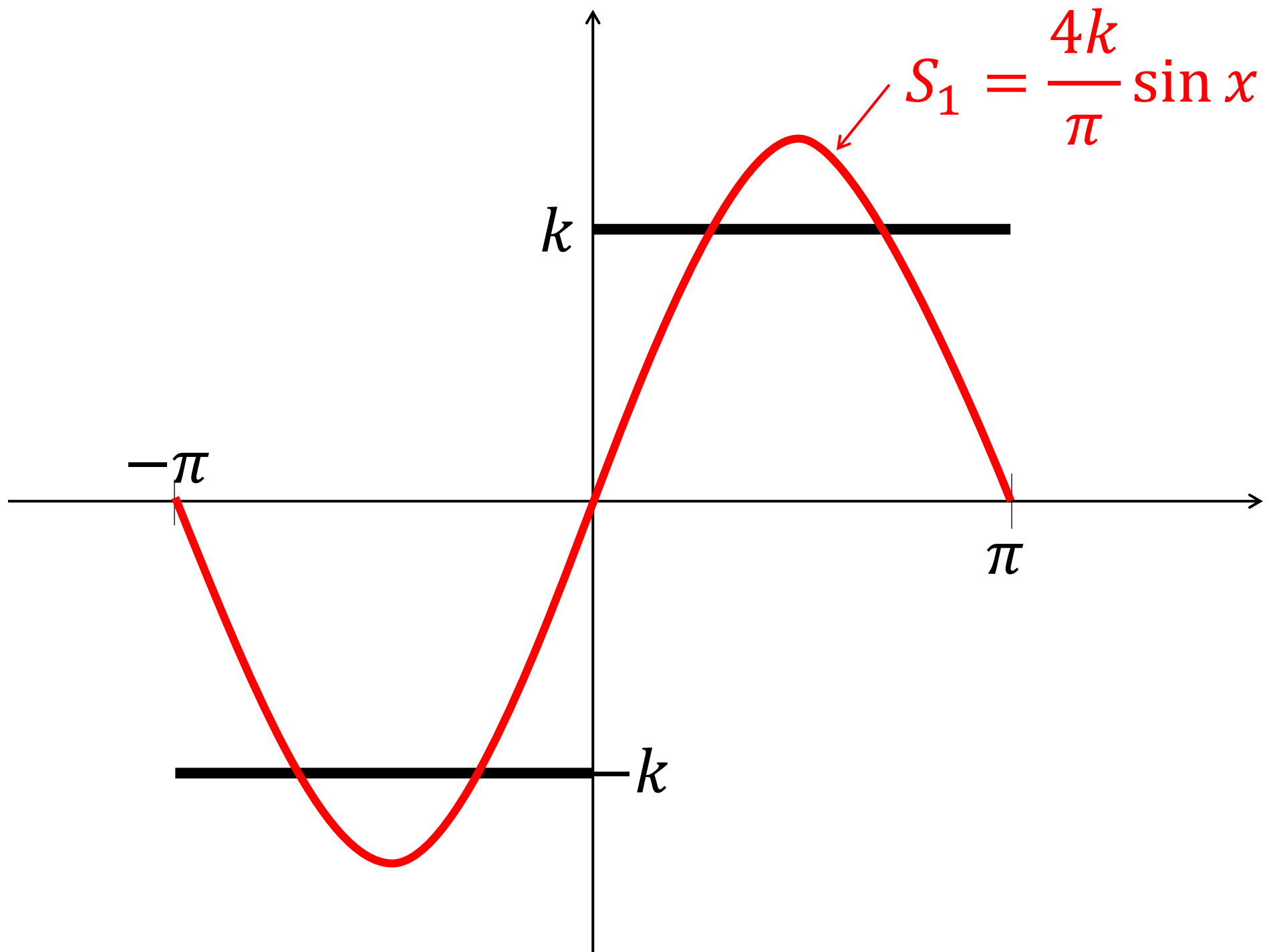
جمله نخست سری فوریه، بویژه جمله اول به عهده دارد. به اصطلاح به این جمله اول

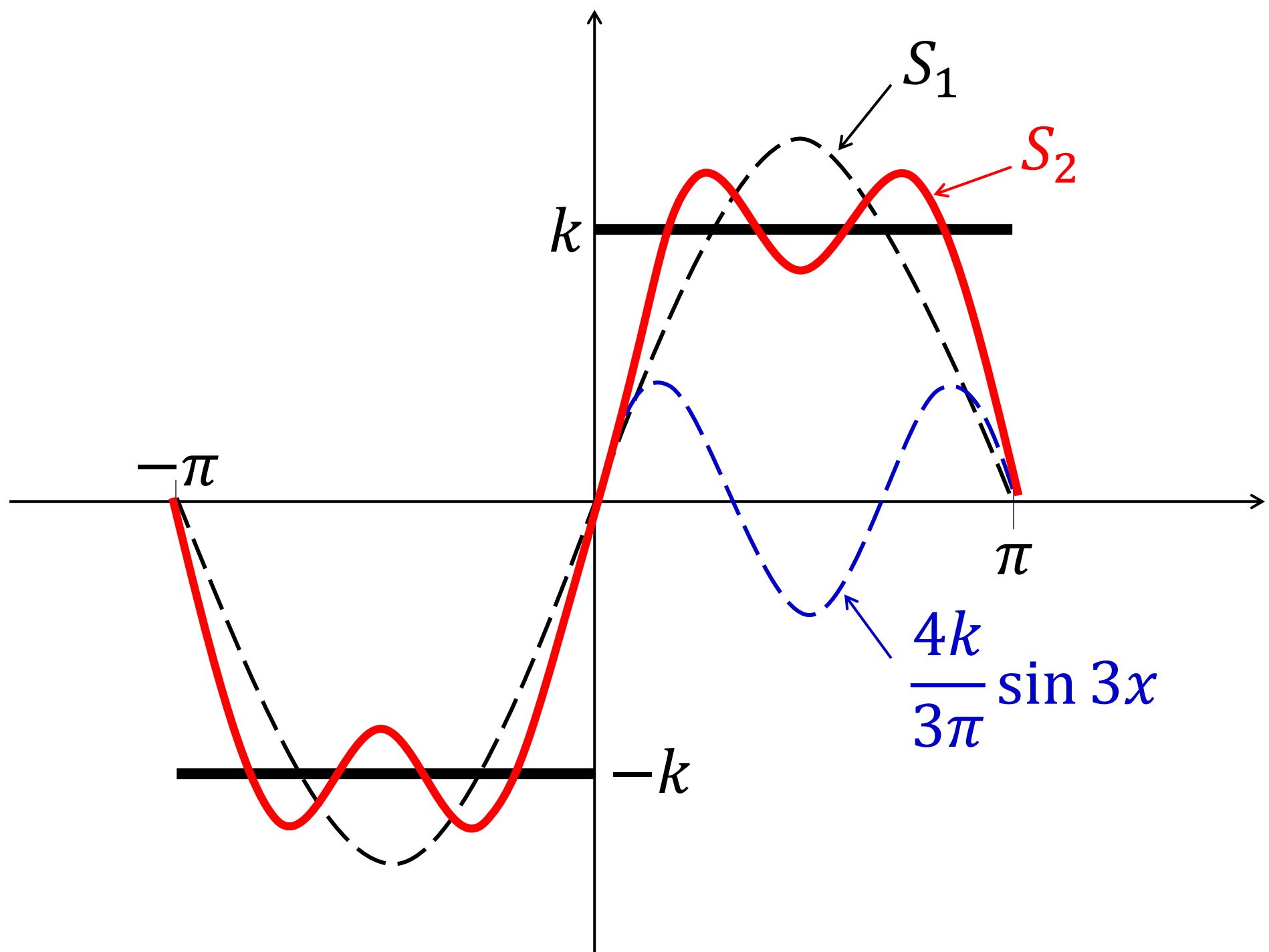
عبارت "غالب (Dominant)" گویند.

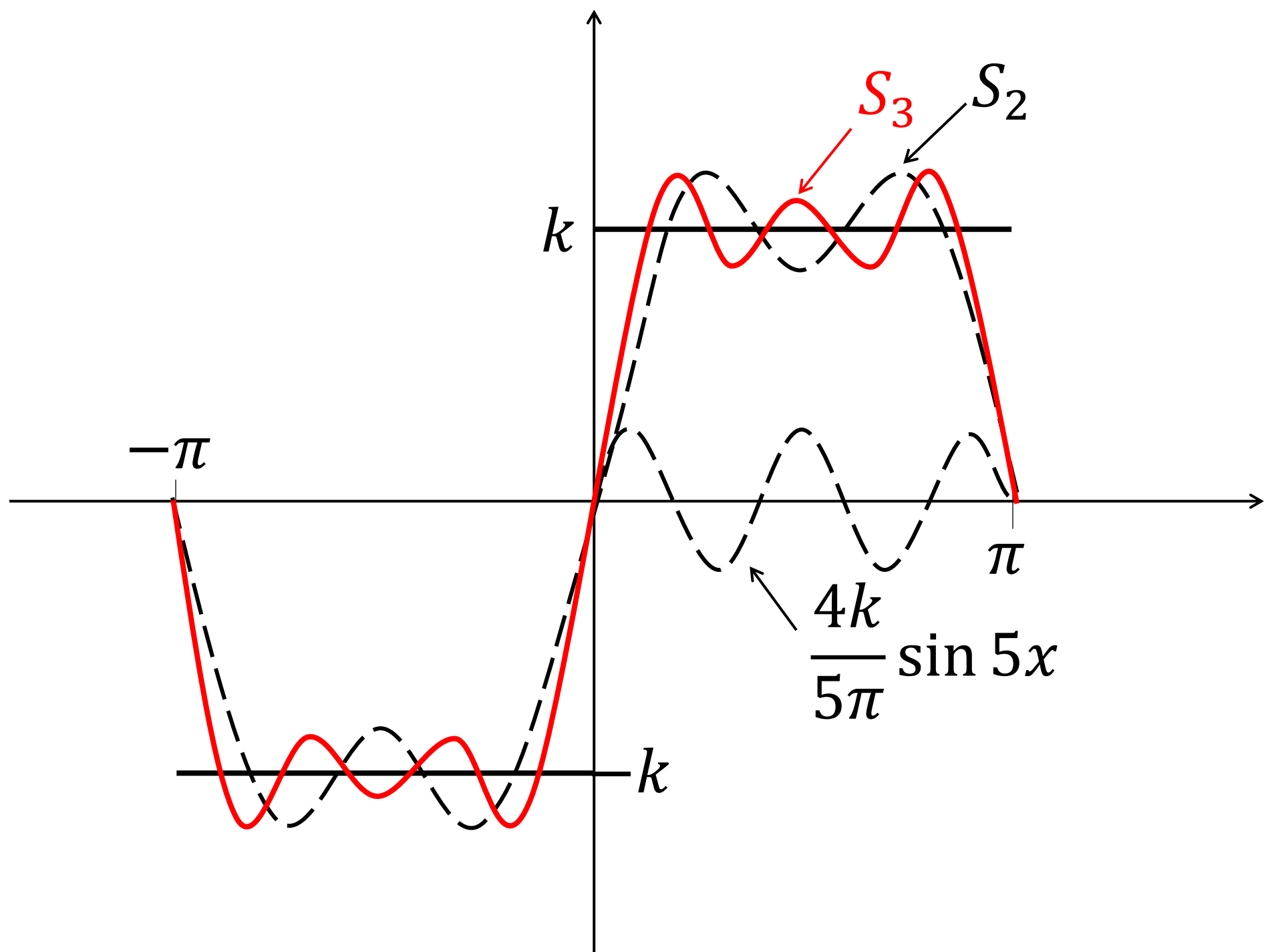
همچنین از سری فوریه برای محاسبه برخی از مجموعها نیز می توان استفاده کرد مانند:

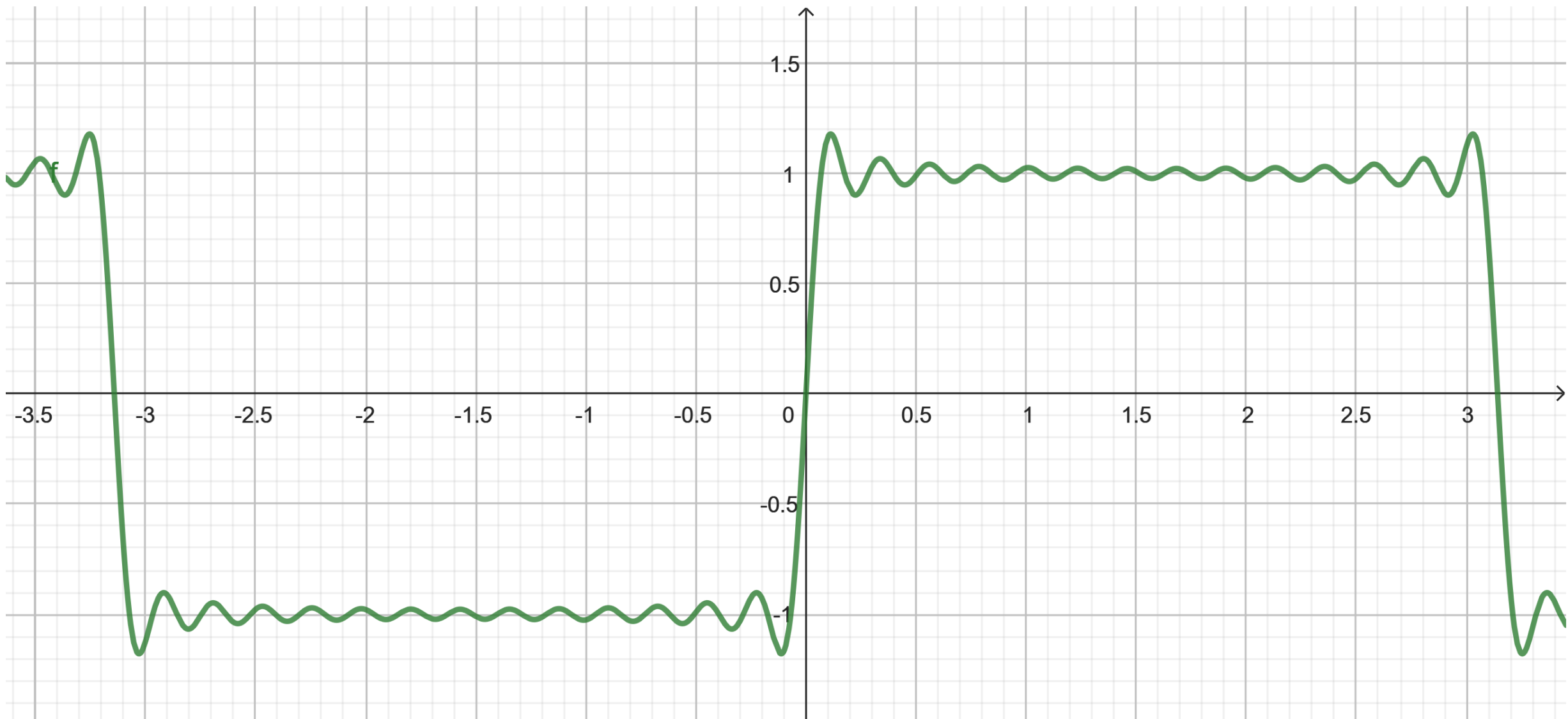
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k = \frac{4k}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$$

$$\rightarrow 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$









بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مہندسی

فصل ۲: تحلیل فوریہ

توابع زوج و فرد و قضیہ دیریکلہ

توسط: سید محمد جعفری

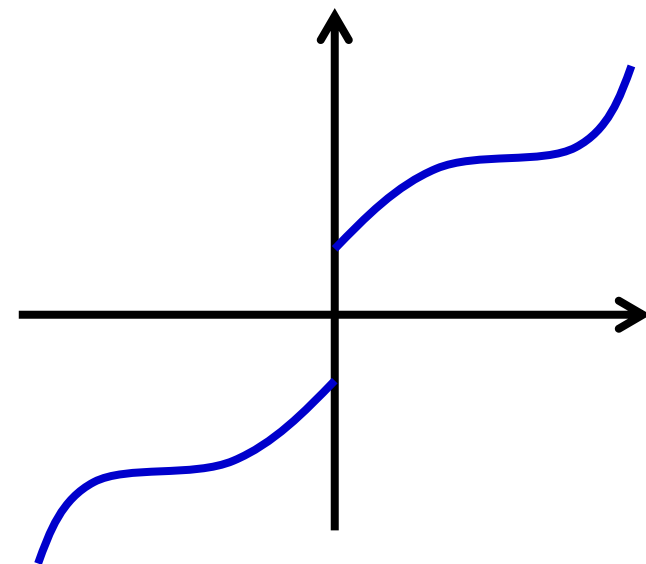
۶- قضایای سری فوریه و توابع زوج و فرد

□ در معادلات اوایلر، برای انتخاب اینکه α را چه عددی بگیریم باید به فرض مسأله توجه کرد که دامنه در چه بازه‌ای است.

□ **نکته:** اگر تابع مورد نظر زوج یا فرد بود، آسانتر است که دامنه انتگرال‌گیری متقارن باشد تا از قضایای انتگرال‌گیری توابع زوج و فرد استفاده کنیم. زیرا می‌دانیم که:

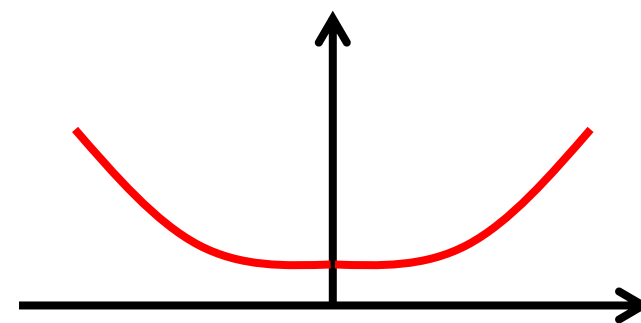
□ مساحت زیر نمودار تابع فرد در بازه متقارن، صفر است و مساحت زیر نمودار تابع زوج در بازه متقارن، دو برابر سمت مساحت زیر نمودار در سمت راست است.

$$f(x): \text{Odd function} \rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$



$f(x): \text{Even function}$

$$\rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$



با توجه به تقارن بازه که بحث شد، α را مساوی با π فرض می‌کنیم تا بازه انتگرال‌گیری به صورت $[-\pi, \pi]$ باشد.

حال اگر تابع $f(x)$ فرد باشد، خواهیم داشت:

$$\left. \begin{array}{l} f(x): \text{Odd function} \\ \sin nx : \text{Odd} \\ \cos nx : \text{Even} \\ a_0 : \text{Even} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0 \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0 \end{array}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

البته طور دیگری نیز می‌توان استدلال کرد که اگر تابع $f(x)$ فرد باشد، پس نمی‌توان آن را به صورت مجموعی از توابع زوج کسینوسی و ثابت نوشت. پس فقط جملات سینوسی دارد.

همین طور برای توابع زوج نیز می توان نوشت که جملات سینوسی ندارند.

$f(x)$: Even function
 $\sin nx$: Odd
 $\cos nx$: Even
 a_0 : Even

} →

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = 0$$

نکته: سری فوریه و ضرایب آن بر پایه انتگرال است و چون انتگرال خاصیت خطی دارد، پس سری فوریه نیز خاصیت خطی دارد.

خاصیت خطی: وقتی بیان می‌شود که عملگری خاصیت خطی دارد یعنی اینکه اگر ورودی آن عملگر به صورت مجموع دو تابع باشد، خروجی آن نیز به صورت مجموع تک تک آن ورودی‌ها است. به عنوان مثال عملگر مشتق را در نظر بگیرید:

همانگونه که مشاهده می‌شود، مشتق مجموع دو تابع، برابر است با مجموع مشتق دو تابع. پس عملگر مشتق‌گیری خطی است. به بیان دیگر عملگر خطی نسبت به ضریب ثابت و جمع جبری می‌شکند.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}} \rightarrow f'(x) \\ g(x) \rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}} \rightarrow g'(x) \end{array} \right\} f(x) + g(x) \rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}} \rightarrow f'(x) + g'(x)$$

این خاصیت در انتگرال نیز قابل مشاهده است.

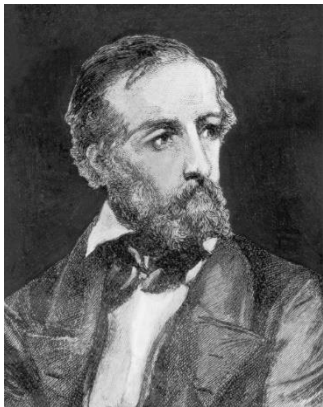
$$\int [af(x) + bg(x)]dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$$

ولی عملگر خطی نسبت به ضرب نمی‌شکند به طور مثال:

$$\int (f g)dx \neq \int f dx \int g dx \longleftarrow (fg)' \neq f'g'$$

به بیان آخر عملگر خطی از اصل جمع آثار پیروی می‌کند.

پس سری فوریه مجموع چند تابع = جمع سری فوریه جداگانه هر قسمت از تابع



Dirichlet, 1829,
Germany

قضیه دیریکله: در واقع سری فوریه با خود تابع برابر نیست بلکه با میانگین مجموع حد چپ و حد راست تابع در هر نقطه برابر است.

$$f^+(x) = \lim_{x \rightarrow x^+} f(x)$$

$$f^-(x) = \lim_{x \rightarrow x^-} f(x)$$

$$\frac{f^+(x) + f^-(x)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

حال اگر تابع پیوسته باشد می‌توان گفت سری فوریه با خود تابع برابر است زیرا اگر تابع پیوسته باشد، حد چپ و حد راست تابع با مقدار خود تابع برابر است.

□ اگر دوره تناوب تابع $T = 2\pi$ نباشد و به صورت کلی $T = 2L$ باشد، چه باید کرد؟

□ اگر $f(x)$ تابعی انتگرال پذیر (مشتق چپ و راست آن در هر نقطه موجود باشد) و متناوب با دوره

تناوب $T = 2L$ باشد، سری فوریه تابع $f(x)$ برابر است با:

سری فوریه تابع $f(x)$:

$$\frac{f^+(x) + f^-(x)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

فصل ۲: تحلیل فوریه

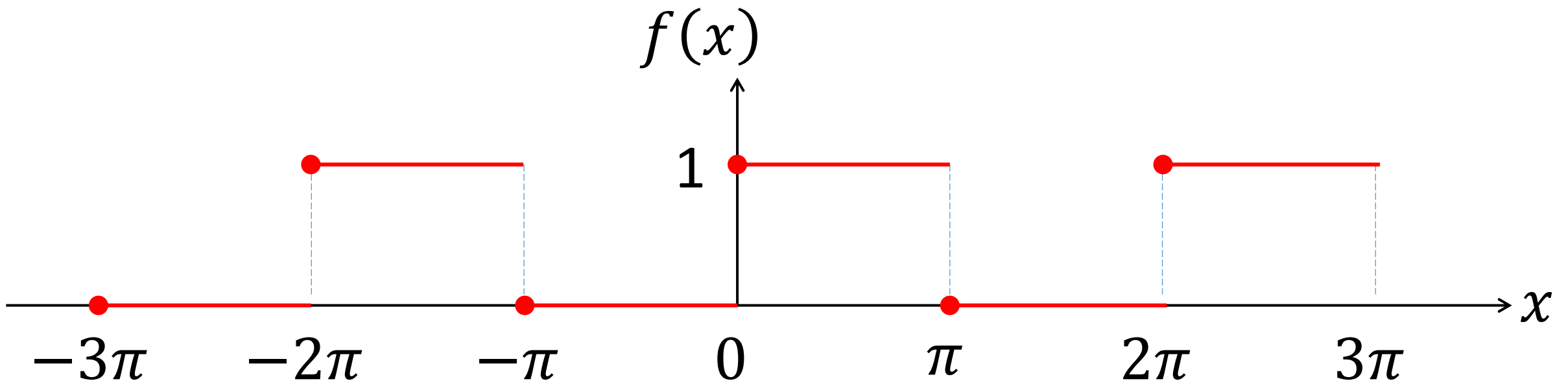
مثال‌هایی برای سری فوریه (۱)

توسط: سید محمد جعفری

۷- مثال‌هایی برای سری فوریه

۷-۱- مفهوم ضرایب در سری فوریه

مثال: سری فوریه تابع پله (step function) را بیابید.



پاسخ: همانگونه که می بینیم تابع متناوب است و مشتق چپ و راست در تمام نقاط موجود دارد و متناهی است. پس شرایط سری فوریه برقرار است.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases} \rightarrow f(x + 2\pi) = f(x) \rightarrow T = 2\pi$$

برای محاسبه ضرایب سری فوریه ابتدا سراغ ضریب a_0 می رویم:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx}_{\text{Area under function}} = \frac{1}{2\pi} \times \pi = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \mathbf{0} \times \cos nx \, dx$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{1} \times \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi} (\sin n\pi - \sin 0) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \mathbf{0} \times \sin nx \, dx$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{1} \times \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \times \frac{-1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left(\underbrace{-\cos n\pi}_{(-1)^{n+1}} + \underbrace{\cos 0}_1 \right) = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n\pi}$$

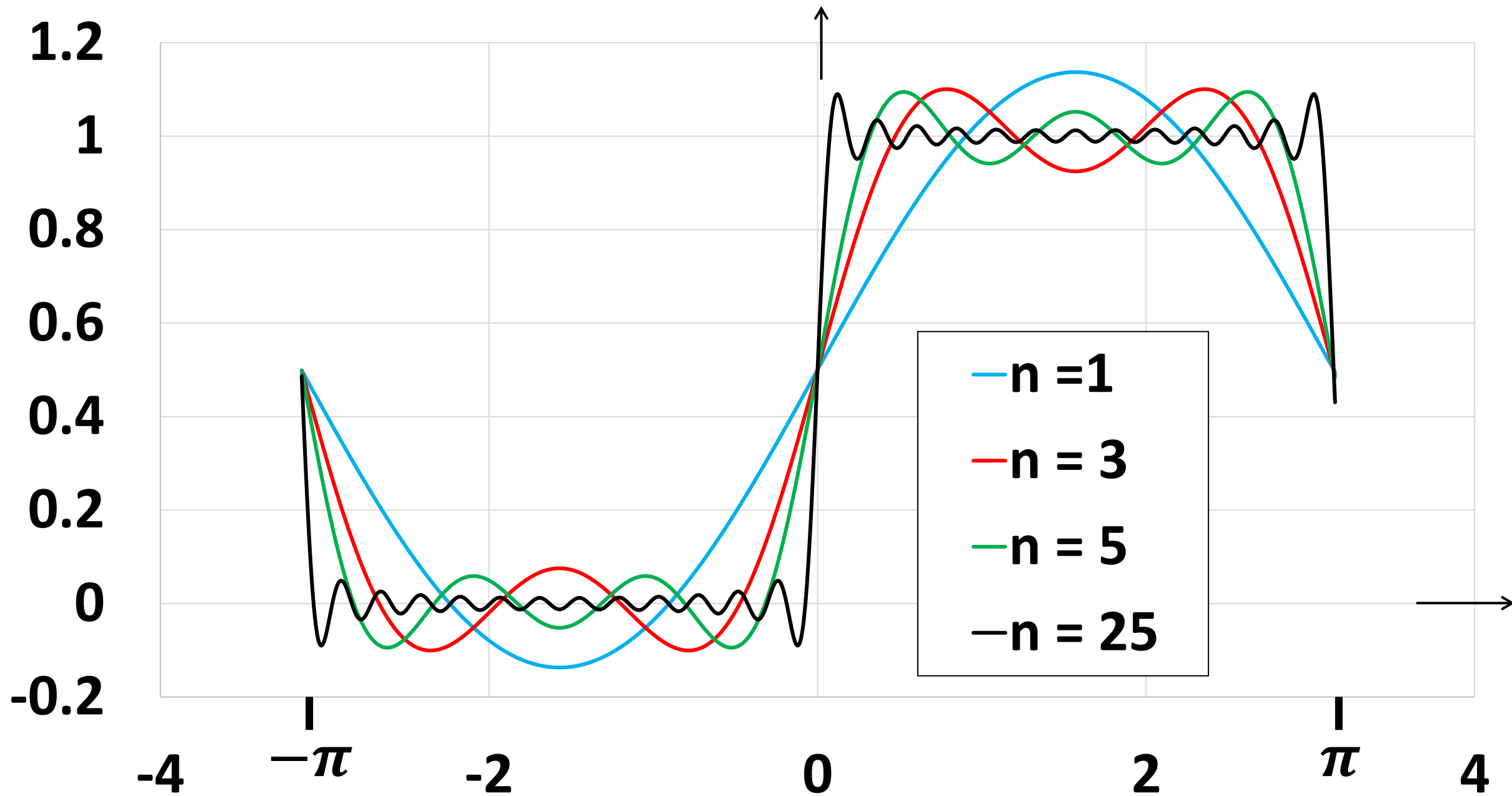
$f(x)$ سری فوریۀ تابع :

$$\frac{f^+(x) + f^-(x)}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n\pi} \sin nx$$

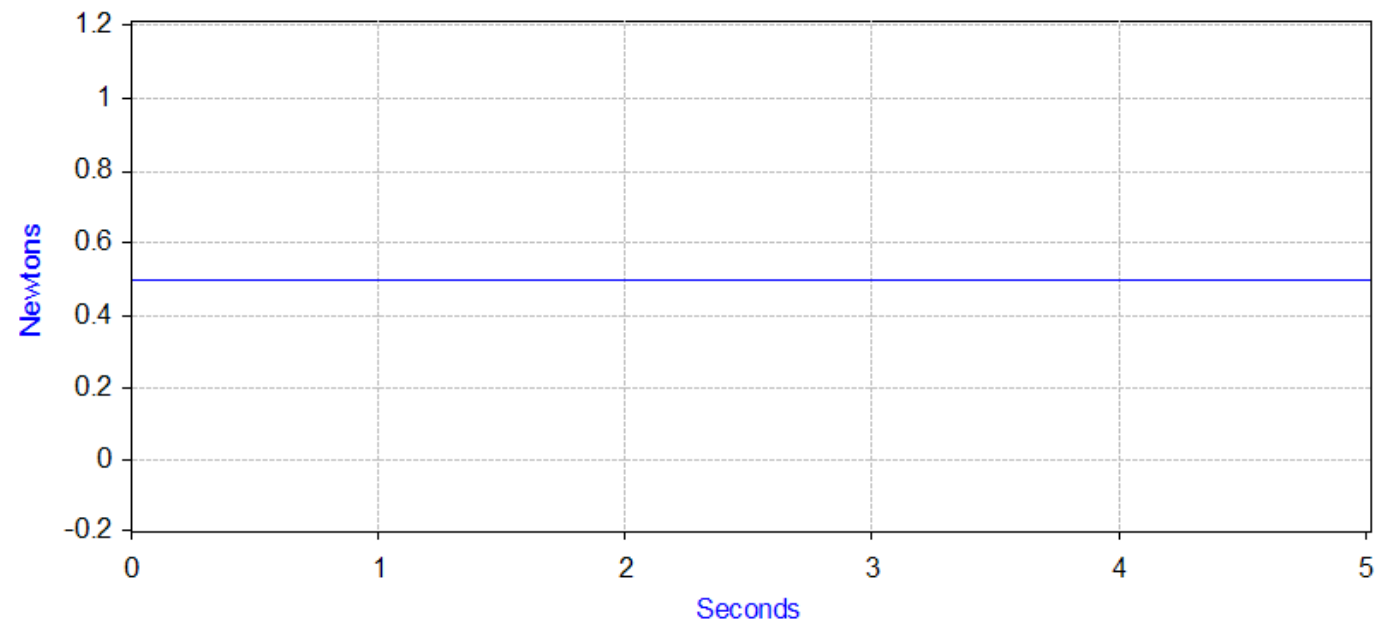
$$\frac{f^+(x) + f^-(x)}{2}$$

با عددگذاری به جای n خواهیم داشت:

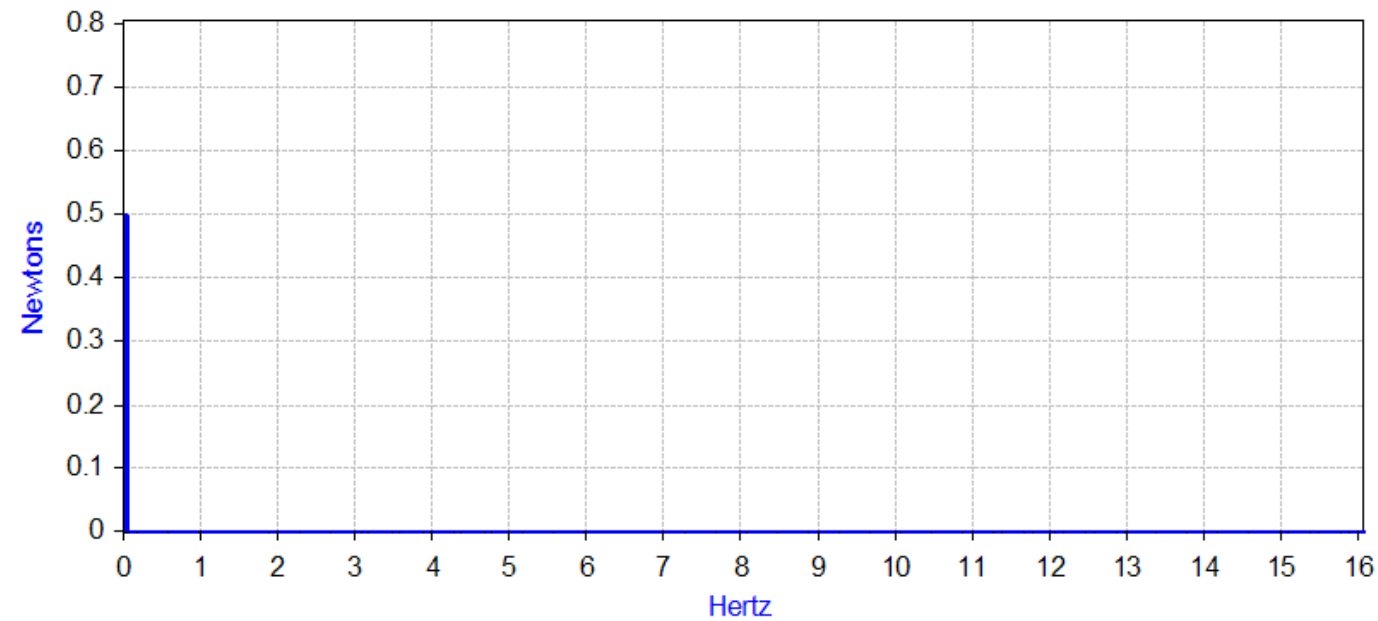
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{2}{3\pi} \sin 3x + \frac{2}{5\pi} \sin 5x + \frac{2}{7\pi} \sin 7x + \dots$$



Square Wave: Generated by Harmonics



Frequency Spectrum: Square Wave



نکات:

□ با افزایش تعداد جملات سری، نمودار سری فوریه به خود تابع نزدیک و نزدیک تر می شود

□ سری فوریه در نقاط پیوسته به خود تابع میل می کند.

□ سری فوریه در نقطه ناپیوسته $x = 0$ از $y = 0.5$ می گذرد زیرا این نقطه، ناپیوسته

است و سری فوریه طبق قضیه دیریکله به میانگین حد چپ و راست میل می کند.

$$f(0^+) = 0, f(0^-) = 1 \rightarrow$$

$$@x = 0 \text{ Fourier series} \rightarrow \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{1}{2}$$



□ با افزایش تعداد جملات، نمودار سری فوریه بسیار شبیه نمودار تابع می‌شود؛ با این تفاوت که در نقطه ناپیوسته $x = 0$ دامنه تابع جهش ناگهانی و رشد دارد. این جهش را پدیده گیبس (Gibbs phenomenon) گویند.

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad \text{یادآوری ۱:}$$

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)] \end{cases}$$

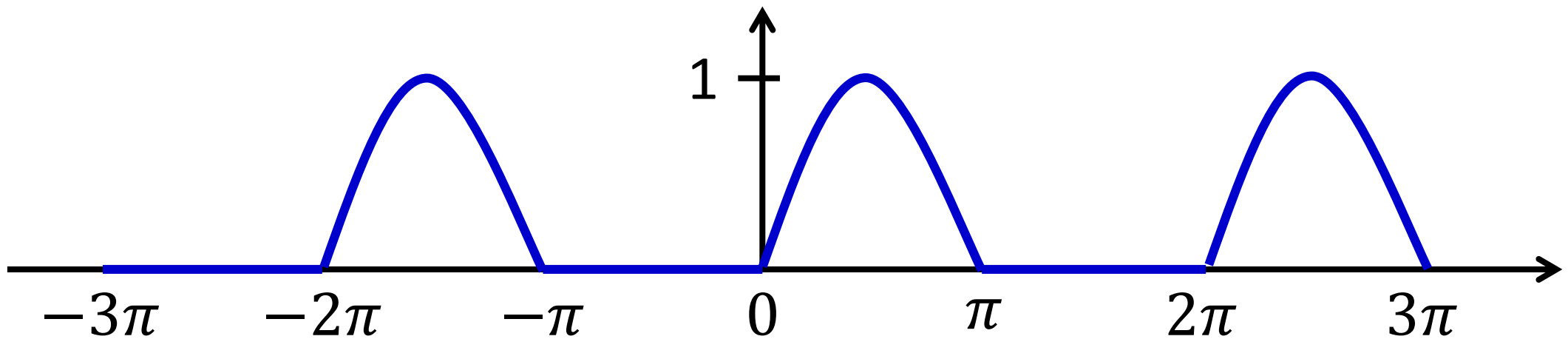
یادآوری ۲:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \end{array} \right.$$

مثال: بسط یا سری فوریه تابع روبه رو را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$



$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 0 dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{1}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\sin(1-n)x + \sin(1+n)x] dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos(1-n)x}{1-n} - \frac{\cos(1+n)x}{1+n} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1 + \cos n\pi}{\pi(1-n^2)} = \frac{1 + (-1)^n}{\pi(1-n^2)}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\sin(1+n)x}{1+n} + \frac{\sin(1-n)x}{1-n} \right]_0^{\pi} = 0$$

مشکل: در $n = 1$ مقدار b_n و a_n قابل محاسبه نیست و مجبوریم برای a_1 و b_1 از تعریف جداگانه

انتگرال بگیریم و محاسبه کنیم زیرا در روند انتگرال گیری با $\frac{1}{1-n}$ مواجه می شویم.

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

حال a_1 و b_1 را محاسبه می کنیم:

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = 0$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin x \, dx = \frac{1}{2}$$

$$\frac{f^+(x) + f^-(x)}{2} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{\pi(1 - n^2)} \cos nx$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

فصل ۲: تحلیل فوریه

مثال‌هایی برای سری فوریه (۲)

توسط: سید محمد جعفری

۷- مثال‌هایی برای سری فوریه

۷-۲- روش انتگرال‌گیری جزء به جزء جدولی (Tabular integration by parts)

$$d(uv) = u dv + v du \rightarrow u dv$$

$$= d(uv) - v du \rightarrow \int u dv = uv - \int v du$$

□ در اینجا قصد ما ارائه حالت خاصی از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء است تا زودتر به جواب برسیم.

□ این روش برای ضرب توابع نمایی، مثلثاتی، جبری، معکوس مثلثاتی و لگاریتمی به کار می‌رود ولی

حالت خاصی از ترکیب توابع نمایی، مثلثاتی و جبری است.

حالت (۱): انتگرال حاصل ضرب یک تابع جبری $P(x)$ در توابع نمایی یا مثلثاتی

$$\int P(x)e^{ax} dx, \int P(x) \cos ax dx, \int P(x) \sin ax dx$$

1. ابتدا در سمت چپ یک جدول $P(x)$ را قرار می‌دهیم و در سمت راست توابع نمایی یا مثلثاتی را می‌نویسیم. سپس از $P(x)$ مشتق می‌گیریم و در هر مرحله پایین آن می‌نویسیم تا مشتق به صفر برسد.

2. در مقابل هر مشتق، از تابع نمایی یا مثلثاتی انتگرال می‌گیریم. سپس هر ردیف از سمت چپ را با ردیف پایین‌تر از سمت راست ضرب کرده و یکی درمیان با علامت مثبت و منفی جمع می‌کنیم.

مشتق	$\oplus P(x)$	e^{ax}	انتگرال
	$\ominus P'(x)$	$\frac{1}{a} e^{ax}$	
	$\oplus P''(x)$	$\frac{1}{a^2} e^{ax}$	
	$\vdots$	$\frac{1}{a^3} e^{ax}$	
	0	$\vdots$	

مشتق	$\oplus P(x)$	$\cos ax$	انتگرال
$\downarrow$	$\ominus P'(x)$	$\frac{1}{a} \sin ax$	$\downarrow$
	$\oplus P''(x)$	$-\frac{1}{a^2} \cos ax$	
	$\vdots$	$-\frac{1}{a^3} \sin ax$	
	0	$\vdots$	

مثال:

$$I = \int (2x^3 + x)e^{3x} dx$$

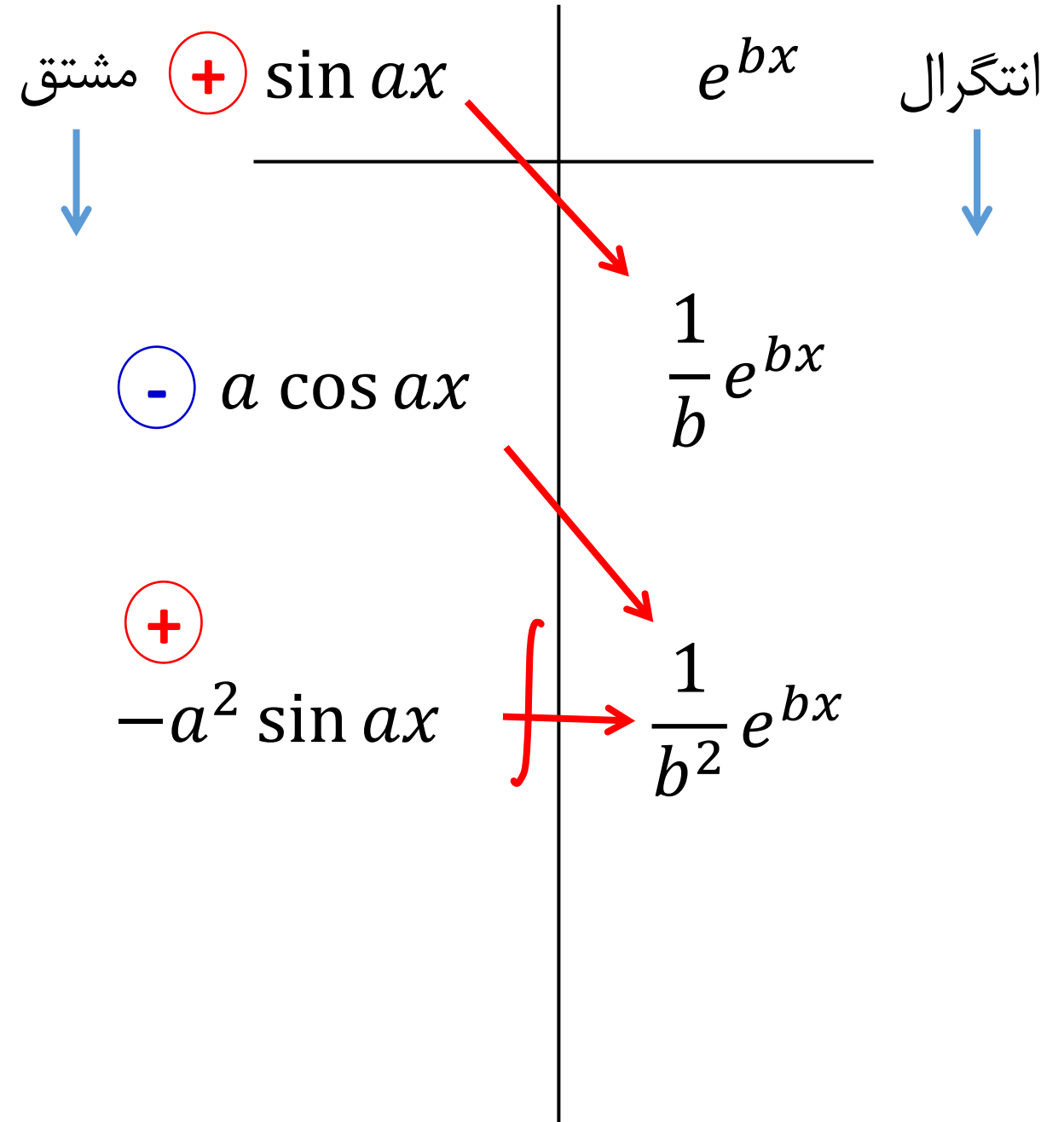
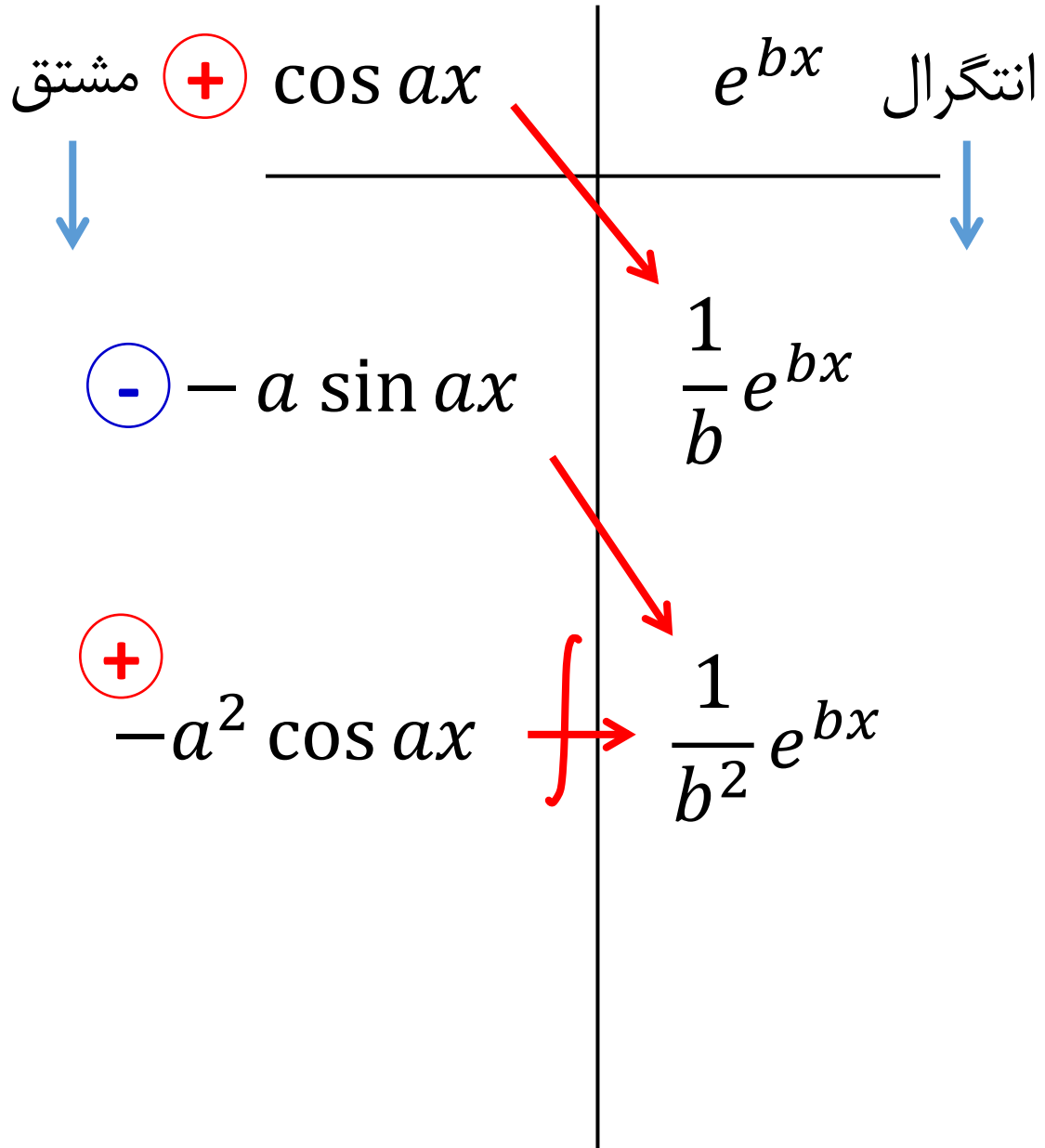
$$\begin{aligned} I &= (2x^3 + x) \left(\frac{e^{3x}}{3} \right) \\ &\quad - (6x^2 + 1) \left(\frac{e^{3x}}{9} \right) \\ &\quad + (12x) \left(\frac{e^{3x}}{27} \right) - (12) \left(\frac{e^{3x}}{81} \right) \\ I &= \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{9}x - \frac{7}{27} \right) e^{3x} \blacksquare \end{aligned}$$

مشتق	$\oplus$	$2x^3 + x$	e^{3x}	انتگرال
$\downarrow$				$\downarrow$
	$\ominus$	$6x^2 + 1$	$\frac{1}{3}e^{3x}$	
	$\oplus$	$12x$	$\frac{1}{9}e^{3x}$	
	$\ominus$	12	$\frac{1}{27}e^{3x}$	
		0	$\frac{1}{81}e^{3x}$	

حالت (۲):

- حال اگر توابع ما فقط نمایی و مثلثاتی باشند، در این صورت سمت چپ تابع مثلثاتی و در سمت راست تابع نمایی را می نویسیم اما هرچه قدر هم که مشتق بگیریم به صفر نخواهیم رسید.
- زیرا توابع مثلثاتی تا بی نهایت مشتق پذیرند در این صورت پس از دوبار مشتق گرفتن به تابع مثلثاتی اول می رسیم. در این وضعیت مشتق گرفتن را پایان می دهیم و جمله آخر را با انتگرال در ردیف مقابل ضرب می کنیم:

$$\int \cos ax e^{bx} dx, \int \sin ax e^{bx} dx$$



$$I = \int 3 \sin 3x e^{-6x} dx$$

مثال: انتگرال e^{-6x} مشتق $3 \sin 3x$

$\oplus$	$3 \sin 3x$	e^{-6x}
$\ominus$	$9 \cos 3x$	$-\frac{1}{6} e^{-6x}$
$\oplus$	$-27 \sin 3x$	$\frac{1}{36} e^{-6x}$

Red arrows indicate the differentiation of $3 \sin 3x$ to $9 \cos 3x$ to $-27 \sin 3x$, and the integration of e^{-6x} to $-\frac{1}{6} e^{-6x}$ to $\frac{1}{36} e^{-6x}$.

$$I = -\frac{3}{6} \sin 3x e^{-6x} - \frac{9}{36} \cos 3x e^{-6x} + \underbrace{\int -\frac{27}{36} \sin 3x e^{-6x} dx}_{-\frac{9}{36} I}$$

$$I = -\frac{3}{6} \sin 3x e^{-6x} - \frac{9}{36} \cos 3x e^{-6x} - \frac{9}{36} I$$

$$\rightarrow \frac{45}{36} I = -e^{-6x} \left(\frac{1}{2} \sin 3x + \frac{1}{4} \cos 3x \right)$$

$$\rightarrow I = \int 3 \sin 3x e^{-6x} dx = -\frac{1}{5} e^{-6x} (2 \sin 3x + \cos 3x) \quad \blacksquare$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

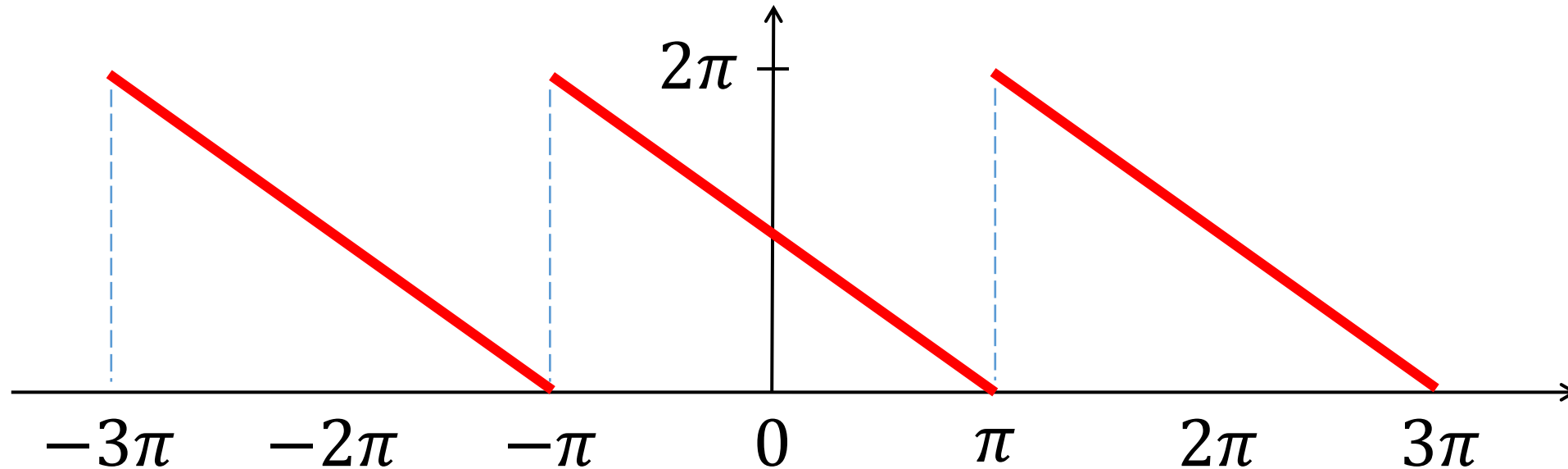
فصل ۲: تحلیل فوریه

مثال‌هایی برای سری فوریه (۳)

توسط: سید محمد جعفری

۷-۳- مثال‌های برای کاربرد روش انتگرال‌گیری جزء به جزء جدولی

مثال: سری فوریۀ تابع $f(x) = \pi - x$ با دورۀ تناوب 2π در بازۀ $(-\pi, \pi)$ را بیابید.



پاسخ:

این تابع به صورت مجموع دو تابع ثابت $y_1 = \pi$ و تابع فرد $y_2 = -x$ است. پس سری فوریۀ هر یک را جداگانه حساب خواهیم کرد.

سری فوریه به صورت مجموع توابع مثلثاتی و ثابت است $\rightarrow$ تابع ثابت $\rightarrow y_1 = \pi$ A)

پس سری فوریه این تابع خودش است زیرا ثابت می باشد: $\pi =$ سری فوریه A

$B) y_2 = -x \rightarrow$ تابع فرد است $\rightarrow a_0 = 0, a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} -x \sin nx \, dx$$

روش انتگرال جزء به جزء
جدولی

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} -x \sin nx \, dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{n} \cos nx - \frac{1}{n^2} \sin nx \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{n} \cos n\pi$$

$$b_n = \frac{2}{n} \cos n\pi = \frac{2(-1)^n}{n}$$

مشتق	$\oplus -x$	$\sin nx$	انتگرال
	$\ominus -1$	$-\frac{1}{n} \cos nx$	
	$\oplus 0$	$-\frac{1}{n^2} \sin nx$	

$$\text{B سری فوریۀ } -x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n} \sin nx$$

$$\text{سری فوریۀ B} + \text{سری فوریۀ A} = y_1 + y_2 = \pi - x = \text{سری فوریۀ کل تابع}$$

$$\frac{f^+(x) + f^-(x)}{2} = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n} \sin nx \quad \blacksquare$$

مثال:

سری فوریۀ تابع متناوب $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را با دوره تناوب 2π در بازۀ $[-\pi, \pi]$ بیابید.

تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ تابعی فرد است لذا داریم:

$$a_0 = 0, a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt[3]{x} \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt[3]{x} \sin nx \, dx$$

روش انتگرال جزء به جزء جدولی ☺

یادداشت: همانطور که مشاهده می‌شود این

مشتق‌گیری تا ابد ادامه دارد و به صفر

نمی‌رسد! اما اشکال کار کجاست؟

باید به سراغ شرایط برویم: تابع متناوب است

پس شرط اول را دارد. شرط دوم؟

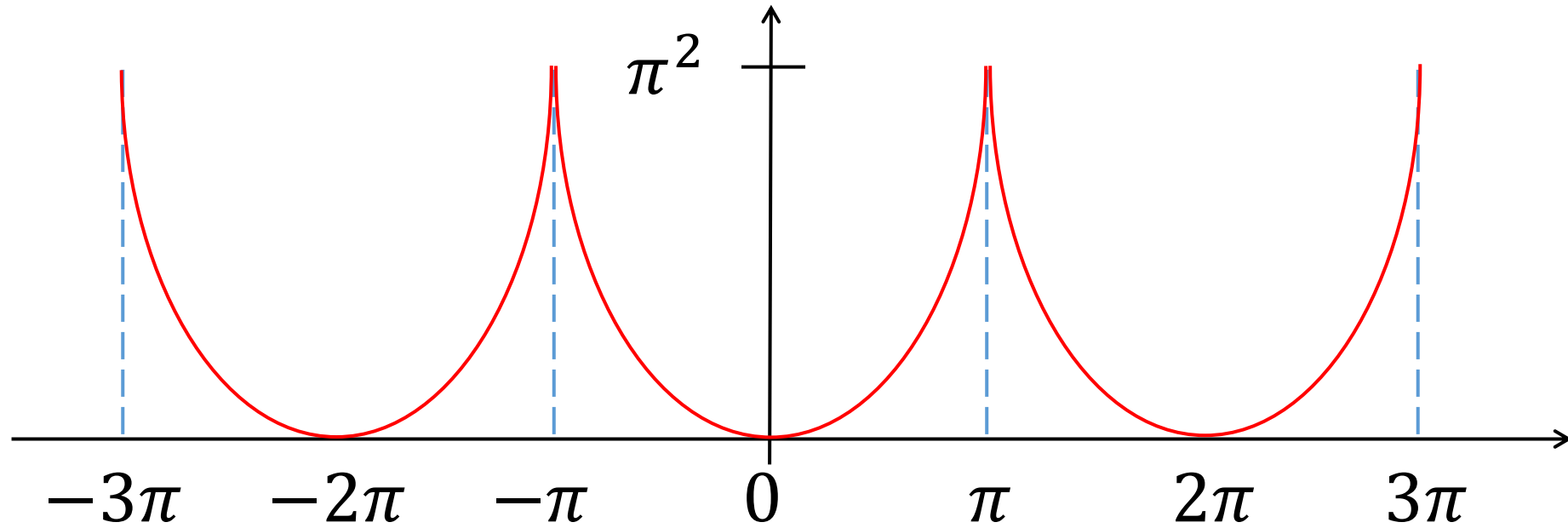
$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$@x = 0 \rightarrow f'(0) = \text{نامتناهی}$$

مشتق		انتگرال
$\oplus x^{\frac{1}{3}}$		$\sin nx$
$\ominus \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$		$-\frac{1}{n} \cos nx$
$\oplus -\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}}$		$-\frac{1}{n^2} \sin nx$
$\ominus \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{3} x^{-\frac{7}{3}}$		$\frac{1}{n^3} \cos nx$
$\vdots$		$\vdots$

سری فوریه موجود نیست زیرا مشتق آن در صفر نامتناهی است.

مثال: سری فوریه تابع $f(x) = x^2$ را با دوره تناوب 2π در بازه $[-\pi, \pi]$ را بیابید.



□ تابع $f(x) = x^2$ متناوب است و مشتق آن در هر نقطه متناهی است. پس سری فوریه دارد.

همچنین تابع زوج است، لذا $b_n = 0$ است.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{1}{\pi} \times \frac{x^3}{3} \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{3}$$

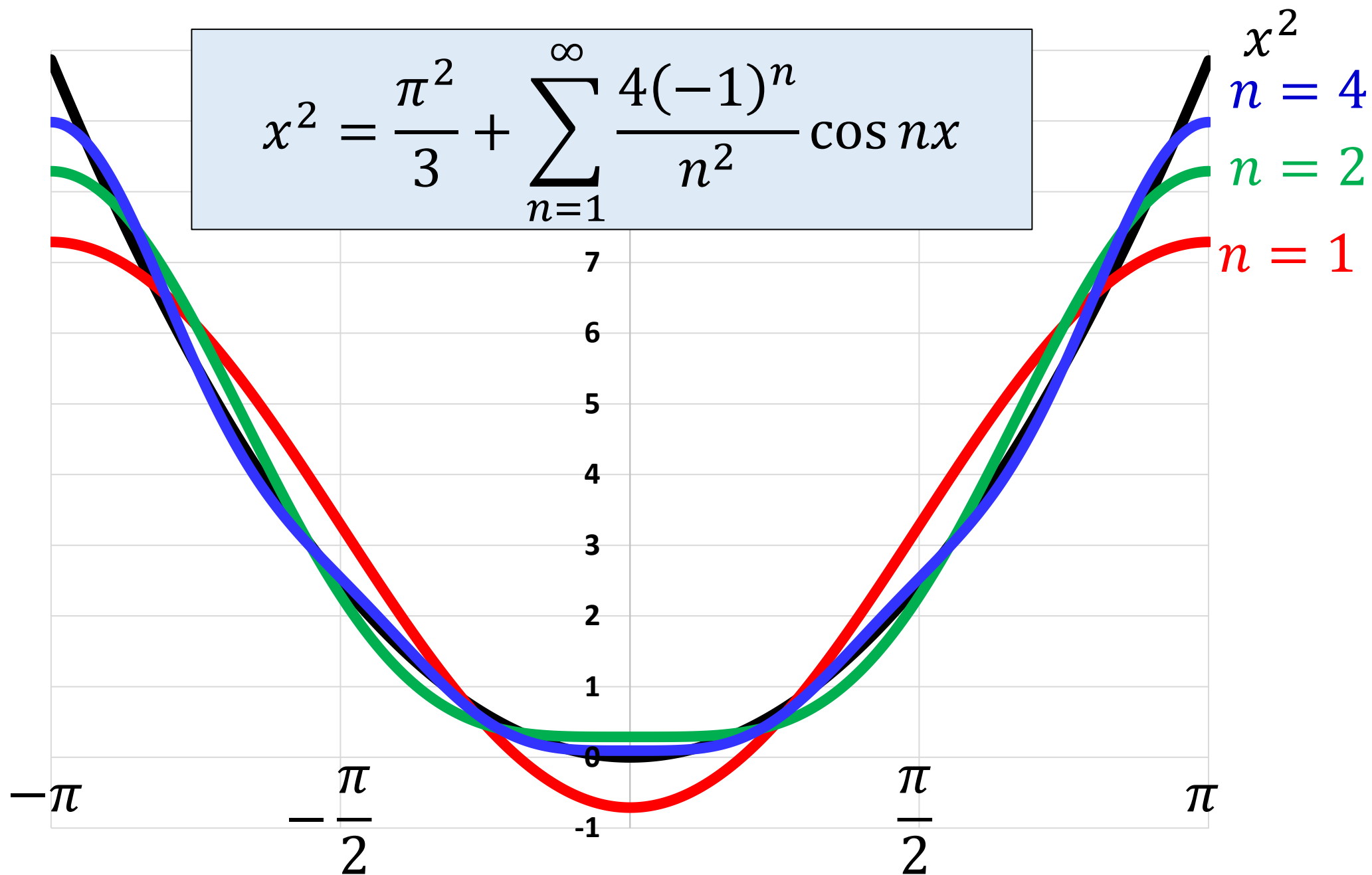
$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{n} \sin nx + \frac{2x}{n^2} \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$\text{سری فوریه} = \frac{f^+(x) + f^-(x)}{2} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad \blacksquare$$

مشتق	x^2	انتگرال
	$\oplus$	$\cos nx$
	$\ominus$	$\frac{1}{n} \sin nx$
	$\oplus$	$-\frac{1}{n^2} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^3} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^4} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^5} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^6} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^7} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^8} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^9} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{10}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{11}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{12}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{13}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{14}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{15}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{16}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{17}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{18}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{19}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{20}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{21}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{22}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{23}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{24}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{25}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{26}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{27}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{28}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{29}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{30}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{31}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{32}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{33}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{34}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{35}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{36}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{37}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{38}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{39}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{40}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{41}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{42}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{43}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{44}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{45}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{46}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{47}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{48}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{49}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{50}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{51}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{52}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{53}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{54}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{55}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{56}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{57}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{58}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{59}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{60}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{61}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{62}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{63}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{64}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{65}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{66}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{67}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{68}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{69}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{70}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{71}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{72}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{73}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{74}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{75}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{76}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{77}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{78}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{79}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{80}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{81}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{82}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{83}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{84}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{85}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{86}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{87}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{88}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{89}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{90}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{91}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{92}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{93}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{94}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{95}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{96}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{97}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{98}} \cos nx$
	$\ominus$	$-\frac{1}{n^{99}} \sin nx$
	$\oplus$	$\frac{1}{n^{100}} \cos nx$



$$@x = \pi \rightarrow \frac{f^+(\pi) + f^-(\pi)}{2} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}$$

$$(-1)^n(-1)^n = 1^n = 1$$

$$f^+(\pi) = f^-(\pi) = \pi^2$$

$$\frac{\pi^2 + \pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \blacksquare$$

یادداشت: برخی از سری‌ها را با انتخاب x مناسب، میتوان محاسبه کرد.

مثال: سری فوریۀ تابع $f(x) = e^x$ را با دورۀ تناوب 2π در بازۀ $[0, 2\pi]$ را بیابید.

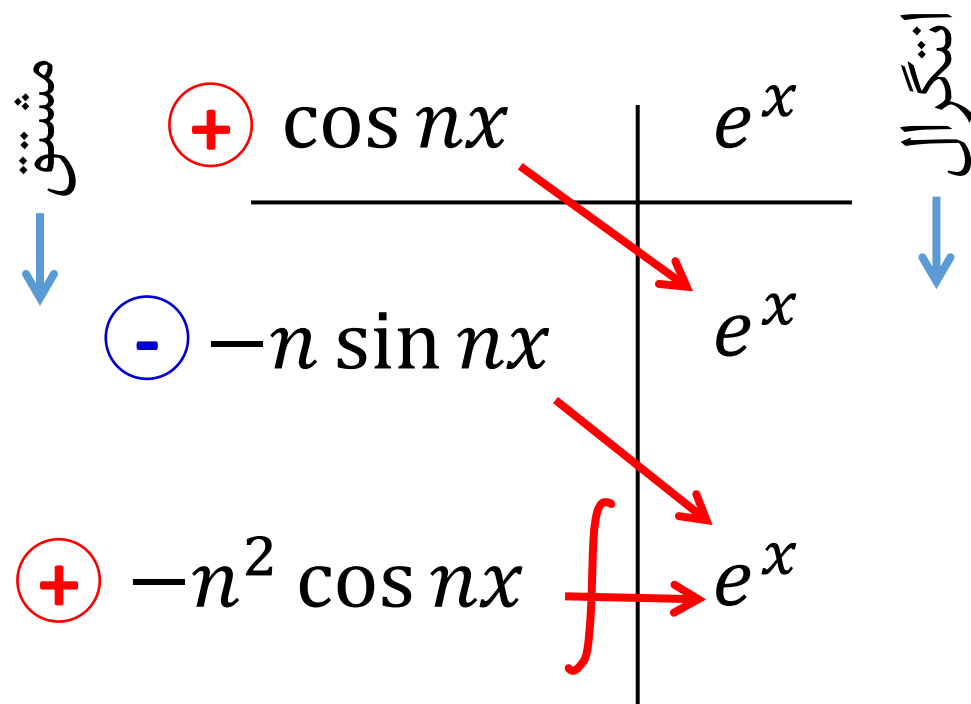
$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^x dx = \frac{1}{2\pi} e^x \Big|_0^{2\pi}$$

$$a_0 = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \cos nx \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[e^x \cos nx + e^x n \sin nx \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x n^2 \cos nx \, dx$$

توجه: بازۀ انتگرال گیری از 0 تا 2π است.



$$\underbrace{(1 + n^2) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \cos nx \, dx}_{a_n} = \frac{e^x}{\pi} [\cos nx + n \sin nx]_0^{2\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi(1 + n^2)} \left(e^{2\pi} \underbrace{\cos 2\pi n}_1 + ne^{2\pi} \underbrace{\sin 2\pi n}_0 - e^0 \underbrace{\cos 0}_1 - ne^0 \underbrace{\sin 0}_0 \right)$$

$$a_n = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi(1 + n^2)}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[e^x \sin nx - e^x n \cos nx \right]_0^{2\pi}$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x n^2 \sin nx \, dx$$

$$(1 + n^2) \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \sin nx \, dx}_{b_n} = \frac{e^x}{\pi} \left[\sin nx - n \cos nx \right]_0^{2\pi}$$

مشتق $\oplus \sin nx$ e^x
 $\ominus n \cos nx$ e^x
 $\oplus -n^2 \sin nx$ e^x

انتگرال

$$b_n = \frac{1}{\pi(1+n^2)} \left(e^{2\pi} \underbrace{\sin 2\pi n}_0 - ne^{2\pi} \underbrace{\cos 2\pi n}_1 - e^0 \underbrace{\sin 0}_0 + ne^0 \underbrace{\cos 0}_1 \right)$$

$$b_n = \frac{n(1-e^{2\pi})}{\pi(1+n^2)}$$

$$f(x) = e^x$$

$$= \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{e^{2\pi} - 1}{\pi(1+n^2)} \cos nx + \frac{n(1-e^{2\pi})}{\pi(1+n^2)} \sin nx \right]$$

توجه: خود تابع $y(x) = e^x$ را می‌توان به صورت مجموع دو تابع زوج و فرد $\sinh x$ و $\cosh x$ نوشت. پس می‌توان گفت بسط فوریۀ توابع $\sinh x$ و $\cosh x$ بدین شرح اند:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi(1 + n^2)} \cos nx$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1 - e^{2\pi})}{\pi(1 + n^2)} \sin nx$$

مثال: سری فوریۀ تابع $f(x) = 1 + x$ را با دورۀ تناوب 2 در بازۀ $[-1, 1]$ را بیابید و نشان دهید:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

توجه: دورۀ تناوب $T = 2L = 2$ است:

$$f(x) \text{ سری فوریۀ } = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

□ سری فوریۀ را به صورت مجموع سری فوریۀ دو تابع به دست می‌آوریم:

□ تابع نخست: $y_1 = 1$ است که چون تابع ثابت می‌باشد با سری فوریۀ خود برابر است.

□ تابع دوم $y_2 = x$ است و چون تابعی فرد است پس a_0 و a_n ندارد.

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 x \sin \frac{n\pi}{1} x \, dx$$

مشتق	$\oplus$	x		$\sin n\pi x$	انتگرال
$\downarrow$	$\ominus$	1	$\swarrow$	$-\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x$	$\downarrow$
		0	$\swarrow$	$-\frac{1}{n^2\pi^2} \sin n\pi x$	

$$= 2 \left[-\frac{x}{n\pi} \cos n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2} \sin n\pi x \right]_0^1$$

$$= 2 \left(-\frac{1}{n\pi} \cos n\pi \right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

$$f(x) \text{ سری فوریۀ } = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin n\pi x$$

سری مطلوب در سوال را باز می‌کنیم و با بسط سری فوریۀ مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) \text{ سری فوریۀ } = 1 + \frac{2}{\pi} \sin \pi x - \frac{2}{2\pi} \sin 2\pi x + \frac{2}{3\pi} \sin 3\pi x \\ - \frac{2}{4\pi} \sin 4\pi x + \frac{2}{5\pi} \sin 5\pi x + \dots \end{aligned}$$

$$A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

از مقایسه متوجه می‌شویم که باید جملات با مخرج زوج را از بین ببریم و دیگر جملات باید یکی در میان مثبت و منفی باشند. لذا $x = 1/2$ قرار می‌دهیم:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{2}{2\pi} \underbrace{\sin \pi}_0 + \frac{2}{3\pi} \sin \frac{3\pi}{2}$$

$$- \frac{2}{4\pi} \underbrace{\sin 2\pi}_0 + \frac{2}{5\pi} \sin \frac{5\pi}{2} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{\pi} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots\right)}_A \rightarrow A = \frac{\pi}{4} \blacksquare$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

فصل ۲: تحلیل فوریه

مثال‌هایی برای سری فوریه (۴)

توسط: سید محمد جعفری

۷-۴- مشتق و انتگرال گیری از سری فوریه

نکته: می‌توان از سری فوریه یک تابع مشتق‌پذیر و انتگرال‌پذیر، مشتق و انتگرال گرفت.

$$f(x) \text{ تابع سری فوریه} : f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

مشتق از سری فوریه:

$$f'(x) \text{ تابع سری فوریه} : f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\underbrace{-na_n}_{b'_n} \sin nx + \underbrace{nb_n}_{a'_n} \cos nx)$$

انتگرال از سری فوریه:

انتگرال سری فوریه تابع: $\int f(x)dx$

$$\int f(x)dx = a_0x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right)$$

نکته: مشکل جمله a_0x است زیرا در سری فوریه مجاز به استفاده از تابع جبری نیستیم. پس باید این جمله را به سمت چپ تساوی ببریم.

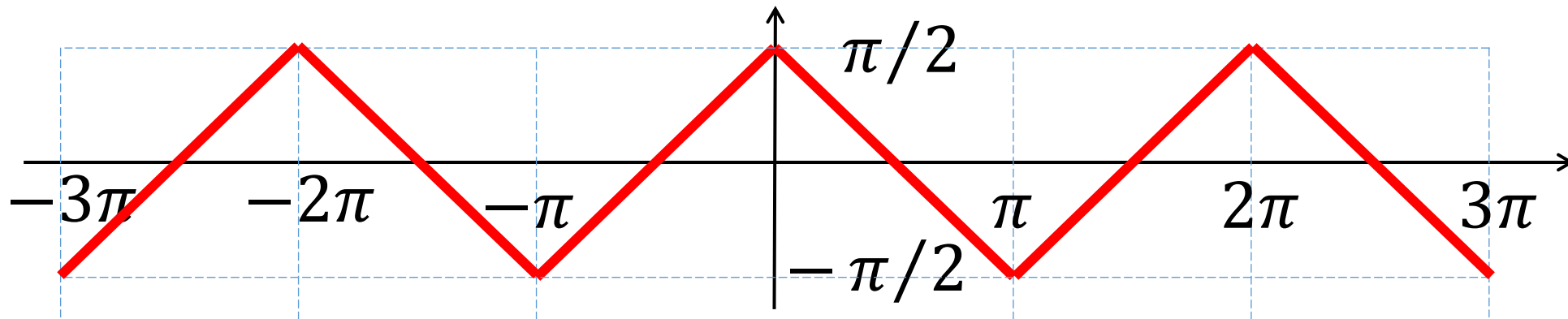
$$\text{سری فوریه: } \int f(x)dx - a_0x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{a_n}{n}}_{b'_n} \sin nx - \underbrace{\frac{b_n}{n}}_{a'_n} \cos nx \right)$$

مثال: سری فوریه تابع ارهای شکل زیر را بیابید و سری S را اثبات کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x & -\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{\pi}{2} - x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-2n)^3} = \frac{n^3}{32}$$

پاسخ: ابتدا تابع را رسم می‌کنیم.



با رسم تابع در می‌یابیم که تابع زوج است و $b_n = 0$ می‌باشد.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx}_{\text{Area under function}} = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos nx \, dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \frac{1}{n} \sin nx - \frac{1}{n^2} \cos nx \right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{n^2} \cos n\pi + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{2}{\pi n^2} \left[(-1)^{n+1} + 1 \right]$$

$\oplus$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\cos nx$
$\ominus$	-1	$\frac{1}{n} \sin nx$
$\oplus$	0	$-\frac{1}{n^2} \cos nx$

$$\frac{f^+(x) + f^-(x)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^{n+1} + 1] \cos nx \quad \blacksquare$$

برای اثبات سری خواسته شده، این مسیر را می‌رویم:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots \right)$$

تابع پیوسته است، پس داریم:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-2n)^3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots$$

به سری خواسته شده، نگاهی می‌اندازیم:

می‌بینیم که توان‌های مخرج بزرگتر از توان سری فوریه است. 😊

□ پس باید کاری روی تابع انجام دهیم تا توان مخرج آن بزرگتر شود.

□ در عملیات‌های خطی ریاضی، دو عمل مشتق و انتگرال داریم که می‌بینیم مشتق مخرج توان را

از بین می‌برد و انتگرال توان مخرج را بزرگتر می‌کند.

□ پس کافی است از تابع و سری فوریه آن انتگرال بگیریم.

$$\int f(x) dx = \int \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx = \frac{\pi}{2} x - \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \frac{\sin 7x}{7^3} + \dots \right)$$

□ در این مرحله، مخرج سری درست شده است اما اگر به دنباله خواسته شده نگاه کنیم، می بینیم

که جملات یک در میان مثبت و منفی هستند.

□ لذا در صورت کسر باید سینوس ها را به ± 1 تبدیل کنیم.

□ پس باید $x = \pi/2$ قرار دهیم.

$$@x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi^2}{8} = \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots \right)$$

$$S = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{\pi^3}{32} \quad \blacksquare$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

فصل ۲: تحلیل فوریه

مثال‌هایی برای سری فوریه (۵)

توسط: سید محمد جعفری

۷-۵- سری فوریه تابع دلتای دیراک (Dirac delta function) یا ضربه

مثال: سری فوریه تابع دلتای دیراک را با فرض متناوب بودن با دوره تناوب 2π در بازه $[-\pi, \pi]$ را بیابید.

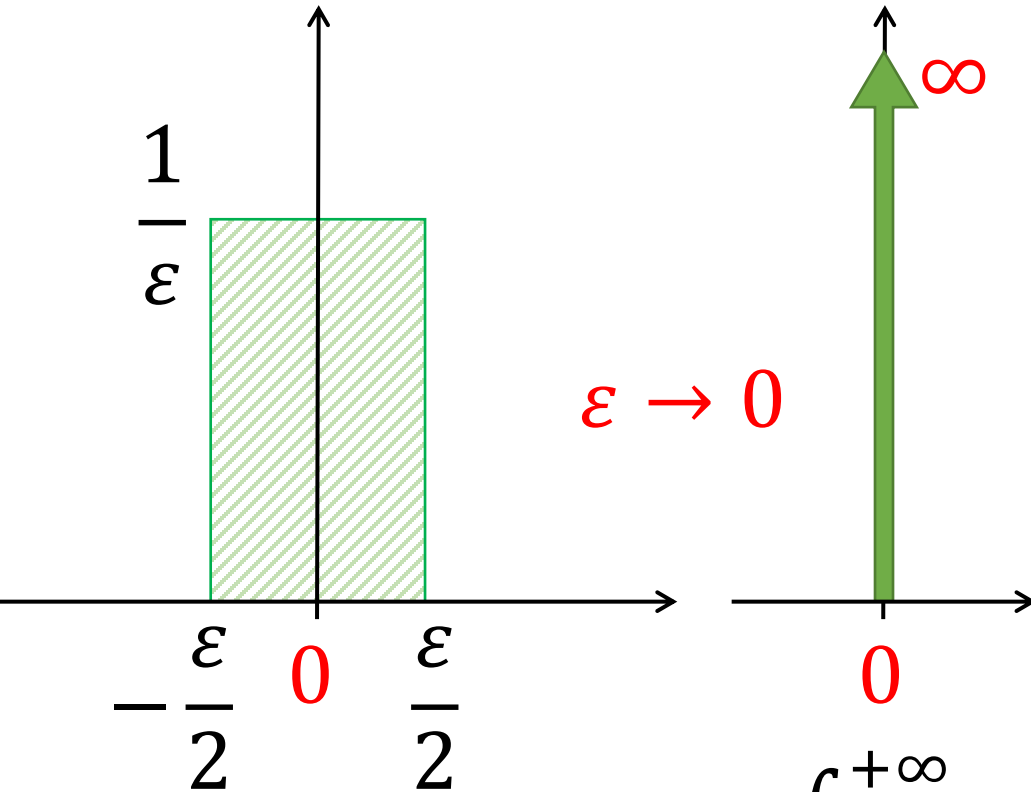
□ نکته: دلتای دیراک یا ضربه که به صورت $\delta(t)$ نمایش داده می شود، در اصل تابع نیست و فقط

یک تعریف ریاضیاتی است تا بتوان با آن ضربه را مدلسازی کرد.

□ فرض می شود که مقدار این تابع بجز در $t = 0$ ، در همه دامنه خود صفر است.

□ مقدار تابع ضربه در $t = 0$ ، بی نهایت فرض می شود.

اینگونه فرض کنید که در شکل زیر می‌خواهیم مستطیل یا ناحیه زیر نمودار را طوری بکشیم که وقتی $\varepsilon \rightarrow 0$ میل کند. در این صورت به تابع دلتای دیراک یا ضربه می‌رسیم.



تابع دلتای دیراک به گونه‌ای است که هرچه قدر هم که این مستطیل باریک شود، مساحت زیر آن برابر با ۱ خواهد ماند.
پس داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \xrightarrow{\text{با اغماض}} \delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ +\infty & t = 0 \end{cases}$$

یادداشت: از خاصیت‌های دیگر این تابع این است که:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - T)dt = f(T)$$

□ حال از این خاصیت استفاده می‌کنیم تا سری فوریه آن را بیابیم.

□ ولی باید توجه کرد که مقدار این تابع در $x = 0$ ، بی‌نهایت است و در بقیه دامنه خود، صفر است.

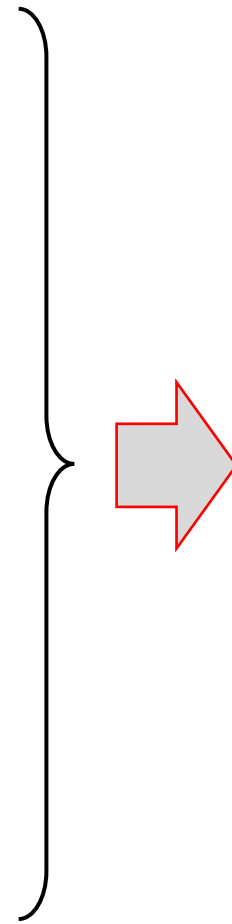
□ پس فرقی ندارد که این بازه از $-\infty$ تا $+\infty$ باشد یا از $-\pi$ تا $+\pi$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x) dx = \frac{1}{2\pi}$$

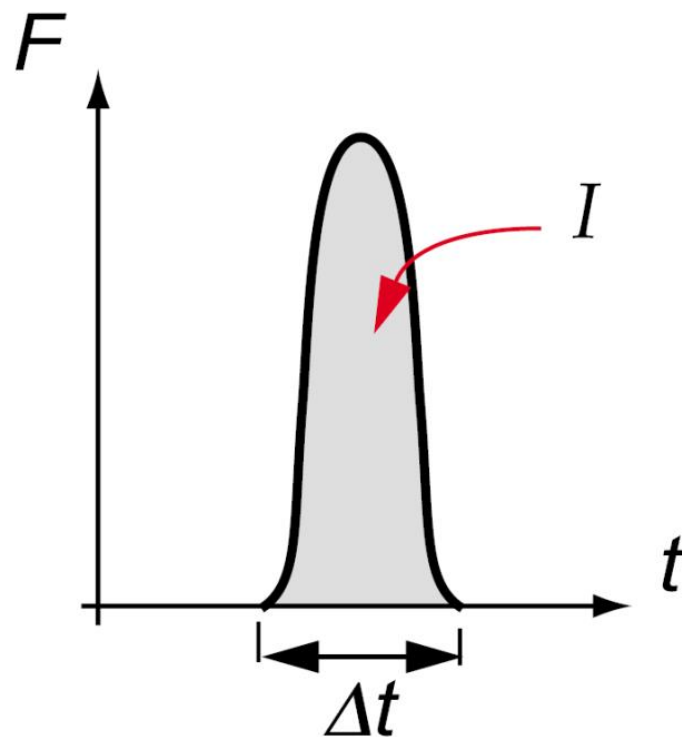
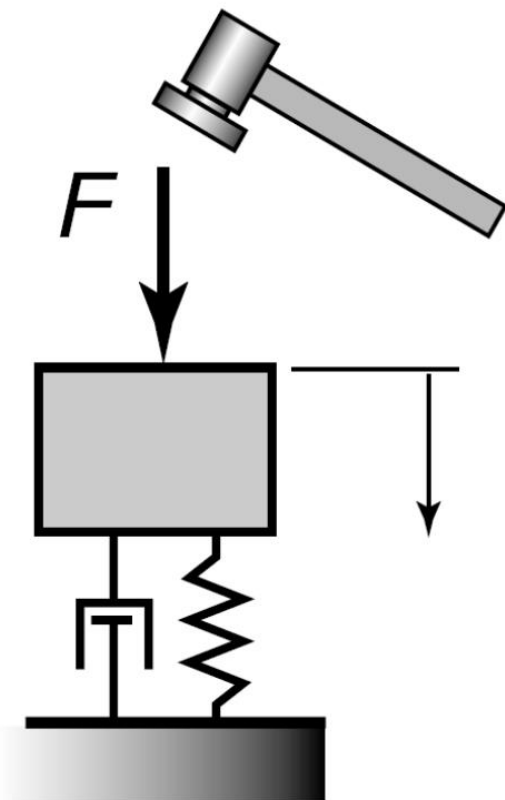
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \cos 0 = \frac{1}{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \sin 0 = 0$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \cos nx \quad \blacksquare$$



$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \cos nt \quad \blacksquare$$



در ارتعاشات این بدان معنی است که وقتی سیگنال مربوط به ضربه تحلیل ارتعاشی می‌شود، تمام فرکانس‌ها با یک شدت در آن وجود دارند.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

فصل ۲: تحلیل فوریه

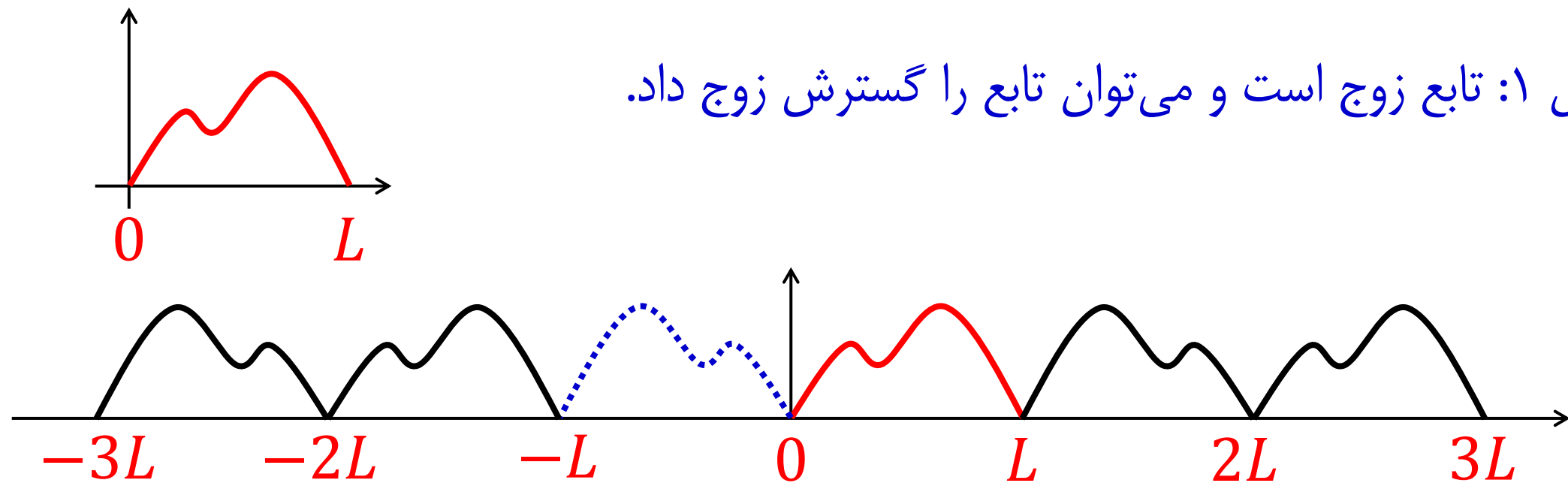
گسترش نیم دامنه سینوسی (فرد) و کسینوسی (زوج)

توسط: سید محمد جعفری

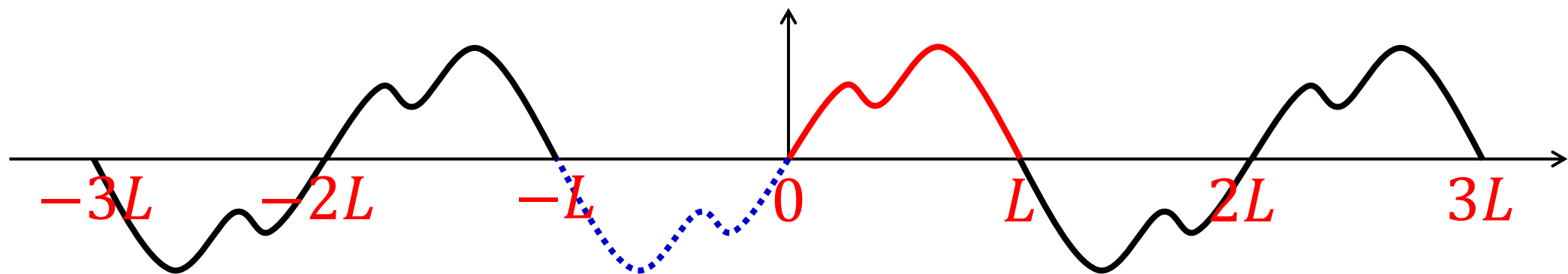
۸- بسط نیم دامنه سینوسی (فرد) و کسینوسی (زوج)

- یکی از شرطها برای وجود دنباله فوریه، این بود که تابع متناوب باشد.
- حال اگر یک تابع در دامنه $[0, L]$ تعریف شده باشد و متناوب هم نباشد و بخواهیم برای آن بسط فوریه بنویسیم می توانیم آنرا به صورت زوج یا فرد متناوب در نظر بگیریم.
- به اینکار اصطلاحاً بسط نیم دامنه سینوسی یا کسینوسی گفته می شود.
- در بسط فوریه، دامنه توابع $[-L, L]$ بود. حال که ضابطه تابع را فقط در نیمی از دامنه داریم و ضابطه در نیم دامنه $[-L, 0]$ را نداریم، دو فرض را می توان به کار برد:

فرض ۱: تابع زوج است و می‌توان تابع را گسترش زوج داد.



فرض ۲: تابع فرد است و می‌توان تابع را گسترش فرد داد.



۸-۱- فرض زوج بودن تابع:

□ می‌دانیم که در صورت زوج بودن تابع، ضرایب جملات سینوسی (b_n) صفر خواهد بود و فقط جملات کسینوسی و ثابت خواهیم داشت.

□ به همین سبب به این نوع سری فوریه، سری فوریه کسینوسی (زوج) گفته می‌شود. ضرایب آن نیز به این صورت محاسبه می‌شود:

$$f(x) \text{ is Even: } a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

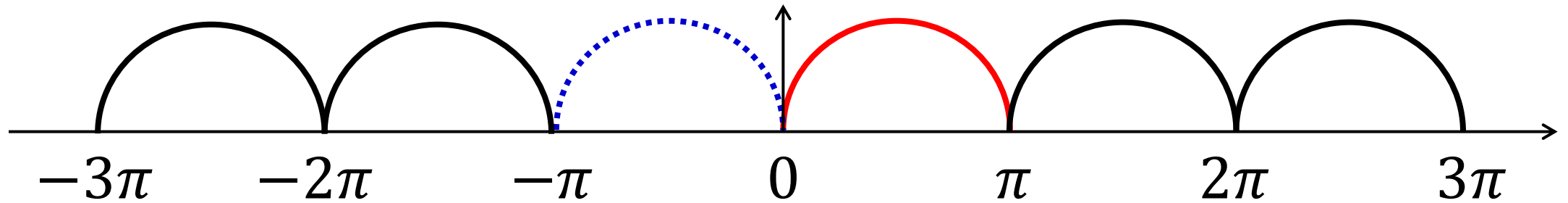
۸-۲- فرض فرد بودن تابع:

□ در این حالت فرض می‌کنیم تابع فرد باشد و تابع را به صورت فرد گسترش می‌دهیم و سپس ضرایب را به دست می‌آوریم.

□ لذا در بسط فوریۀ فرد تابع، عدد ثابت و ضرائب جملات کسینوسی نخواهیم داشت و فقط جملات سینوسی خواهیم داشت و به همین خاطر به این نوع سری فوریه، سری فوریۀ سینوسی گفته می‌شود.

$$f(x) \text{ is Odd: } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

مثال: سری فوریۀ کسینوسی تابع $f(x) = \sin x$ را در نیم دامنۀ $[0, \pi]$ بنویسید.



□ ابتدا فرض می‌کنیم تابع زوج باشد و تابع را گسترش می‌دهیم.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} [\sin(1-n)x + \sin(1+n)x] dx$$

قبلاً این انتگرال ثابت شد

$$a_n = \frac{2[1 + (-1)^n]}{\pi(1 - n^2)}$$

□ اما مشکلی که قابل مشاهده است در $n = 1$ است.

□ مقدار a_n قابل محاسبه نیست و ما باید a_1 جداگانه محاسبه کنیم.

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos x dx = 0$$



: سری فوریه کسینوسی تابع $\sin x$

$$= \frac{1}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2[1 + (-1)^n]}{\pi(1 - n^2)} \cos nx$$

مثال: سری فوریۀ سینوسی تابع روبه‌رو را بنویسید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 < x < 2 \end{cases}$$

در اینجا نیم دامنه مورد نظر $[0,2]$ است و تابع را به صورت فرد گسترش می‌دهیم:

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi}{2} x \, dx$$

$$b_n = \int_0^1 \sin \frac{n\pi}{2} x \, dx + \int_1^2 \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{2} x \, dx$$

$$b_n = -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} x \Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} x \Big|_1^2$$

$$b_n = -\frac{2}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right) - \frac{1}{n\pi} \left(\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2} \right)$$

$$b_n = \frac{2 + (-1)^n}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2}$$

$$\text{سری فوریه سینوسی تابع} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2 + (-1)^n}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \right] \sin \frac{n\pi}{2} x \quad \blacksquare$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مہندسی

فصل ۲: تحلیل فوریہ

اتحاد پارسوال

توسط: سید محمد جعفری

۹- اتحاد پارسوال

فرض کنید تابع متناوبی در بازه $[-L, L]$ داریم که شرایط سری فوریه را دارد.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

حال می‌خواهیم اتحاد جدیدی اثبات کنیم. برای اینکار دو طرف را در $f(x)$ ضرب می‌کنیم و در بازه $[-L, L]$ انتگرال می‌گیریم.

$$f^2(x) = a_0 f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]$$

$$\int_{-L}^L f^2(x) dx = \int_{-L}^L a_0 f(x) dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-L}^L a_n f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + \int_{-L}^L b_n f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right]$$

$$\int_{-L}^L f^2(x) dx = a_0 \int_{-L}^L f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + b_n \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right]$$

طبق فرمول‌های اویلر داریم:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \rightarrow \int_{-L}^L f(x) dx = 2La_0$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \rightarrow \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = La_n$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \rightarrow \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = Lb_n$$

$$\int_{-L}^L f^2(x) dx = a_0(2La_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(La_n) + b_n(Lb_n)] \xrightarrow{\div L}$$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

اتحاد پارسوال
(Parseval's identity)

یادداشت:

□ در این معادله سینوس و کسینوس نداریم و فقط a_n^2 و b_n^2 دیده می شود.

□ کاربرد اتحاد پارسوال: از این معادله برای اثبات دنباله ها استفاده می شود.

□ اگر در مسأله ای از ما خواسته شد تا جواب سری مشخصی را اثبات کنیم، ابتدا سری فوریه تابع

را می نویسیم و سپس به مخرج سری فوریه و سری خواسته شده توجه می کنیم:

□ اگر توان n در هر دو یکسان بود، با جایگذاری در سری فوریه می‌توان سینوس و کسینوس را حذف کرد تا سری به دست آید.

□ اگر توان n در سری مطلوب از توان n در سری فوریه یک درجه بیشتر بود، ابتدا از سری فوریه انتگرال می‌گیریم و جایگذاری می‌کنیم.

□ اگر توان n در سری مطلوب از توان n در سری فوریه یک درجه کمتر بود، از سری فوریه مشتق می‌گیریم و جایگذاری می‌کنیم.

□ در آخر اگر توان n در سری مطلوب دو برابر توان سری فوریه بود، از اتحاد پارسوال استفاده می‌کنیم.

مثال: سری فوریه کسینوسی تابع $f(x) = x^2$ را در بازه $[0,2]$ بنویسید و با استفاده از

اتحاد پارسوال، دنباله زیر را ثابت کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

ابتدا سری فوریه کسینوسی تابع $f(x) = x^2$ را در بازه $[0,L] = [0,2]$ می نویسیم:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{6}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{2} \int_0^2 x^2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx$$

مشتق			انتگرال
	$\oplus x^2$		$\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$
	$\ominus 2x$		$\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}x$
	$\oplus 2$		$-\frac{4}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{2}x$
	0		$-\frac{8}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi}{2}x$

$$a_n = \left[\frac{2x^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}x + \frac{8x}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{2}x - \frac{16}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi}{2}x \right]_0^2$$

$$a_n = \frac{16}{n^2\pi^2} \cos n\pi = \frac{16}{n^2\pi^2} (-1)^n$$

پس می‌توان در بازه $[0,2]$ اینگونه نوشت:

$$x^2 = \frac{8}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^2 \pi^2} (-1)^n \cos \frac{n\pi}{2} x \quad \blacksquare$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{سری فوریه مطلوب:}$$

همانگونه که می‌بینید در مخرج سری فوریه، n^2 داریم ولی در سری مطلوب n^4 داریم: $\square$

یعنی توان سری مطلوب دو برابر سری فوریه است، پس نمی‌توان با جایگذاری و مشتق و انتگرال $\square$

به سری مطلوب رسید و باید از اتحاد پارسوال استفاده کنیم:

اتحاد پارسوال:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-2}^2 (x^2)^2 dx = 2 \left(\frac{8}{6} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{16(-1)^n}{n^2 \pi^2} \right]^2$$

$$\frac{32}{5} = \frac{32}{9} + \frac{16^2}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \blacksquare$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

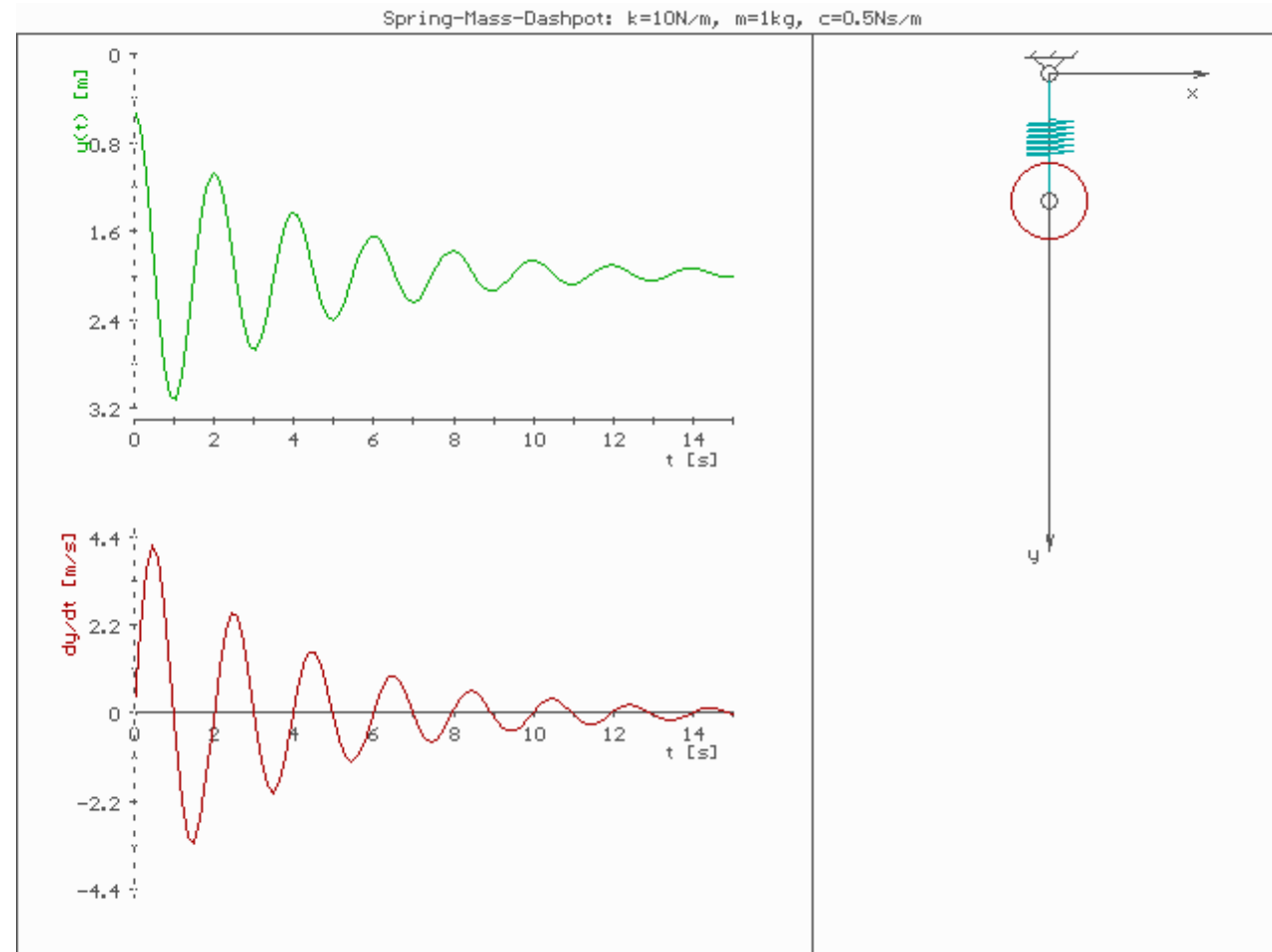
فصل ۲: تحلیل فوریه

ارتعاشات اجباری

توسط: سید محمد جعفری

♦ ۱- ارتعاشات اجباری (Forced vibration)

ارتعاشات اصطلاحاً حرکتی نوسانی با دامنه کوتاه حول یک نقطه تعادل است



در بیشتر پدیده‌های ارتعاشی سه گونه نیرو قابل مشاهده است:

۱- **نیروی اینرسی:** این نیرو متناسب با شتاب است که عامل آن جرم یا اینرسی است.

۲- **نیروی مستهلک‌کننده:** این نیرو انرژی سامانه را جذب می‌کند و در بیشتر مواقع با سرعت متناسب است و عامل آن لزجت سیال است.

۳- **نیروی بازگرداننده:** این نیرو ذخیره‌کننده انرژی سامانه است و با جابه‌جایی متناسب است و عامل آن فنر است.



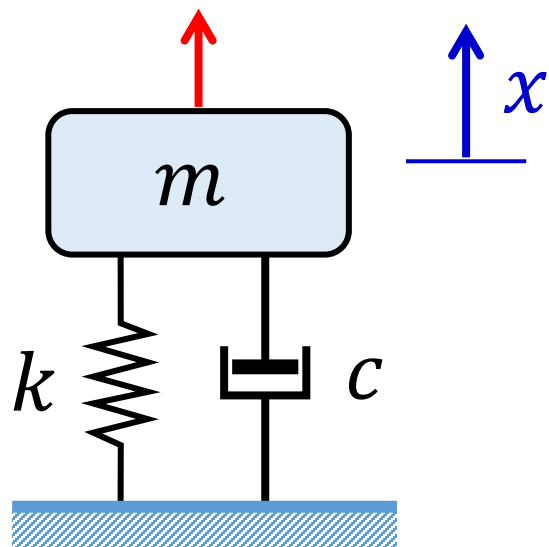
از دیدگاه نیروهای خارجی وارد به سامانه، ارتعاشات دو نوع است:

۱- **ارتعاشات آزاد:** در ارتعاشات اگر نیروی خارجی نداشته باشیم، شاهد ارتعاشات آزاد هستیم.

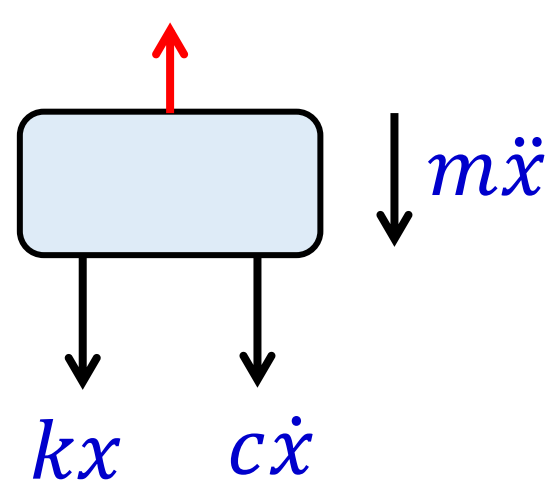
۲- **ارتعاشات اجباری:** در ارتعاشات اگر نیروی خارجی داشته باشیم، شاهد ارتعاشات اجباری هستیم.

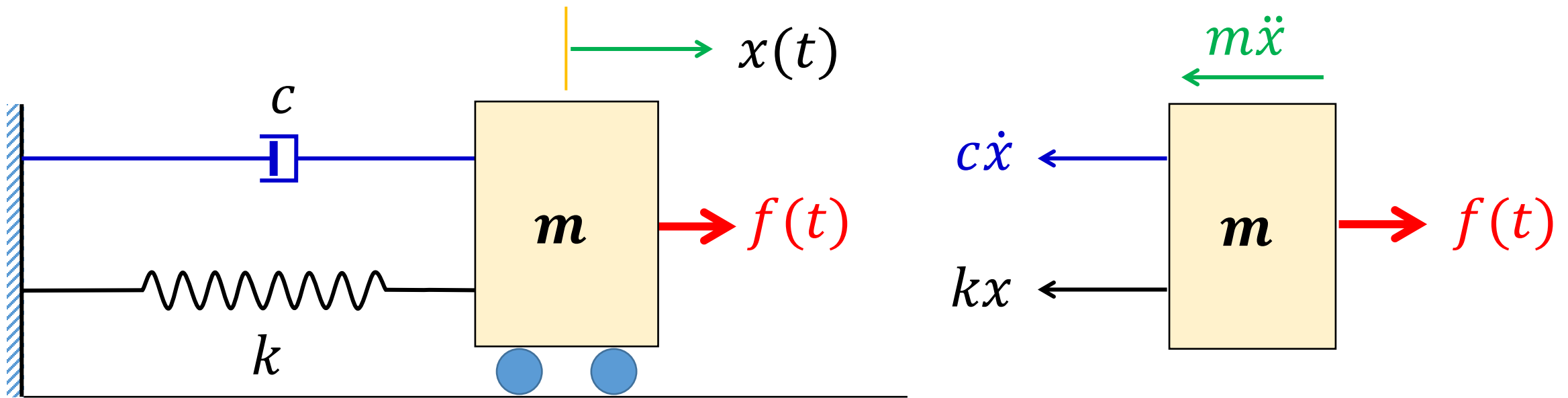


$$F(t) = F_0 \sin \omega t$$



$$F(t)$$





$$\sum F = m\ddot{x} \rightarrow f(t) - c\dot{x} - kx = m\ddot{x} \rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

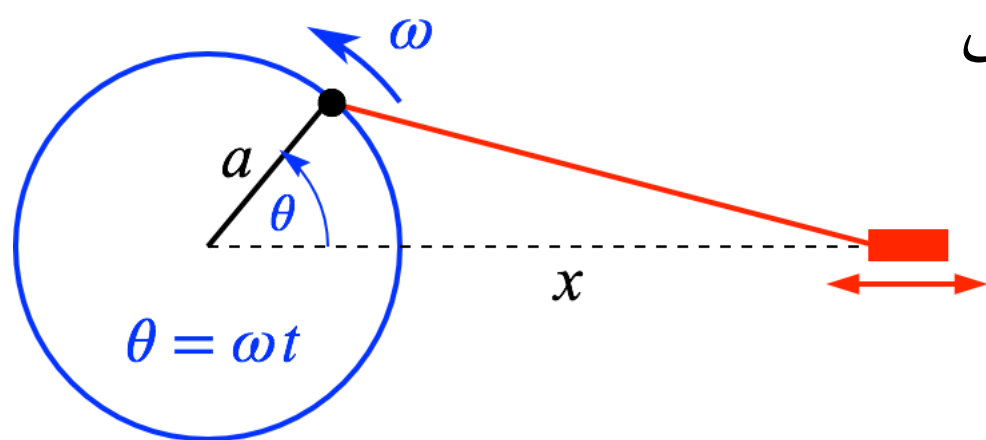
□ با حل این معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن، ارتباط جابه‌جایی با زمان به دست می‌آید.

□ برای حل معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن، ابتدا معادله همگن را حل می‌کنیم و سپس پاسخ

ناهمگن را به آن اضافه می‌کنیم.

تفاوت حرکت متناوب (Periodic) و هماهنگ (Harmonic):

حرکت متناوب: یعنی حرکت تکرارشونده در یک دوره زمانی

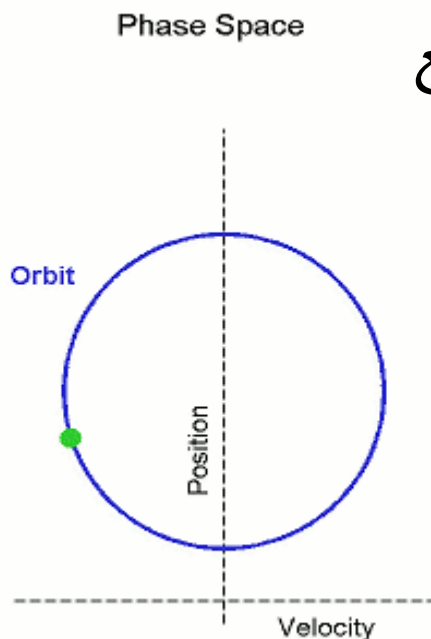
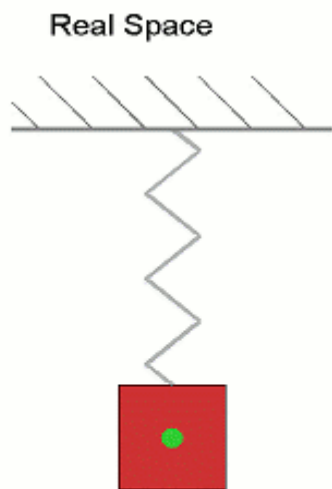


حرکت هارمونیک: یعنی حرکتی که شتاب

حرکت با جابه‌جایی در یک ضریب تفاوت دارند.

حرکت هارمونیک را می‌توان بر حسب توابع

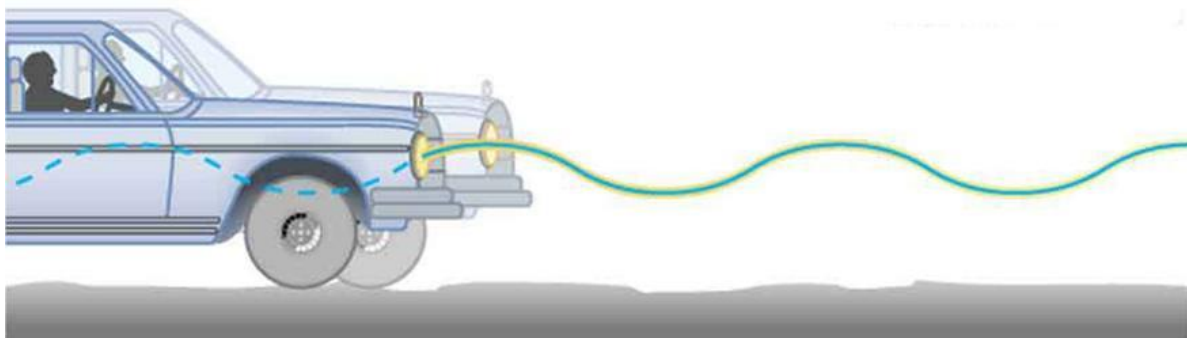
مثلثاتی بیان کرد.



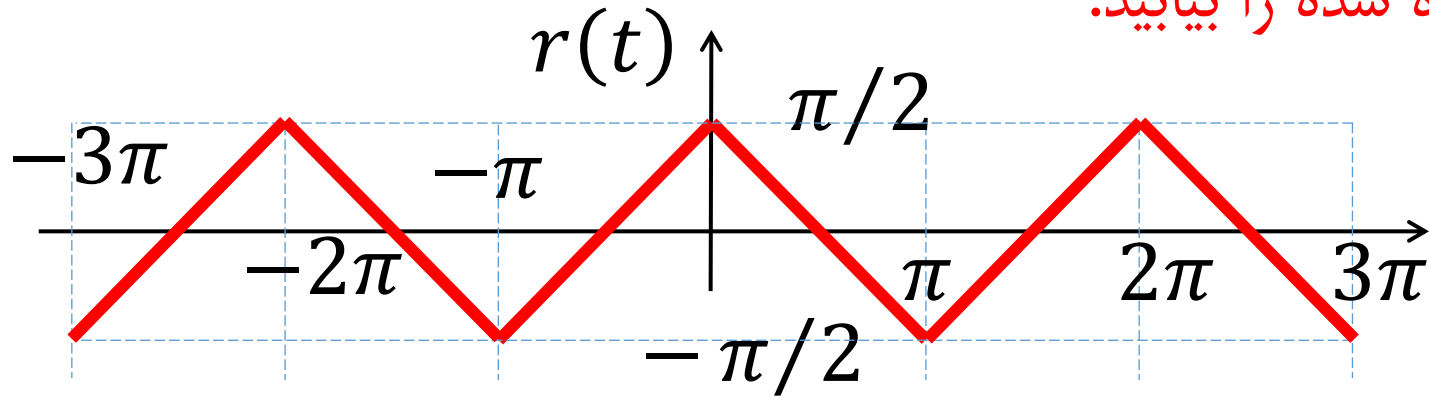
● در بیشتر موارد اگر عبارت ناهمگن (نیروی خارجی وارد به سامانه)، **تابعی متناوب نباشد**، براحتی می‌توان پاسخ ناهمگن را پیدا کرد.

● اما اگر عبارت ناهمگن، **تابعی متناوب باشد**؛ پاسخ ناهمگن معادلهٔ دیفرانسیل سخت و پیچیده می‌شود و اینجاست که از سری فوریه کمک می‌گیریم و تابع متناوب را به صورت جمع توابع هارمونیک مثلثاتی می‌نویسیم تا بتوانیم جواب ناهمگن را نیز بیابیم.

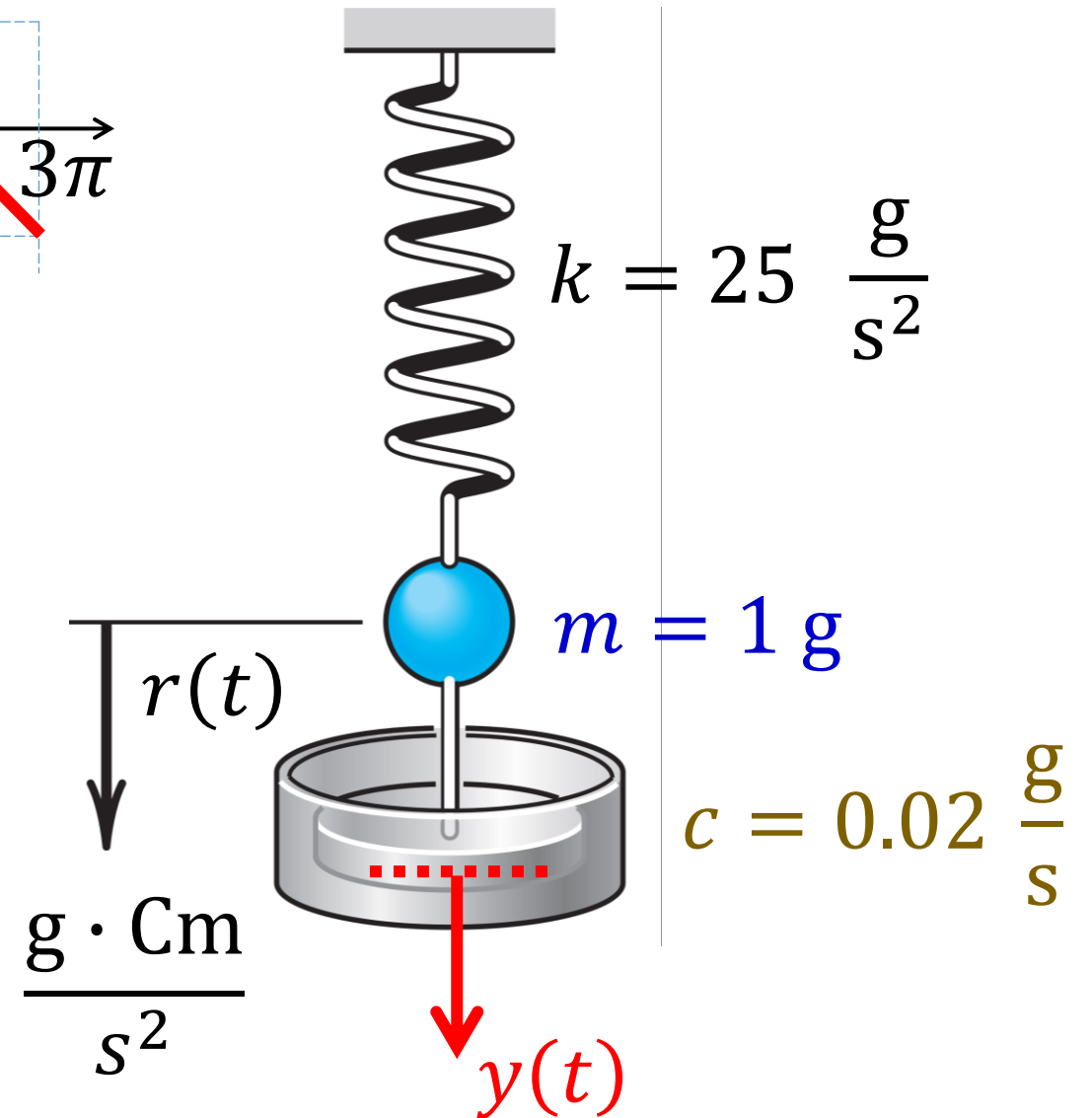
برای فهم بهتر به مثال زیر توجه کنید:



مثال: پاسخ حرکت نوسانی سامانه نشان داده شده را بیابید.



$$r(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{2} & -\pi < t < 0 \\ -t + \frac{\pi}{2} & 0 < t < \pi \end{cases}$$



مثال قبل، برای درک مقدار جابه‌جایی در اثر ارتعاش اجباری با نیروی متناوب غیرسینوسی است.

$$\ddot{y} + 0.02\dot{y} + 25y = r(t)$$

(الف) ابتدا پاسخ همگن را به دست می‌آوریم:

$$\ddot{y} + 0.02\dot{y} + 25y = 0$$

□ برای اینکار از روش اپراتور استفاده می‌کنیم.

□ در این روش به جای مشتق از اپراتور آن یعنی علامت D استفاده می‌کنیم:

مشتق n ام $y' \text{ or } \dot{y} = Dy \quad (D^n y = y^{(n)})$

فاکتورگیری از y

$$D^2 y + 0.02Dy + 25y = 0 \quad \text{-----} \rightarrow (D^2 + 0.02D + 25)y = 0$$

از حل این معادله سه نوع جواب برای D خواهیم داشت: $D^2 + 0.02D + 25 = 0$

۱- D عددی حقیقی و برابر با λ باشد. آنگاه جواب بدین صورت است: $y(t) = Ce^{\lambda t}$

۲- D عددی مختلط و برابر با $a \pm bi$ باشد. آنگاه جواب بدین صورت است:

$$y(t) = e^{at}(C_1 \cos bt + C_2 \sin bt)$$

۳- به طور کلی D عددی مختلط با m بار تکرار باشد. آنگاه y بدین شکل است:

$$y(t) = \sum_{i=1}^m t^{i-1} e^{at} (C_{1i} \cos bt + C_{2i} \sin bt)$$

حال معادله به دست آمده را حل می کنیم: $\ddot{y} + 0.02\dot{y} + 25y = 0$

$$\Delta = (0.02)^2 - 4(1)(25) = -99.9996$$

$$D = \frac{-0.02 \pm \sqrt{-99.9996}}{2} = -0.01 \pm (9.99)i$$

حال که ریشه ها مشخص شدند، جواب همگن (پاسخ گذرا) معادله حرکت بدین شکل است:

$$y_h(t) = e^{-0.01t}(C_1 \cos 9.99t + C_2 \sin 9.99t)$$

(ب) حال برای یافتن جواب ناهمگن (پاسخ ماندگار) باید توجه داشت که روش‌های گوناگونی برای اینکار وجود دارد. در این قسمت ما از روش **ضرایب نامعین** استفاده می‌کنیم.

در این روش جواب ناهمگن را به صورت تابعی با ضرایب نامعین فرض می‌کنیم و با جایگذاری در معادله ناهمگن، ضرایب نامعین را می‌یابیم.

پاسخی که برای معادله ناهمگن فرض می‌کنیم به نوع تابع ناهمگن در سمت راست معادله وابسته است. برای مثال:

جمله ناهمگن	جواب ناهمگن
-------------	-------------

$$\text{عدد ثابت } C \rightarrow y_p(t) = A$$

چند جمله ای t^n	$\rightarrow y_p = A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots +$
-------------------	---

$$\text{تابع نمایی } e^{at} \rightarrow y_p = Ae^{at}$$

تابع مثلثاتی $\sin bt$ یا $\cos bt$	$\rightarrow y_p = A \cos bt + B \sin bt$
-------------------------------------	---

نکته: اگر جواب ناهمگن شکلی مانند جواب همگن داشته باشد، مورد قبول نیست و حتماً باید در t ضرب شود.

□ حال اگر بخواهیم معادله ناهمگن مسأله را حل کنیم خواهیم دید که نیروی خارجی $r(t)$ یک تابع متناوب است و در اصل چندین ضابطه دارد که کار را سخت می‌کند.

□ برای رفع این مشکل به جای تابع متناوب از سری فوریه آن استفاده می‌کنیم. با نوشتن سری فوریه آن به این شکل می‌رسیم:

$$r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^{n+1} + 1] \cos nt$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots \right)$$

پس معادله دیفرانسیل ما بدین صورت می‌شود:

$$\ddot{y} + 0.02\dot{y} + 25y = \sum \frac{4}{\pi n^2} \cos nt \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots$$

نکته: جمله‌های ناهمگن ما بسیار زیاد اند. در این موارد باید به ازای هر جمله ناهمگن یک جواب ناهمگن بیابیم و با هم جمع کنیم اما خوشبختانه تمام این جمله‌های ناهمگن از یک الگو یعنی

$\frac{4}{\pi n^2} \cos nt$ پیروی می‌کنند. پس می‌توانیم شکل کلی جواب ناهمگن را بیابیم. در نتیجه کافی

است جواب ناهمگن را به ازای جمله $\frac{4}{\pi n^2} \cos nt$ بیابیم و سپس با قرار دادن یک $\sum$ همه

جواب‌های ناهمگن را داشته باشیم.

$$\ddot{y} + 0.02\dot{y} + 25y = \frac{4}{\pi n^2} \cos nt, \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots$$

چون شکل ناهمگن، مثلثاتی است، پس ما نیز جواب ناهمگن را مثلثاتی فرض می‌کنیم و آن را در معادله جایگذاری می‌کنیم.

$$y_p(t) = A_n \cos nt + B_n \sin nt$$

$$\dot{y}_p(t) = -nA_n \sin nt + nB_n \cos nt$$

$$\ddot{y}_p(t) = -n^2 A_n \cos nt - n^2 B_n \sin nt$$

$$\underbrace{(-n^2 A_n \cos nt - n^2 B_n \sin nt)}_{\ddot{y}_p}$$

$$+0.02 \underbrace{(-n A_n \sin nt + n B_n \cos nt)}_{\dot{y}_p}$$

$$+25 \underbrace{(A_n \cos nt + B_n \sin nt)}_{y_p} = \frac{4}{\pi n^2} \cos nt$$

$$\left[(25 - n^2)A_n + 0.02nB_n\right] \cos nt + \left[(25 - n^2)B_n - 0.02nA_n\right] \sin nt$$

$$\begin{cases} (25 - n^2)A_n + 0.02nB_n = \frac{4}{\pi n^2} \\ (25 - n^2)B_n - 0.02nA_n = 0 \end{cases} = \frac{4}{\pi n^2} \cos nt$$

با مساوی قرار دادن طرفین معادله داریم:



کرامر $\rightarrow A_n = \frac{\begin{vmatrix} \frac{4}{\pi n^2} & 0.02n \\ 0 & 25 - n^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 25 - n^2 & 0.02n \\ -0.02n & 25 - n^2 \end{vmatrix}}, B_n = \frac{\begin{vmatrix} 25 - n^2 & \frac{4}{\pi n^2} \\ -0.02n & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 25 - n^2 & 0.02n \\ -0.02n & 25 - n^2 \end{vmatrix}}$

$$A_n = \frac{\frac{4}{\pi n^2} (25 - n^2)}{(25 - n^2)^2 + (0.02n)^2}, B_n = \frac{\frac{4}{\pi n^2} (0.02n)}{(25 - n^2)^2 + (0.02n)^2}$$

پس در کل، جواب این ارتعاشات بدین صورت است:

Total Solution: $y_h(t) + y_p(t)$

$$= \underbrace{e^{-0.01t} (C_1 \cos 9.99t + C_2 \sin 9.99t)}$$

Transient response

$$+ \underbrace{A_n \cos nt + B_n \sin nt}$$

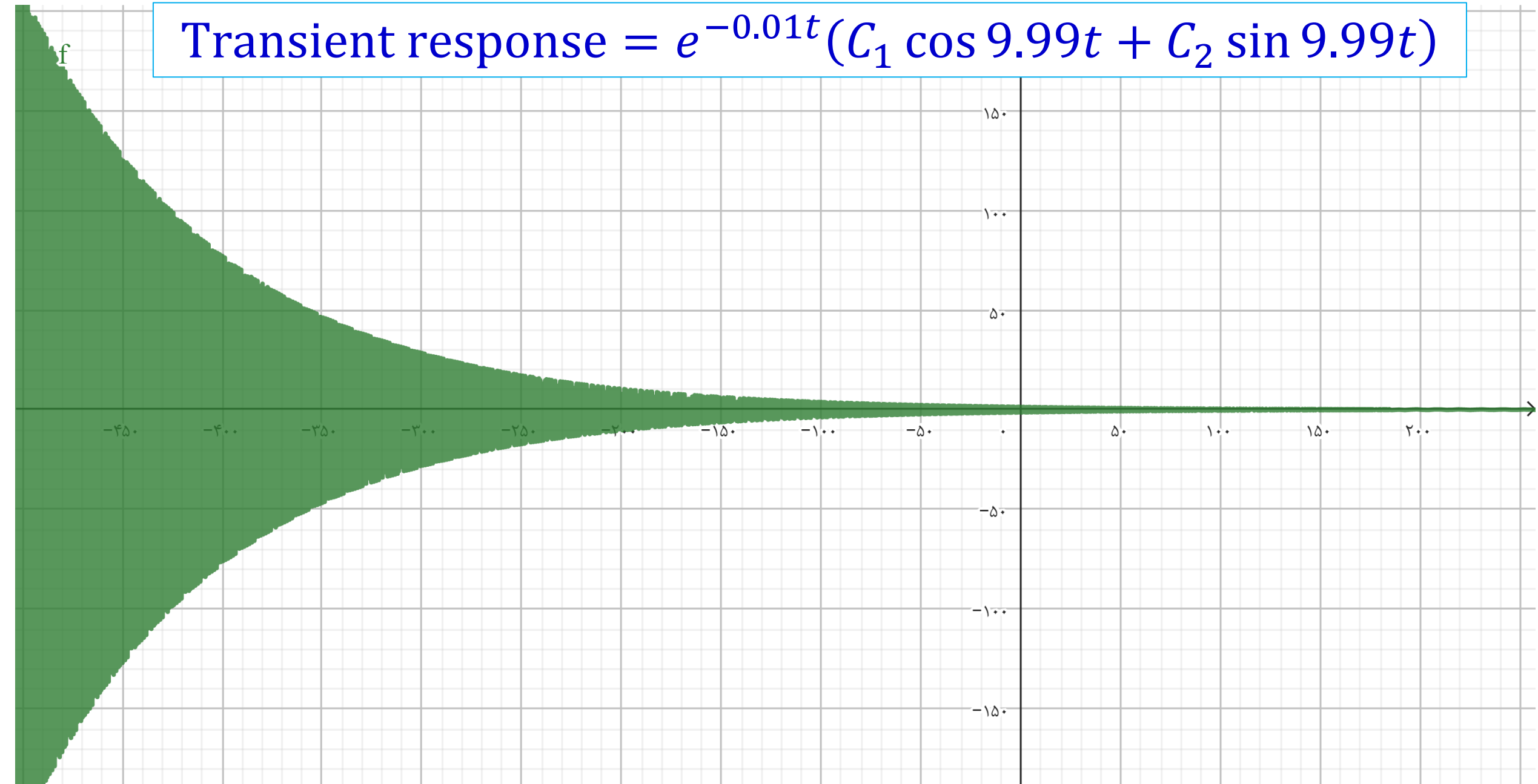
Steady state

پاسخ گذرا (Transient):

اگر توجه کنید در جواب همگن ما شاهد عبارت $e^{-0.01t}$ هستیم. وجود این عبارت باعث می‌شود که پس از گذشت مدت زمان کوتاهی جواب همگن به صفر میل می‌کند. به همین خاطر اصطلاحاً به پاسخ همگن، پاسخ گذرا (Transient) گویند زیرا در مدت زمان کمی، اثر خود را می‌گذارد و به صفر میل می‌کند.

$$\text{Transient response} = e^{-0.01t}(C_1 \cos 9.99t + C_2 \sin 9.99t)$$

$$\text{Transient response} = e^{-0.01t}(C_1 \cos 9.99t + C_2 \sin 9.99t)$$



$$\text{Steady state response} = A_n \cos nt + B_n \sin nt$$

پاسخ ناهمگن یا پایا (Steady state): پاسخ ناهمگن به صورت نوسانی باقی می ماند که به

آن پاسخ ماندگار یا پایا (Steady) گویند.

حال اگر بخواهیم این پاسخ ماندگار را رسم کنیم باید مجموع دو جمله مثلثاتی با آرگومان برابر را رسم کنیم.

اما بهتر است این دو جمله را تبدیل به یک جمله کنیم. برای این کار داریم:

$$A \cos \theta + B \sin \theta = C \sin(\theta + \varphi) \quad (I)$$

$$= C \sin \theta \cos \varphi + C \cos \theta \sin \varphi \quad (II)$$

با مقایسه (I) و (II) داریم:

$$\begin{cases} A \cos \theta = C \sin \varphi \cos \theta \\ B \sin \theta = C \cos \varphi \sin \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = C \sin \varphi \\ B = C \cos \varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C^2 = A^2 + B^2 \\ \tan \varphi = \frac{A}{B} \end{cases}$$

پس برای نوشتن مجموع دو جمله مثلثاتی به صورت یک جمله به یک ضریب C و یک زاویه فاز φ نیاز داریم که بدین صورت خواهند بود:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} , \tan \varphi = \frac{A}{B}$$

حال اگر جواب ناهمگن یا همان جواب پایا را بخواهیم به صورت یک جمله بنویسیم، داریم:

$$y_{SS}(t) = A_n \cos nt + B_n \sin nt = C_n \sin(nt + \varphi_n)$$

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} , \tan \varphi_n = \frac{A_n}{B_n}$$

حال بررسی می‌کنیم که دامنه C_n چقدر در رسم نمودار مؤثر است:

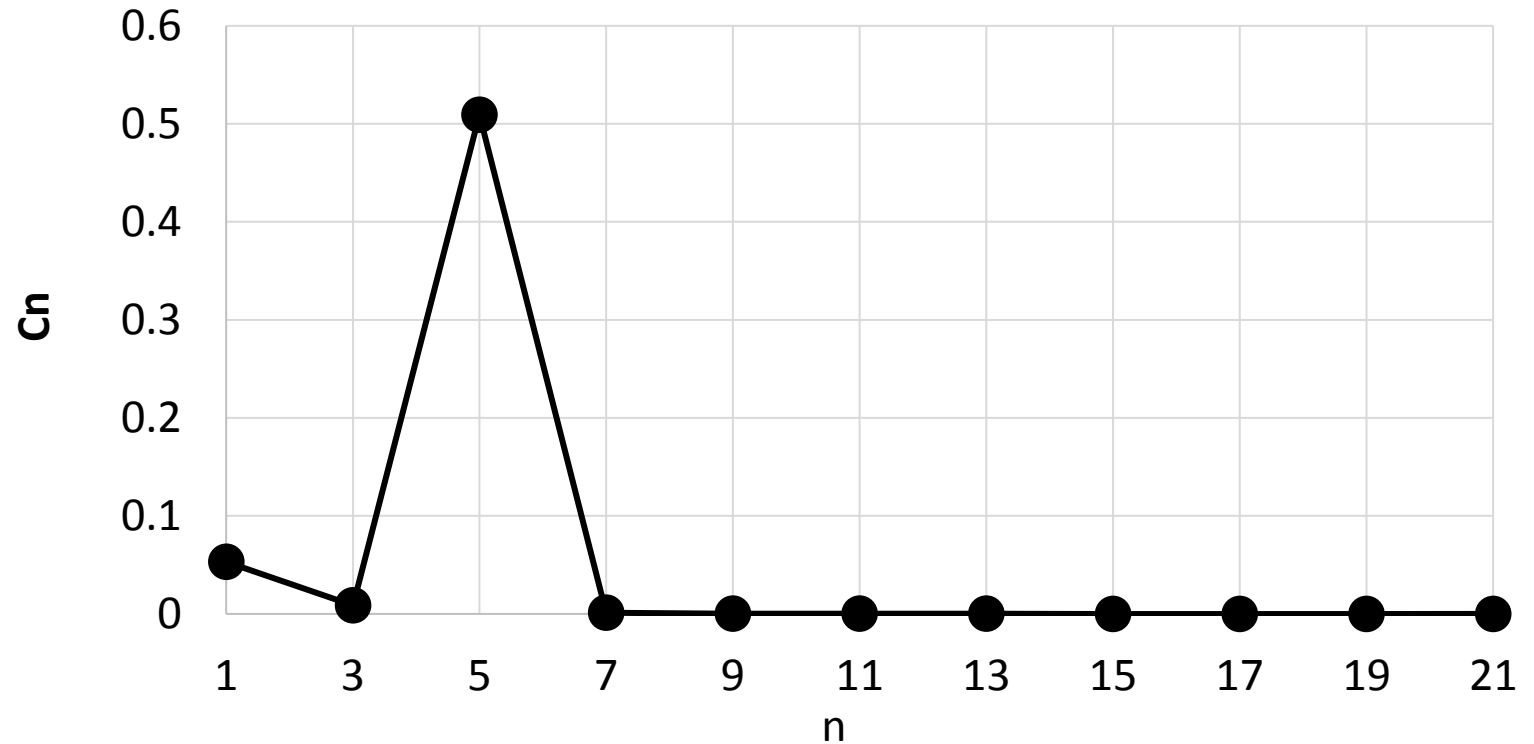
$$n = 1 \rightarrow C_1 = 0.0530$$

$$n = 3 \rightarrow C_3 = 0.0088$$

$$n = 5 \rightarrow C_5 = 0.5093$$

$$n = 7 \rightarrow C_7 = 0.0010$$

$$n = 9 \rightarrow C_9 = 0.0002$$



همان طور که می‌بینید به ازاء $n = 5$ ، C_n بیشترین مقدار را دارد و این یعنی جمله پنجم y_5
 $= C_n \sin(nt + \varphi_n)$ جمله غالب است و بیشترین تأثیر را در جواب می‌گذارد.

اما این مقدار را چگونه می‌توانیم بدون استفاده از جایگذاری به دست آوریم؟!

نکته:

در معادله $m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0$ ، فرکانس طبیعی برابر با $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ است.

در معادله ما نیز $k = 25$ و $m = 1$ است و داریم: $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25}{1}} = 5$

لذا از اینجا می‌توان گفت که جمله پنجم $y_5 = C_n \sin(nt + \varphi_n)$ جمله غالب خواهد بود زیرا فرکانس آنها برابر با فرکانس طبیعی ارتعاشات است.



افتتاح پل تاکوما در یکم

ژانویه ۱۹۴۰



سقوط پل تاکوما در هفتم

نوامبر ۱۹۴۰

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

فصل ۲: تحلیل فوریه

شکل دیگر سری فوریه

توسط: سید محمد جعفری

۱۱- شکل دیگر سری فوریه

همان طور که در حل ارتعاشات اجباری دیدیم، می‌توان مجموع دو عبارت سینوسی و کسینوسی با زاویه‌های برابر را به صورت یک سینوس یا کسینوس با یک اختلاف فاز نوشت.

$$A \cos \theta + B \sin \theta = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\theta - \gamma) \quad \gamma = \tan^{-1} \frac{B}{A}$$

$$A \cos \theta + B \sin \theta = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\theta + \delta) \quad \delta = \tan^{-1} \frac{A}{B}$$

□ در سری فوریه نیز شاهد بی‌شمار جمله سینوسی و کسینوسی هم زاویه هستیم.

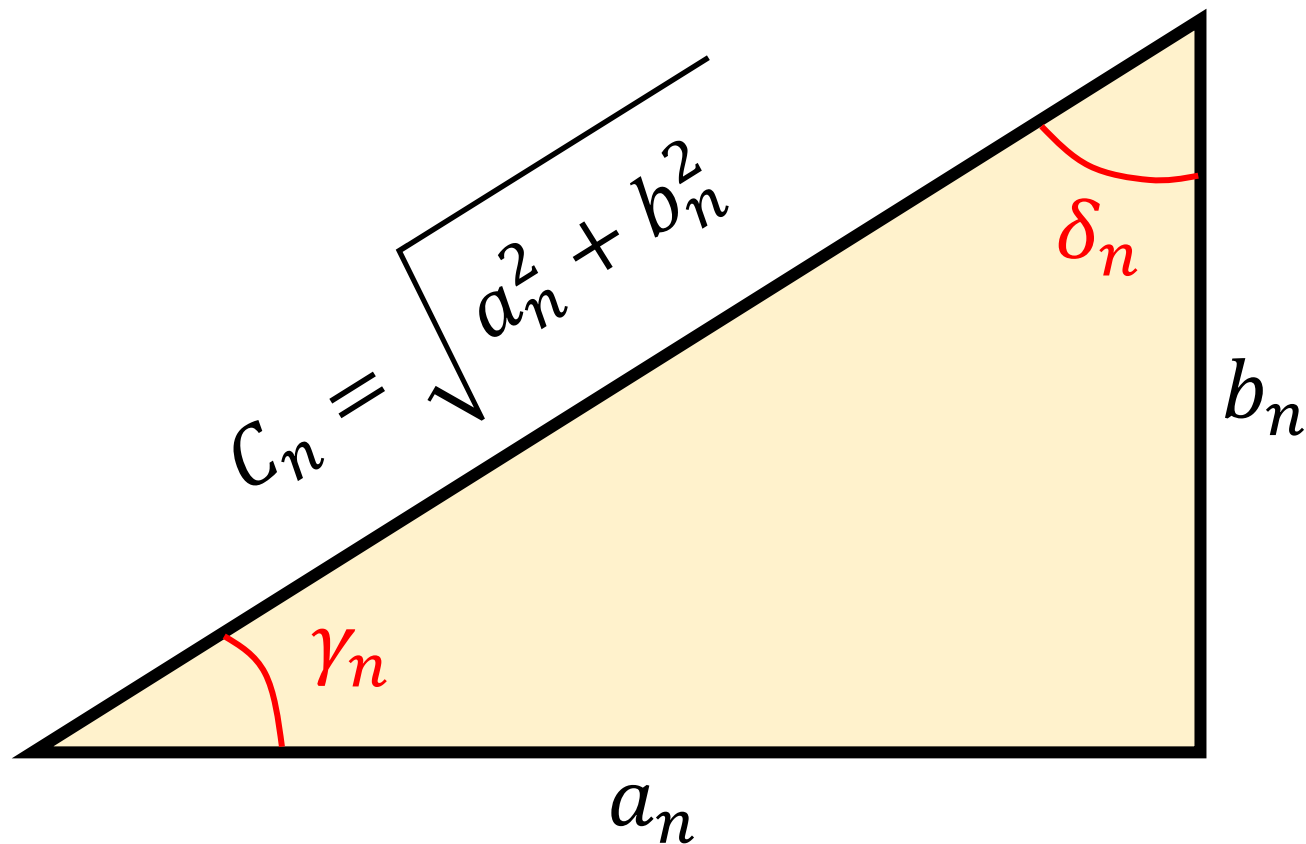
□ پس می‌توان آنها را دو به دو به یک جمله تبدیل کرد:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

حال عبارت $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ را در داخل سیگما ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos \frac{n\pi}{L} x + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

حال مثلث زیر را در نظر بگیرید:



$$\cos \gamma_n = \frac{a_n}{C_n}$$

$$\sin \gamma_n = \frac{b_n}{C_n}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\cos \gamma_n \cos \frac{n\pi}{L} x + \sin \gamma_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

و بر اساس اتحاد مثلثاتی داریم:

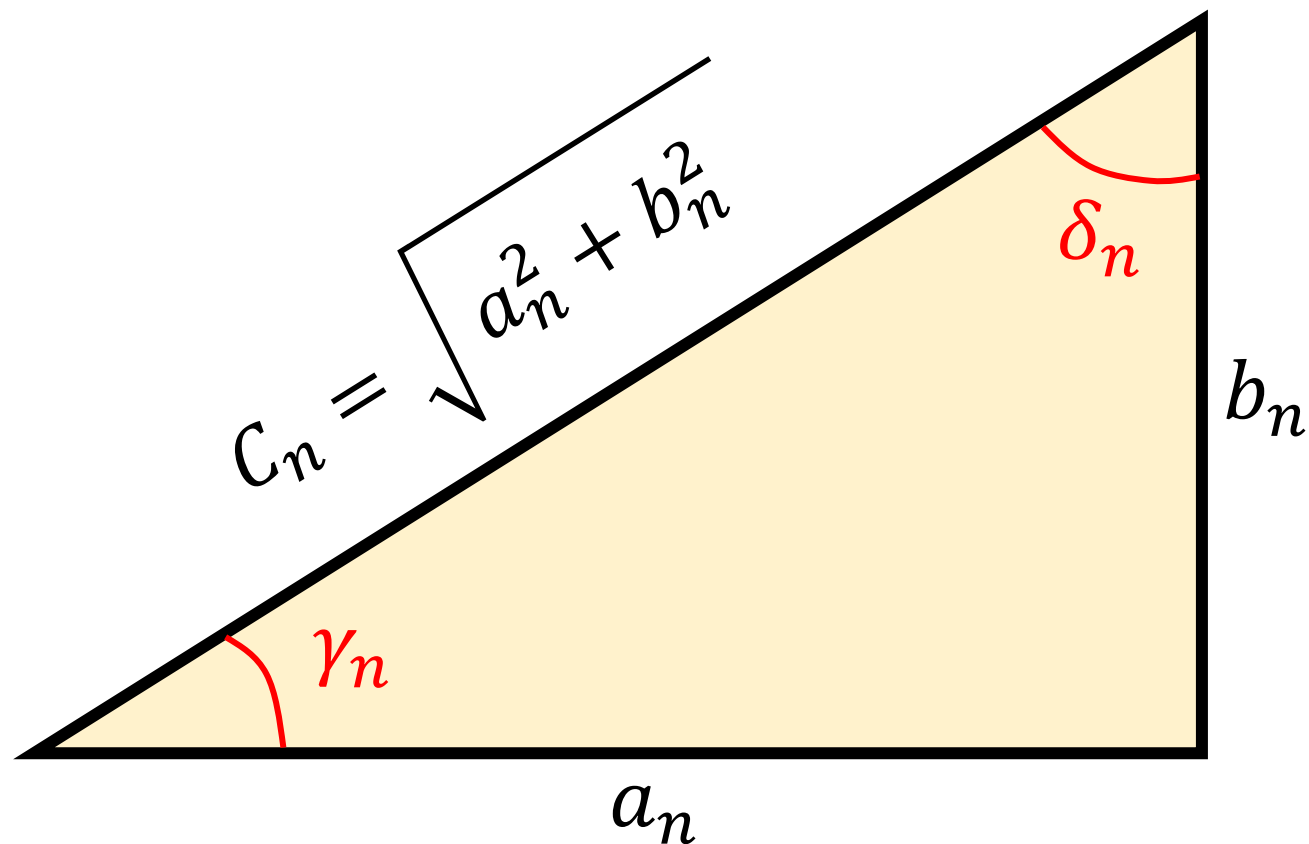
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x - \gamma_n\right)$$

$$\gamma_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}, \quad C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

1 در واقع، این شکل از دنباله فوریه، نحوه دیگری از بسط فوریه است که بر اساس یک ضریب و

یک اختلاف زاویه (phase) است (بر حسب کسینوس):

حال اگر از دید زاویه δ به a_n و b_n نگاه کنیم، داریم:



$$\sin \delta_n = \frac{a_n}{C_n}$$

$$\cos \delta_n = \frac{b_n}{C_n}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\cos \frac{n\pi}{L} x \sin \delta_n + \sin \frac{n\pi}{L} x \cos \delta_n \right)$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x + \delta_n\right)$$

$$\delta_n = \tan^{-1} \frac{a_n}{b_n}, C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

2 این معادله نیز شکل دیگری از بسط فوریه است که بر اساس یک ضریب و یک اختلاف فاز است (بر حسب سینوس):

مثال: سری فوریۀ تابع $f(x) = e^x$ با دورۀ تناوب $T = 2\pi$ ($0 < x < 2\pi$) به صورت زیر است:

$$f(x) = e^x = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{2\pi} - 1}{\pi(1 + n^2)} \cos nx + \frac{n(1 - e^{2\pi})}{\pi(1 + n^2)} \sin nx \right)$$

این سری را به صورت یک کسینوس و سینوس با یک اختلاف فاز بنویسید.

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\left[\frac{e^{2\pi} - 1}{\pi(1 + n^2)} \right]^2 + \left[\frac{n(1 - e^{2\pi})}{\pi(1 + n^2)} \right]^2} = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi\sqrt{1 + n^2}}$$

$$\gamma_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n} = \tan^{-1} \left[\frac{\frac{n(1 - e^{2\pi})}{\pi(1 + n^2)}}{\frac{e^{2\pi} - 1}{\pi(1 + n^2)}} \right]$$

$$= \tan^{-1}(-n) = -\tan^{-1} n \longrightarrow \delta_n = -\tan^{-1} \frac{1}{n}$$

$$f(x) = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi\sqrt{1 + n^2}} \cos(nx + \tan^{-1} n) \quad \blacksquare$$

$$f(x) = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi\sqrt{1 + n^2}} \sin\left(nx - \tan^{-1} \frac{1}{n}\right) \quad \blacksquare$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

فصل ۲: تحلیل فوریہ

شکل مختلط سری فوریہ

توسط: سید محمد جعفری

۱۲- شکل مختلط سری فوریه

$$f(x) = a_0 + \sum a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x$$

۱۲-۱- سری فوریه مختلط

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}, \text{ دوره تناوب } = 2L$$

همان طور که تا الان دیدیم سری فوریه بر پایه توابع هارمونیک سینوسی و کسینوسی بنا شده است و از طرف دیگر طبق فرمول دموآور می‌دانیم هرکجا سینوس و کسینوس باشد؛ تابع نمایی نیز می‌تواند باشد. پس می‌توان شکل سری فوریه را از مثلثاتی به شکل نمایی تبدیل کرد و برای این کار می‌توان نوشت:

$$\cos \omega x = \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2} \quad \sin \omega x = \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{i\omega_n x} + e^{-i\omega_n x}}{2} + b_n \frac{e^{i\omega_n x} - e^{-i\omega_n x}}{2i}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{i\omega_n x} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{-i\omega_n x}$$

جمله $\frac{a_n + ib_n}{2}$ دقیقاً مزدوج مختلط $\frac{a_n - ib_n}{2}$ است.

لذا می‌توان دو جمله را با هم ترکیب کرد و به جای اینکه بازه n اعداد صحیح مثبت باشد، می‌توان در تمام اعداد صحیح آن را تعریف کرد.

حال می‌توان $\frac{a_n - ib_n}{2}$ را به صورت ضریب جدید C_n بنویسیم.

$$f(x) = a_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{i\omega_n x}$$

$$C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \cos \omega_n x \, dx - i \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \sin \omega_n x \, dx$$

$$C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) (\cos \omega_n x - i \sin \omega_n x) \, dx$$

$$C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\omega_n x} \, dx$$

با جایگذاری $n = 0$ داریم.

$$C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x} dx$$

$$C_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = a_0$$

$$f(x) = C_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} C_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\frac{n\pi}{L}x}$$

پس در کل داریم:

$$C_n = \frac{1}{2L} \int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x} dx$$

مثال: سری فوریه مختلط تابع $f(x) = x^2$ را در بازه $0 \leq x \leq 2\pi$ و دوره تناوب $T = 2\pi$ بیابید.

$$C_n = \frac{1}{2L} \int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x} dx$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 e^{-inx} dx$$

مشتق	$\oplus x^2$	e^{-inx}	انتگرال
$\downarrow$	$\ominus 2x$	$-\frac{1}{in} e^{-inx}$	$\downarrow$
	$\oplus 2$	$+\frac{1}{(in)^2} e^{-inx}$	
	0	$-\frac{1}{(in)^3} e^{-inx}$	

$$2\pi C_n = \left[-\frac{x^2}{in} e^{-inx} - \frac{2x}{(in)^2} e^{-inx} - \frac{2}{(in)^3} e^{-inx} \right]_0^{2\pi}$$

$$2\pi C_n = i \frac{(2\pi)^2}{n} e^{-i2\pi n} + \frac{4\pi}{n^2} e^{-i2\pi n} + i \frac{2}{n^3} e^{-i2\pi n} - i \frac{2}{n^3} e^0$$

$$2\pi C_n = \frac{4\pi^2 i}{n} + \frac{4\pi}{n^2} \rightarrow C_n = \frac{2 + 2in\pi}{n^2}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2 + 2in\pi}{n^2} e^{inx} \quad \blacksquare$$

مثال: سری فوريه مختلط تابع $f(x) = e^x$ را در بازه $[-\pi, \pi]$ و دوره تناوب $T = 2\pi$ بیابید.

$$C_n = \frac{1}{2L} \int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x} dx$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{1-in} e^{(1-in)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi(1-in)} (e^{\pi-in\pi} - e^{-\pi+in\pi})$$

$$e^{in\pi} = e^{-in\pi} = \cos n\pi = (-1)^n$$

$$C_n = \frac{(-1)^n}{2\pi(1 - in)} (e^\pi - e^{-\pi}) = \frac{(-1)^n \sinh \pi}{2\pi(1 - in)}$$

$$\frac{1}{1 - in} = \frac{1}{1 - in} \times \frac{1 + in}{1 + in} = \frac{1 + in}{1 + n^2}$$

$$C_n = \frac{(-1)^n \sinh \pi (1 + in)}{\pi(1 + n^2)}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 + in}{1 + n^2} e^{inx} \quad \blacksquare$$

نکته: اگر تابع زوج یا فرد باشد و دامنه متقارن باشد می توان C_n را اینگونه ساده کرد: $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$

$$f(x) \text{ is Even: } b_n = 0 \rightarrow C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$\rightarrow C_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$f(x) \text{ is Odd: } a_n = 0 \rightarrow C_n = \frac{-i}{2L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$\rightarrow C_n = \frac{-i}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

مثال: سری فوریه مختلط تابع $f(x) = \cosh x$ را در بازه $[-1, 1]$ و دوره تناوب $T = 2$ بیابید.

چون تابع زوج است، پس داریم:

$$C_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx = \int_0^1 \cosh x \cos n\pi x dx$$

برای انتگرال توابع هذلولوی و مثلثاتی همانند توابع نمایی و مثلثاتی عمل می‌کنیم:

مشتق	$\oplus$ $\cosh x$		$\cos n\pi x$	انتگرال
$\downarrow$	$\ominus \sinh x$	$\rightarrow$	$\frac{1}{n\pi} \sin n\pi x$	$\downarrow$
	$\oplus \cosh x$	$\rightarrow$	$-\frac{1}{n^2\pi^2} \cos n\pi x$	

$$C_n = \left[\frac{\cosh x}{n\pi} \sin n\pi x + \frac{\sinh x}{n^2\pi^2} \cos n\pi x \right]_0^1 - \underbrace{\int_0^1 \frac{\cosh x}{n^2\pi^2} \cos n\pi x \, dx}_{-(1/n^2\pi^2)C_n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n^2\pi^2} \right) C_n = \left[\frac{\cosh x}{n\pi} \sin n\pi x + \frac{\sinh x}{n^2\pi^2} \cos n\pi x \right]_0^1$$

$$\left(1 + \frac{1}{n^2\pi^2} \right) C_n = \frac{\sinh(1)}{n^2\pi^2} (-1)^n \rightarrow C_n = \frac{(-1)^n \sinh(1)}{1 + n^2\pi^2}$$

$$f(x) = \cosh x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sinh(1)}{1 + n^2\pi^2} e^{in\pi x} \quad \blacksquare$$

۱۲-۳- اتحاد پارسوال با سری فوریۀ مختلط

برای سری فوریۀ مختلط نیز می توان اتحاد پارسوال را بدین شکل اثبات کرد:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\omega_n x}$$

$$C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\omega_n x} dx, C_{-n} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{i\omega_n x} dx, \omega_n = \frac{n\pi}{L}$$

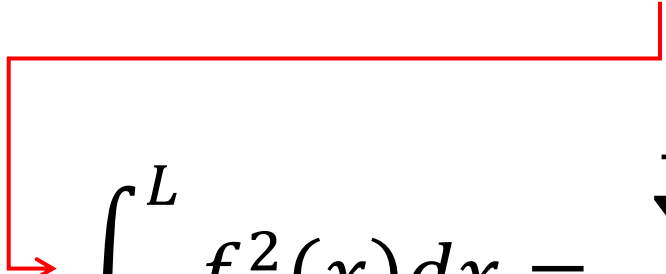
$$\times f(x) \longrightarrow f^2(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n f(x) e^{i\omega_n x}$$

$$\int_{-L}^L f^2(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \times \int_{-L}^L f(x) e^{i\omega_n x} dx$$

□ می‌دانیم که C_n و C_{-n} مزدوج یکدیگر اند.

□ پس ضرب آنها را می‌توان به صورت مربع C_n اندازه نوشت:

$$\int_{-L}^L f^2(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \times 2L C_{-n}$$


$$\int_{-L}^L f^2(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2L |C_n|^2$$

→

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f^2(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مہندسی

فصل ۲: تحلیل فوریہ

سری فوریہ گسستہ

توسط: سید محمد جعفری

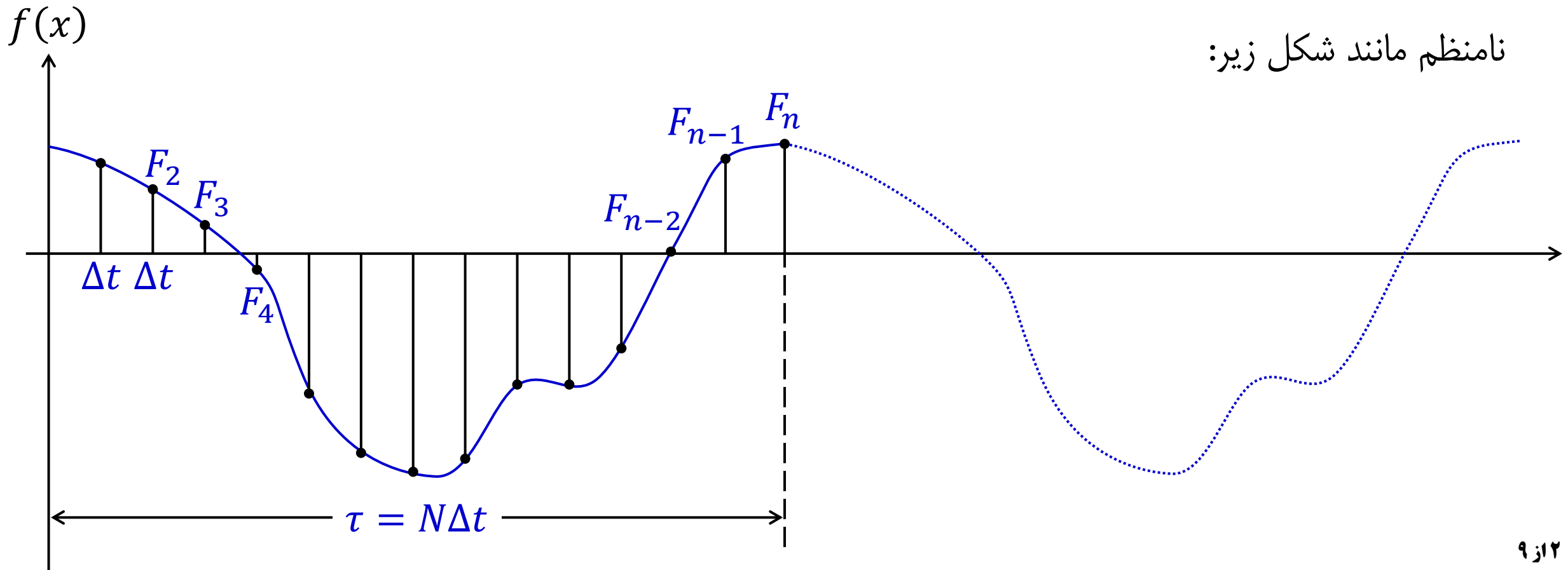
۱۳- سری فوریه گسسته

□ با توجه به آنچه که تا الان اشاره شد، سری فوریه توابع متناوب را به مجموع توابع هارمونیک سینوسی و

کسینوسی تبدیل می‌کند. این امر بویژه در ارتعاشات و تحلیل میدانهای الکترومغناطیسی بسیار کاربرد دارد.

□ در آزمون‌های عملی بیشتر مواقع، تابع متناوب منظم نیست و ضابطه خاصی ندارد مانند سیگنال متناوب و

نامنظم مانند شکل زیر:



چون ضابطه خاصی برای این سیگنال نداریم، پس با بازه زمانی Δt از آن N نمونه برمی‌داریم یا حتی در بیشتر مواقع تابع را به صورت پیوسته نیز نداریم و فقط داده‌هایی گسسته از آن (یعنی یک تعداد عدد با فاصله زمانی یکسان)، در اختیار است. در این صورت عمل انتگرال‌گیری به صورت گسسته انجام می‌شود و عملاً علامت انتگرال $\int$ به سیگما $\sum$ تبدیل می‌شود.

$$a_0 = \frac{1}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} f(t) dt \rightarrow a_0 = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{i=1}^N F_i \Delta t \rightarrow a_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i$$

$$a_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{\tau/2} t\right) dt \rightarrow a_j = \frac{2}{N\Delta t} \sum_{i=1}^N F_i \cos\left(\frac{2j\pi}{\tau} t_i\right) \Delta t \rightarrow a_j = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \cos\left(\frac{2j\pi}{\tau} t_i\right)$$

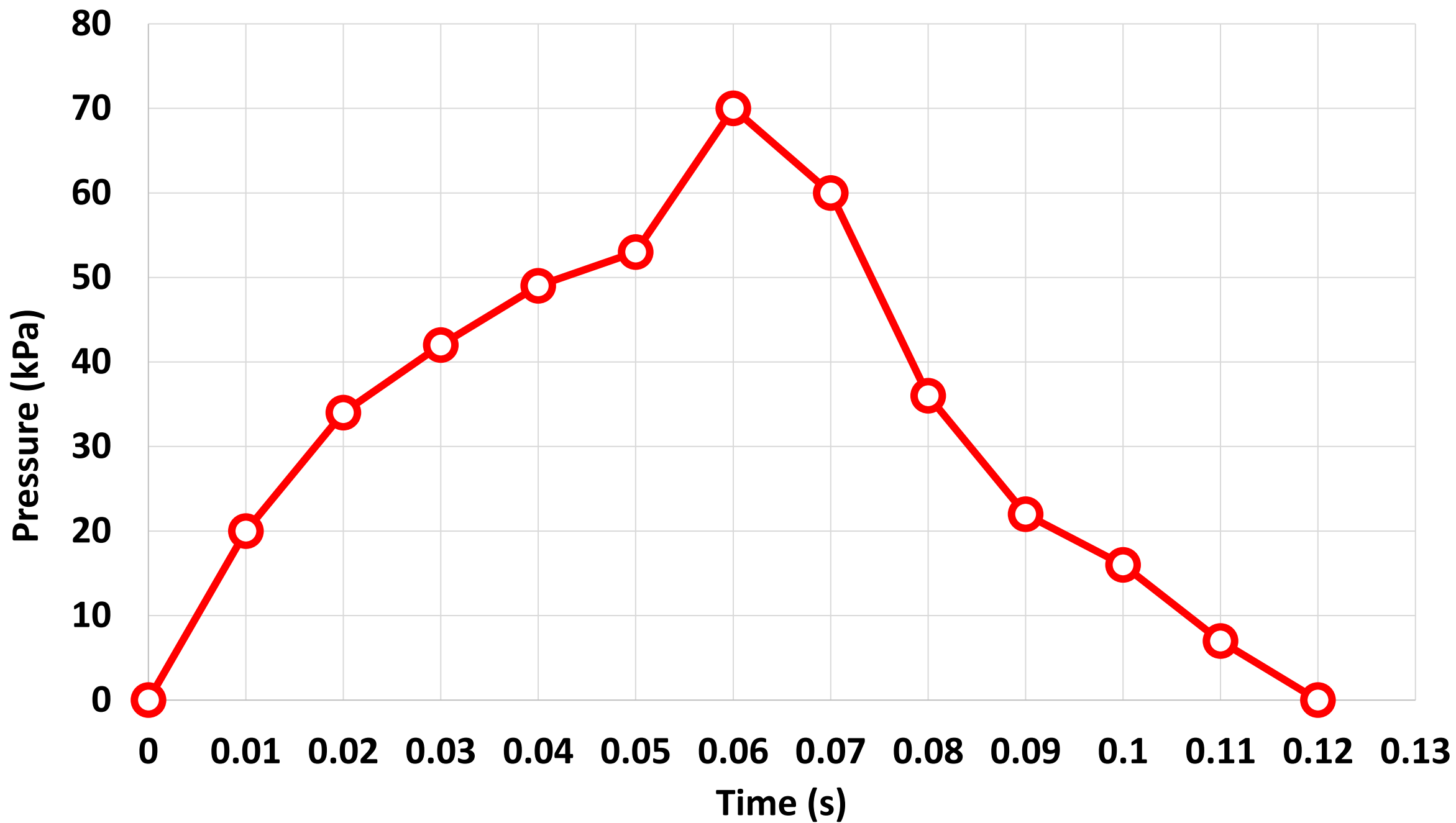
$$b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{\tau/2} t\right) dt \rightarrow b_j = \frac{2}{N\Delta t} \sum_{i=1}^N F_i \sin\left(\frac{2j\pi}{\tau} t_i\right) \Delta t \rightarrow b_j = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \sin\left(\frac{2j\pi}{\tau} t_i\right)$$

□ در اینجا دیگر نمی‌توان رابطه کلی برای a_j و b_j یافت و هر بار باید تک تک هر کدام را حساب کنیم.

□ البته این روش برای برنامه‌نویسی سری فوریه، آسان‌تر است و می‌توان با تقریب خوبی به سری فوریه رسید.

مثال: در جدول زیر نوسان فشار آب در یک لوله در بازه‌های یک صدم ثانیه فهرست شده‌اند.
این نوسان را تحلیل هارمونیکی کنید و سه هارمونیک اول آن را بیابید.

لحظه i ام	زمان t_i (s)	فشار P_i (kPa)	لحظه i ام	زمان t_i (s)	فشار P_i (kPa)
0	0	0	7	0.07	60
1	0.01	20	8	0.08	36
2	0.02	34	9	0.09	22
3	0.03	42	10	0.10	16
4	0.04	49	11	0.11	7
5	0.05	53	12	0.12	0
6	0.06	70			



ابتدا کل زمان داده برداری را می‌یابیم:

$$\tau = N\Delta t = 12 \times 0.01 = 0.12 \rightarrow \frac{2\pi}{\tau} = 52.36 \text{ (rad/s)}$$

حال ضرایب سری فوریه گسسته را حساب می‌کنیم:

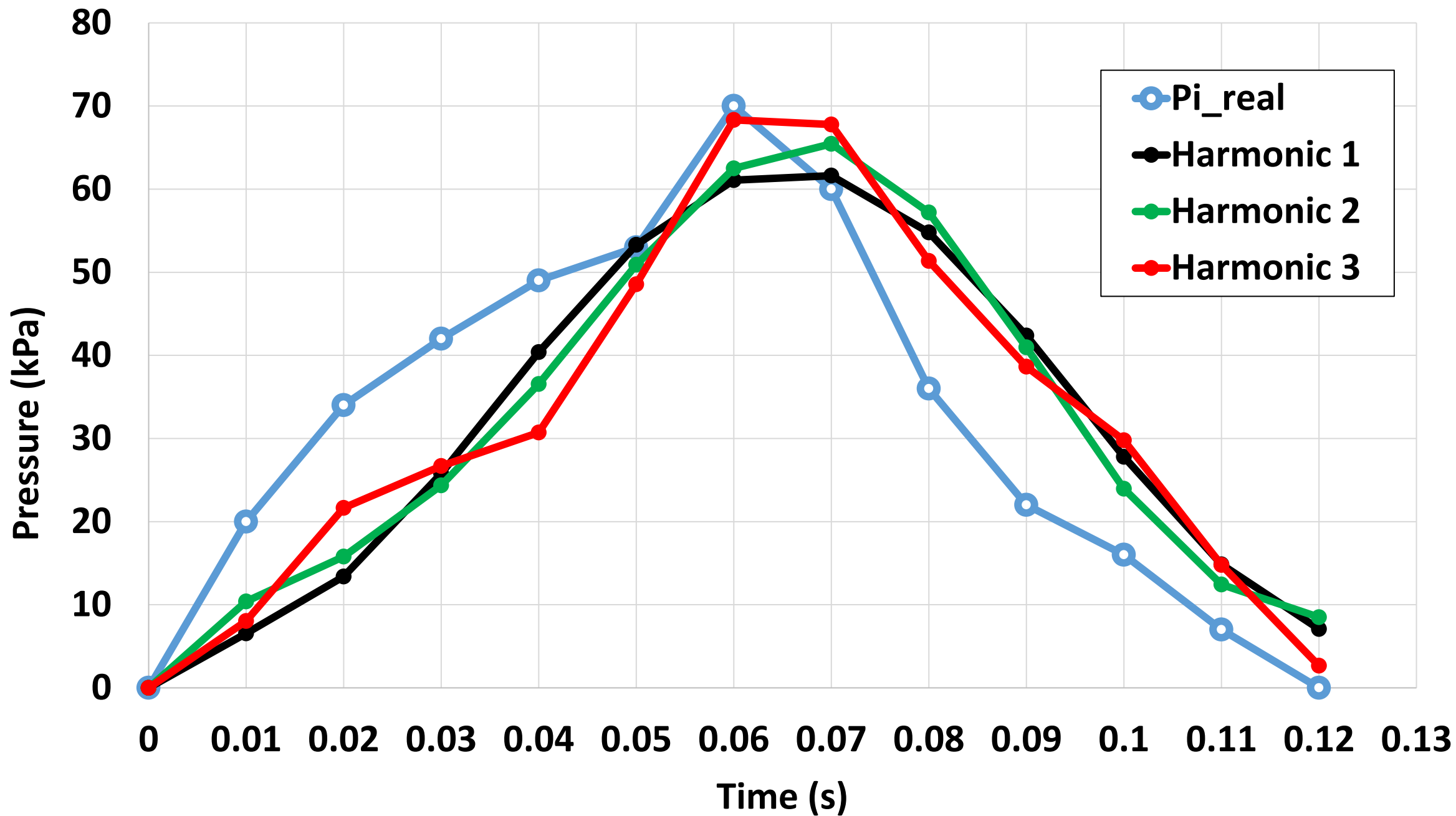
$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} P_i = 34.083$$

$$a_j = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \cos\left(\frac{2j\pi}{\tau} t\right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{2}{12} \sum_{i=1}^{12} P_i \cos\left(\frac{2\pi}{0.12} t_i\right) = -26.997 \\ a_2 = \frac{2}{12} \sum_{i=1}^{12} P_i \cos\left(\frac{4\pi}{0.12} t_i\right) = +1.417 \\ a_3 = \frac{2}{12} \sum_{i=1}^{12} P_i \cos\left(\frac{6\pi}{0.12} t_i\right) = -5.834 \end{array} \right.$$

$$b_j = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \sin \left(\frac{2j\pi}{\tau} t \right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_1 = \frac{2}{12} \sum_{i=1}^{12} P_i \sin \left(\frac{2\pi}{0.12} t_i \right) = -8.311 \\ b_2 = \frac{2}{12} \sum_{i=1}^{12} P_i \sin \left(\frac{4\pi}{0.12} t_i \right) = +3.608 \\ b_3 = \frac{2}{12} \sum_{i=1}^{12} P_i \sin \left(\frac{6\pi}{0.12} t_i \right) = -2.332 \end{array} \right.$$

الان می‌توان فشار آب را شبیه‌سازی کرد:

$$P(t) = 34.083 - 26.997 \cos 52.36t - 8.311 \sin 52.36t + 1.417 \cos 104.72t \\ + 3.608 \sin 104.72t - 5.834 \cos 157.08t - 2.332 \sin 157.08t + \dots \left[\frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \right]$$



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مہندسی

فصل ۲: تحلیل فوریہ

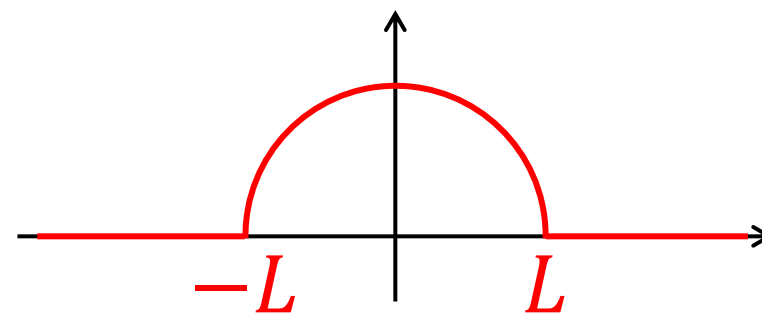
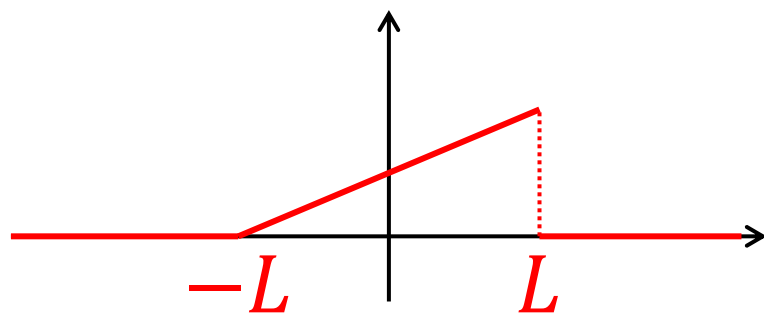
انتگرال فوریہ

توسط: سید محمد جعفری

۱۴- انتگرال فوریه

۱۴-۱- تابع تک پالس (Single Pulse)

تاکنون یاد گرفتیم که چگونه توابع متناوب را با توابع هارمونیک به شکل سری فوریه شبیه‌سازی کنیم. اما تمامی توابع متناوب نیستند و ما باید بتوانیم توابع دیگر را نیز شبیه‌سازی کنیم. یکی از این توابع، تابع تک پالس هستند یعنی تابعی که در بازه $(-\infty, \infty)$ بجز بازه‌ای محدود چون $(-L, L)$ در تمامی دامنه، صفر هستند و فقط در بازه مورد نظر $(-L, L)$ مقدار دارد.



□ اما یک فرض کارآمد می‌تواند این مشکل را حل کند. این فرض کارآمد این است که می‌توانیم این

توابع را متناوب فرض می‌کنیم ولی با دوره تناوب بی‌نهایت یعنی اگر دوره تناوب $T = 2L$ باشد،

در این توابع داریم $L \rightarrow \infty$

□ فقط باید توجه داشت که چون دوباره با انتگرال کار داریم باید شرط انتگرال‌پذیری مطلق

(absolutely integrable) را نیز بیافزائیم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

□ یعنی باید انتگرال روبه‌رو موجود و متناهی باشد:

حال تابع تک پالس $f(x)$ را فرض می‌کنیم و سری فوریه را می‌نویسیم.

ضرایب اویلر را جایگذاری می‌کنیم:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx \right) \cos \frac{n\pi}{L} x + \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \right) \sin \frac{n\pi}{L} x \right] *$$

حال اگر $L \rightarrow \infty$ باشد، داریم:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}{L} = 0$$

□ چون فرض انتگرال پذیری مطلق را داریم، پس صورت کسر متناهی است و مخرج به بی نهایت

میل می کند. پس حد کسر به صفر میل می کند و a_0 حذف می شود: $a_0 = 0$

□ پس جمله اول معادله * حذف می شود و معادله ** پدید می آید.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx \right) \cos \frac{n\pi}{L} x + \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \right) \sin \frac{n\pi}{L} x \right] **$$

حال باید a_n و b_n را بررسی کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \rightarrow \Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{L} \rightarrow \frac{\Delta\omega}{\pi} = \frac{1}{L}$$

با توجه به فرض، معادله $**$ بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-L}^L f(x) \cos \omega_n x \, dx \right) \cos \omega_n x + \left(\frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-L}^L f(x) \sin \omega_n x \, dx \right) \sin \omega_n x \right]$$

می‌توانیم $\Delta\omega$ در معادله قبل را جدا کنیم و آنرا دوباره بازنویسی کنیم:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\pi} \int_{-L}^L f(x) \cos \omega_n x dx \right) \cos \omega_n x + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-L}^L f(x) \sin \omega_n x dx \right) \sin \omega_n x \right] \Delta\omega \quad ***$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F(\omega_n) \Delta\omega$$

عبارت *** را می‌توان بدین شکل خلاصه کرد:

یادداشت: حال اگر L به بی‌نهایت میل کند، عبارت $\Delta\omega$ به سمت صفر میل می‌کند و داریم:

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=1}^n F(\omega_n) \Delta\omega = \int_0^{\infty} F(\omega) d\omega$$

با توجه به نتیجه یادداشت، داریم:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx \right) \cos \omega x + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx \right) \sin \omega x \right] d\omega$$

معادله قبل به **انتگرال فوریه** معروف است. حال برای راحتی یک نام گذاری جدید می کنیم:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx \qquad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] d\omega$$

یادآوری: شرط انتگرال فوریه، انتگرال روبه‌رو باید متناهی باشد: **متناهی** $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx =$

۱۴-۲- قضایای حاکم بر انتگرال فوریه

بیشتر قضایایی که در سری فوریه داشتیم در انتگرال فوریه نیز برقرار است. به طور مثال

۱- طبق قضیه دیریکله، انتگرال فوریه به میانگین حد چپ و راست تابع در هر نقطه میل می کند.

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] d\omega$$

۲- اتحاد پارسوال در انتگرال فوریه بدین شکل است:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = \int_0^{\infty} [A^2(\omega) + B^2(\omega)] d\omega$$

۳- انتگرال فوریه برای توابع نیم دامنه است. در اینجا نیز می‌توان تابع را به صورت زوج (انتگرال فوریه کسینوسی) و فرد (انتگرال فوریه سینوسی) گسترش دهیم.

پس اگر تابع تک پالس $f(x)$ در بازه $[0, L]$ مقدار داشته باشد، خواهیم داشت:

$$f(x) \text{ کسینوسی فوریه انتگرال} = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega x d\omega$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x dx$$

$$f(x) \text{ سینوسی فوریه انتگرال} = \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega x d\omega$$

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x dx$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

فصل ۲: تحلیل فوریه

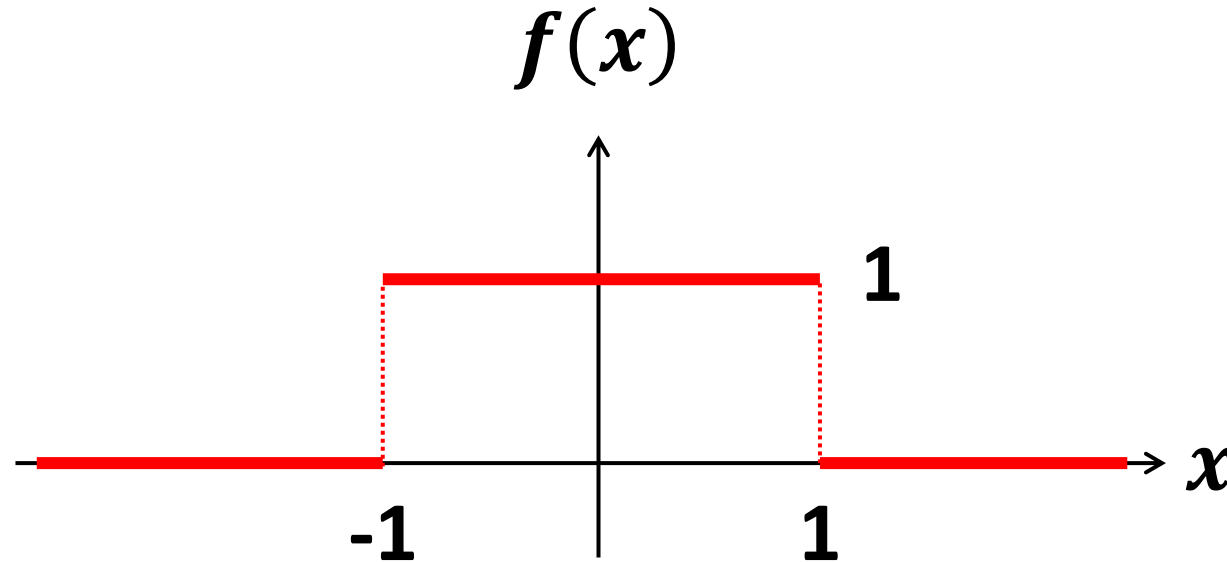
مثال برای انتگرال فوریه

توسط: سید محمد جعفری

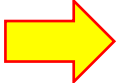
مثال: انتگرال فوریۀ تابع زیر را بدست آورید:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

پاسخ:



با رسم تابع می‌توان دریافت که این تابع زوج است و مساحت زیر نمودار آن محدود یا متناهی است.

$f(x)$ is Even:  $B(\omega) = 0$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos \omega x \, dx = \frac{1}{\pi} \times \left. \frac{\sin \omega x}{\omega} \right|_{-1}^1 = \frac{2 \sin \omega}{\pi \omega}$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2 \sin \omega}{\pi \omega} \cos \omega x \, d\omega \quad \blacksquare$$

□ حال همانطور که در سری فوریه با جایگذاری x چند سری را بدست آوردیم؛ در اینجا نیز با

جایگذاری به جای x و با استفاده از قضیه دیریکله جواب چند انتگرال را می‌یابیم.

□ برای اینکار $x = 0$ و $x = 1$ را انتخاب می‌کنیم.

$$x = 0 \rightarrow \frac{f^-(0) + f^+(0)}{2} = \int_0^{\infty} \frac{2 \sin \omega}{\pi \omega} \cos 0 \, d\omega$$

$$f^-(0) = f^+(0) = 1$$

$$\int_0^{\infty} \frac{2 \sin \omega}{\pi \omega} \, d\omega = 1 \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \, d\omega = \frac{\pi}{2} \quad \blacksquare$$

□ با استفاده از انتگرال فوریه توانستیم یک انتگرال جالب را به دست آوریم.

□ حال با فرض $x = 1$ داریم:

$$x = 0 \rightarrow \frac{f^-(1) + f^+(1)}{2} = \int_0^{\infty} \frac{2 \sin \omega}{\pi \omega} \cos \omega \times 1 d\omega$$

$$\frac{1}{2} = \int_0^{\infty} \frac{2 \sin \omega \cos \omega}{\pi \omega} d\omega$$

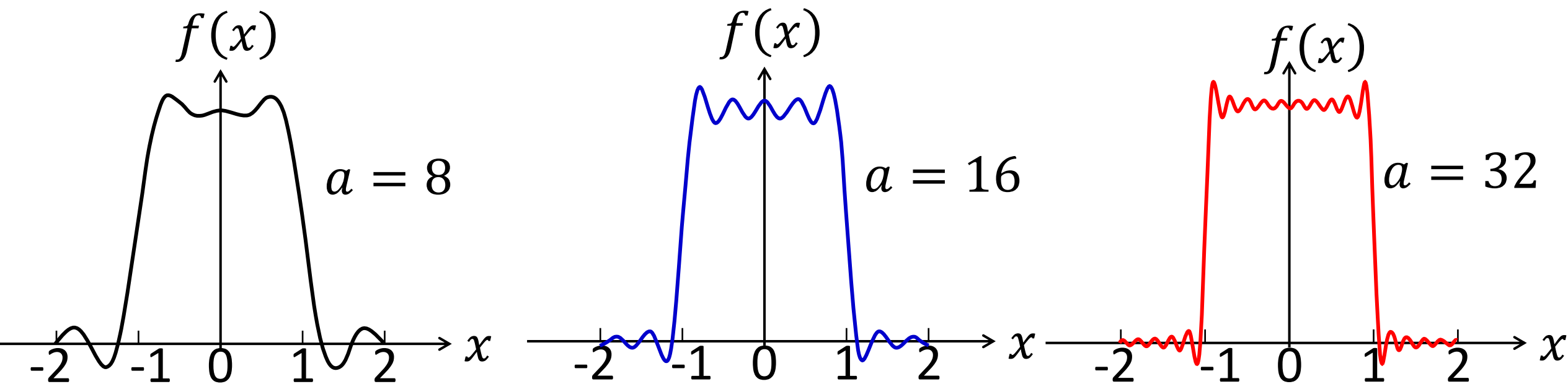
$$2 \sin \omega \cos \omega = \sin 2\omega \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin 2\omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$$

□ نکته دیگر این است که انتگرال فوریه نیز مانند سری فوریه برای تقریب به کار می‌رود.

□ یعنی می‌توان نوشت:

$$f(x) \approx \int_0^a [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] d\omega$$

لذا هرچه a بزرگتر باشد، تقریب خطای کمتری دارد. در این پرسش با جایگذاری a و رسم نمودار داریم:



مثال: انتگرال فوریۀ تابع دلتای دیراک را بدست آورید:

□ انتگرال این تابع محدود و متناهی است

□ مهمترین خاصیت این تابع بدین شکل است:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cos \omega x dx = \frac{1}{\pi} \cos(\omega \times 0) = \frac{1}{\pi}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \sin \omega x dx = \frac{1}{\pi} \sin(\omega \times 0) = 0$$

پس می‌توان تابع ضربه یا دلتای دیراک را بدین صورت نوشت:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega x d\omega \quad \blacksquare$$

مثال: انتگرال‌های فوریه سینوسی و کسینوسی تابع روبه‌رو را بدست آورید:

ابتدا باید شرایط این تابع را بررسی کنیم:

$$f(x) = e^{-kx} \quad x > 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} dx = \left. \frac{e^{-kx}}{-k} \right|_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{k} = \frac{1}{k}$$

پس دارای انتگرال فوریه است. در ابتدا انتگرال فوریه کسینوسی:

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-kx} \cos \omega x dx = \frac{2k}{\pi(k^2 + \omega^2)}$$

نکته: بعدها با استفاده از تبدیل لاپلاس این دو انتگرال را اثبات خواهیم کرد:

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} \cos \omega x dx = \frac{k}{k^2 + \omega^2} \quad \int_0^{\infty} e^{-kx} \sin \omega x dx = \frac{\omega}{k^2 + \omega^2}$$

$$f(x) = e^{-kx} \text{ تابع } \text{انتگرال فوریۀ کسینوسی} = \int_0^{\infty} \frac{2k}{\pi(k^2 + \omega^2)} \cos \omega x \, dx \quad \blacksquare$$

برای انتگرال فوریۀ سینوسی نیز داریم:

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-kx} \sin \omega x \, dx = \frac{2\omega}{\pi(k^2 + \omega^2)}$$

$$f(x) = e^{-kx} \text{ تابع } \text{انتگرال فوریۀ سینوسی} = \int_0^{\infty} \frac{2\omega}{\pi(k^2 + \omega^2)} \sin \omega x \, dx \quad \blacksquare$$

مثال: انتگرال زیر را اثبات کنید.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x + \omega \sin \omega x}{1 + \omega^2} d\omega = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \\ \pi e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

در اینگونه مسائل که از ما اثبات انتگرال بخواهند باید از قضیه دیریکله استفاده کنیم و با فرض آنکه تابع مورد نظر عبارت سمت راست باشد، انتگرال فوریه را می‌نویسیم و اینگونه مسأله به پاسخ می‌رسد.

در این پرسش، تابع مورد نظر بدین شکل است:

$$f(x) = \begin{cases} \pi e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

حال ضرایب سری فوریه را می نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \pi e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \pi e^{-x} \cos \omega x \, dx = \frac{1}{1 + \omega^2} \\ B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \pi e^{-x} \sin \omega x \, dx = \frac{\omega}{1 + \omega^2} \end{cases}$$

قضیه دیریکله:

$$\frac{f^-(x) + f^+(x)}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x + \omega \sin \omega x}{1 + \omega^2} d\omega = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \\ \pi e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

مثال: با توجه به انتگرال فوریۀ تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| > 1 \\ 0 & |x| < 1 \end{cases}$$

حاصل انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sin^2 \omega}{2\omega^2} d\omega$ را بیابید.

انتگرال فوریۀ این تابع را قبلاً به دست آوردیم:

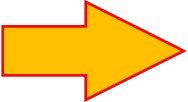
$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| > 1 \\ 0 & |x| < 1 \end{cases} \text{ انتگرال فوریۀ } = \int_0^\infty \frac{2 \sin \omega}{\pi \omega} \cos \omega x d\omega$$

□ نکته: توان صورت و مخرج انتگرال خواسته شده، دو برابر انتگرال سری فوریه تابع است.

□ پس باید از اتحاد پارسوال استفاده کنیم:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2 dx = \int_0^{\infty} \left(\frac{2 \sin \omega}{\pi \omega} \right)^2 d\omega$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 1 dx = \int_0^{\infty} \frac{4 \sin^2 \omega}{\pi^2 \omega^2} d\omega \rightarrow \frac{2}{\pi} = \int_0^{\infty} \frac{4 \sin^2 \omega}{\pi^2 \omega^2} d\omega$$


$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \omega}{2\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{4} \blacksquare$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مہندسی

فصل ۲: تحلیل فوریہ

تبدیلات انتگرالی

توسط: سید محمد جعفری

۱- تبدیل انتگرالی (Integral transform)

□ در معادلات دیفرانسیل تمام سر و کار ما با مشتق و انتگرال است و باید بتوانیم از معادله دیفرانسیل، مشتق را حذف کرده و تابع اصلی را به دست آوریم.

□ برای این کار باید رابطه‌ای بین مشتق و تابع آن بیابیم. در حالی که این روابط عمومی نیستند

برای مثال مشتق تابع متعالی $y = \ln x$ برابر با تابعی جبری چون $y' = 1/x$ است و

نمی‌توان رابطه‌ای بین این دو یافت. این گونه مسائل حل معادلات دیفرانسیل را سخت می‌کند.

۱- تبدیل انتگرالی (Integral transform)

- حال اگر بتوانیم کاری کنیم که بین مشتق و تابع، رابطه‌ای کلی وجود داشته باشد؛ آنگاه معادلات دیفرانسیل را می‌توان راحت‌تر حل کرد.
- برای اینکار از تبدیلات انتگرالی استفاده می‌شود.
- تبدیلات انتگرالی عملگرهایی هستند که با تغییر متغیر، آگاهانه یک تابع را به تابعی دیگر با متغیری دیگر به صورت یک به یک نسبت می‌دهد که این تابع جدید با مشتق خود یک رابطه کلی دارد.

□ شکل کلی تبدیل انتگرالی تابع $f(x)$ بدین صورت است:

$$f(x) \text{ تابع} : (Tf)(u) = \int_{t_1}^{t_2} K(t, u) f(t) dt$$

Tf : تبدیل یافته تابع

K : هسته تبدیل

u : ویژگی و متغیر اصلی تبدیل

t : هر متغیری می تواند باشد

□ تبدیلات فوریه و لاپلاس از معروفترین تبدیلات انتگرالی اند:

در کل تبدیلات انتگرالی باید سه خاصیت زیر را داشته باشند:

1. این تبدیلات به علت استفاده از انتگرال خاصیت خطی دارند.

$$T(af + bg) = a(Tf) + b(Tg) = aF + bG$$

2. این تبدیلات رابطه مشتق را آسان کرده و بر حسب خود تابع به دست می‌آورند.

3. این تبدیلات یک به یک بوده و قابلیت برگشت دارند.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مہندسی

فصل ۲: تحلیل فوریہ

تبدیل فوریہ

توسط: سید محمد جعفری

۲- تبدیل فوریه

پیشتر برای سری فوریه، شکل مختلط به دست آوریم. حال این کار را برای انتگرال فوریه نیز انجام می‌دهیم.

$$f(x) = a_0 + \sum a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x \quad \text{سری فوریه:}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i \frac{n\pi}{L} x} \quad \text{سری فوریه مختلط:}$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] d\omega \quad \text{انتگرال فوریه:}$$

بر اساس انتگرال فوریه، عبارت‌های $\sin \omega x$ و $\cos \omega x$ را به صورت نمایی جایگزین می‌کنیم:

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left[A(\omega) \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2} + B(\omega) \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2} \right] d\omega$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left\{ \left[\frac{A(\omega) - iB(\omega)}{2} \right] \frac{e^{i\omega x}}{2} + \left[\frac{A(\omega) + iB(\omega)}{2} \right] \frac{e^{-i\omega x}}{2} \right\} d\omega$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

$$C(\omega) = \frac{A(\omega) - iB(\omega)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} d\omega$$

□ همانطور که مشاهده می‌شود بین $f(x)$ و $C(\omega)$ یک رابطه‌ی یکی به یک وجود دارد که می‌تواند ایده‌ی جالبی برای یک تبدیل باشد.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega x} d\omega \qquad C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} d\omega$$

□ در اینجا می‌توان فرض کرد که $C(\omega)$ تبدیل یافته‌ی $f(x)$ است و این تبدیل را **تبدیل فوریه (Fourier transform)** می‌نامیم.

□ در برخی مراجع ضریب این تبدیل را به صورت‌های دیگر می‌نویسند ولی در کل، ضریب تبدیل فوریه و تبدیل فوریه معکوس باید به صورتی باشد که ضرب آنها $1/2\pi$ باشد. پس می‌توان تبدیل فوریه را بدین صورت تعریف کرد:

$$\mathcal{F}[f(x)] = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx$$

تبدیل فوریه:

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} F(\omega) d\omega$$

تبدیل فوریه معکوس:

□ البته این را هم باید ذکر کرد که چون در تبدیل فوریه با انتگرال ناسره سر و کار داریم، پس باید تابع

مورد نظر انتگرال پذیر مطلق و پیوسته تکه‌ای باشد تا بتوان انتگرال آن را محاسبه کرد.

□ در اینجا هسته تبدیل یک تابع نمایی است و این نمایی بودن تابع، بعداً به ما کمک می‌کند تا با

استفاده از روش جزء به جزء برای تبدیل مشتق تابع و تبدیل خود تابع یک رابطه پیدا کنیم تا شرط

تبدیل بودن رعایت شود.

□ تبدیل فوریه، فضای کاری ما را از بُعد x به بُعد ω انتقال می‌دهد و اگر به تابع نمائی $e^{i\omega x}$ توجه کنیم خواهیم دید که حاصل ضرب ωx باید بی‌بُعد باشد زیرا آرگومان تابع نمائی و هر تابعی که بسط تیلور دارد، اگر بی‌بُعد نباشد از لحاظ فیزیکی درست نخواهد بود.

□ پس بُعد ω معکوس بُعد x است برای مثال اگر x زمان (S) باشد بُعد ω ، $1/S$ یا همان فرکانس خواهد بود. اگر بُعد x مکان (m) باشد، بُعد ω ، $1/m$ یا همان عدد موج خواهد بود.

$$x(s) \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} \omega \left(\frac{1}{s} \right) \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{فرکانس:}$$

$$x(m) \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} \omega \left(\frac{1}{m} \right) \quad \omega = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{عدد موج:}$$

□ برای مثال اگر یک پالس (سیگنال) متشکل از مجموع چند تابع هارمونیک را تحت تبدیل فوریه قرار دهیم، آن را به فرکانس‌های تشکیل‌دهنده آن تجزیه خواهد کرد.

□ البته دامنه تبدیل فوریه $(-\infty, \infty)$ است و این دامنه مناسب متغیر زمان نیست. برای متغیر زمان باید دامنه $(0, \infty)$ باشد.

برای این امر می‌توانیم سه کار انجام دهیم:

۱- اول اینکه قسمت منفی را صفر در نظر بگیریم، برای قسمت مثبت تبدیل فوریه بنویسیم

۲- قسمت منفی را می‌توانیم به دو صورت زوج و فرد گسترش دهیم و با فرض زوج و فرد بودن آن می‌توان دو تبدیل جدید به دست آورد.

با فرض زوج بودن داریم:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx$$

$$F(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x dx$$

بدین ترتیب تبدیل به دست آمده را تبدیل فوریه کسینوسی می‌نامند و برای فرض فرد بودن نیز تبدیل فوریه سینوسی حاصل خواهد شد.

معادلات تبدیل فوریۀ زوج و فرد بدین شکل هستند:

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{F}_C(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{F}_C(\omega) \cos \omega x \, d\omega \end{aligned} \right.$$

تبدیل فوریۀ کسینوسی (زوج) و معکوس آن:

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{F}_S(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{F}_S(\omega) \sin \omega x \, d\omega \end{aligned} \right.$$

تبدیل فوریۀ سینوسی (فرد) و معکوس آن:

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

فصل ۲: تحلیل فوریه

مثال برای تبدیل فوریه

توسط: سید محمد جعفری

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

مثال: تبدیل فوریۀ تابع روبه رو را بیابید.

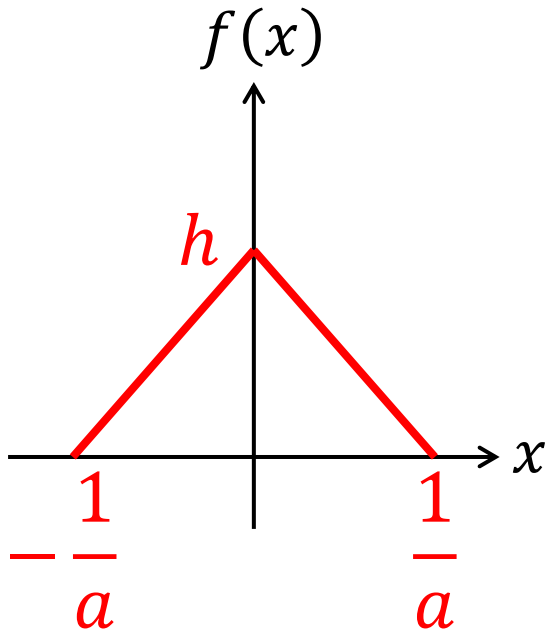
این تابع انتگرال پذیر است، پس می توان برای آن تبدیل فوریه نوشت:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{i\omega} \right) e^{-i\omega x} \Big|_{-a}^a$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{i\omega} \right) (e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \omega a}{\omega} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega a}{\omega} \quad \blacksquare$$

مثال: تبدیل فوریۀ پالس مثلثی روبه رو را بیابید.



$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{1}{a} \\ h(1 - a|x|) & |x| < \frac{1}{a} \end{cases}$$

چون تابع زوج است، می توان آن را به صورت ساده تر زیر نوشت:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx - \underbrace{\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx}_0$$

عبارت قبل همان تبدیل فوریۀ کسینوسی می شود:

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{1}{a}} h(1 - ax) \cos \omega x \, dx$$

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{h \sin \omega x}{\omega} - \frac{xha \sin \omega x}{\omega} - \frac{ha \cos \omega x}{\omega^2} \right]_0^{\frac{1}{a}}$$

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{ha}{\omega^2} \left(1 - \cos \frac{\omega}{a} \right)$$

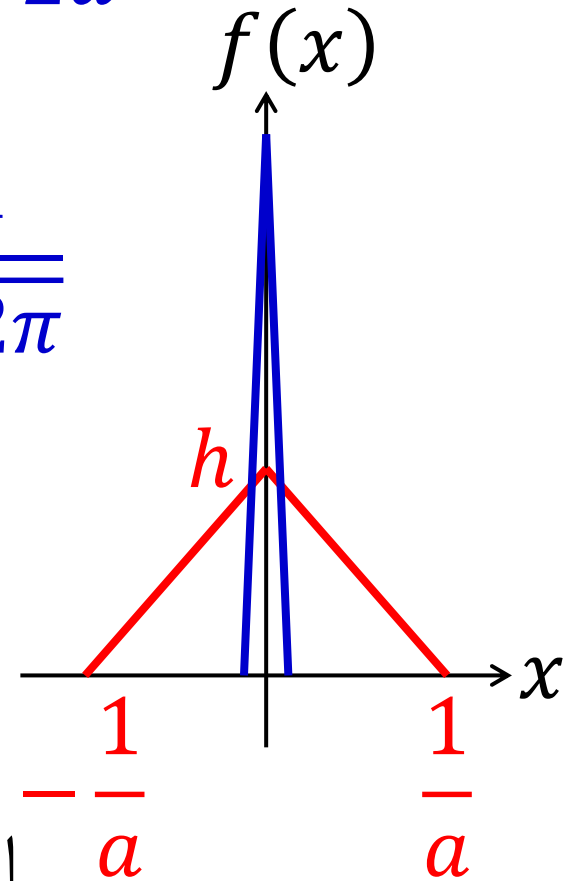
حال اگر $a \rightarrow \infty$ و $h = a$ باشد، در این صورت $\cos \frac{\omega}{a}$ را می‌توان با بسط مک لوران بدین صورت

تقریب زد:

$$a \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\omega}{a} \rightarrow 0 \Rightarrow \cos \frac{\omega}{a} \cong 1 - \frac{\omega^2}{2a^2} \Rightarrow 1 - \cos \frac{\omega}{a} \cong \frac{\omega^2}{2a^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{ha}{\omega^2} \left(1 - \cos \frac{\omega}{a}\right) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{ha}{\omega^2} \frac{\omega^2}{2a^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \blacksquare$$



این تابع، تبدیل فوریۀ یک تابع $f(x)$ ای است که $h = a$ و $a \rightarrow \infty$ باشد

حال اگر بخواهیم $f(x)$ را بیابیم، از تبدیل فوریۀ معکوس بدین صورت استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega$$

مشاهده می‌شود که اگر $a \rightarrow \infty$ در این صورت تابع $f(x)$ به تابع دلتای دیراک میل می‌کند بویژه

اگر $h = a$ باشد. در این صورت مساحت زیر نمودار تابع برابر خواهد بود با:

$$S = \frac{1}{2} \times h \times \frac{2}{a} = \frac{h}{a} \quad (h = a) \rightarrow S = 1$$

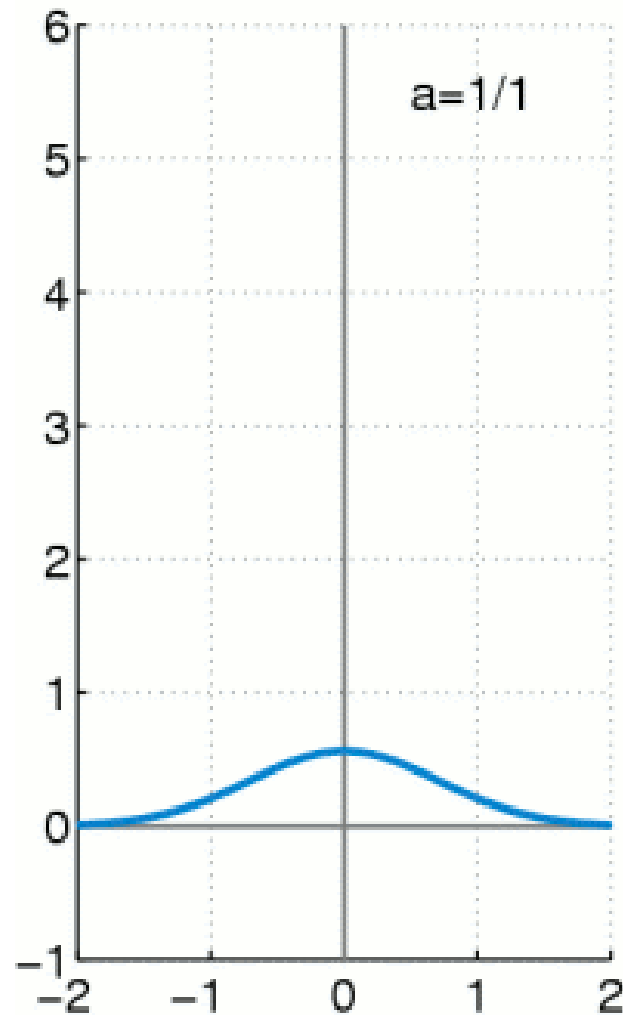
□ همچنین مساحت زیر نمودار تابع دلتای دیراک ۱ است.

□ پس می‌توان این تابع را تعریفی برای تابع دلتای دیراک در نظر گرفت:

$$f(x) = \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{2\pi} d\omega$$

اگر تابع دلتای دیراک در زمان $x_0 \neq 0$ باشد، تعریف تابع بدین شکل خواهد بود:

$$\delta(x - x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(x-x_0)}}{2\pi} d\omega$$

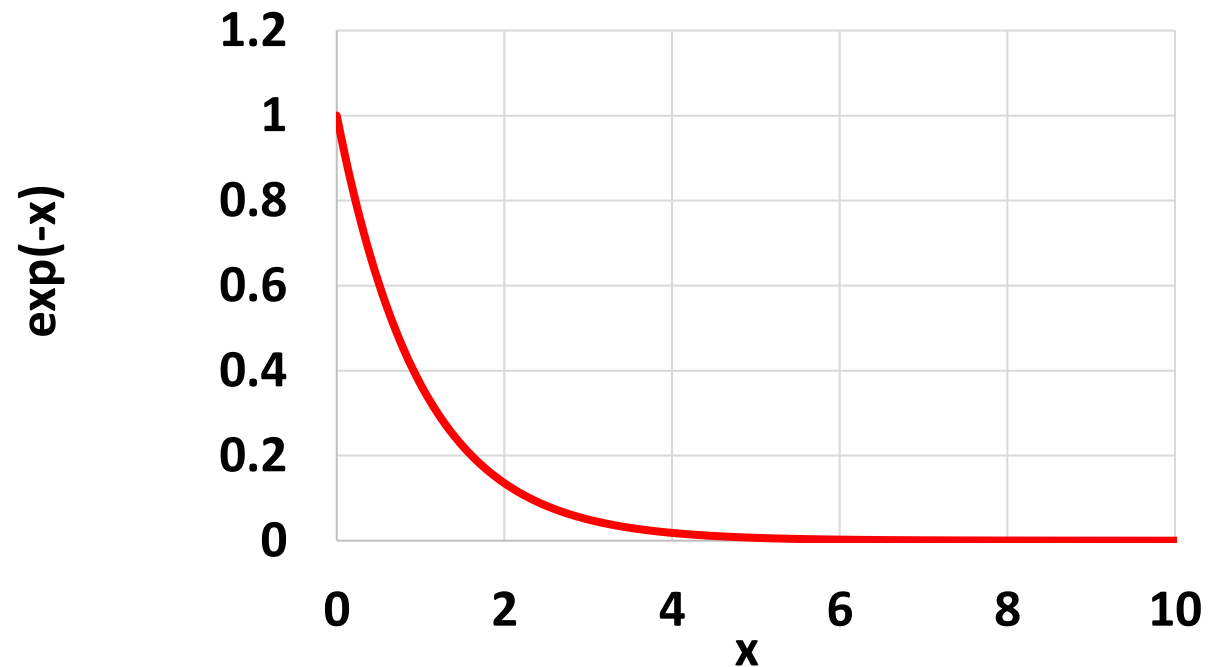


مثال: تبدیل فوریۀ سینوسی تابع $f(x) = e^{-x}$ را یافته و مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{1+x^2} dx$ را بیابید.

چون مساحت زیر نمودار $f(x) = e^{-x}$ در بازۀ $(0, +\infty)$ متناهی است، پس می‌توان برای آن تبدیل فوریۀ سینوسی نوشت:

$$\hat{F}_S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} \sin \omega x dx$$

$$\hat{F}_S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{1 + \omega^2} \quad \blacksquare$$



حال دوباره تبدیل فوریه سینوسی معکوس می گیریم:

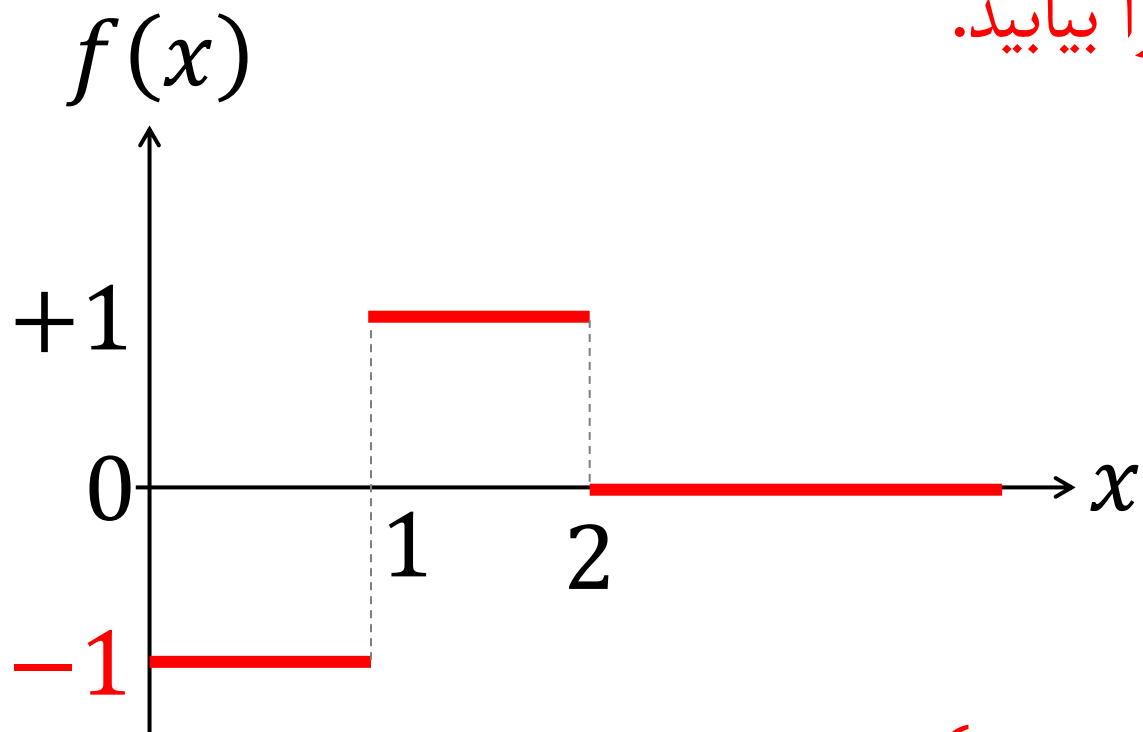
$$e^{-x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{1 + \omega^2} \sin \omega x d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega x}{1 + \omega^2} d\omega$$

در اینجا اگر قرار دهیم $x = m$ ، داریم:

$$e^{-m} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin m\omega}{1 + \omega^2} d\omega \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin m\omega}{1 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-m}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m} \quad \blacksquare$$

مثال: تبدیل فوریۀ کسینوسی تابع روبه رو را بیابید.



$$f(x) = \begin{cases} -1 & 0 < x < 1 \\ +1 & 1 < x < 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases}$$

این تابع نیز مطلقاً انتگرال پذیر است، پس می توانیم تبدیل فوریه کسینوسی برای آن بنویسیم:

$$\hat{F}_C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^1 (-1) \cos \omega x \, dx + \int_1^2 (1) \cos \omega x \, dx + \int_2^{\infty} 0 \times \cos \omega x \, dx \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin 2\omega - 2 \sin \omega}{\omega} \right) \quad \blacksquare$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

فصل ۲: تحلیل فوریه

قضایای تبدیل فوریه

توسط: سید محمد جعفری

۳- قضایای تبدیل فوریه

$$\mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx = F(\omega)$$

فرض ابتدایی در همه قضایا:

۳-۱- تبدیل فوریه مشتق

اگر تابع $f(x)$ ، n بار مشتق‌پذیر باشد و داشته باشیم:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} f'(x) = \dots = \lim_{|x| \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = 0$$

می‌توان نوشت:

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f'(x) dx = -\frac{e^{-i\omega x}}{\sqrt{2\pi}} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx$$

چون شرط $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ برقرار است، پس عبارت اول صفر می‌شود و خواهیم داشت:

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx = i\omega \mathcal{F}[f(x)] \rightarrow \mathcal{F}\left(\frac{df}{dx}\right) = i\omega F(\omega)$$

و به این ترتیب رابطه تبدیل مشتق و تبدیل خود تابع به دست می‌آید و این رابطه است که حل معادلات دیفرانسیل را ساده می‌کند.

$$\mathcal{F} \left[\frac{d^n}{dx^n} f(x) \right] = (i\omega)^n F(\omega)$$

برای مشتق‌های مرتبه بالاتر نیز داریم:

به همین ترتیب می‌توان برای تبدیل فوریه کسینوسی و سینوسی نیز روابطی را بدین شکل نوشت:

$$\hat{\mathcal{F}}_C[f'(x)] = \omega \hat{F}_S(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) \qquad \hat{\mathcal{F}}_S[f'(x)] = -\omega \hat{F}_C(\omega)$$

توجه: در مشتق اول تبدیل سینوسی به کسینوسی و بالعکس تبدیل می‌شود که کمی مناسب به نظر نمی‌آید. ولی در مشتق دوم داریم:

$$\hat{\mathcal{F}}_C[f''(x)] = -\omega^2 \hat{F}_C(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0) \qquad \hat{\mathcal{F}}_S[f''(x)] = -\omega^2 \hat{F}_S(\omega) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega f(0)$$

یکی از راه‌های به دست آوردن تبدیل فوریه این است که تابع مورد نظر را به صورت جواب یک معادله دیفرانسیل فرض می‌کنیم و با استفاده از تبدیل فوریه مشتق می‌توانیم تبدیل فوریه تابع را به دست آوریم.

مثال: تبدیل فوریه کسینوسی $f(x) = e^{-\frac{x}{3}}$ را بیابید. پاسخ: ابتدا معادله دیفرانسیلی را می‌یابیم که جواب آن $e^{-\frac{x}{3}}$ باشد.

$$f(x) = e^{-\frac{x}{3}} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} \rightarrow f''(x) = \frac{1}{9}e^{-\frac{x}{3}} = \frac{1}{9}f(x) \rightarrow 9f'' = f$$

از مشتق اول نیز می‌توانستیم استفاده کنیم اما در تبدیل فوریه کسینوسی مشتق اول، تبدیل فوریه سینوسی نیز ظاهر می‌شد!!

$$9f'' = f \rightarrow 9 \left[-\omega^2 \hat{F}_C(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0) \right] = \hat{F}_C(\omega)$$

$$f(x) = e^{-\frac{x}{3}} \rightarrow f'(0) = -\frac{1}{3} \rightarrow 9 \left[-\omega^2 \hat{F}_C(\omega) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{1}{3} \right] = \hat{F}_C(\omega)$$

حال کافی است این معادله را بر حسب $\hat{F}_C(\omega)$ حل کنیم:

$$-9\omega^2 \hat{F}_C(\omega) + 3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \hat{F}_C(\omega) \rightarrow (1 + 9\omega^2) \hat{F}_C(\omega) = 3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rightarrow \hat{F}_C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{3}{1 + 9\omega^2} \quad \blacksquare$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^x f(t) dt \right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \left[\int_{-\infty}^x f(t) dt \right] dx \\
&= -\frac{1}{i\sqrt{2\pi}\omega} \int_{-\infty}^x f(t) dt e^{-i\omega x} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\omega} f(x) e^{-i\omega x} dx \\
&= -\frac{1}{i\sqrt{2\pi}\omega} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \underbrace{e^{-\infty}}_0 - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt e^{+\infty}}_0 \right] + \frac{1}{i\omega} \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx}_{F(\omega)} \\
\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^x f(t) dt \right] &= \frac{1}{i\omega} F(\omega)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^x f(t) dt \right] = \frac{1}{i\omega} F(\omega) + C\delta(\omega)$$

نکته: برای مشکل در $\omega = 0$ از تابع دلتای دیراک استفاده می‌کنیم:

C مقداری دلخواه است که بیشتر به صورت $C = \pi F(0)$ در نظر گرفته می‌شود.

۳-۳- تبدیل فوریۀ انتگرال

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(ax) dx$$

$$ax = y \rightarrow \frac{y}{a} = x, dx = \frac{1}{a} dy$$

تغییر متغیر

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\omega}{a}y} f(y) \frac{dy}{a}$$



$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

۳-۴- مشتق تبدیل فوریه حال می‌خواهیم از تبدیل فوریه مشتق بگیریم:

$$\frac{d}{d\omega} F(\omega) = \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(ax) dx \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -ix e^{-i\omega x} f(ax) dx = -i\mathcal{F}[xf(x)]$$



$$\mathcal{F}[xf(x)] = i \frac{d}{d\omega} F(\omega)$$



$$\mathcal{F}[x^n f(x)] = i^n \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$$

برای مشتق‌های بالاتر داریم:

از رابطه قبل می‌توان به معادله جالب زیر دست یافت:

$$\mathcal{F}[xf(x)] = i \frac{d}{d\omega} F(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} xf(x) = i\mathcal{F}^{-1}[F'(\omega)]$$

یعنی اگر $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$ را بخواهیم، کافی است تبدیل فوری معکوس مشتق $F(\omega)$ را به

$$f(x) = \frac{i}{x} \mathcal{F}^{-1}[F'(\omega)]$$

دست آوریم و در $\frac{i}{x}$ ضرب کنیم. این روش برای توابعی مناسب است که مشتق راحتی دارند.

۳-۵- انتگرال فوریه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx \right] \right\} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} d\omega \right) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{e^{-i\omega x}}{x} dx = \mathcal{F} \left[\frac{f(x)}{x} \right] \longrightarrow \mathcal{F} \left[\frac{f(x)}{x} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) d\omega$$

$$f(x) = x \mathcal{F}^{-1} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) d\omega \right]$$

یعنی اگر $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$ را بخواهیم، کافی است ابتدا از آن انتگرال و سپس فوریه معکوس

بگیریم و در x ضرب کنیم. این روش برای توابعی که انتگرال راحتی دارند، مناسب است.

□ انتقال زمانی: در این صورت اگر تابع $f(x)$ در حوزه خود به اندازه a انتقال یابد، تبدیل فوریه آن بدین گونه خواهد بود:

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x-a) dx$$

تغییر متغیر: $y = x - a \rightarrow x = y + a, dx = dy$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(y+a)} f(y) dy = e^{-i\omega a} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega y} f(y) dy = e^{-i\omega a} F(\omega)$$

یعنی اگر در حوزه زمان به اندازه a انتقال دهیم، در تبدیل فوریه عبارت $e^{-i\omega a}$ ضرب می‌شود.

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = e^{-i\omega a} F(\omega)$$

□ انتقال فرکانسی: در انتقال فرکانسی در اصل در تابع عبارت $e^{ia\omega}$ ضرب می‌شود و در این صورت داریم:

$$\mathcal{F}[e^{iax} f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{iax} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(\omega-a)} f(x) dx$$

یعنی اگر در $f(x)$ ضرب شود، تبدیل فوریه آن در حوزه فرکانس به اندازه a انتقال می‌یابد.

$$\mathcal{F}[e^{iax} f(x)] = F(\omega - a)$$

قبلاً با ضرب پیچشی دو تابع بدین صورت آشنا شدیم:

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx$$

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(t-x)dx = g * f$$

در مورد خواص پیچش می توان گفت:

عضو خنثی در انتگرال پیچشی، تابع دلتای دیراک است: $f * \delta = f$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f * g dx = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx \right]$$

و همچنین داریم:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f(x)] \times \mathcal{F}[g(x)] = \sqrt{2\pi} F(\omega) G(\omega) \\ \mathcal{F}^{-1}[F(\omega) G(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] * \mathcal{F}^{-1}[G(\omega)] = f * g \end{cases}$$

در تبدیل فوریه نیز می توان اثبات کرد

$$\begin{cases} \mathcal{F}(f \cdot g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\omega) G(\omega) \\ \mathcal{F}^{-1}[F(\omega) * G(\omega)] = \sqrt{2\pi} f \cdot g \end{cases}$$

این قضیه بدین صورت نیز برقرار است:

با استفاده از قضیه پیچش می‌توان قضیه اتحاد پارسوال برای تبدیل فوریه را نیز اثبات کرد.

$$\sqrt{2\pi} f * g = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt$$

→ $x = 0$ حال قرار می‌دهیم → $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega) d\omega$

از طرفی می‌توان نوشت: $\mathcal{F}^{-1}[\bar{f}(-x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(-x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x) e^{i\omega x} dx = \bar{\mathcal{F}}[f(x)]$

بنابر این با جایگذاری $g(t) = \bar{f}(-t)$ خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{f}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \bar{F}(\omega) d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

و در نتیجه اتحاد پارسوال بدین صورت به دست می‌آید:

برای تبدیل سینوسی و کسینوسی نیز داریم:

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_0^{\infty} |\hat{F}_C(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} |\hat{F}_S(\omega)|^2 d\omega$$

۳-۸- خاصیت دوگانگی (Duality property)

خاصیت دوگانگی با دو تبدیل فوری به دست می‌آید:

$$\mathcal{F}[f(x)] = F(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow x} \mathcal{F}[F(x)] = 2\pi f(-\omega)$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

فصل ۲: تحلیل فوریه

مثال برای قضایای تبدیل فوریه

توسط: سید محمد جعفری

مثال ۱: تبدیل فوریۀ تابع ضربه را بیابید.

پاسخ:

$$\mathcal{F}[\delta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega 0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x} d\omega$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega \quad \blacksquare$$

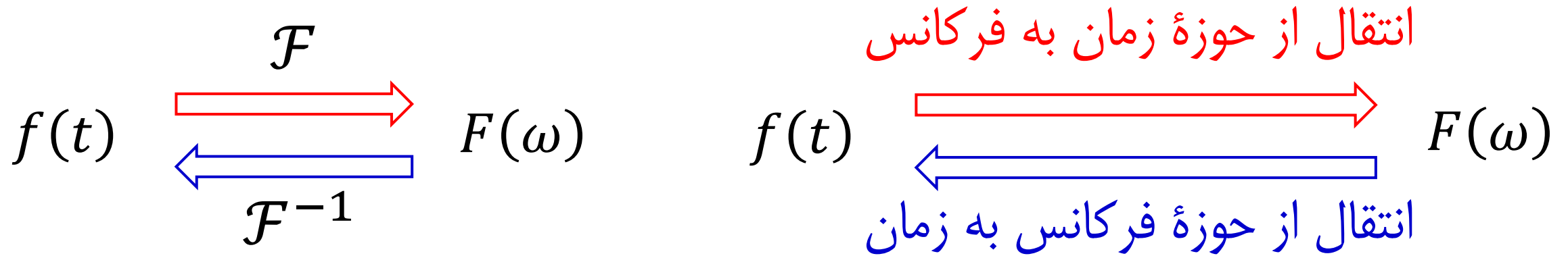
مثال ۲: تبدیل فوریۀ تابع $\cos(\omega_0 x)$ را بیابید.

پاسخ:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\cos(\omega_0 x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 x) e^{-i\omega x} dx \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (e^{i\omega_0 x} + e^{-i\omega_0 x}) e^{-i\omega x} dx \\&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega + \omega_0)x} dx \right] \\&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} [2\pi\delta(\omega - \omega_0) + 2\pi\delta(\omega + \omega_0)] \\&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad \blacksquare\end{aligned}$$

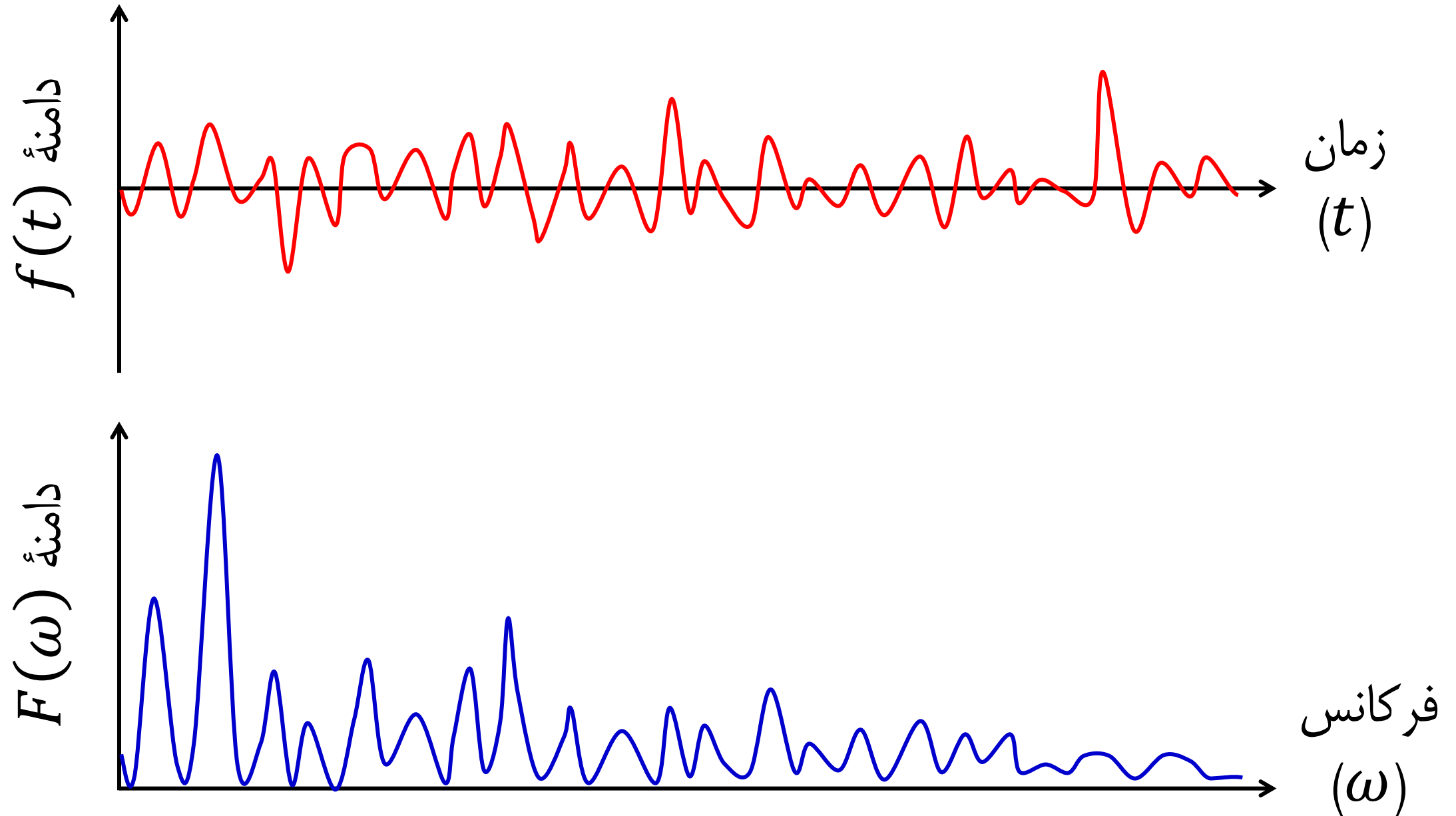
❖ تحلیل تبدیل فوریۀ سیگنال در حوزهٔ زمان و فرکانس

$$\mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = F(\omega)$$



$$\begin{aligned} F(\omega) &= \text{Re}[F(\omega)] + i \text{Im}[F(\omega)] = |F(\omega)| e^{i\angle F(\omega)} \\ &= |F(\omega)| e^{i\theta} = |F(\omega)| (\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned}$$

❖ ادامهٔ تحلیل تبدیل فوریۀ سیگنال در حوزهٔ زمان و فرکانس



مثال ۳: تبدیل فوریۀ تابع $f(t) = e^{-at}$ $a > 0$ را بیابید و آن را از نظر مقدار و

زاویۀ فاز تحلیل کنید.

$$\mathcal{F}[e^{-at}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt$$

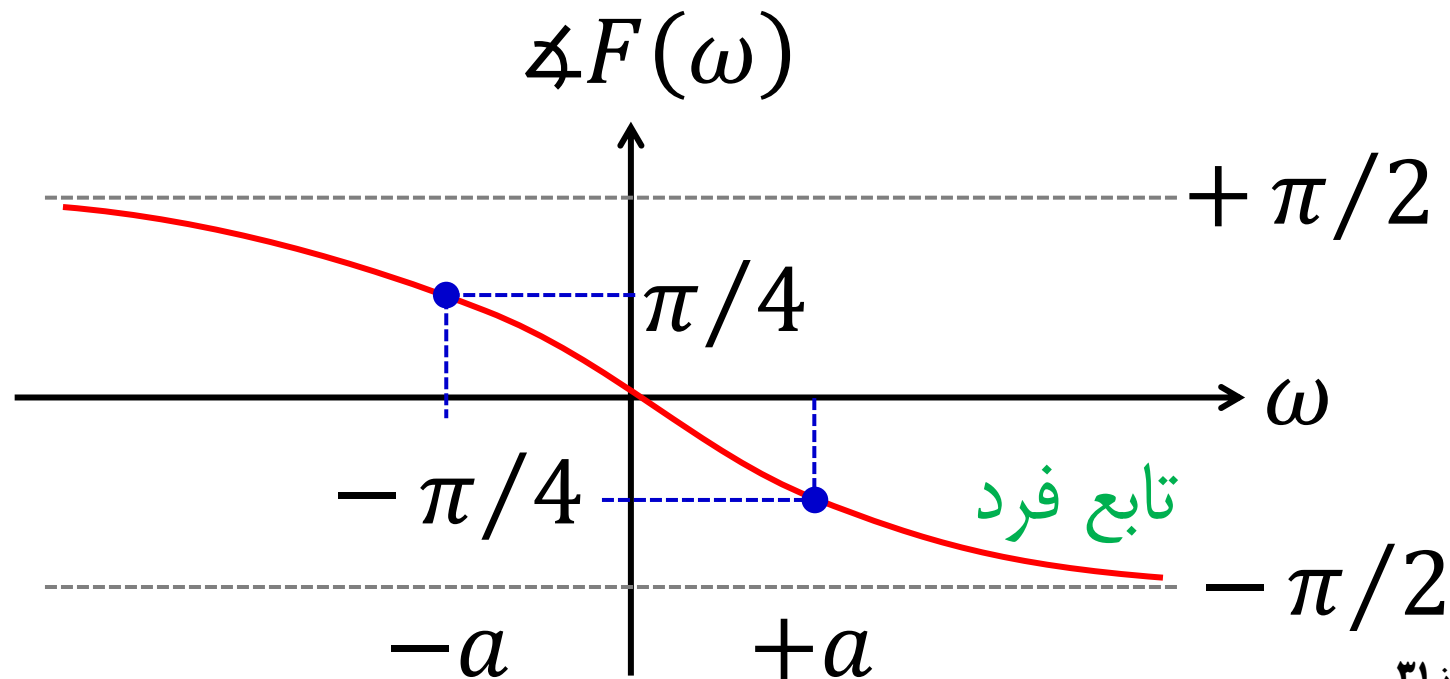
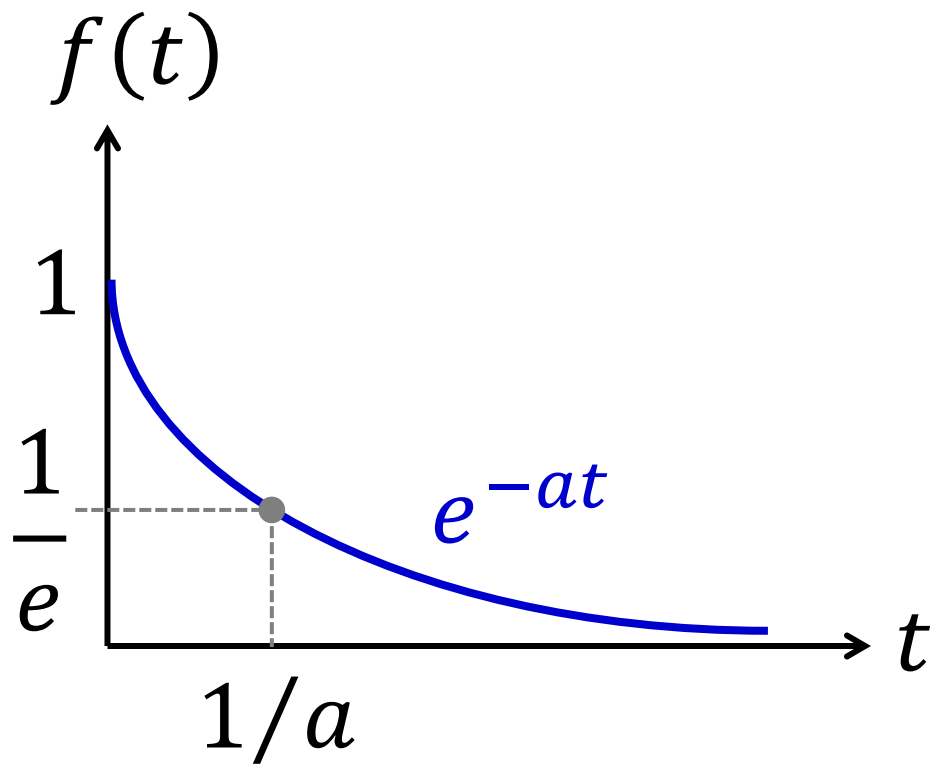
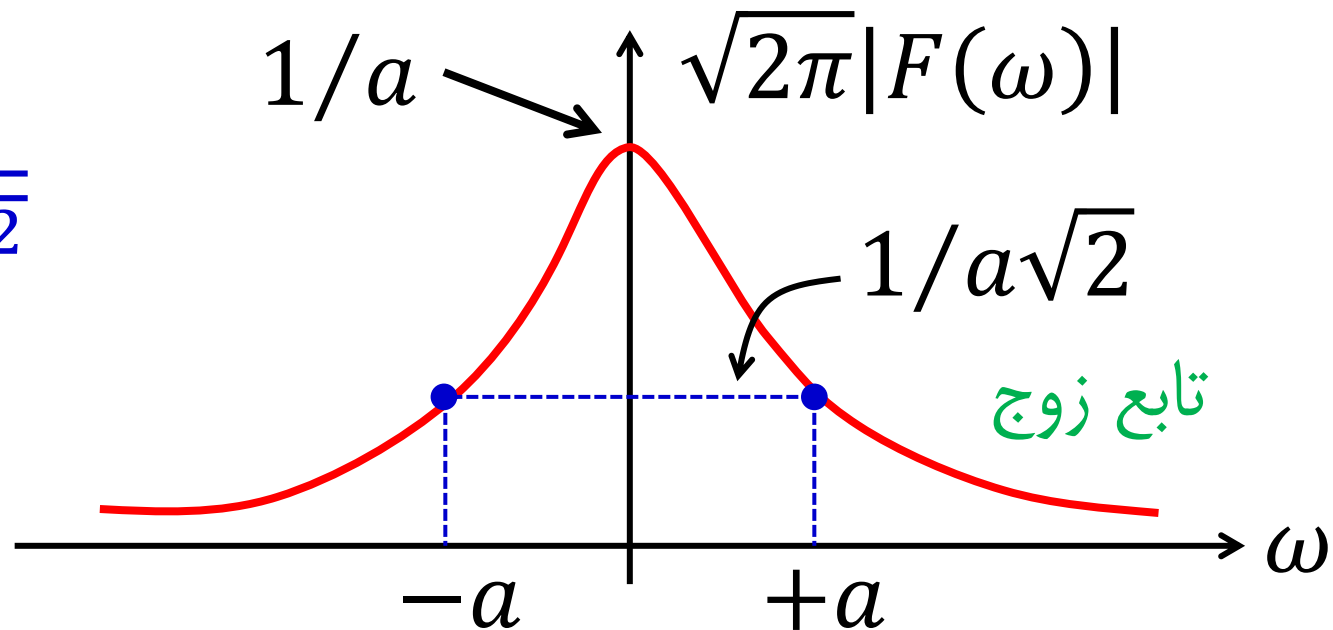
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(a+i\omega)t}}{a+i\omega} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a+i\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$\rightarrow |F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}, \angle F(\omega) = \theta = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \blacksquare$$

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

$$\angle F(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



مثال ۴: انتگرال روبه‌رو را محاسبه کنید:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega a}{\omega^2} d\omega$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \rightarrow F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega a}{\omega}$$

از قبل داشتیم:

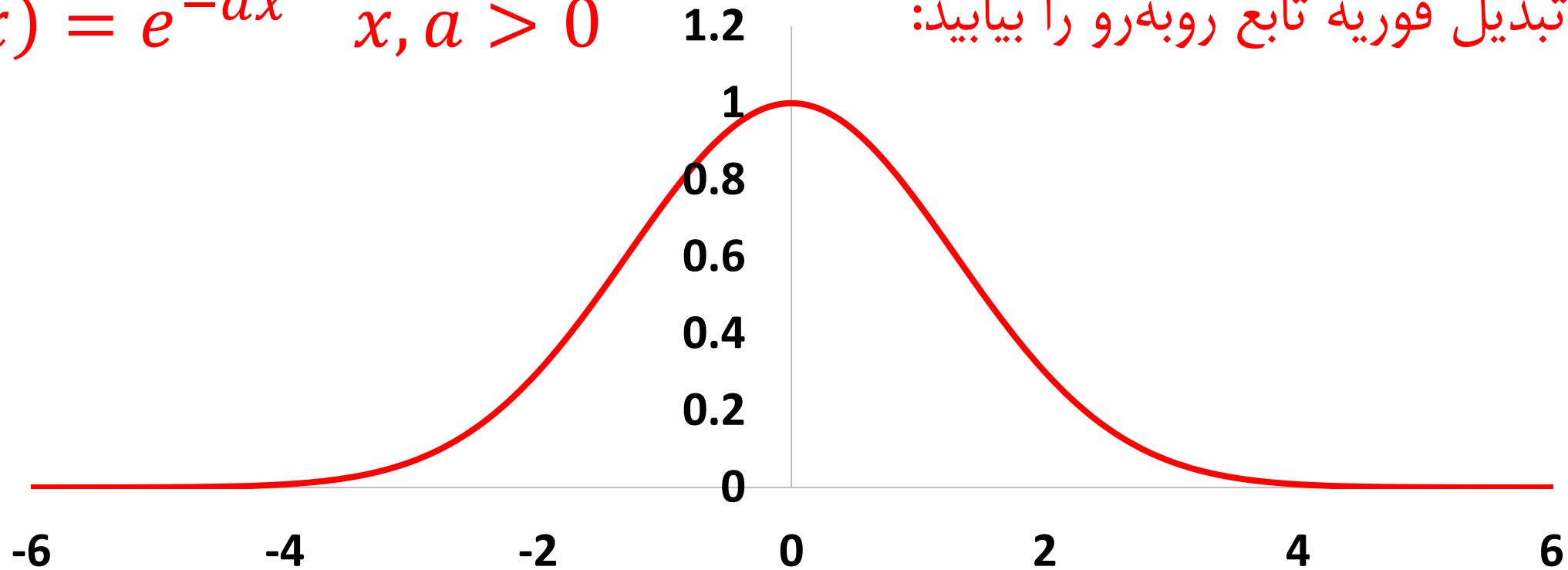
طبق اتحاد پارسوال:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-a}^a 1 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin^2 \omega a}{\omega^2} d\omega$$

$$2a = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \omega a}{\omega^2} d\omega \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \omega a}{\omega^2} d\omega = \pi a \quad \blacksquare$$

$$f(x) = e^{-ax^2} \quad x, a > 0$$

مثال ۵: تبدیل فوریۀ تابع روبه‌رو را بیابید:



تعریف مستقیم (چون x مثبت است، بازۀ انتگرال مثبت شد):

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\omega x} dx$$

اگر بخواهیم از تعریف مستقیم برویم، کمی مشکل است. به همین سبب از تابع مشتق

می‌گیریم و از قضایای تبدیل استفاده می‌کنیم.

$$f(x) = e^{-ax^2}$$

از دو طرف تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$f'(x) = -2axe^{-ax^2} = -2axf(x)$$

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\omega F(\omega)$$

$$\xrightarrow{\hspace{1.5cm}} i\omega F(\omega) = -2aiF'(\omega)$$

$$\mathcal{F}[xf(x)] = iF'(\omega)$$

$$\omega F(\omega) = -2a \frac{dF}{d\omega}$$

الان باید این معادله دیفرانسیل حل شود تا F بر حسب ω به دست آید.

$$-2a \frac{dF}{F} = \omega d\omega \rightarrow -2a \ln F = \frac{\omega^2}{2} + C$$

$$\rightarrow \ln F = -\frac{\omega^2}{4a} + C \rightarrow F(\omega) = k e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

برای محاسبه ضریب k از تعریف مستقیم تبدیل فوری استفاده می کنیم تا به $F(\omega)$ برسیم.

$$F(\omega) = k e^{-\frac{\omega^2}{4a}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\omega x} dx$$

حال کافی است $\omega = 0$ را قرار دهیم. $\rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx$

برای دستیابی به جواب این انتگرال می‌توان آن را بدین دو صورت نوشت:

$$A = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx \quad \text{یا} \quad A = \int_0^{\infty} e^{-ay^2} dy$$

$$A^2 = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx \times \int_0^{\infty} e^{-ay^2} dy$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ay^2} dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy$$

حال اگر تغییر مختصات قطبی بدهیم، خواهیم داشت:

$$x^2 + y^2 = r^2, dx dy = r dr d\theta \rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < r$$

$$A^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} r e^{-ar^2} dr d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \times \int_0^{\infty} r e^{-ar^2} dr = \frac{\pi}{4a} \rightarrow A = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

پس داریم:

$$k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{2\sqrt{2a}}$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right) = \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}}{2\sqrt{2a}} \quad \blacksquare \quad \leftarrow \text{در کل:}$$

تبدیل فوریۀ $f(x) = xe^{-ax^2}$ بدین شکل است:

$$\mathcal{F}[xf(x)] = iF'(\omega) \rightarrow \mathcal{F}\left(xe^{-ax^2}\right) = -i\omega \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}}{4a\sqrt{2a}} \quad \blacksquare$$

مثال ۶: تبدیل فوریۀ تابع روبه‌رو را بیابید: $f(x) = e^{-a|x|} \quad x > 0$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ e^{ax} & x < 0 \end{cases}$$

ابتدا می‌توان این تابع را به دو ضابطه تقسیم کرد و می‌توان نشان داد که مطلقاً انتگرال‌پذیر

است. پس داریم:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{ax} e^{-i\omega x} dx + \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-i\omega x} dx \right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a - i\omega} e^{a - i\omega} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{-1}{a + i\omega} e^{a + i\omega} \Big|_0^{\infty} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \omega^2}$$

حال اگر از اتحاد پارسوال استفاده کنیم، به نتیجه خوبی می‌رسیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\omega) d\omega$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|x|} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{a^2}{(a^2 + \omega^2)^2} d\omega = \frac{1}{a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{(a^2 + \omega^2)^2} d\omega = \frac{\pi^2}{a}$$

حال به جای ω ، x قرار می‌دهیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi^2}{a}$$

مثال ۷: تبدیل فوریۀ توابع روبه‌رو را بیابید:

$$\frac{1}{x^2 + a^2}, \frac{x}{x^2 + a^2}$$

ابتدا تبدیل فوریۀ تابع $\frac{x}{x^2 + a^2}$ را می‌یابیم.

$$\mathcal{F}\left(\frac{x}{x^2 + a^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + a^2} e^{-i\omega x} dx$$

ابتدا تبدیل فوریۀ تابع $e^{-i\omega x} = \cos \omega x - i \sin \omega x$ می‌توان نوشت.

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + a^2} \overset{0}{\cancel{\cos \omega x}} dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + a^2} \sin \omega x dx$$

چون تابع $\frac{x}{x^2 + a^2}$ فرد است، پس انتگرال اول فرد است و حذف می‌شود.

$$F(\omega) = -\frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 + a^2} \sin \omega x dx$$

این انتگرال را می‌توان با توجه به انتگرال فوریۀ سینوسی تابع $e^{-a|x|}$ جواب داد.

$$\frac{\pi}{2} e^{-a|x|} \text{ تابع سینوسی فوریۀ } = \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega x}{\omega^2 + a^2} d\omega$$

پس می توان نوشت:

$$\mathcal{F}\left(\frac{x}{x^2 + a^2}\right) = F(\omega) = -\frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{x \sin \omega x}{x^2 + a^2} dx = \begin{cases} -\frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\pi}{2} e^{-a\omega}\right) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a\omega} & \omega > 0 \\ -\frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{\pi}{2} e^{a\omega}\right) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{a\omega} & \omega < 0 \end{cases}$$

حال برای یافتن تبدیل فوریۀ تابع $\frac{1}{x^2 + a^2}$ ، طبق قضیۀ مشتق تبدیل داریم:

$$\mathcal{F}[xf(x)] = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f(x)] \rightarrow \mathcal{F}\left(\frac{x}{x^2 + a^2}\right) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2 + a^2}\right) = \begin{cases} -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a\omega} & \omega > 0 \\ i\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{a\omega} & \omega < 0 \end{cases}$$

با انتگرال گیری داریم $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a\omega}}{a} & \omega > 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{a\omega}}{a} & \omega < 0 \end{cases}$$

در کل $\Rightarrow$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2 + a^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a|\omega|}}{a}$$



مثال ۸: اگر تبدیل فوریۀ تابع $f(x)$ برابر با $F(\omega)$ باشد، آنگاه تبدیل فوریۀ تابع روبه‌رو را بیابید: $xe^{-ix} \frac{d}{dx} f(x-2)$

از $f(x)$ شروع می‌کنیم: $\mathcal{F}[f(x)] = F(\omega)$

طبق قضیۀ انتقال: $\mathcal{F}[f(x-2)] = e^{-i2\omega} F(\omega)$

طبق قضیۀ تبدیل مشتق: $\mathcal{F}\left[\frac{d}{dx} f(x-2)\right] = i\omega e^{-i2\omega} F(\omega)$

طبق قضیۀ دوم انتقال: $\mathcal{F}\left[e^{-ix} \frac{d}{dx} f(x-2)\right] = i(\omega+1)e^{-i2(\omega+1)} F(\omega+1)$

طبق قضیۀ مشتق تبدیل: $\mathcal{F}\left[xe^{-ix} \frac{d}{dx} f(x-2)\right] = i \frac{d}{d\omega} [i(\omega+1)e^{-i2(\omega+1)} F(\omega+1)]$

مثال ۹: تبدیل فوریۀ تابع $f(x)$ را بیابید:

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

$$\mathcal{F}[f(x)] = \mathcal{F}\left[xe^{-x^2}\right] = \mathcal{F}\left[-\frac{1}{2}\left(e^{-x^2}\right)'\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\mathcal{F}\left[\left(e^{-x^2}\right)'\right] = -\frac{1}{2}i\omega\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right]$$

طبق مثال ۵ می دانیم:

$$= -\frac{1}{2}i\omega \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \blacksquare$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right) = \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4a}}}{\sqrt{2a}}$$

مثال ۱۰-۱: خاصیت دوگانی را در مثال زیر نشان دهید.

$$1. f(x) = e^{-a|x|} \longrightarrow \mathcal{F}(e^{-a|x|}) = \frac{a}{\omega^2 + a^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\xrightarrow{\omega \rightarrow x} \frac{a}{x^2 + a^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

خاصیت دوگانی

$$\longrightarrow \mathcal{F}\left(\frac{a}{x^2 + a^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) = e^{-a|-\omega|} = e^{-a|\omega|}$$

مثال ۱۰-۲: خاصیت دوگانی را در مثال زیر نشان دهید.

$$2. \ g(x) = f'(x) \longrightarrow \mathcal{F}[g(x)] = \mathcal{F}[f'(x)] = i\omega F(\omega)$$

$$\text{خاصیت دوگانی} \xrightarrow{\omega \rightarrow x} ix F(x)$$

$$\longrightarrow \mathcal{F}[ix F(x)] = f'(-\omega)$$

مثال ۱۱: تبدیل فوریۀ تابع روبه‌رو را بیابید:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

طبق مثال ۶ داریم:

$$\frac{a}{x^2 + a^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-a|\omega|} = e^{-a|\omega|}$$

$$\xrightarrow{a=1} \frac{1}{x^2 + 1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-|\omega|}$$

$$\frac{1}{x^2 + 1} \xrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\omega|} \xrightarrow{x \rightarrow x - (-1)} \frac{1}{(x+1)^2 + 1} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{i\omega} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\omega|}$$

مثال ۱۲: تبدیل فوریۀ تابع روبه‌رو را بیابید:

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 5}$$

پاسخ:

□ ابتدا کسر را تجزیه می‌کنیم

□ سپس از خاصیت خطی بودن تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x + 2}{(x + 2)^2 + 1} = x \times \frac{1}{(x + 2)^2 + 1} + 2 \times \frac{1}{(x + 2)^2 + 1}$$

حال طبق قضیه انتقال در قوانین تبدیل فوریه داریم:

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{(x+2)^2 + 1} \right] = e^{2i\omega} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\omega|} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\omega| + 2i\omega} = F(\omega)$$

$$1. \mathcal{F} \left[x \times \frac{1}{(x+2)^2 + 1} \right] = iF'(\omega)$$

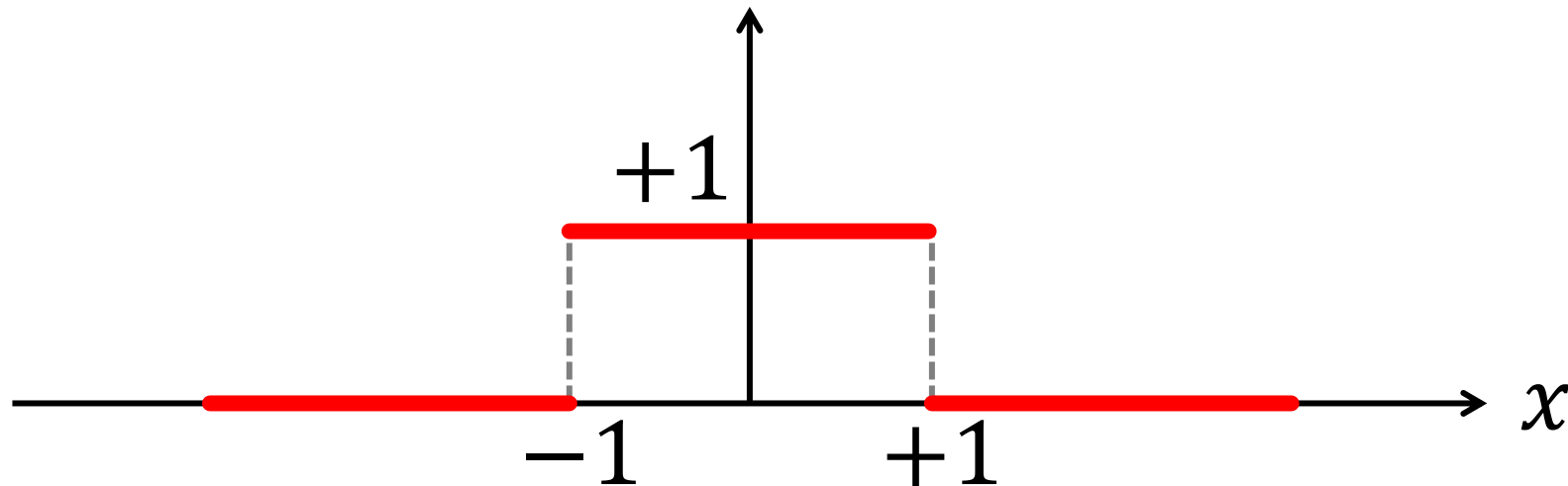
$$2. \mathcal{F} \left[2 \times \frac{1}{(x+2)^2 + 1} \right] = 2F(\omega)$$

$$3. \xrightarrow{1+2} \mathcal{F}[f(x)] = iF'(\omega) + 2F(\omega) \quad \blacksquare$$

مثال ۱۳: به کمک تبدیل فوریۀ پالس مربعی، تبدیل فوریۀ تابع زیر را محاسبه کنید.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

پاسخ: پالس مربعی بدین شکل است: $f(x) = 1 \quad |x| < 1$



$$f(x) = 1, \quad |x| < L$$

$$\mathcal{F}[1] = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^{+L} e^{-i\omega x} dx$$

$$\mathcal{F}[1] = F(\omega) = \frac{1}{-i\omega\sqrt{2\pi}} (e^{-i\omega L} - e^{i\omega L}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega L}{\omega}$$

$$\text{خاصیت دوگانی} \xrightarrow{\omega \rightarrow x} \mathcal{F} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(xL)}{x} \right] = f(x) = 1$$

$$\rightarrow \mathcal{F} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(xL)}{x} \right] = L \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{F} \left[\frac{\sin(xL)}{xL} \right] = 1$$

$$\rightarrow \mathcal{F} \left[\frac{\sin(xL)}{xL} \right] = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\rightarrow \mathcal{F} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \blacksquare$$

مثال ۱۴: تبدیل فوریۀ تابع روبه‌رو را محاسبه کنید.

$$f(x) = x^2 e^{-ax^2}$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} = H(\omega) \rightarrow H'(\omega) = \frac{-\omega}{2a\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

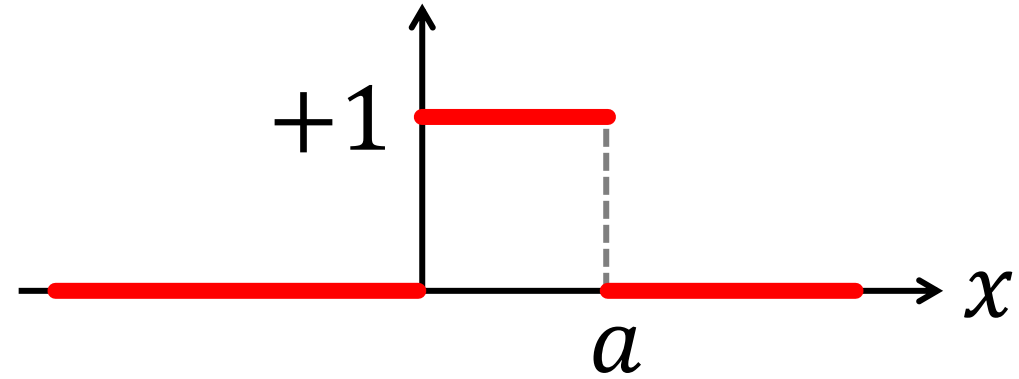
$$\mathcal{F}\left(x \times e^{-ax^2}\right) = \frac{-i\omega}{2a\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} = G(\omega)$$

$$G'(\omega) = i \left(\frac{\omega^2 + 2}{4a^2\sqrt{2a}} \right) e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

$$\mathcal{F}[f(x)] = \mathcal{F}\left(x^2 \times e^{-ax^2}\right) = - \left(\frac{\omega^2 - 2a}{4a^2\sqrt{2a}} \right) e^{-\frac{\omega^2}{4a}} = F(\omega)$$

مثال ۱۵: تبدیل فوریۀ زوج (کسینوسی) و فرد (سینوسی) تابع زیر را محاسبه کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq a \end{cases}$$



$$\mathcal{F}_c[f(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos \omega x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega x}{\omega} \Big|_0^a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\omega}{\omega}$$

$$\mathcal{F}_s[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin \omega x \, dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos \omega x}{\omega} \Big|_0^a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos a\omega}{\omega}$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

فصل ۲: تحلیل فوریه

جدول تبدیل‌های فوریه

توسط: سید محمد جعفری

۴- جدول تبدیلات فوریه

	تابع $f(x)$	تبدیل فوریه $F(\omega)$
(1)	$\begin{cases} 1 & x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\omega}{\omega}$
(2)	$\begin{cases} 1 & b < x < c \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$	$\frac{e^{-ib\omega} - e^{-ic\omega}}{i\omega\sqrt{2\pi}}$
(3)	$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a \omega }}{a}$
(4)	$\begin{cases} x & 0 < x < b \\ 2x - b & b < x < 2b \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$	$\frac{-1 + 2e^{ib\omega} - e^{2ib\omega}}{\sqrt{2\pi}\omega^2}$

	تابع $f(x)$	تبدیل فوریه $F(\omega)$
(5)	$\begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{(a + i\omega)\sqrt{2\pi}}$
(6)	$\begin{cases} e^{ax} & b < x < c \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$	$\frac{e^{(a-i\omega)c} - e^{(a-i\omega)b}}{\sqrt{2\pi}(a - i\omega)}$
(7)	$\begin{cases} e^{iax} & -b < x < b \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin b(\omega - a)}{\omega - a}$
(8)	$\begin{cases} e^{iax} & b < x < c \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$	$\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ib(a-\omega)} - e^{ic(a-\omega)}}{a - \omega}$

تابع $f(x)$

تبدیل فوریه $F(\omega)$

(9) $e^{-ax^2} \quad a > 0$

$$\frac{1}{2\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

(10) $\frac{\sin ax}{x} \quad a > 0$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} & |\omega| < a \\ 0 & |\omega| > a \end{cases}$$

(11) $\delta(x - a) = \begin{cases} \infty & x = a \\ 0 & x \neq a \end{cases}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ia\omega}$$

تابع $f(x)$

تبدیل کسینوسی فوریه $\hat{F}_C(\omega)$

$$(1) \quad \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\omega}{\omega}$$

$$(2) \quad x^{a-1} \quad (0 < x < a)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(a)}{\omega^2} \cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)$$

$$(3) \quad e^{-ax} \quad (a > 0)$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a}{a^2 + \omega^2} \right)$$

$$(4) \quad e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

	تابع $f(x)$	تبدیل کسینوسی فوریه $\hat{F}_C(\omega)$
(5)	e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
(6)	$x^n e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n!}{(a^2 + \omega^2)^{n+1}} [\text{Re}(a + i\omega)]^{n+1}$
(7)	$\begin{cases} \cos x & 0 < x < a \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin a(1 - \omega)}{1 - \omega} + \frac{\sin a(1 + \omega)}{1 + \omega} \right]$
(8)	$\cos(ax^2) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(\frac{\omega^2}{4a} - \frac{\pi}{4}\right)$

تابع $f(x)$	تبدیل کسینوسی فوریه $\hat{F}_C(\omega)$
(9) $\sin(ax^2) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(\frac{\omega^2}{4a} + \frac{\pi}{4}\right)$
(10) $\frac{\sin ax}{x}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} [1 - u(\omega - a)]$
(11) $\frac{e^{-x} \sin x}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tan^{-1} \frac{2}{\omega^2}$
(12) $J_0(ax) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - \omega^2}} [1 - u(\omega - a)]$

	تابع $f(x)$	تبدیل سینوسی فوریه $\hat{F}_S(\omega)$
(1)	$\begin{cases} 1 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1 - \cos ax}{\omega} \right)$
(2)	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\omega}}$
(3)	$1/x^{\left(\frac{3}{2}\right)}$	$2\sqrt{\omega}$
(4)	x^{a-1}	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(a)}{\omega^a} \sin \frac{a\pi}{2}$

تابع $f(x)$

تبدیل سینوسی فوریه $\hat{F}_S(\omega)$

(5)

$$e^{-ax}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \right)$$

(6)

$$\frac{e^{-ax}}{x} \quad (a > 0)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \tan^{-1} \frac{\omega}{a}$$

(7)

$$x^n e^{-ax}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n!}{(a^2 + \omega^2)^{n+1}} [\text{Im}(a + i\omega)]^{n+1}$$

(8)

$$x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\omega e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

تابع $f(x)$

تبدیل سینوسی فوریه $\hat{F}_S(\omega)$

(9) $x e^{-ax^2} \quad (a > 0)$

$$\frac{\omega}{(2a)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

(10) $\begin{cases} \sin x & 0 < x < a \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin a(1 - \omega)}{1 - \omega} - \frac{\sin a(1 + \omega)}{1 + \omega} \right]$$

(11) $\frac{\cos ax}{x}$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} u(\omega - a)$$

(12) $\tan^{-1} \left(\frac{2a}{x} \right)$

$$\sqrt{2\pi} \frac{\sin a\omega}{\omega} e^{-a\omega}$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مہندسی

فصل ۲: تحلیل فوریہ

حل معادلات دیفرانسیل با تبدیل فوریہ

توسط: سید محمد جعفری

۵- حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از تبدیل فوریه

پیشتر اشاره شد که مهمترین ویژگی تبدیل فوریه این است که بین مشتق و تابع، رابطه برقرار می کند و طبق قضیه تبدیل مشتق داریم:

$$\mathcal{F}[f^n(x)] = (i\omega)^n \mathcal{F}[f(x)] = (i\omega)^n F(\omega)$$

□ پس با استفاده از قضیه مشتق در تبدیل فوریه، در معادلات دیفرانسیل می توان تمامی مشتقات را بر حسب تبدیل فوریه تابع بنویسیم و سپس با حل یک معادله جبری $F(\omega)$ را می یابیم و در آخر با یک تبدیل فوریه معکوس به خود تابع می رسیم.

□ در این بین برای حل معادله می‌توانیم از تبدیل فوریه زوج (کسینوسی) یا فرد (سینوسی) نیز اگر لازم شد، بهره ببریم.

□ فقط باید توجه داشت که برای مشتق اول بهتر است از تبدیل فوریه سینوسی یا کسینوسی استفاده نکنیم زیرا در معادله جدید، هم تبدیل سینوسی و هم کسینوسی ظاهر می‌شود. پس بهتر است برای مشتقات با مرتبه زوج، از تبدیل فوریه سینوسی یا کسینوسی استفاده کنیم.

□ نکته مهم دیگر اینکه در خود تبدیل فوریه، به مقادیر اولیه نیازی نیست اما در تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی به مقادیر اولیه $f(0)$ و $f'(0)$ و ... نیاز است.

مثال ۱: پاسخ معادله دیفرانسیل روبه‌رو را بیابید.

$$\pi y'' - \pi y = -\frac{1}{x^2 + 1}$$

□ ابتدا از دو سوی معادله، تبدیل فوریه می‌گیریم.

□ برای نمایش تبدیل فوریه یک تابع از حروف بزرگ استفاده می‌کنیم.

$$\mathcal{F}[y(x)] = Y(\omega) = Y$$

$$\mathcal{F}(y'') = (i\omega)^2 Y = \omega^2 Y \rightarrow \mathcal{F}\left(-\frac{1}{x^2 + 1}\right) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\omega|}$$

$$\pi(-\omega^2 Y) - \pi Y = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\omega|} \xrightarrow{\div \pi} \omega^2 Y + Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-|\omega|}$$

$$(1 + \omega^2)Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-|\omega|}$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-|\omega|}}{1 + \omega^2} \longrightarrow \mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)] = y(x)$$

حال با تبدیل فوریۀ معکوس می‌توان به پاسخ $y(x)$ رسید.

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-|\omega|}}{1 + \omega^2} e^{i\omega x} d\omega$$

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x - |\omega|}}{1 + \omega^2} d\omega \quad \blacksquare$$

مثال ۲: پاسخ معادله دیفرانسیل روبه‌رو را بیابید. $y'' + y = e^{-x}$ $y(0) = 0$

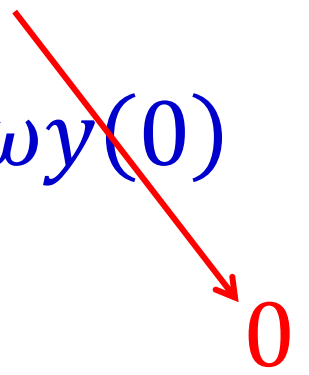
□ در اینجا مقدار اولیه و مشتق دوم داریم، پس بهتر است از تبدیل زوج یا فرد استفاده کنیم.

□ اما چون مقدار مرزی $f(0)$ است، باید از تبدیل فرد (سینوسی) استفاده کنیم.

□ اگر مقدار $f'(0)$ داده شده بود، از تبدیل فوریۀ زوج (کسینوسی) استفاده می‌کردیم.

□ حال از دو طرف تبدیل فوریۀ سینوسی می‌گیریم. لذا برای سمت راست خواهیم داشت:

$$\hat{\mathcal{F}}_s(e^{-ax}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \right) \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_s(e^{-x}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{1 + \omega^2}$$

$$\hat{\mathcal{F}}_S[y(x)] = Y_S(\omega) = Y_S \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_S[y''] = -\omega^2 Y_S + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega y(0)$$


$$-\omega^2 Y_S + Y_S = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{1 + \omega^2} \rightarrow (1 - \omega^2) Y_S = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{1 + \omega^2}$$

$$Y_S = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{1 - \omega^4} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_S^{-1}(Y_S) = y(x)$$

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{1 - \omega^4} \sin \omega x \, d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega \sin \omega x}{1 - \omega^4} \, d\omega \quad \blacksquare$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

فصل ۳: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

قانون مشتق زنجیره‌ای

توسط: سید محمد جعفری

۱- قاعده مشتق زنجیره‌ای (Chain rule):

۱-۱- مشتق مرتبه اول

مثال: فرض کنید داشته باشیم: $y(x) = e^{7\sin x^2}$ ، مطلوب است:

$$\frac{dy}{dx} = ?$$

$$y = f(u) = e^{7u}$$

$$\longleftarrow u = \sin x^2$$

تغییر متغیر اول:

$$u = g(v) = \sin v$$

$$\longleftarrow v = h(x) = x^2$$

تغییر متغیر دوم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{dy}{du}}_1 \cdot \underbrace{\frac{du}{dv}}_2 \cdot \underbrace{\frac{dv}{dx}}_3 = \left(7e^{7\sin x^2}\right) (\cos x^2) (2x) \quad \blacksquare$$

1: $\frac{dy}{du} = f'(u) = 7e^{7u} = 7e^{7\sin x^2}$

2: $\frac{du}{dv} = g'(v) = \cos v = \cos x^2$

3: $\frac{dv}{dx} = h'(x) = 2x$

۱-۲- مشتق مرتبه دوم

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = ?$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

$$= \frac{d}{du} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d}{du} \left(\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \right) \cdot \frac{du}{dx}$$

ادامه مشتق مرتبه دوم

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \right) \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \left[\frac{d}{du} \left(\frac{dy}{du} \right) \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{du} \cdot \frac{d}{du} \left(\frac{du}{dx} \right) \right] \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \left[\frac{d^2 y}{du^2} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{du} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) \cdot \frac{dx}{du} \right] \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \left[\frac{d^2 y}{du^2} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot \frac{dx}{du} \right] \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d^2 y}{du^2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{du} \frac{d^2 u}{dx^2} \quad \blacksquare$$

مثال: مشتق مرتبه دوم عبارت روبه‌و را بیابید.

$$y(x) = e^{3x^2}$$

روش اول: روش مستقیم: تغییر متغیر اول: $u = x^2$ $y = f(u) = e^{3u}$

$$u = g(x) = x^2$$

$$\frac{dy}{du} = f'(u) = 3e^{3u} = 3e^{3x^2} \qquad \frac{du}{dx} = g'(x) = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (3e^{3u})(2x) = (3e^{3x^2})(2x)$$

ادامهٔ مثال: روش اول: روش مستقیم

$$y(x) = e^{3x^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

$$= \frac{d}{dx} \left[\left(3e^{3x^2} \right) (2x) \right]$$

$$= \left(18xe^{3x^2} \right) (2x) + \left(3e^{3x^2} \right) (2)$$

$$= (6 + 36x^2)e^{3x^2} \blacksquare$$

ادامه مثال:

$$y(x) = e^{3x^2}$$

روش دوم: مشتق زنجیری:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{du^2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{du} \frac{d^2 u}{dx^2}$$

$$= (9e^{3u})(2x)^2 + (3e^{3x^2})(2)$$

$$= (6 + 36x^2)e^{3x^2} \blacksquare$$

۲- توابع چند متغیری

- در مهندسی بیشتر ویژگی‌ها مانند سرعت، شتاب، تنش، فشار، دما، نیرو و . . . تابع چند متغیرند مثلاً همزمان تابع زمان و مکان هستند.
- نکته: در توابع چند متغیری، مشتق کامل نیست و فقط به یک متغیر وابسته نیست و لذا باید اثر همه متغیرها را بر خروجی دید.

۲- توابع چند متغیری

□ در توابع یک متغیری مانند $y = f(x)$ ، برای مشتق از نماد $\frac{df}{dx}$ استفاده

می‌شود یعنی تابع y تنها به یک متغیر x وابسته است.

□ در توابع چند متغیری مانند $f = f(x, y, z, t)$ ، برای مشتق از نماد

$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ یا $f_t = \frac{\partial f}{\partial t}$ استفاده می‌شود که اصطلاحاً به آن مشتق جزئی گویند.

□ در توابع چند متغیری مانند $f = f(x,y,z)$ ، مشتق کامل بدین شرح است:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

□ توابع چند متغیری می‌توانند به دو صورت اسکالر و برداری باشند، مانند:

۱. تابع اسکالر که خروجی آن یک عدد است.

۲. تابع برداری که خروجی آن یک میدان برداری است.

مثال:

۱. تابع اسکالر با سه متغیر مستقل (ورودی) و یک متغیر وابسته (خروجی):

$$T = T(x, y, t) = x^2 + y^2 - \sin t$$

مانند: دما، فشار:

۲. تابع برداری با چهار متغیر مستقل (ورودی) و سه متغیر وابسته (خروجی)

یا یک خروجی برداری:

$$\vec{u} = (x + t^2)\hat{i} + (y - x)\hat{j} + (z \cos t)\hat{k}$$

۳- مشتق توابع چند متغیری

مثال: با توجه به تابع چند متغیری روبه‌رو موارد خواسته شده را بیابید:

$$f = f(u, v) = u^2 + v^3$$

$$u = u(x, y, t) = xy^2 \sin t$$

$$v = v(x, y, t) = \sin^2 t$$

$$(A) \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$(B) \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$(C) \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$(D) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

پاسخ مثال:

$$(A) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= (2u)(y^2 \sin t) + (3v^2)(0) = 2xy^4 \sin^2 t$$

$$(B) \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= (2u)(2xy \sin t) + (3v^2)(0) = 4x^2 y^3 \sin^2 t$$

ادامہ پاسخ مثال:

$$(C) \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$= (2u)(xy^2 \cos t) + (3v^2)(2 \cos t \sin t)$$

$$= (2xy^2 \sin t)(xy^2 \cos t) + [3(\sin^2 t)^2] (2 \cos t \sin t)$$

$$= (x^2 y^4 + 3 \sin^4 t) \cos 2t$$

$$(D) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial u} \right] \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial v} \right] \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= (2)(y^2 \sin t)^2 + 2(2u)(0) + 2(0)(0)(y^2 \sin t) + 2(3v^2)(0) \\ &\quad + (6v)(0)^2 = 2y^4 \sin^2 t \quad \blacksquare \end{aligned}$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مہندسی

فصل ۳: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

عملگر دل (نابلا)

توسط: سید محمد جعفری

۱- میدان‌های اسکالر و برداری

میدان‌های اسکالر (Scalar Fields):

$$f = f(\vec{r}, t) = f(x, y, z, t)$$

☐ دما (Temperature)

☐ فشار سیال (Fluid Pressure)

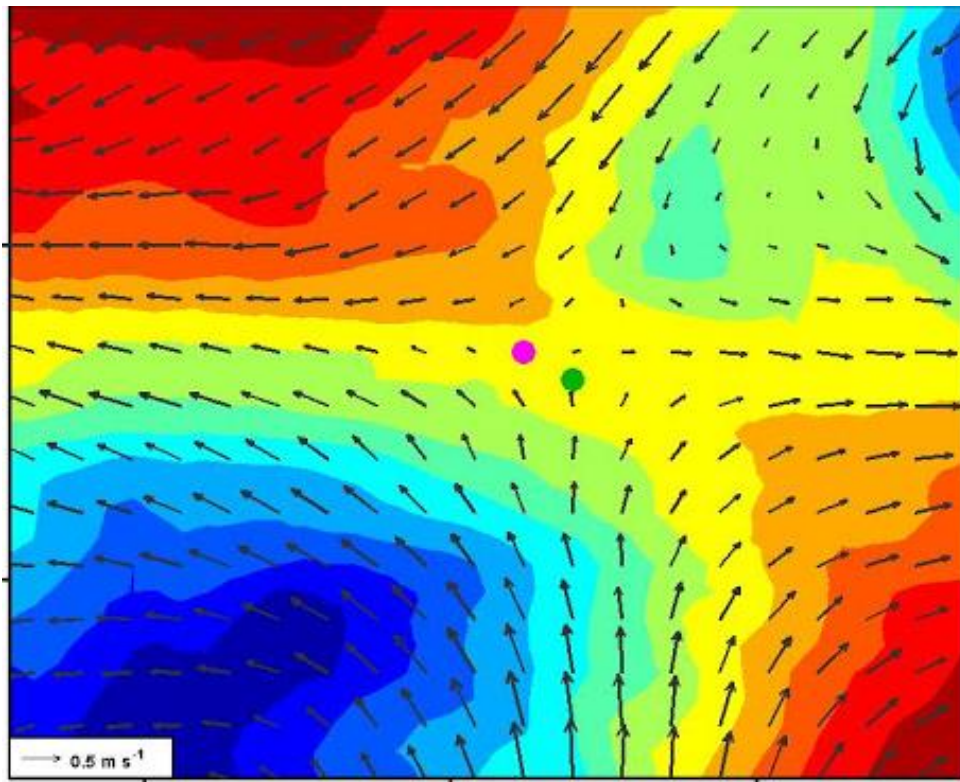
☐ غلظت آلاینده‌ها (Pollutant concentration)

☐ چگالی (Density)

☐ گرانیروی سیالات (Viscosity)

میدان‌های برداری (Vector Fields):

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}, t)$$



میدان مغناطیسی (Magnetic Field) ☐

میدان الکتریکی (Electrical Field) ☐

میدان گرانشی (Gravity Field) ☐

میدان سرعت سیال (Fluid Velocity) ☐

میدان جابه‌جایی (Displacement) ☐

میدان تنش (Stress) ☐

۲- دیفرانسیل کامل یک میدان اسکالر

$$f = f(\vec{r}, t) = f(x, y, z, t)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (dx, dy, dz)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k})$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

عملگر دل $\vec{\nabla}$

عملگر دل (نابلا): ∇ Del (Nabla) operator

۲- عملگر دل

$$\vec{\nabla} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

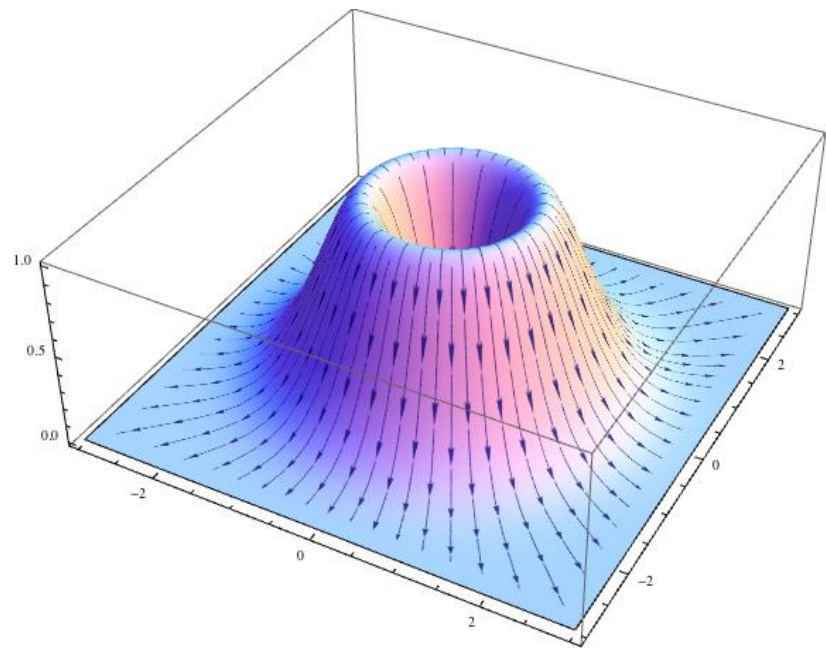
Cartesian coordinate system:
$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

❖ با عملگر دل مانند یک بردار رفتار می‌شود یعنی مثل بردارها جمع و ضرب می‌شوند.

❖ این عملگر به تنهایی مفهومی را منتقل نمی‌کند و شیوه اعمال آن بر توابع مختلف باعث ایجاد مفاهیم مختلف می‌شود.

❖ برای استفاده از عملگر دل در کنار توابع اسکالر و برداری تعاریف خاصی وجود دارد.

۲-۱- عملگر دل کنار توابع اسکالر



مشتق برداری یک میدان اسکالر یا گرادیان
(Gradient of a scalar field)

$$\text{grad}(f) = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

گرادیان (Gradient)

❖ گرادیان یعنی تغییرات یک متغیر نسبت به مکان

❖ گرادیان یک متغیر، برداری است که با مشتق تابع اسکالر نسبت به مکان به دست می‌آید.

❖ در توابع اسکالر تغییرات نسبت به زمان را اصطلاحاً سرعت و تغییرات نسبت به مکان را اصطلاحاً گرادیان گویند.

❖ سرعت، برداری مماس بر مسیر است.

❖ گرادیان، برداری است که در هر نقطه بر تابع عمود است.

۲-۲- عملگر دل کنار توابع برداری (ضرب خارجی)

□ پیش یک میدان برداری (Curl of a vector field)

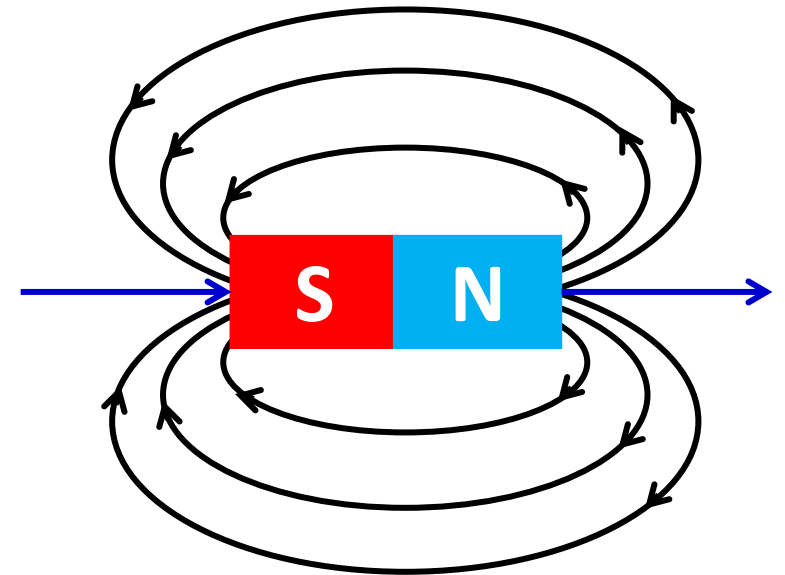
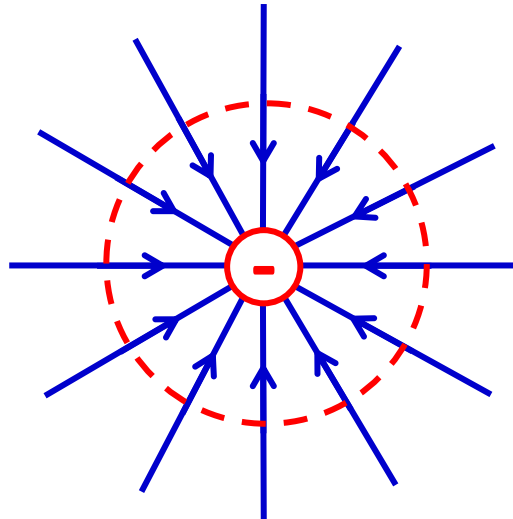
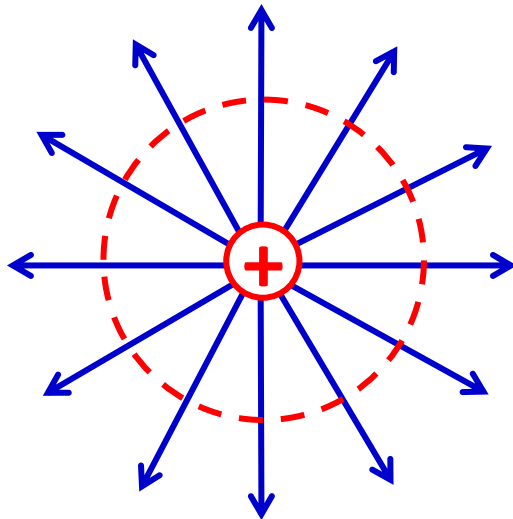
$$\begin{aligned}\text{Curl}(\vec{f}) &= \vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \hat{k}\end{aligned}$$

❖ کرل یک میدان برداری نشان‌دهندهٔ پیچش آن است.

❖ در یک میدان الکتریکی اگر روی خطوط حرکت کنیم شاهد پیچش نیستیم اما در یک میدان

مغناطیسی با حرکت روی خطوط شاهد پیچش میدان هستیم به زبان ریاضی:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}, \vec{\nabla} \times \vec{B} \neq \vec{0}$$



❖ چون گرادیان یک میدان اسکالر، یک بردار است، می‌توان عملگر دل را روی آن دوباره تعریف کرد:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \text{اسکالر} = \text{دیورژانس گرادیان تابع} = \text{لاپلاسیان}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \text{بردار}$$



Laplace

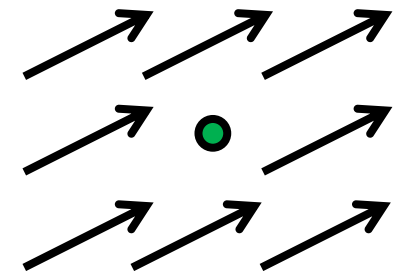
۲-۳- عملگر دل کنار توابع برداری (ضرب داخلی)

□ دیورژانس یک میدان برداری (Divergence of a vector field)

$$\vec{f}(x, y, z) = f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k}$$

$$\text{div}(\vec{f}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = 0$$

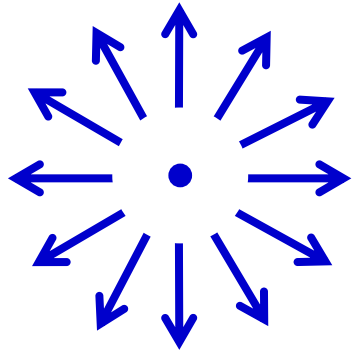


بقای جرم

Preservation Mass

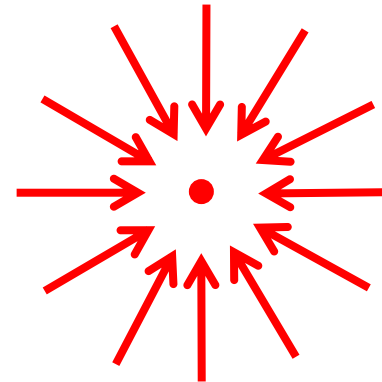
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} > 0$$

Source چشمه



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} < 0$$

Sink چاه



❖ دیورژانس یک اسکالر است که نشان‌دهنده گرایش شار ورودی یا خروجی (همگرایی یا واگرایی) به یک میدان در یک نقطه است.

❖ در سیالات: دیورژانس مثبت = چشمه و دیورژانس منفی = چاه و دیورژانس صفر = بقای جرم (جریان در یک لوله)

❖ در برق: دیورژانس مثبت = شار الکتریکی حول بار مثبت و دیورژانس منفی = شار الکتریکی حول بار منفی. پس: $\text{Div}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \neq 0$

❖ در مغناطیس: دیورژانس میدان مغناطیسی صفر است زیرا شار خالص آن صفر است. پس: $\text{Div}(\vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

به طور خلاصه:

$$\text{grad}(f) = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\text{div}(\vec{f}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

۲-۴- خواص عملگرهای گرادیان، لاپلاسیان، دیورژانس و پیچش

$$\text{grad}(C) = 0 \rightarrow \text{grad}(Cf) = C\text{grad}(f)$$

$$\text{grad}(f_1 + f_2) = \text{grad}(f_1) + \text{grad}(f_2)$$

$$\text{grad}(f_1 f_2) = f_1 \text{grad}(f_2) + f_2 \text{grad}(f_1)$$

$$\text{div}(C) = 0 \rightarrow \text{div}(C\vec{f}) = C \text{div}(\vec{f})$$

$$\text{div}(\vec{f}_1 + \vec{f}_2) = \text{div}(\vec{f}_1) + \text{div}(\vec{f}_2)$$

$$\text{div}(f_1 \vec{f}_2) = f_1 \text{div}(\vec{f}_2) + \vec{f}_2 \cdot \text{grad}(f_1)$$

ادامهٔ خواص عملگرهای گرادیان، لاپلاسین، دیورژانس و پیچش

$$\text{Curl}(\vec{f}) = \vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

$$\text{curl}(C) = 0 \rightarrow \text{curl}(C\vec{f}) = C\text{curl}(\vec{f})$$

$$\text{curl}(\vec{f}_1 + \vec{f}_2) = \text{curl}(\vec{f}_1) + \text{curl}(\vec{f}_2)$$

$$\text{curl}(f_1\vec{f}_2) = f_1\text{curl}(\vec{f}_2) + \text{grad}(f_1) \times \vec{f}_2$$

مثال:

میدان برداری $\vec{A} = xz \hat{i} - y^2 \hat{j} + 2x^2y \hat{k}$ و میدان اسکالر $\phi = x^2yz^3$ ، مطلوبست:

$$(a) \text{ grad } (\phi) = \vec{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k}$$

$$= 2xyz^3 \hat{i} + x^2z^3 \hat{j} + 3x^2yz^2 \hat{k} \quad \blacksquare$$

$$(b) \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = z - 2y + 0 \quad \blacksquare$$

$$\begin{aligned}
(c) \operatorname{Curl}(\vec{A}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & -y^2 & 2x^2y \end{vmatrix} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial y}(2x^2y) - \frac{\partial}{\partial z}(-y^2) \right] \hat{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x^2y) - \frac{\partial}{\partial z}(xz) \right] \hat{j} \\
&\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xz) \right] \hat{k} \\
&= 2x^2\hat{i} + (x - 4xy)\hat{j} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

$$(d) \operatorname{div} \left(\phi \vec{A} \right) = \phi \operatorname{div} \left(\vec{A} \right) + \vec{A} \cdot \operatorname{grad}(\phi)$$

$$= (x^2 y z^3)(z - 2y) + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \phi$$

$$= (x^2 y z^3)(z - 2y) + (xz)(2xyz^3)$$

$$+ (-y^2)(x^2 z^3) + (2x^2 y)(3x^2 y z^2) \blacksquare$$

$$(e) \operatorname{Curl}(\phi \vec{A}) = \phi \operatorname{Curl}(\vec{A}) + \vec{\nabla} \phi \times \vec{A}$$

$$= (x^2 y z^3) [2x^2 \hat{i} + (x - 4xy) \hat{j}]$$

$$+ (2xyz^3 \hat{i} + x^2 z^3 \hat{j} + 3x^2 y z^2 \hat{k}) \times (xz \hat{i} - y^2 \hat{j} + 2x^2 y \hat{k})$$

$$= (4x^4 y z^3 + 3x^2 y^3 z^2) \hat{i} + (4x^3 y z^3 - 8x^3 y^2 z^3) \hat{j}$$

$$- (2xy^3 z^3 + x^3 z^4) \hat{k}$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

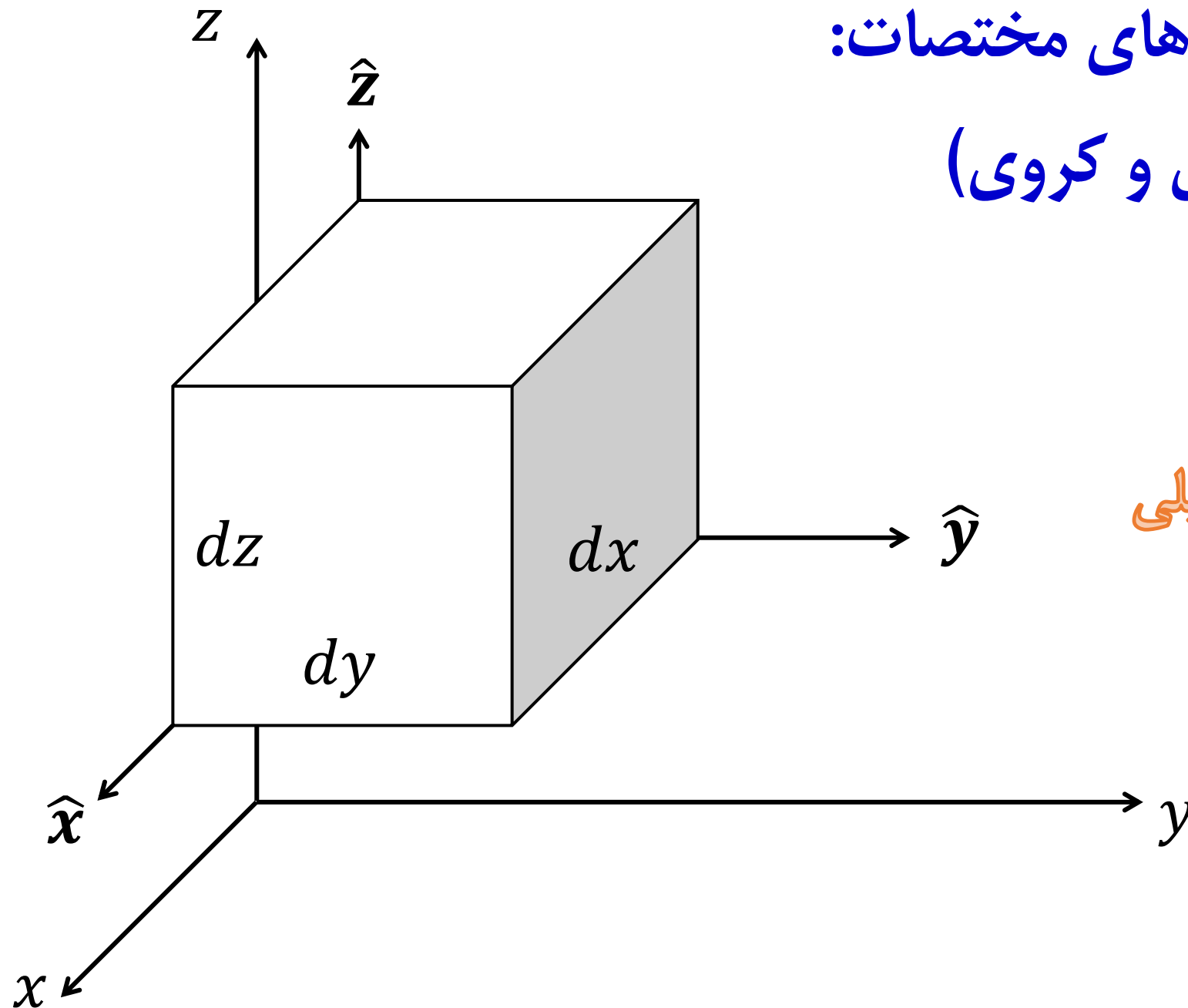
ریاضیات مهندسی

فصل ۳: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

عملگر دل (نابلا) در دستگاه‌های مختلف مختصات

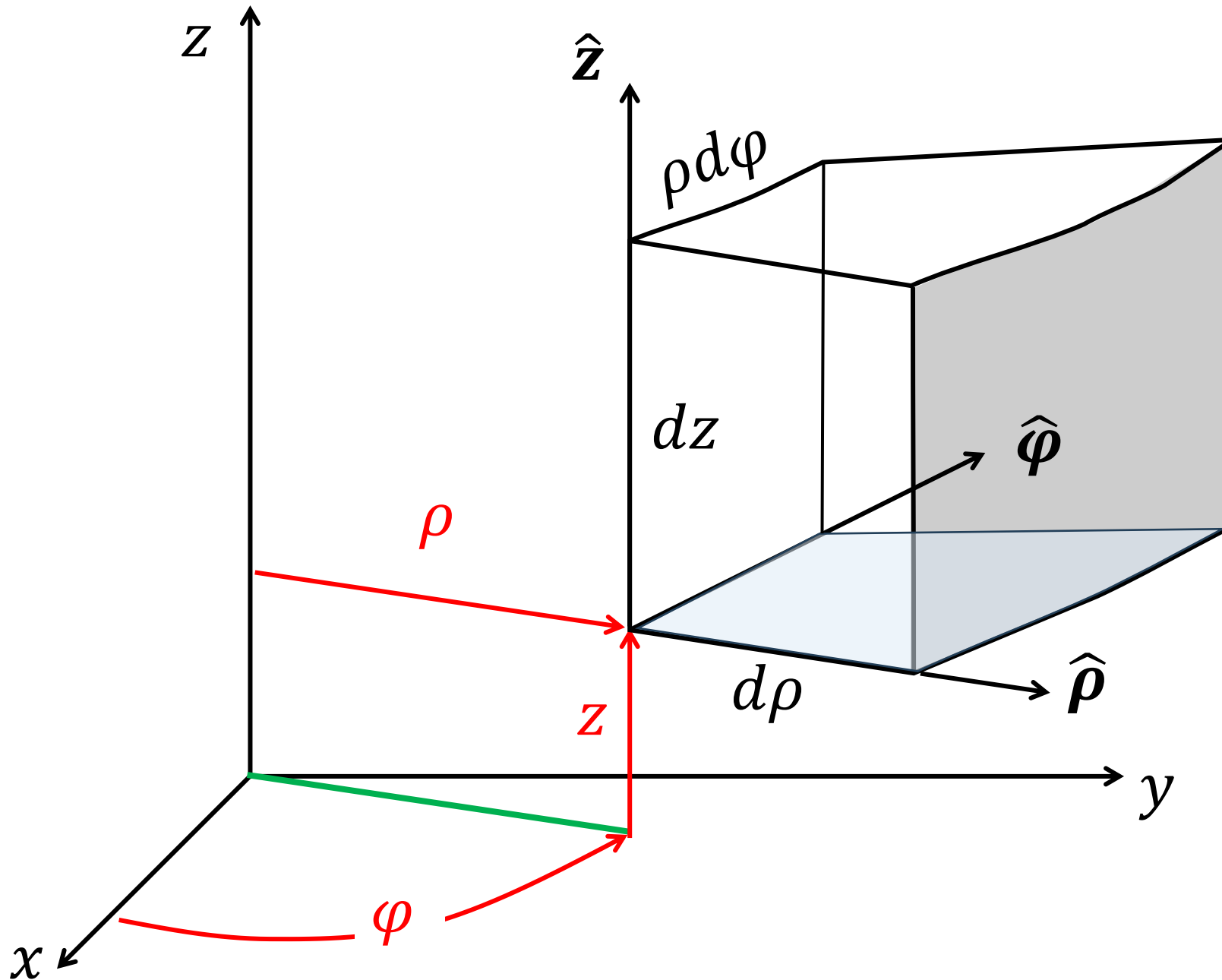
توسط: سید محمد جعفری

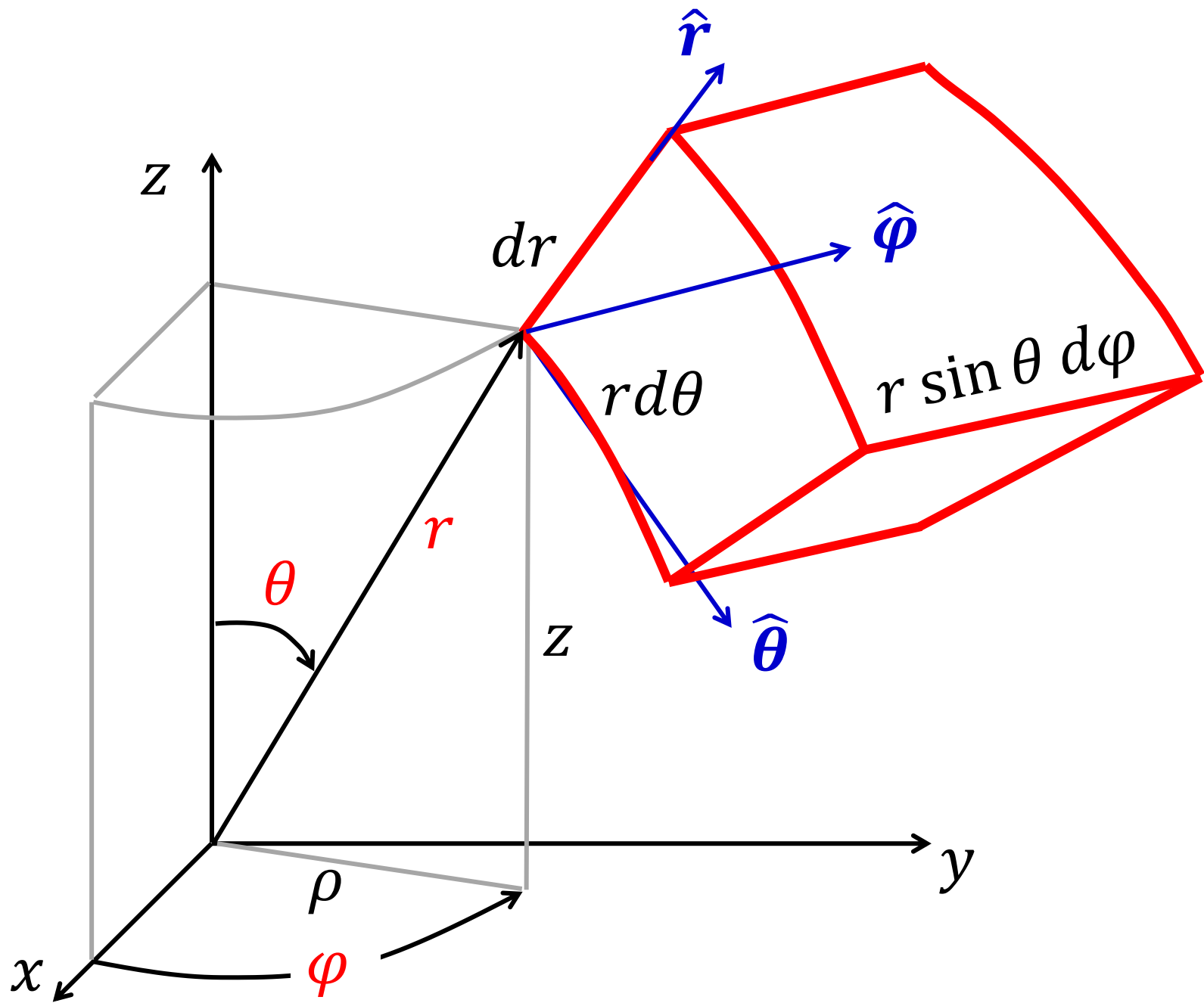
۱-۵- تبدیل دستگاه‌های مختصات:
(مستطیلی، استوانه‌ای و کروی)



مختصات مستطیلی
(x, y, z)

مختصات استوانه‌ای
(ρ, φ, z)





مختصات کروی
 (r, θ, φ)

To		From		
		Cartesian	Cylindrical	Spherical
	Cartesian	$x = x$ $y = y$ $z = z$	$x = \rho \cos \varphi$ $y = \rho \sin \varphi$ $z = z$	$x = r \sin \theta \cos \varphi$ $y = r \sin \theta \sin \varphi$ $z = r \cos \theta$
To	Cylindrical	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$ $z = z$	$\rho = \rho$ $\varphi = \varphi$ $z = z$	$\rho = r \sin \theta$ $\varphi = \varphi$ $z = r \cos \theta$

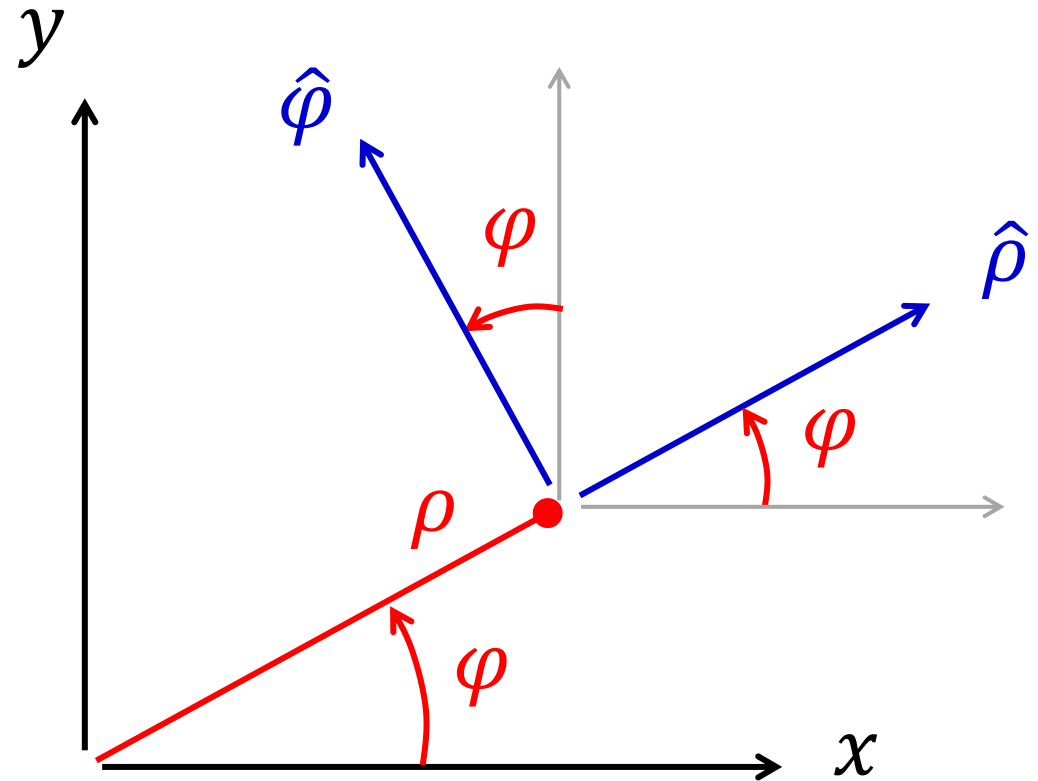
To	From			
		Cartesian	Cylindrical	Spherical
	Spherical	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right)$ $\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$	$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\rho}{z} \right)$ $\varphi = \varphi$	$r = r$ $\theta = \theta$ $\varphi = \varphi$

مثال: تبدیل عملگر دل از مختصات مستطیلی به استوانه‌ای

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$\hat{i} = \cos \varphi \hat{\rho} - \sin \varphi \hat{\varphi}$$

$$\hat{j} = \sin \varphi \hat{\rho} + \cos \varphi \hat{\varphi}$$



مثال: تبدیل عملگر دل از مختصات مستطیلی به استوانه‌ای

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

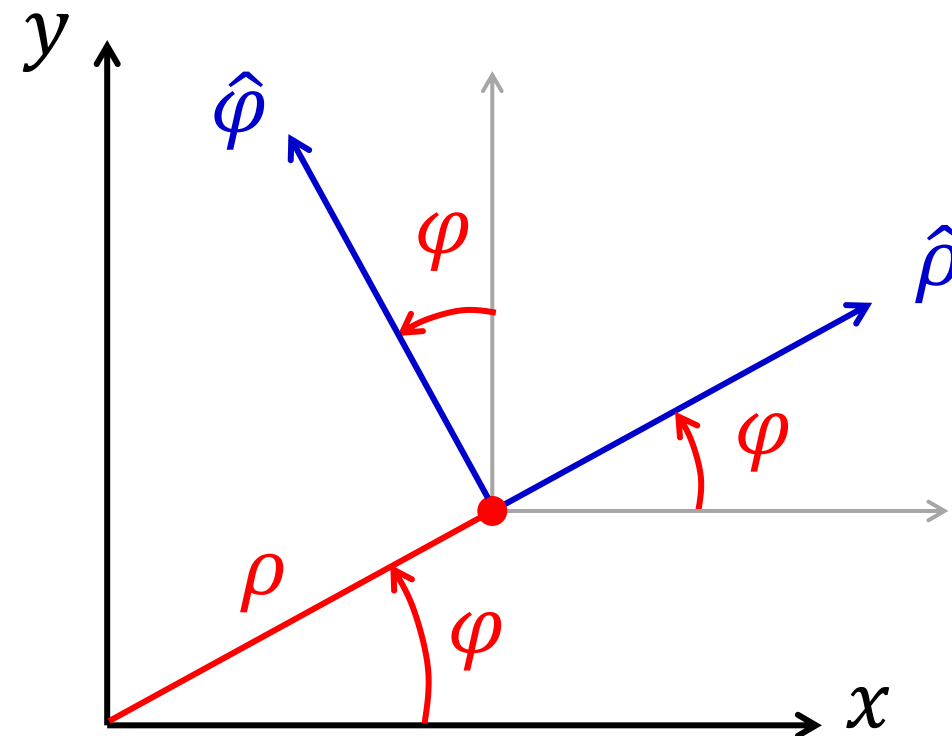
قاعده مشتق زنجیری:

مثال: تبدیل عملگر دل از مختصات مستطیلی به استوانه‌ای

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\rho \cos \varphi}{\rho} = \cos \varphi$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\rho \sin \varphi}{\rho} = \sin \varphi$$



$$\hat{i} = \cos \varphi \hat{\rho} - \sin \varphi \hat{\varphi}$$

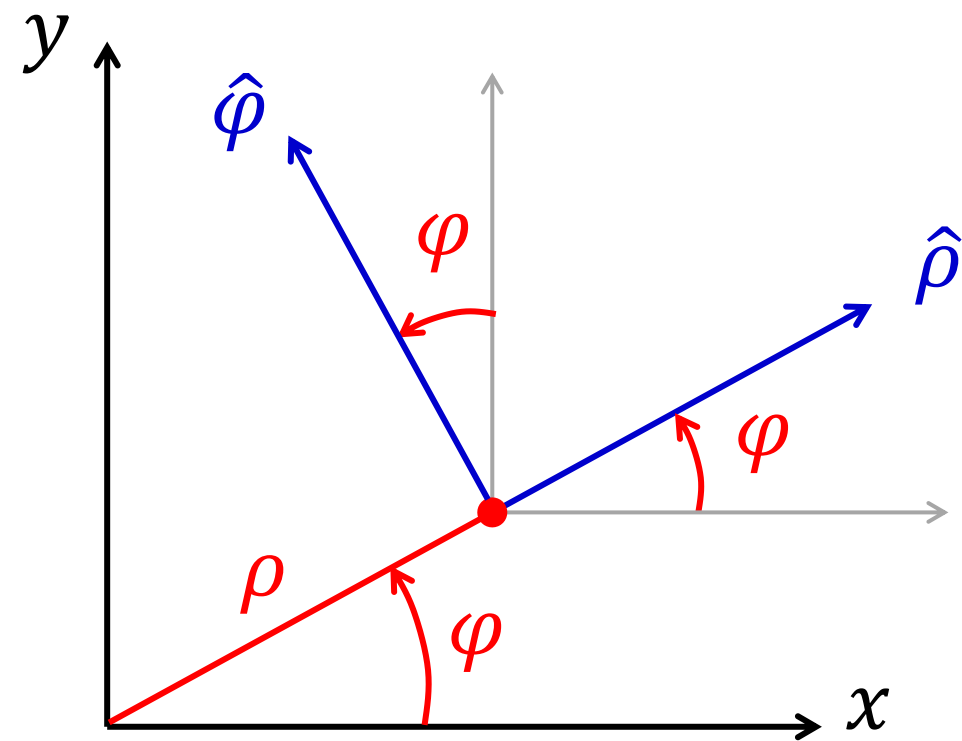
$$\hat{j} = \sin \varphi \hat{\rho} + \cos \varphi \hat{\varphi}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{-\rho \sin \varphi}{\rho^2} = \frac{-\sin \varphi}{\rho}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{x} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{\rho \cos \varphi}{\rho^2} = \frac{\cos \varphi}{\rho}$$



$$\hat{i} = \cos \varphi \hat{\rho} - \sin \varphi \hat{\varphi}$$

$$\hat{j} = \sin \varphi \hat{\rho} + \cos \varphi \hat{\varphi}$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) (\cos \varphi \hat{\rho} - \sin \varphi \hat{\varphi})$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) (\sin \varphi \hat{\rho} + \cos \varphi \hat{\varphi}) + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{-\sin \varphi}{\rho} \right) (\cos \varphi \hat{\rho} - \sin \varphi \hat{\varphi})$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho} \right) (\sin \varphi \hat{\rho} + \cos \varphi \hat{\varphi}) + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$\vec{\nabla} = (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho}$$

$$+ \frac{1}{\rho} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

مثال: دیورژانس یک میدان برداری در دستگاه استوانه‌ای چه می‌شود؟

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

عملگر دل در دستگاه استوانه‌ای:

$$\vec{A} = A_\rho \hat{\rho} + A_\varphi \hat{\varphi} + A_z \hat{k}$$

یک میدان برداری فرضی:

$$\text{Div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (A_\rho \hat{\rho} + A_\varphi \hat{\varphi} + A_z \hat{k}) \quad *$$

□ دقت کنید که معادله $*$ ، یک ضرب داخلی ساده مانند آنچه در ضرب داخلی در دستگاه

مستطیلی انجام می‌دادیم، نیست. یعنی نمی‌توان جمله‌ها را نظیر به نظیر در یکدیگر

ضرب کرد. مثلاً بیاید فقط جمله اول را در نظر بگیریم و فرض کنیم داریم:

$$S_1 = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho} \right) \cdot (A_\rho \hat{\rho} + A_\varphi \hat{\varphi} + A_z \hat{k})$$

$$S_1 = \hat{\rho} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (A_\rho \hat{\rho} + A_\varphi \hat{\varphi} + A_z \hat{k}) \right]$$

$$S_{11} = \frac{\partial}{\partial \rho} (A_\rho \hat{\rho})$$

حال عبارت اول را بررسی می‌کنیم:

$$S_{11} = \frac{\partial}{\partial \rho} (A_\rho \hat{\rho}) = \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} \hat{\rho} + A_\rho \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \rho}$$

نکته:

□ لازم است دقت کنید که مشتق بردارهای یکه در دستگاه استوانه‌ای و کروی صفر نیستند.

همچنین نمی‌توان مثل یک عدد ثابت با آن رفتار کرد.

□ بردارهای یکه در دستگاه استوانه‌ای و کروی در همه جا، ثابت نیستند. زیرا اگرچه اندازه آنها در

همه جا، ۱ است اما راستای آنها در هر نقطه در حال تغییر است.

□ این ویژگی برخلاف بردارهای یکه در دستگاه مستطیلی است.

لذا از طریق هندسی ثابت می‌شود که مشتق بردارهای یکه در دستگاه استوانه‌ای بدین شرح است:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \rho} = 0; \quad \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \rho} = 0; \quad \frac{\partial \hat{k}}{\partial \rho} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \varphi} = \hat{\varphi}; \quad \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} = -\hat{\rho}; \quad \frac{\partial \hat{k}}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \hat{k}}{\partial z} = 0$$

$$\text{Div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\begin{aligned}
 &= \hat{\rho} \cdot \left[\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} \hat{\rho} + A_\rho \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \rho} \right) + \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} \hat{\varphi} + A_\varphi \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \rho} \right) + \left(\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \hat{k} + A_z \frac{\partial \hat{k}}{\partial \rho} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{\rho} \hat{\varphi} \cdot \left[\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \hat{\rho} + A_\rho \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \varphi} \right) + \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + A_\varphi \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} \right) + \left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} \hat{k} + A_z \frac{\partial \hat{k}}{\partial \varphi} \right) \right] \\
 &\quad + \hat{k} \cdot \left[\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial k} \hat{\rho} + A_\rho \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial k} \right) + \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial k} \hat{\varphi} + A_\varphi \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial k} \right) + \left(\frac{\partial A_z}{\partial k} \hat{k} + A_z \frac{\partial \hat{k}}{\partial k} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\hat{\rho} \cdot \hat{\rho} = \hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

حال می‌دانیم که:

$$\hat{\rho} \cdot \hat{\varphi} = \hat{\varphi} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{\rho} = 0$$

$$\text{Div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \boxed{\frac{\partial A_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} A_{\rho}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

دیورژانس یک میدان برداری در دستگاه مختصات استوانه‌ای:

$$\text{Div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_{\rho}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \blacksquare$$

Operation	Cartesian coordinates (x, y, z)
Vector field: $\vec{A}$	$= A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$
Scalar field: f	$= f(x, y, z)$
Gradient: $\vec{\nabla} f$	$= \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$
Divergence: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$	$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Laplace operator $\nabla^2 f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \Delta f$	$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Operation

Cartesian coordinates (x, y, z)

$$\text{Curl: } \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} \\ + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} \\ + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Operation	Cylindrical coordinates (ρ, φ, z)
Vector field: $\vec{A}$	$= A_\rho \hat{\rho} + A_\varphi \hat{\varphi} + A_z \hat{k}$
Scaler field: f	$= f(\rho, \varphi, z)$
Gradient: $\vec{\nabla} f$	$= \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$
Divergence: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$	$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Laplace operator $\nabla^2 f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \Delta f$	$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Operation

Cylindrical coordinates (ρ, φ, z)

$$\begin{aligned} \text{Curl: } \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\varphi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\rho} \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\varphi} \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \hat{k} \end{aligned}$$

Operation

Spherical coordinates (r, θ, φ) where θ is the polar and φ is the azimuthal angle

$$\text{Vector field: } \vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\varphi \hat{\varphi}$$

$$\text{Scalar field: } f = f(r, \theta, \varphi)$$

$$\text{Gradient: } \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$$

$$\begin{aligned} \text{Divergence: } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) \\ &+ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Operation

**Spherical coordinates (r, θ, φ)
where θ is the polar and φ is
the azimuthal angle**

Curl: $\vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\rho}$$

$$+ \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\varphi}$$

$$+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \hat{k}$$

Operation

Spherical coordinates (r, θ, φ) where θ is the polar and φ is the azimuthal angle

Laplace operator

$$\nabla^2 f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

مثال: پیچش (Curl) میدان برداری زیر را در مختصات استوانه‌ای محاسبه کنید:

$$\vec{A} = \rho \hat{\rho} + z \sin \varphi \hat{\varphi} + 2z \hat{k}$$

$$A_\rho = \rho, \quad A_\varphi = z \sin \varphi, \quad A_z = 2z$$

$$(c) \quad \text{Curl}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\varphi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(c) \text{Curl}(\vec{A}) &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\varphi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \rho & \rho z \sin \varphi & 2z \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\varphi} \\
&\quad + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \hat{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Curl}(\vec{A}) &= \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(2z)}{\partial \varphi} - \frac{\partial(z \sin \varphi)}{\partial z} \right] \hat{\rho} + \left[\frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\partial(2z)}{\partial \rho} \right] \hat{\varphi} \\
&\quad + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho z \sin \varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right] \hat{k} \\
&= \left[\frac{1}{\rho} (0) - \sin \varphi \right] \hat{\rho} + [0 - 0] \hat{\theta} + \frac{1}{\rho} [z \sin \varphi - 0] \hat{k} \\
&= -\sin \varphi \hat{\rho} + \frac{z \sin \varphi}{\rho} \hat{k} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

مثال: دیورژانس میدان برداری زیر را در مختصات کروی محاسبه کنید:

$$\vec{A} = 2\hat{r} + r \cos \theta \hat{\theta} + r\hat{\phi}$$

$$A_r = 2, \quad A_\theta = r \cos \theta, \quad A_\phi = r$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial (2r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cos \theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial r}{\partial \phi}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(2r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2} r \sin 2\theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} (0)$$

$$= \frac{1}{r^2} (4r) + \frac{1}{r \sin \theta} (r \cos 2\theta)$$

$$= \frac{4}{r} + \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} \quad \blacksquare$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

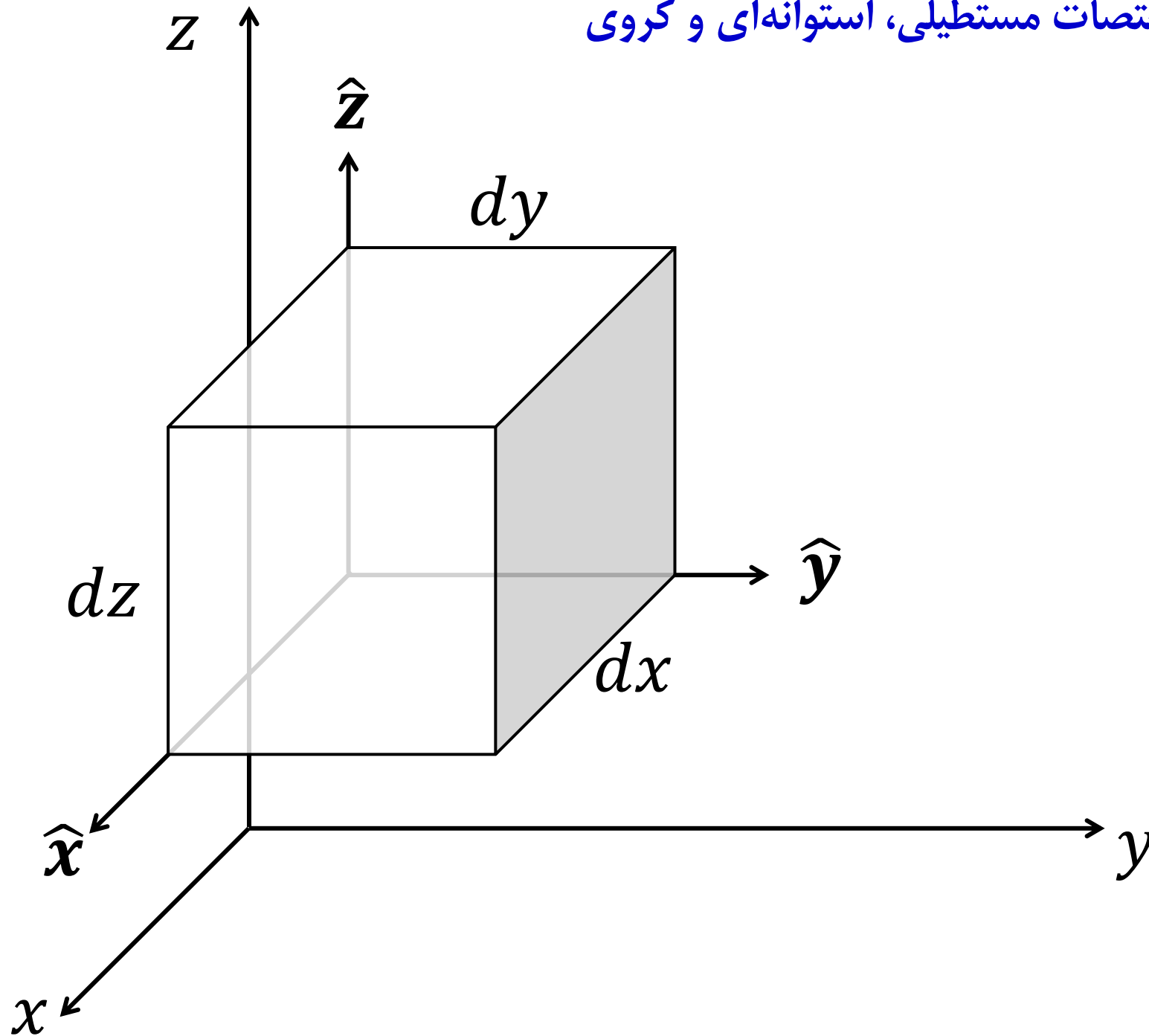
ریاضیات مهندسی

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

عملگر دل (نابلا) در دستگاه‌های مختلف مختصات

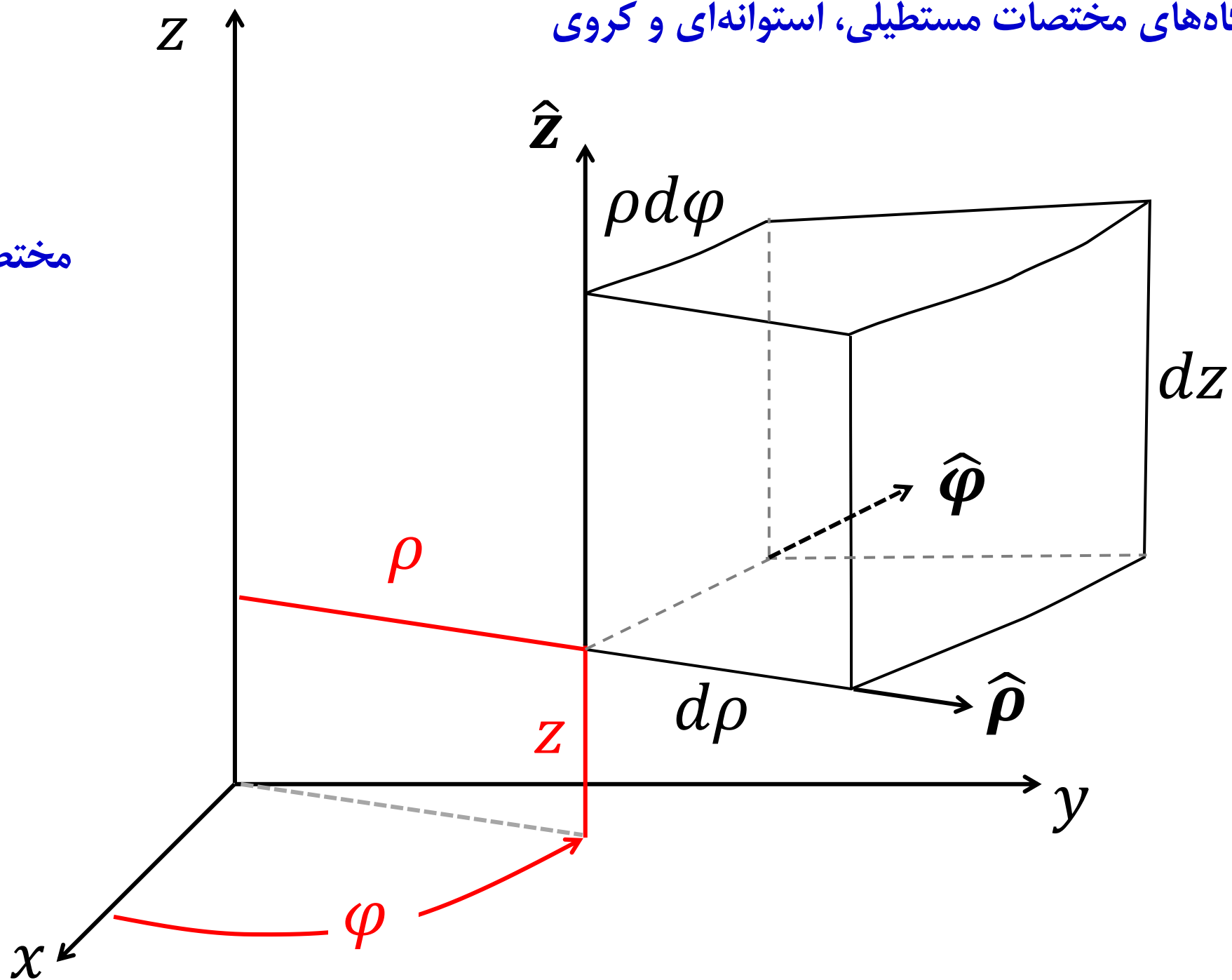
۱-۵- تبدیل دستگاه‌های مختصات مستطیلی، استوانه‌ای و کروی

مختصات مستطیلی



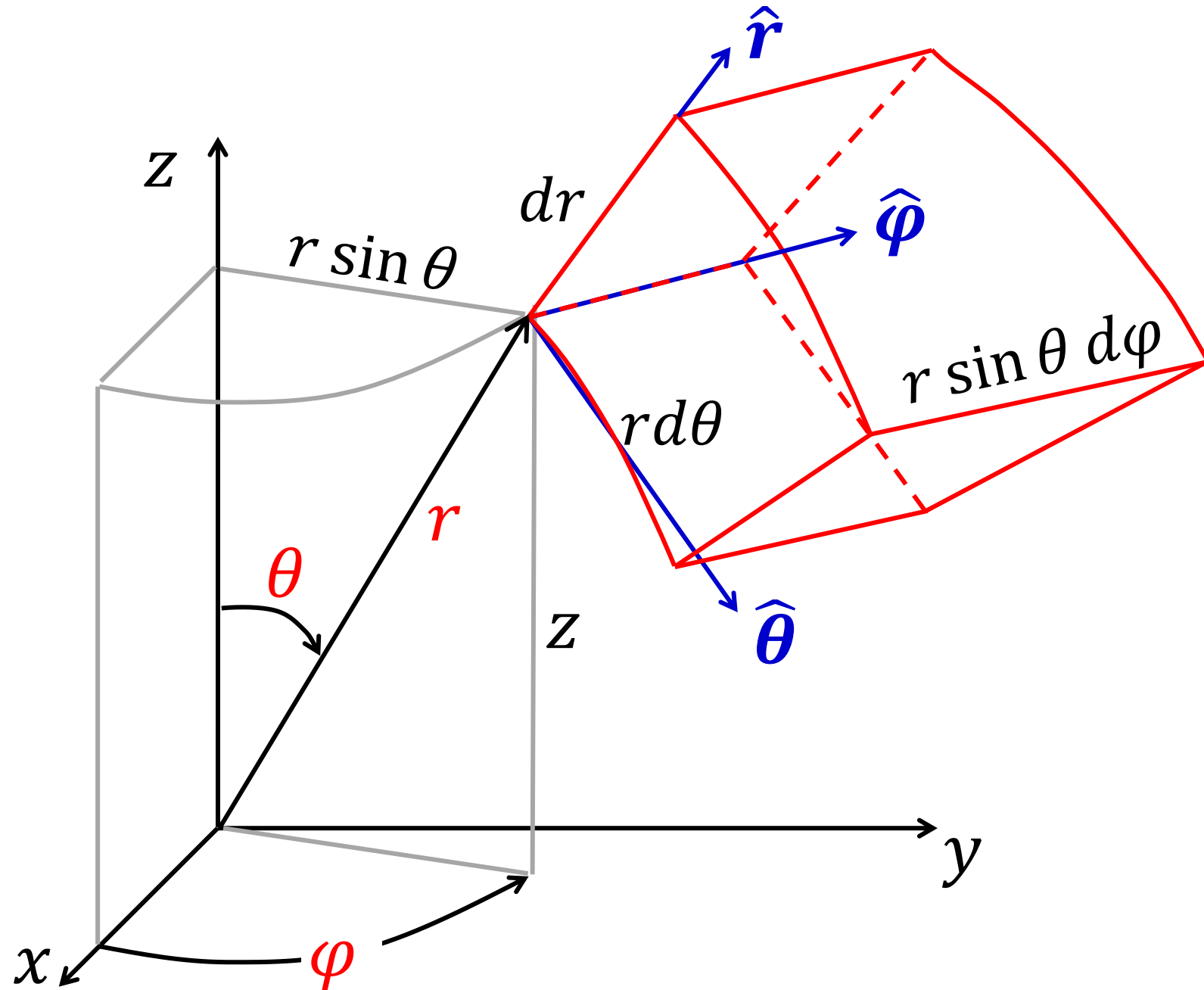
۱-۵- تبدیل دستگاه‌های مختصات مستطیلی، استوانه‌ای و کروی

مختصات استوانه‌ای



۱-۵- تبدیل دستگاه‌های مختصات مستطیلی، استوانه‌ای و کروی

مختصات کروی



To	From			
		Cartesian	Cylindrical	Spherical
	Cartesian	$x = x$ $y = y$ $z = z$	$x = \rho \cos \varphi$ $y = \rho \sin \varphi$ $z = z$	$x = r \sin \theta \cos \varphi$ $y = r \sin \theta \sin \varphi$ $z = r \cos \theta$
	Cylindrical	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$ $z = z$	$\rho = \rho$ $\varphi = \varphi$ $z = z$	$\rho = r \sin \theta$ $\varphi = \varphi$ $z = r \cos \theta$
	Spherical	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right)$ $\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$	$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\rho}{z} \right)$ $\varphi = \varphi$	$r = r$ $\theta = \theta$ $\varphi = \varphi$

مثال: تبدیل عملگر دل از مختصات مستطیلی به استوانه‌ای

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j}$$

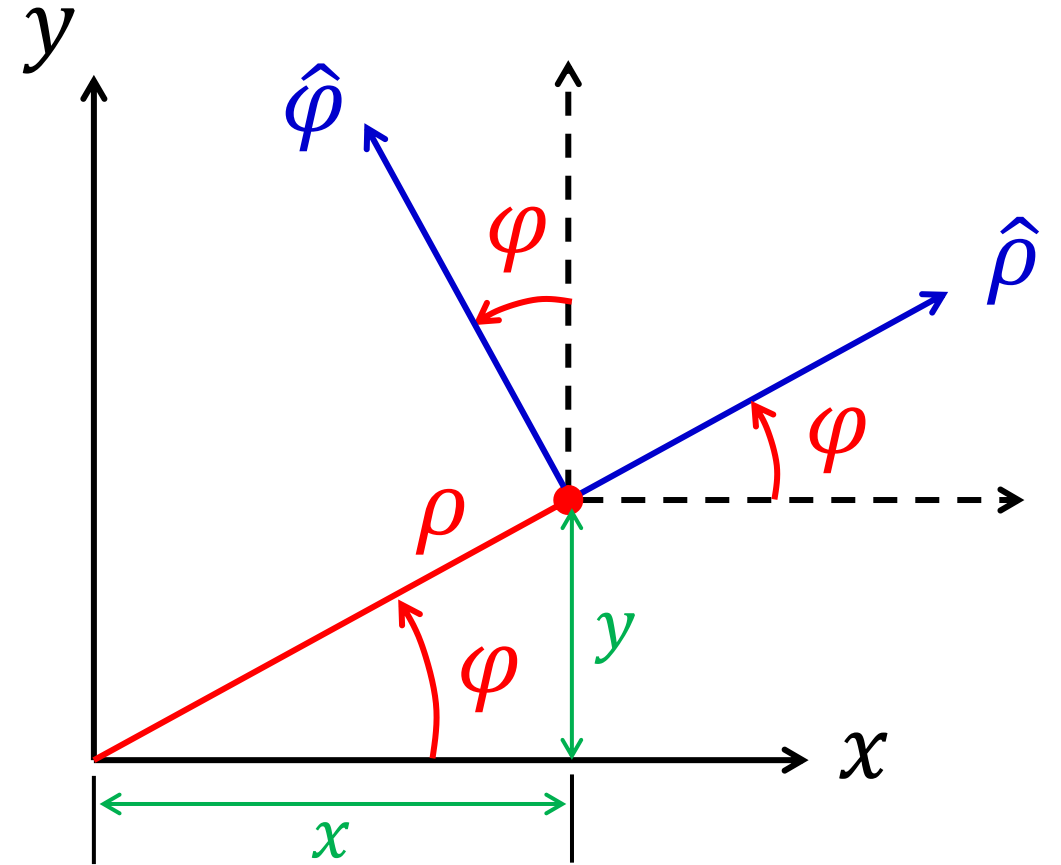
$$\hat{i} = \cos \varphi \hat{\rho} - \sin \varphi \hat{\varphi}$$

$$\hat{j} = \sin \varphi \hat{\rho} + \cos \varphi \hat{\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

قاعده مشتق زنجیری:

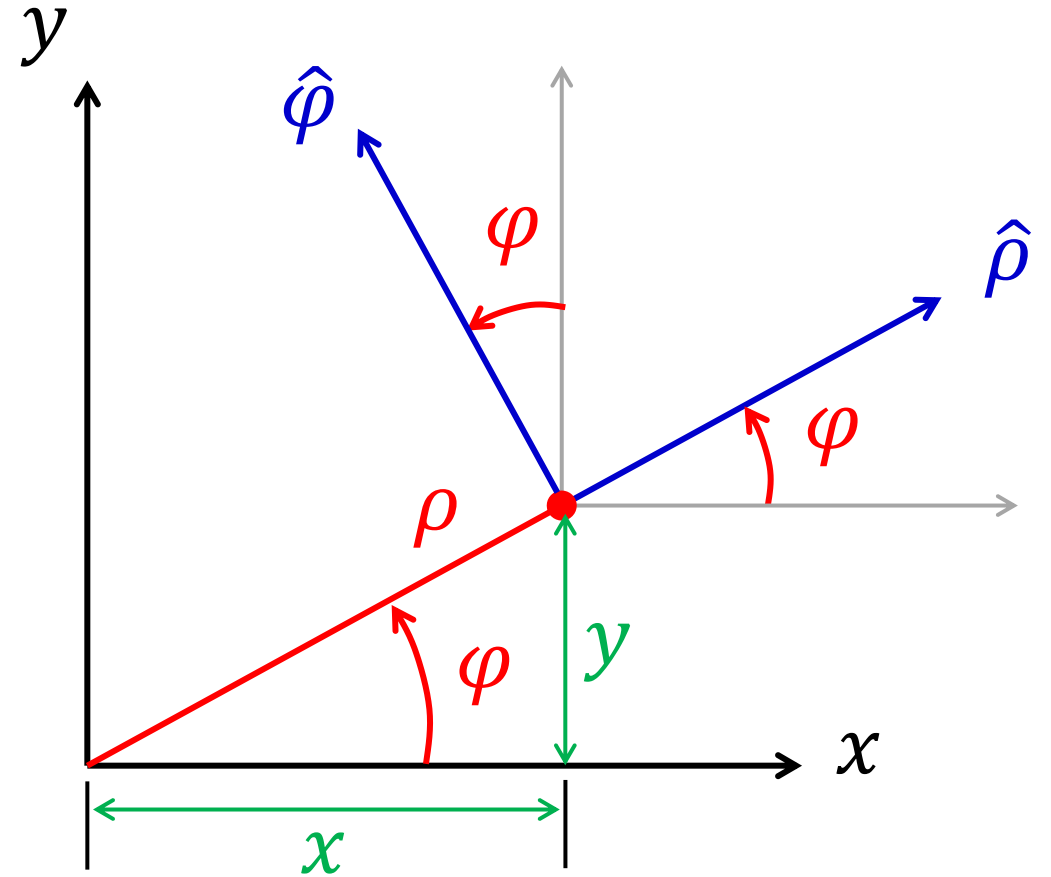


مثال: تبدیل عملگر دل از مختصات مستطیلی به استوانه‌ای

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\rho \cos \varphi}{\rho} = \cos \varphi$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\rho \sin \varphi}{\rho} = \sin \varphi$$



$$\hat{i} = \cos \varphi \hat{\rho} - \sin \varphi \hat{\varphi}$$

$$\hat{j} = \sin \varphi \hat{\rho} + \cos \varphi \hat{\varphi}$$

ادامه مثال: تبدیل عملگر دل از مختصات مستطیلی به استوانه‌ای

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-\rho \sin \varphi}{\rho^2} = \frac{-\sin \varphi}{\rho}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{x} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\rho \cos \varphi}{\rho^2} = \frac{\cos \varphi}{\rho}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) (\cos \varphi \hat{\rho} - \sin \varphi \hat{\varphi}) \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) (\sin \varphi \hat{\rho} + \cos \varphi \hat{\varphi}) + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{-\sin \varphi}{\rho} \right) (\cos \varphi \hat{\rho} - \sin \varphi \hat{\varphi}) \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho} \right) (\sin \varphi \hat{\rho} + \cos \varphi \hat{\varphi}) + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \\
&= (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \\
&= \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}
\end{aligned}$$

Operation	Cartesian coordinates (x, y, z)
Vector field: $\vec{A}$	$= A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$
Scaler field: f	$= f(x, y, z)$
Gradient: $\vec{\nabla} f$	$= \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$
Divergence: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$	$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Curl: $\vec{\nabla} \times \vec{A} =$ $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$	$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}$
Laplace operator $\nabla^2 f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \Delta f$	$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Operation	Cylindrical coordinates (ρ, φ, z)
Vector field: $\vec{A}$	$= A_\rho \hat{\rho} + A_\varphi \hat{\varphi} + A_z \hat{k}$
Scaler field: f	$= f(\rho, \varphi, z)$
Gradient: $\vec{\nabla} f$	$= \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$
Divergence: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$	$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Curl: $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ $= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\varphi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$	$= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\varphi} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \hat{k}$
Laplace operator $\nabla^2 f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \Delta f$	$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Operation	Spherical coordinates (r, θ, φ) where θ is the polar and φ is the azimuthal angle
Vector field: $\vec{A}$	$= A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\varphi \hat{\varphi}$
Scaler field: f	$= f(r, \theta, \varphi)$
Gradient: $\vec{\nabla} f$	$= \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$
Divergence: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$	$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$
Curl: $\vec{\nabla} \times \vec{A} =$ $\frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix}$	$= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\varphi} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial (\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \hat{k}$
Laplace operator $\nabla^2 f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \Delta f$	$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

مثال: کرل میدان زیر را در مختصات استوانه‌ای محاسبه کنید:

$$\vec{A} = \rho \hat{\rho} + z \sin \varphi \hat{\varphi} + 2z \hat{k}$$

$$A_\rho = \rho, \quad A_\varphi = z \sin \varphi, \quad A_z = 2z$$

$$(c) \text{Curl}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\varphi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\varphi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \rho & \rho z \sin \varphi & 2z \end{vmatrix}$$

$$\text{Curl}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} =$$

$$= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\varphi} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \hat{k}$$

$$= \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(2z)}{\partial \varphi} - \frac{\partial(z \sin \varphi)}{\partial z} \right] \hat{\rho} + \left[\frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\partial(2z)}{\partial \rho} \right] \hat{\varphi} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho z \sin \varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right] \hat{k}$$

$$= \left[\frac{1}{\rho} (0) - \sin \varphi \right] \hat{\rho} + [0 - 0] \hat{\theta} + \frac{1}{\rho} [z \sin \varphi - 0] \hat{k}$$

$$= -\sin \varphi \hat{\rho} + \frac{z \sin \varphi}{\rho} \hat{k} \quad \blacksquare$$

مثال: دیورژانس میدان $\vec{A}$ را در مختصات کروی محاسبه کنید: $\vec{A} = 2\hat{r} + r \cos \theta \hat{\theta} + r\hat{\phi}$

$$A_r = 2, \quad A_\theta = r \cos \theta, \quad A_\phi = r$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(2r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cos \theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial r}{\partial \phi}$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(2r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2} r \sin 2\theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} (0)$$

$$= \frac{1}{r^2} (4r) + \frac{1}{r \sin \theta} (r \cos 2\theta) = \frac{4}{r} + \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} \quad \blacksquare$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

فصل ۳: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

آشنایی با معادلات دیفرانسیل – بخش ۱: انواع پاسخ‌های معادلات دیفرانسیل

توسط: سید محمد جعفری

۱- آشنایی با معادله دیفرانسیل

□ معادله دیفرانسیل یک دسته از معادلات ریاضی است که بیانگر رابطه بین یک تابع مجهول از یک یا چند متغیر مستقل و مشتق‌های مرتبه‌های مختلف آن نسبت به متغیرهای مستقل است.

□ بسیاری از قوانین عمومی طبیعت (در فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و ستاره‌شناسی)، طبیعی‌ترین بیان ریاضی خود را در زبان معادلات دیفرانسیل می‌یابند.

□ بیشتر معادلات دیفرانسیل، دارای بخش‌های غیرخطی و پیچیده اند، لذا یافتن جواب تحلیلی برای آنها امری دشوار یا غیرممکن است.

ادامهٔ آشنایی با معادله دیفرانسیل

- عدم وجود پاسخ تحلیلی برای این گونه معادلات پیچیده و غیرخطی، منجر به ایجاد و گسترش روش‌های حل عددی شده است.
- مهمترین شاخص‌های ارزیابی روش‌های حل عددی، سرعت، دقت و صحت حل معادله است.
- با توجه به ارتقاء چشمگیر سرعت و ظرفیت رایانه‌ها، روش‌های حل عددی بشدت در حال رشد و گسترش اند.

ادامهٔ آشنایی با معادله دیفرانسیل:

- معادلاتی که در آنها وابستگی بین تابع، متغیرها و مشتقات تابع وجود دارد.
- منظور از حل معادلهٔ دیفرانسیل یافتن تابع پاسخ و حذف مشتقات است.
- ویژگی اصلی معادلات دیفرانسیل وجود جملهٔ مشتق‌دار است.

شکل کلی معادله دیفرانسیل جزئی:

$$F\left[\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{متغیرهای مستقل}}, \underbrace{u(x_1, \dots, x_n)}_{\text{متغیرهای وابسته} \equiv \text{مجهول}}, \underbrace{u_{x_1}, \dots, u_{x_n}}_{\text{مشتقات مرتبه اول}}, \underbrace{u_{x_1}^2, u_{x_1 x_2}, \dots}_{\text{مشتقات مرتبه دوم و بالاتر}}\right] = 0$$

۱-۱- معادلات دیفرانسیل معمولی

:(Ordinary differential equation = ODE)

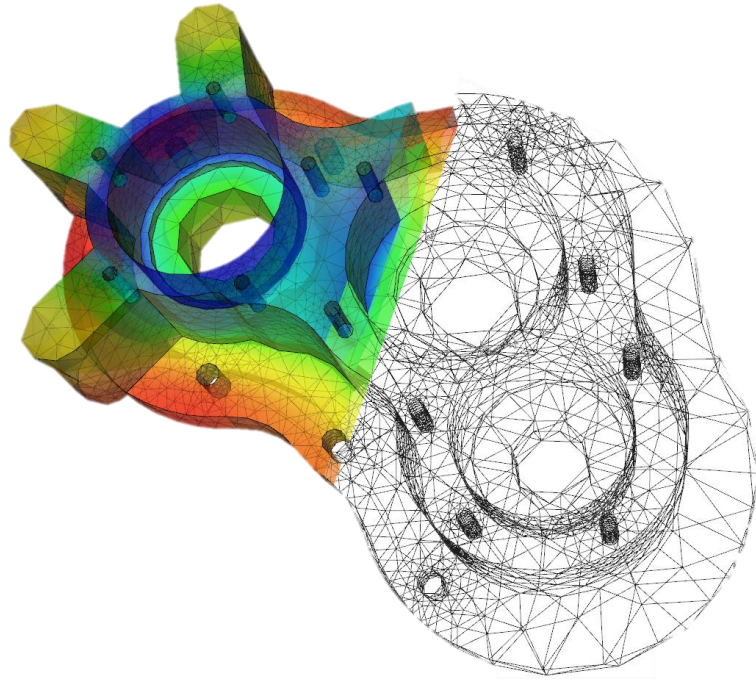
□ معادلاتی که در آنها تابع، تنها به یک متغیر مستقل (زمان یا مکان) وابسته است.

$$f(x), f(t), \frac{df}{dx} = f' = f_x, \frac{df}{dt} = \dot{f} = f_t$$

□ تک متغیری اند و در هندسه، مکانیک، برق، زمین شناسی، اقتصاد و ... وجود دارند.

$$m d^2x/dt^2 = m\ddot{x} = f(x, t) \quad \square \text{ مانند قانون دوم نیوتن:}$$

شکل کلی معادله دیفرانسیل معمولی: $F[x, y(x), y'(x), \dots, y^n(x)] = 0$



۱-۲- معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (Partial differential equation = PDE):

□ معادلاتی که در آنها تابع به چند متغیر (مانند زمان، مکان، دما، فشار) وابسته است.

□ این معادلات در قوانین مهم طبیعت مانند: بقای جرم، انرژی،

Visualization of heat
transfer in a pump casing

اندازه حرکت وجود دارند.

مشتق نسبی یا جزئی یا پاره‌ای (Partial differential):

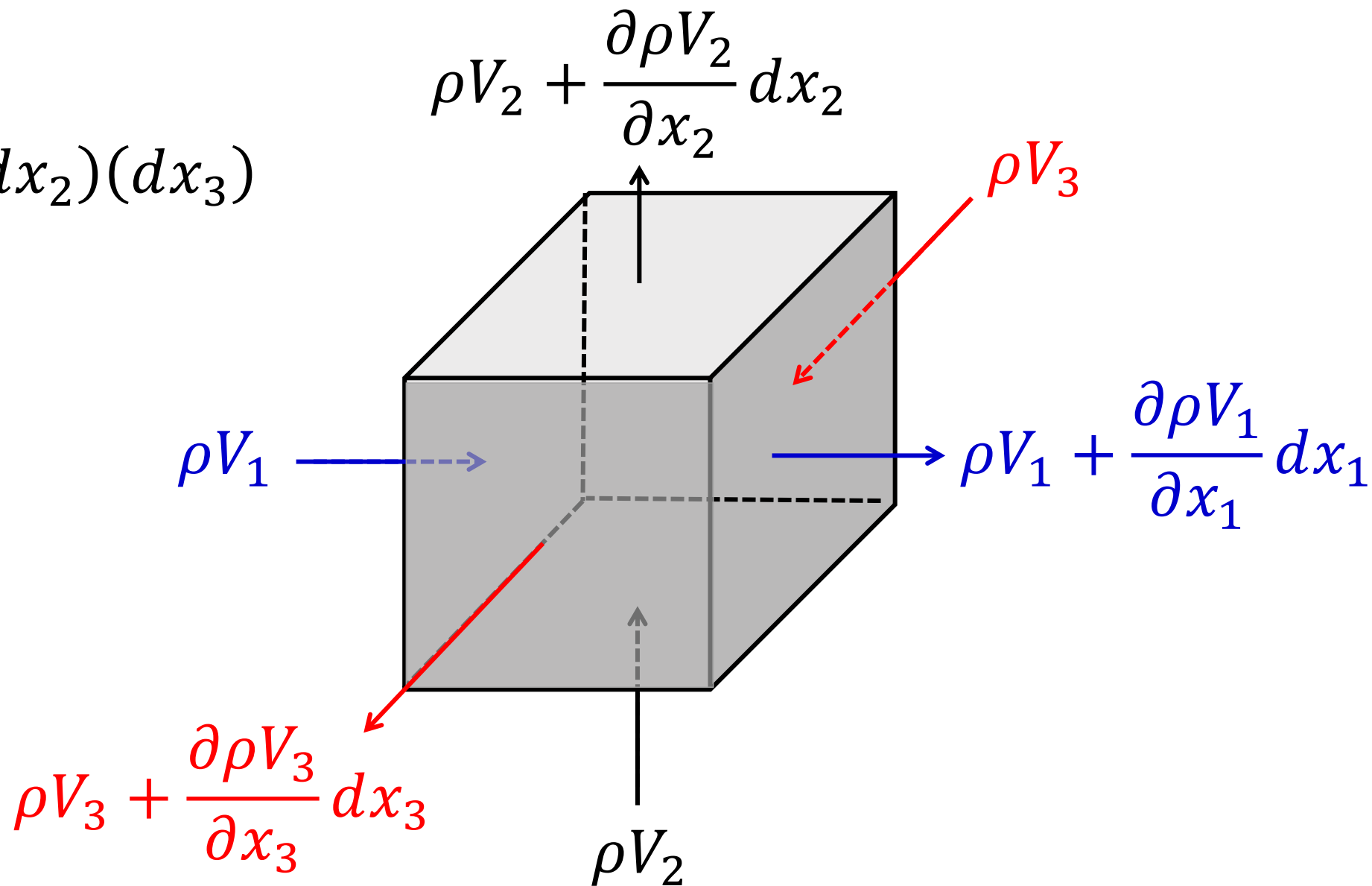
❖ فرض: $u = u(x, y, z)$ یک تابع از متغیرهای مستقل x ، y و z است.

❖ در این صورت مشتق نسبی u نسبت به x برابر است با:

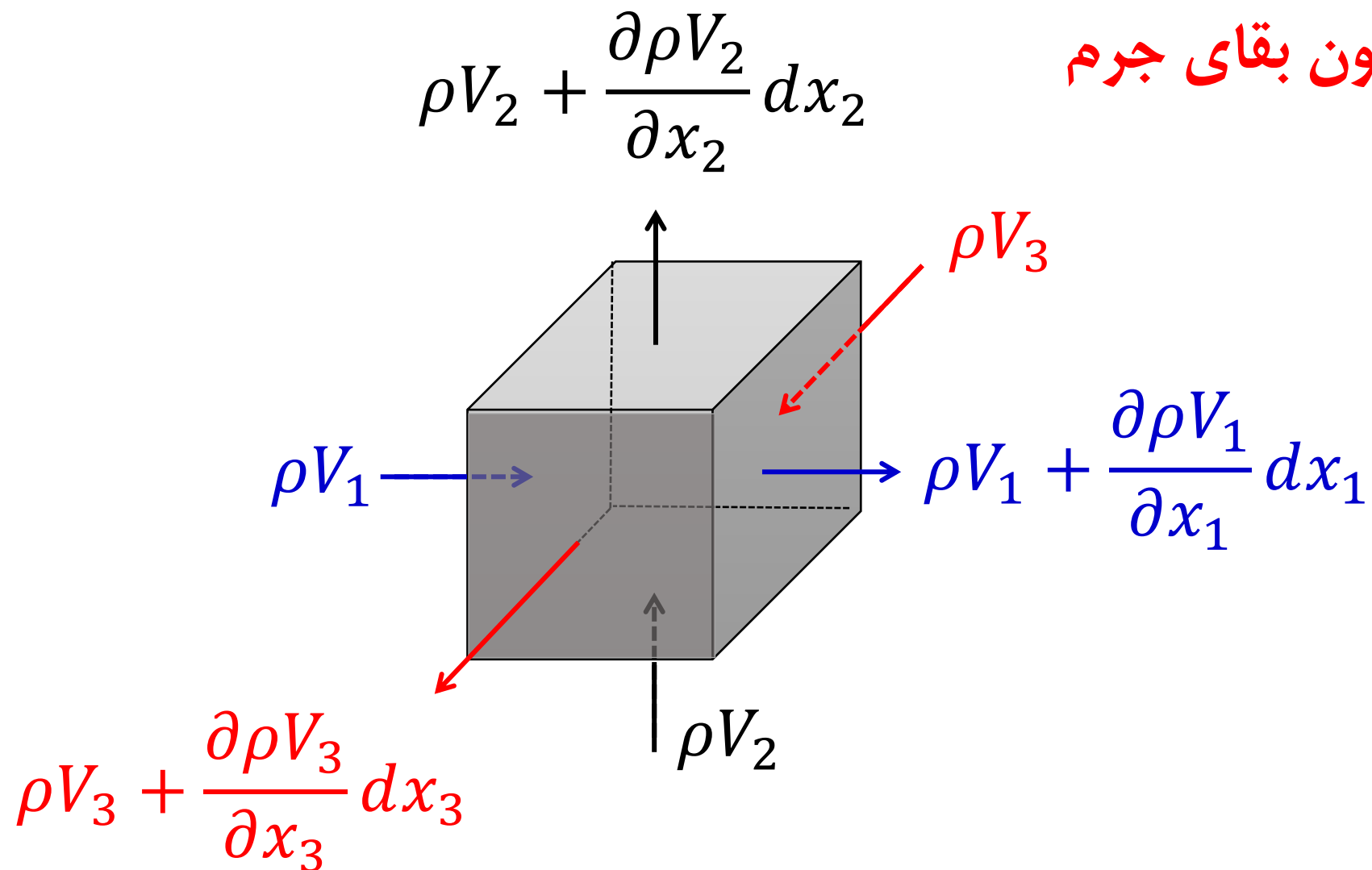
$$D_x(u) = D_x u = \frac{\partial u}{\partial x} = u_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + h, y, z) - u(x, y, z)}{h}$$

مثال: مانند قانون بقای جرم (conservation of mass):

$$dV = (dx_1)(dx_2)(dx_3)$$



ادامه مثال قانون بقای جرم



تغییرات جرم نسبت به زمان = جرم خروجی - جرم ورودی

ادامه مثال قانون بقای جرم

$$\begin{aligned} & \rho V_1(dx_2 dx_3) - \left[\rho V_1 + \frac{\partial(\rho V_1)}{\partial x_1} dx_1 \right] (dx_2 dx_3) \\ & + \rho V_2(dx_1 dx_3) - \left[\rho V_2 + \frac{\partial(\rho V_2)}{\partial x_2} dx_2 \right] (dx_1 dx_3) \\ & + \rho V_3(dx_1 dx_2) - \left[\rho V_3 + \frac{\partial(\rho V_3)}{\partial x_3} dx_3 \right] (dx_1 dx_2) \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (\rho dx_1 dx_2 dx_3)$$

قانون بقای جرم

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho V_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho V_3)}{\partial x_3} = 0$$



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

دسته‌بندی ظاهری معادلات (مرتبه معادله)

۱- مرتبه معادله (Equation order): بالاترین مرتبه مشتق

$$\frac{dy}{dx} + x \frac{d^2y}{dx^2} = \sin x \quad \longrightarrow \quad \text{مرتبه ۲}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{مرتبه ۳}$$

دسته‌بندی ظاهری معادلات (درجه معادله)

۲- درجه معادله (Equation degree): توان بالاترین مرتبه مشتق

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + x \frac{d^2y}{dx^2} = y^5 \quad \longrightarrow \quad \text{مرتبه ۲ و درجه ۱}$$

$$u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^5 - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{مرتبه ۳ و درجه ۵}$$

دسته‌بندی ظاهری معادلات (خطی بودن)

۳- خطی (linear):

اگر در معادله دیفرانسیل روی تابع مجهول و مشتقات آن، فقط عملیات خطی مانند چهار عمل اصلی و ضرب عدد ثابت ($+$, $-$, $\times$, $\div$)، ضرب عدد ثابت و متغیر مستقل) صورت بگیرد.

$$\underbrace{(\sin x)y}_{\text{جمله خطی}} + \underbrace{5x^2y''}_{\text{جمله خطی}} - \underbrace{2y'}_{\text{خطی}} + \underbrace{\cos y}_{\text{غیر خطی}} - \underbrace{6y^3}_{\text{غیر خطی}} + \underbrace{(y')^4}_{\text{غیر خطی}} = \underbrace{\sin x^2}_{\text{جمله خطی}}$$

دسته‌بندی ظاهری معادلات (همگن بودن)

۴- همگن (Homogeneous):

اگر در همهٔ جملات معادلهٔ دیفرانسیل تابع یا مشتقاتش حضور داشته باشند، آن معادله را **همگن** گویند. در غیر این صورت ناهمگن است.

$$xy'' + \sin x \cos y + y^2 = x^2y \quad \Rightarrow \quad \text{معادلهٔ همگن:}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x \quad \Rightarrow \quad \text{معادلهٔ ناهمگن:}$$

جملهٔ ناهمگن

جواب معادله دیفرانسیل جزئی:

جواب معادله دیفرانسیل به چند دسته کلی تقسیم می شود:

جواب عمومی (General solution):

جوابی از معادله دیفرانسیل است که در آن ثابت به کار رفته است و با حذف جمله ناهمگن به دست می آید.

مثلاً عبارت: $y_h(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ جوابی عمومی برای معادله ناهمگن $y'' + y = x$ است.

نکته: معادلات دیفرانسیل جزئی نیز همانند معادلات دیفرانسیل معمولی دارای جوابی هستند که در معادله صدق می‌کند ولی این نکته باید مد نظر گرفته شود که یک معادله دیفرانسیل ممکن است

جواب‌های متعدد داشته باشد مانند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

که می‌تواند جواب‌هایی مانند روبه‌رو داشته باشد:

$$\begin{cases} u = C \ln(x^2 + y^2) \\ u = C e^x \cos y \\ u = C(x^2 - y^2) \end{cases}$$

بدین ترتیب چگونه باید جواب معادله دیفرانسیل را منحصر به فرد (Unique) کرد؟!

معمولاً منحصر به فرد کردن پاسخ معادله دیفرانسیل با وجود شرایط دیگر میسر می‌شود.

جواب خاص (Specific solution):

□ اگر شرایط خاصی را مانند مقادیر اولیه یا مقادیر مرزی، برای جواب عمومی لحاظ کنیم به جوابی می‌رسیم که جواب خاص نام دارد.

□ مثلاً در معادله $y'' + y = 0$ با شرایط $y(0) = 0$ و $y'(0) = 5$ جواب خاص به صورت $y_h(x) = 5 \sin x$ است.

جواب خصوصی (Particular solution):

پاسخی که بر اساس وجود جمله ناهمگن در معادله صدق می کند.

مثلاً $y_p(x) = x$ جوابی خصوصی برای معادله ناهمگن $y'' + y = x$ است.

جواب غیرعادی: جواب غیرعادی یک معادله دیفرانسیل، یک منحنی است که بر تمام منحنی های حاصل از جواب عمومی مماس است. این جواب از جواب عمومی به دست نمی آید و ممکن است وجود نداشته باشد.

این دسته بندی ها در معادلات ODE و PDE مشترک است.

دسته بندی جمله‌های موجود در معادلات

عبارت ریاضی	تعریف جمله
$\frac{\partial u}{\partial t}$	جمله ناپایا (Unsteady) (وابسته به زمان):
$\frac{\partial u}{\partial x}$	جمله جابه‌جائی:
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	جمله نفوذ:
$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$	جمله پخش:

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

فصل ۳: معادلات دیفرانسیل جزئی (م.د.ج)

آشنایی با معادلات دیفرانسیل – بخش ۲: نام انواع معادلات

توسط: سید محمد جعفری

معادلات دیفرانسیل جزئی (م.د.ج) مرتبه اول خطی

$$P(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = R(x, y, u) \quad \text{شکل کلی:}$$

که در آن u متغیر وابسته، x و y متغیرهای مستقل اند.

□ برای حل معادله بالا می‌توان یکبار تغییرات u را فقط در جهت x ها در نظر گرفت.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

□ به عبارت دیگر مقدار تغییرات u در جهت y ها را صفر در نظر گرفت:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

□ بار دیگر تغییرات u را فقط در جهت y ها در نظر گرفت و تغییرات

در جهت x ها را صفر فرض کرد:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \xrightarrow{(1)} P(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} = R(x, y, u) \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \xrightarrow{(2)} Q(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = R(x, y, u) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \frac{du}{R(x, y, u)} = \frac{dx}{P(x, y, u)} \rightarrow f_1(x, y, u) = C_1 \\ \Rightarrow \frac{du}{R(x, y, u)} = \frac{dy}{Q(x, y, u)} \rightarrow f_2(x, y, u) = C_2 \end{array} \right.$$

$$\frac{du}{R(x, y, u)} = \frac{dx}{P(x, y, u)} = \frac{dy}{Q(x, y, u)} \quad (*)$$

با توجه به استقلال دو معادله فوق، باید ارتباطی بدین شکل برقرار باشد:

$$C_2 = f(C_1)$$

مثال: معادله دیفرانسیل جزئی روبه‌رو را حل کنید:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = x$$

$$\frac{du}{R(x, y, u)} = \frac{dx}{P(x, y, u)} = \frac{dy}{Q(x, y, u)} \rightarrow \frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{du}{x}$$

$$\begin{cases} dy = 2dx \rightarrow y = 2x + C_1 \rightarrow C_1 = y - 2x \\ du = xdx \rightarrow u = \frac{x^2}{2} + C_2 \rightarrow C_2 = u - \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

حال با تشکیل معادله $C_2 = f(C_1)$ داریم: $C_2 = f(C_1) \rightarrow u - \frac{x^2}{2} = f(y - 2x)$

$$u = f(y - 2x) + \frac{x^2}{2} \quad \blacksquare$$

شکل کانونی م.د.ج مرتبه دوم دو متغیره (Canonical form)

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial t} + Fu = G$$

در حالت کلی ضرائب A تا G می‌توانند تابع t و x باشند.

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$B^2 - 4AC = \Delta$$

دسته بندی از لحاظ نوع معادله:

نام	شرط	نمونه معادله	
هذلولی (Hyperbolic)	$\Delta > 0$	معادله موج (Wave)	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
سه‌موی (Parabolic)	$\Delta = 0$	معادله انتقال گرما (Heat)	$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
بیضوی (Elliptic)	$\Delta < 0$	معادله لاپلاس (Laplace)	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

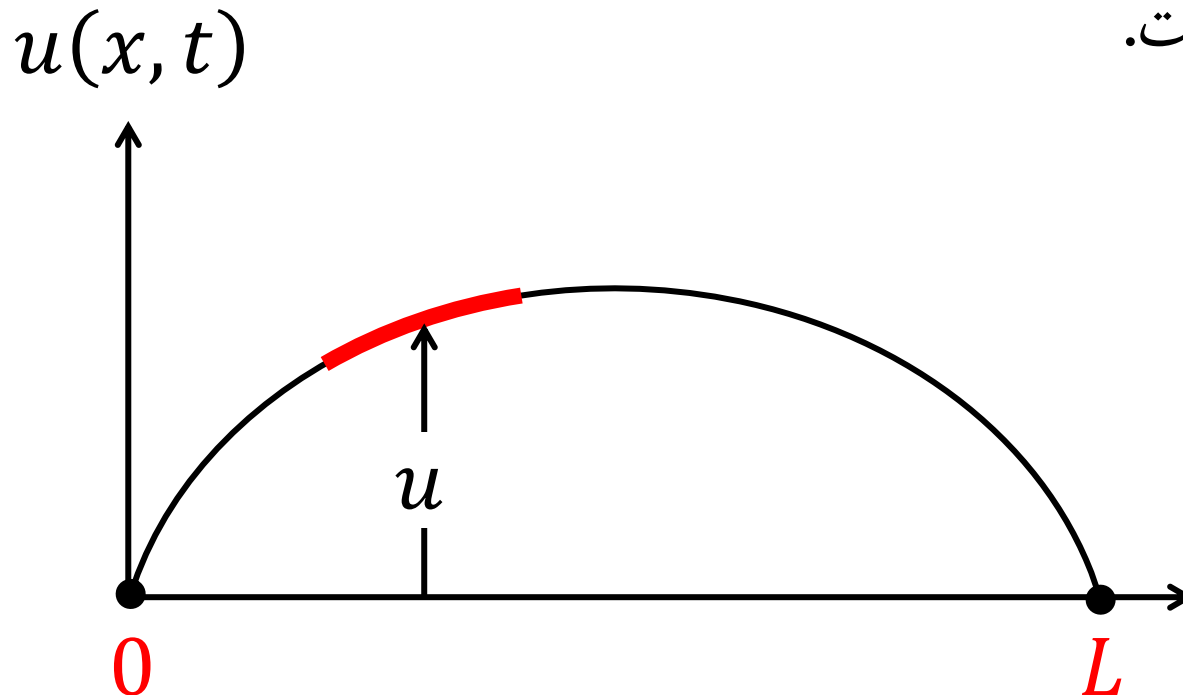
معادلات معروف

۱- معادله موج (wave equation)

فرض‌ها:

□ ریسمان جابه‌جایی افقی ندارد و جابه‌جایی عمودی آن $u(x, t)$ بسیار کوچک است.

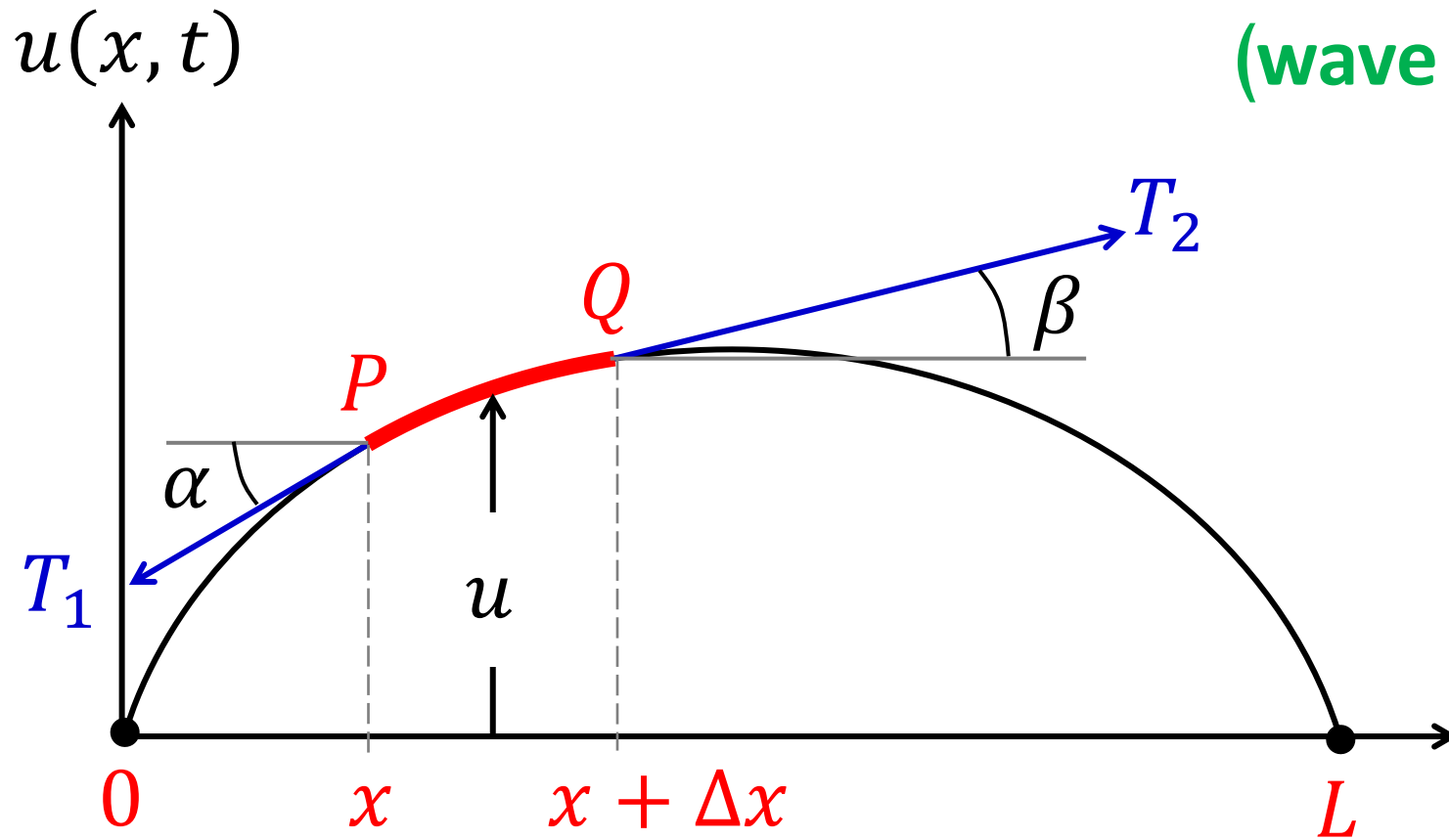
□ لذا کشش ریسمان در تمام طول آن ثابت (T) است.



ρ = mass per unit length

Waves in Ideal String

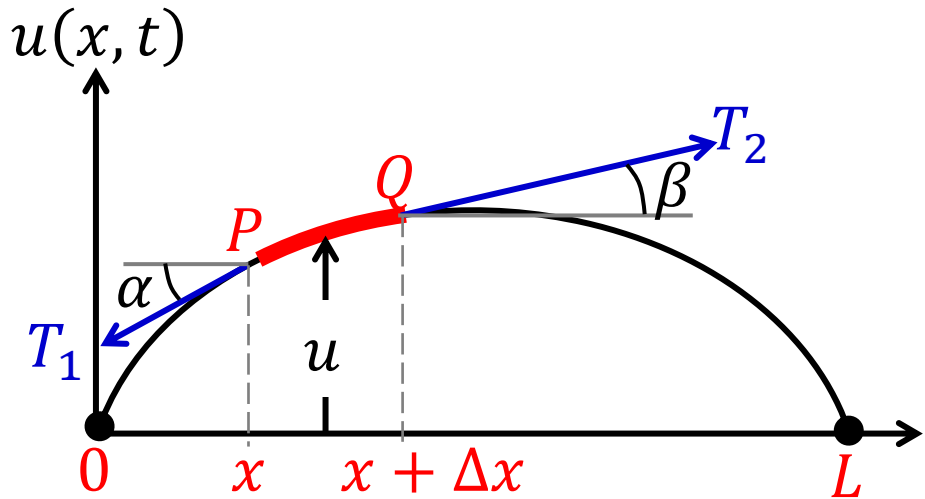
ادامه معادله موج (wave equation)



$$\sum F_x = 0 \rightarrow T_2 \cos \beta = T_1 \cos \alpha = T = \text{const.} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow T_2 \sin \beta - T_1 \sin \alpha = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \rightarrow \frac{T_2 \sin \beta}{T_2 \cos \beta} - \frac{T_1 \sin \alpha}{T_1 \cos \alpha} = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightarrow \tan \beta - \tan \alpha = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$



$$\tan \beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \bigg|_{x+\Delta x}, \quad \tan \alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \bigg|_x$$

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \bigg|_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \bigg|_x \right] = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

در حالت حدی وقتی $\Delta x \rightarrow 0$ ، این عبارت تعریف مشتق دوم است.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightarrow u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

معادلات معروف

۱- معادلات موج (wave equations)

یک بعدی :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, c^2 = \frac{T}{\rho}$$

دو بعدی :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy})$$

سه بعدی :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

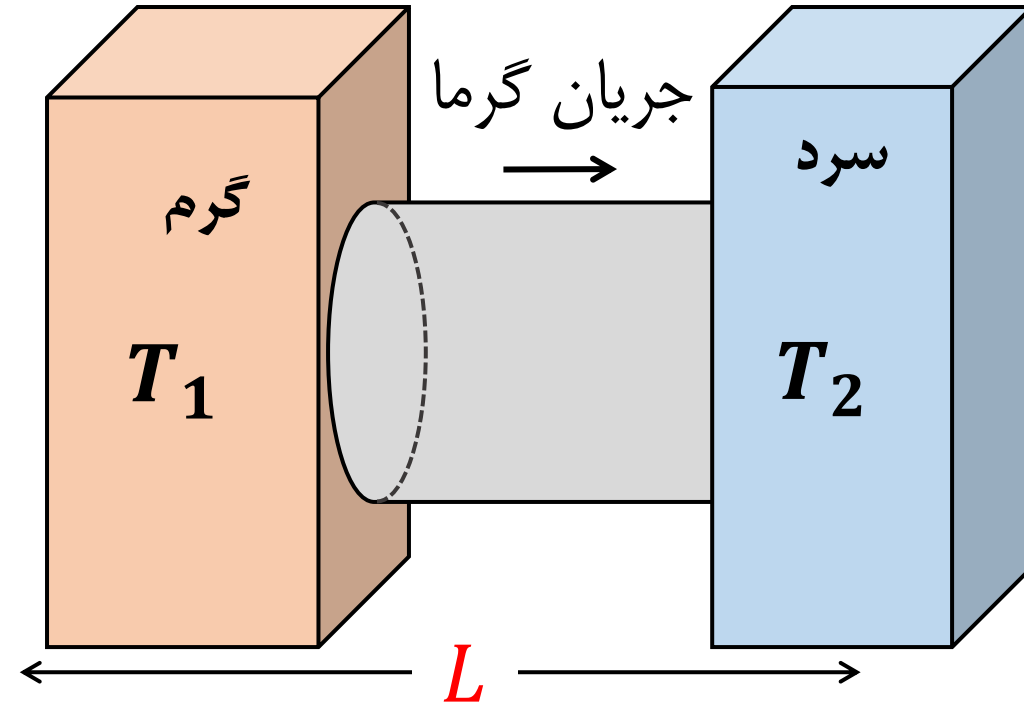
معادلات معروف

۱-۲ - معادله گرما (Heat equation) یا انتقال گرمای هدایتی (Conductive Heat Transfer)

یک بعدی : $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \rightarrow u_t = c^2 u_{xx}, c^2 = \frac{k}{\rho c}$

دو بعدی : $\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$

سه بعدی : $\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$



۲-۲- معادله لاپلاس (Laplace's equation)

اگر در معادله گرما جمله ناپایا حذف شود و جریان انتقال گرما پایا (steady state) باشد. $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$

معادله لاپلاس : $\nabla^2 u = 0$

به طور مثال، لاپلاس دو بُعدی بدین صورت است: $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$: لاپلاس دو بُعدی

این معادله از نوع بیضوی است: $\Delta = B^2 - 4AC = -4 < 0$

و در آن شاهد وجود جملات نفوذ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ هستیم. با توجه به این معادله می توان گفت عملگر لاپلاسیک یک عملگر بیضوی است.

لاپلاس قطبی (Polar) : $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$

۳- معادلهٔ جابه‌جایی

این معادله یکی از ساده‌ترین معادلات PDE است که در آن جملهٔ جابه‌جایی و جملهٔ ناپایا داریم و بدین صورت است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

این معادله از نوع سهموی است: $B = 0, A = 0, C = 0 \rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = 0$

۴- معادلهٔ ارتعاش تیر

معادلهٔ حاکم بر ارتعاش‌های قائم کوچک یک تیر کشسان یکنواخت بدین صورت است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

۵- معادلهٔ تریکومی (Tricomi equation)

این معادله از لحاظ فیزیکی از نوع آمیخته است زیرا در نیم صفحهٔ بالا بیضوی و در نیم صفحهٔ پایین هذلولی است.

در ایجاد جریان Transonic در کنار اشیاء کاربرد دارد.

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$A = y, B = 0, C = 1 \rightarrow \Delta = 0 - 4y = 0$$

در نیم صفحهٔ بالا بیضوی است: $y > 0 \rightarrow \Delta < 0$

در نیم صفحهٔ بالا هذلولی است: $y < 0 \rightarrow \Delta > 0$

۶- معادله پواسون (Poisson's equation)

این معادله از لحاظ فیزیکی از نوع آمیخته است زیرا در نیم صفحه بالا بیضوی و در نیم صفحه پایین هذلولی است.

معادله پواسون در حل میدان گرانش یا پتانسیل الکتریکی کاربرد دارد.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$



Siméon Denis Poisson
(1781–1840)
France

۷- معادله تلگراف (Telegrapher's equation)

معادلات تلگراف رفتار خطوط انتقال مانند خطوط تلگراف، تلفن، مدارهای فرکانس بالا، خطوط انتقال برق و ... را توصیف می کنند.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta u$$

۸- معادله بورگرز (Burgers' equation)

معادله بورگرز را می‌توان ساده‌ترین مدل ریاضی برای ترکیب دو عامل پراهمیت و اساسی رفتارهای غیرخطی (Nonlinearity) و نیز پخش (Diffusion) و اتلاف انرژی (Dissipation) در حوزه گسترده و پر از تنوع فیزیک و مکانیک امواج به حساب آورد.

به ازاء هر مقدار ثابت داده شده و مفروض ضریب لزجت ν ، فرم عمومی معادله بورگرز عبارت است از:

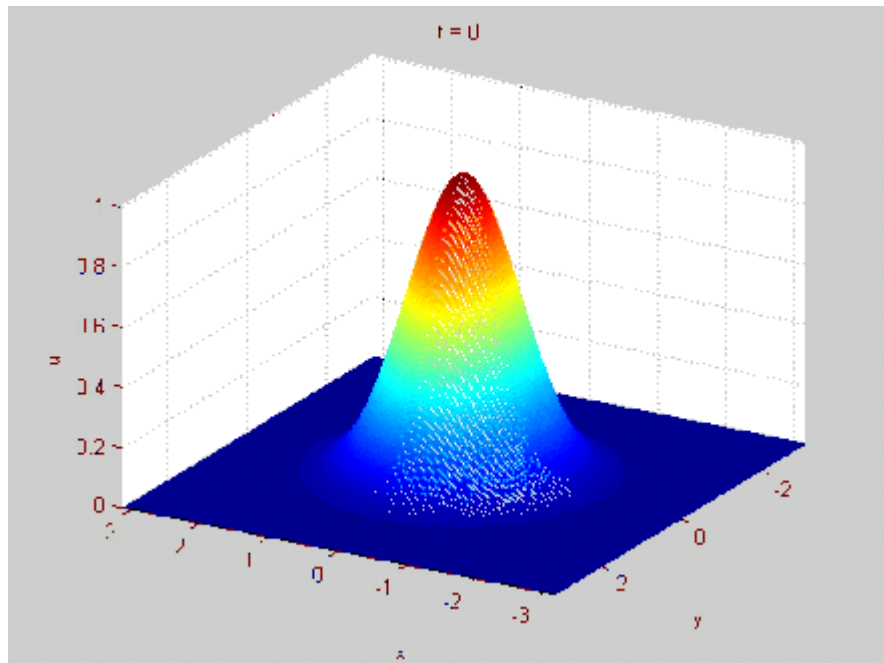
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

□ جمله غیرخطی $u \frac{\partial u}{\partial x}$ ، مسئول پشته کردن و قد بلند نمودن موج، ایجاد شیبی تند و

سرانجام بروز شوک می‌باشد.

□ جمله خطی $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ درست در جهت مخالف اولی، مسئول پخش کردن و مستهلک

نمودن ساختارهای ایجاد شده در منحنی شکل موج است.



۹- معادله اشتورم-لیوویل (Sturm-Liouville)

این معادله در اصل یک معادله دیفرانسیل عادی مرتبه دوم حقیقی
(Ordinary Differential Equations = ODE) است.

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = -\lambda w(x)y$$

۹-۱- معادله بسل (Bessel equation)

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

۹-۲- معادله لژاندر (Legendre equation)

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + \nu(\nu + 1)y = 0$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

فصل ۳: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

شرایط مرزی

توسط: سید محمد جعفری

شرایط:

برای یافتن جواب خاص از جواب عمومی نیاز به شرایط داریم. این شرایط چند دسته اند:

۱- شرایط اولیه (Initial condition):

اگر شرایط داده شده در زمان صفر ($t = 0$) باشد، آن را شرایط اولیه گویند. مثال:

$$u(x, t): u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = \sin x, \quad u_{tt}(x, 0) = -x$$

برای پاسخ خاص، به تعداد مرتبه مشتق نسبت به زمان به شرایط اولیه نیاز داریم.

شرایط اولیه بر مقدار متغیرهای دینامیکی (متغیرهای حالت) در هر زمان آینده تأثیر می‌گذارد.

۲- شرایط مرزی (Boundary conditions):

□ اگر شرط داده شده نسبت به مکان (مثلاً در ابتدا و انتها یا نقطه خاص فیزیکی) باشد، به آن

شرط مرزی گویند که سه حالت دارد:

(الف) مقدار تابع در مکان معلوم است که شرط مرزی دیریکله (Dirichlet) نام دارد. در شرط

مرزی دیریکله اصطلاحاً پتانسیل روی مرزها مشخص است. مانند:

$$u(x, t): u(0, t) = 0 \quad , \quad u(L, t) = t^2$$

(ب) مقدار مشتق تابع در مکان معلوم است که شرط مرزی نیومن (Neumann) نام دارد. در شرط

مرزی نیومن اصطلاحاً گرادیان پتانسیل (میدان الکتریکی) روی مرزها معلوم است. مانند:

$$u(x, t): u_x(0, t) = t + 1 \quad , \quad u_x(L, t) = \sin t$$

(ج) ترکیبی از مقدار تابع و مشتق آن در مکان معلوم است که شرط مرزی رابین (Robin) نام دارد. مانند:

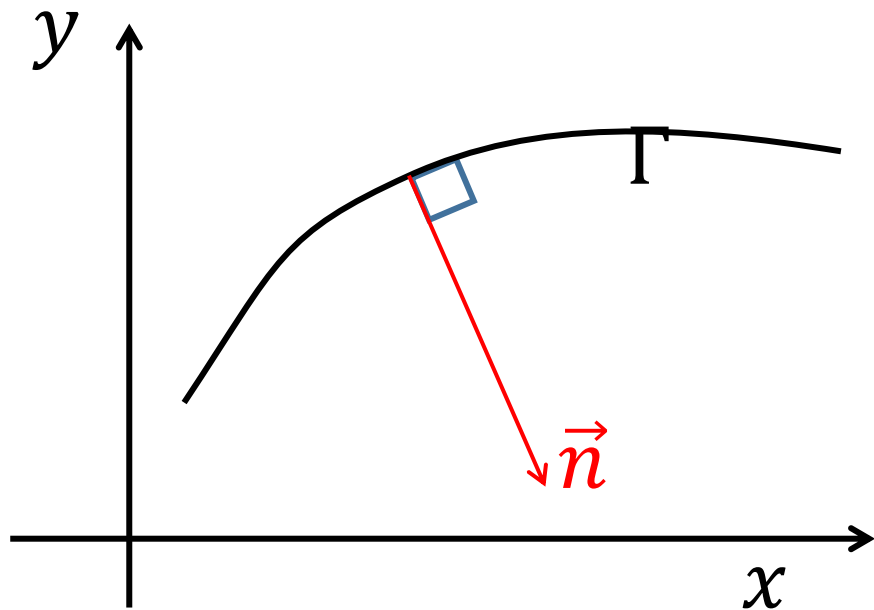
$$u(x, t): u(0, t) = u_x(0, t) + t \quad , \quad u_x(L, t) + u(L, t) = 0$$

$$4u_{tt} = u_x + 5u_{xx}$$

مثال: ۲ شرط اولیه و ۲ شرط مرزی نیاز داریم:

۳- شرط کوشی (Cauchy conditions):

شرط کوشی روی یک منحنی Γ در دامنه حل داده می‌شود و روی این منحنی هم مقدار تابع و هم مشتق تابع در جهت عمود بر منحنی مشخص است.



$$u(x, y) = \varphi(x, y) \quad \text{on curve } \Gamma$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \psi(x, y) \quad \text{on curve } \Gamma$$

□ در این نوع شرط اگر Γ همان محور x باشد و متغیر دوم y باشد، شرط کوشی همان شرط اولیه

(Initial condition) می‌شود. این شرط در روش حل منحنی مشخصه به کار می‌رود.

□ **ناحیه بسته:** در بررسی یک مسأله ناحیه D بسته است زمانی که توسط مرزهای دامنه احاطه شده

باشد و تمامی نقاط درون مرز متعلق به D باشند. به طور مثال در مختصات مستطیلی $c \leq y$

$\leq d$ و $a \leq x \leq b$ و در دستگاه مختصات قطبی $R_1 \leq \rho \leq R_2$ ناحیه بسته اند.

□ **ناحیه باز:** ناحیه‌ای که بسته نباشد، باز نامیده می‌شود. مانند ناحیه‌ای که تا بی‌نهایت گسترده باشد

یا اینکه درون مرزی باشد که تمام نقاط داخل مرز مربوط به ناحیه نباشد.

□ **نکته:** برای مسائلی که بسته اند و جزء مسائل مقدار مرزی (Boundary value problem =)

(BVP) اند، شرایط خوش رفتاری (well-posed problem) و بد رفتاری (ill-posed) تعریف

می‌شود.

مسأله خوش رفتار:

وقتی الگوهای ریاضی از پدیده‌های فیزیکی دارای ویژگی‌هایی بدین شرح باشد:

□ یک پاسخ وجود داشته باشد.

□ پاسخ، منحصر به فرد باشد.

□ رفتار حل به‌طور پیوسته با شرایط اولیه تغییر کند.

مسأله بد رفتار:

- در یک مسأله مقدار مرزی بد رفتار شرایط مرزی و یا ناحیه D طوری است که یا پاسخ وجود ندارد یا ممکن است که پاسخ وجود داشته باشد ولی تغییرات کوچکی در شرایط مرزی به تغییرات بزرگی در پاسخ منجر می شود و به تعبیری حل ناپایدار (Unstable) است.
- این درحالی است که در یک مسأله خوش رفتار، پاسخ منحصر به فرد وجود دارد و تغییرات کوچک در شرایط مرزی تأثیر اندکی روی حل دارد و حل پایدار (Stable) است.

خلاصه مطالب:

نوع ناحیه	نوع شرایط: مرزی یا اولیه	نوع معادله مشتق جزئی
باز	شرط کوئی	مرتبه اول
باز	شرط کوئی	مرتبه دوم هذلولی
باز	شرط نیومن، رابین و یا دیریکله	مرتبه دوم سهموی
بسته	شرط نیومن، رابین یا دیریکله بدون شرط اولیه	مرتبه دوم بیضوی

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

فصل ۳: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

روش‌های حل PDE: استفاده از معادلات عادی (ODE) و انتگرال‌گیری

توسط: سید محمد جعفری

۱- استفاده از معادلات معمولی (ODE) و انتگرالگیری

در مواردی که یک متغیر در مشتقات مشترک باشد، می‌توان با تغییر متغیر از معادلات ODE استفاده کرد. لذا ابتدا مروری بر معادلات معمولی مهم داریم:

$$y' + p(x)y = q(x) \quad \text{۱-۱- معادلات خطی مرتبه اول}$$

برای حل این معادلات بدین صورت عمل می‌کنیم:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left[\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C \right]$$

۱-۲- معادلات خطی همگن مراتب بالاتر با ضرایب ثابت (روش عملگر)

$$y^{(n)} = D^n y$$

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \cdots + a_2 D^2 y + a_1 D y + a_0 y = 0$$

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0) y = 0$$

با حذف y به معادله مشخصه می‌رسیم: The characteristic equation

$$a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0 = 0 \quad *$$

سپس با حل معادله * مقادیر D را می‌یابیم.

$$y(x) = Ce^{rx}$$

حالت ۱: اگر D عددی حقیقی (real) به صورت r باشد، داریم:

یادداشت: اگر چند تا ریشه حقیقی داشتیم مثلاً r_1, r_2 و r_3 پاسخ برابر است با:

$$\begin{cases} D_1 = r_1 \\ D_2 = r_2 \\ D_3 = r_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = C_1 e^{r_1 x} \\ y_2(x) = C_2 e^{r_2 x} \\ y_3(x) = C_3 e^{r_3 x} \end{cases}$$

$$y(x) = \sum_{i=1}^3 y_i = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} \quad \blacksquare$$

حالت ۲: اگر D به صورت مزدوج مختلط به صورت $D = a \pm bi$ باشد، داریم:

$$y(x) = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) \quad \text{مثال:}$$

$$y'' - 8y' + 17y = 0, \quad y(0) = -4, \quad y'(0) = -1$$

The characteristic equation: $D^2 - 8D + 17 = 0 \rightarrow D = 4 \pm i$

$$y(x) = e^{4x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

$$y'(x) = 4e^{4x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{4x}(-c_1 \sin x + c_2 \cos x)$$

$$\begin{cases} -4 = y(0) = c_1 \\ -1 = y'(0) = 4c_1 + c_2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} c_1 = -4 \\ c_2 = 15 \end{cases}$$



$$y(x) = e^{4x}(-4 \cos x + 15 \sin x)$$



حالت ۳: اگر هر یک از این مقادیر تکرار شود، کافی است به ازاء هر تکرار جواب را در x ضرب کنیم. مثلاً برای معادله مرتبه دوم خطی همگن داریم:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$aD^2 + bD + c = 0 \rightarrow D_1 = D_2 = r$$

فرض: ریشه معادله مشخصه حقیقی است اما اگر مختلط هم بود با همین روش را می‌رویم.

$$y_1(x) = c_1 e^{rx}, \quad y_2(x) = c_2 x e^{rx}$$

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} \quad \blacksquare$$

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 12, y'(0) = 2$$

مثال:

The characteristic equation and its roots:

$$D^2 - 4D + 4 = (D - 2)^2 = 0 \rightarrow D_1 = D_2 = 2$$

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

$$y'(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} + 2c_2 x e^{2x}$$

$$\begin{cases} 12 = y(0) = c_1 \\ -3 = y'(0) = 2c_1 + c_2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} c_1 = 12, c_2 = -27 \\ \downarrow \\ y(x) = 12e^{2x} - 27xe^{2x} \blacksquare \end{matrix}$$

۳- معادلات خطی ناهمگن

برای حل این معادلات

۱- ابتدا عبارت‌های ناهمگن‌کننده معادله را حذف می‌کنیم و جواب معادله همگن را می‌یابیم.

۲- سپس یک جواب خصوصی برای معادله ناهمگن می‌یابیم.

نکته: در بیشتر مواقع پاسخ خصوصی را که برای معادله ناهمگن حدس می‌زنیم با الگوبرداری از روی قسمت ناهمگن‌کننده به دست می‌آوریم. مثلاً اگر در قسمت ناهمگن‌کننده عبارت نمایی وجود داشت، ما هم برای پاسخ خصوصی یک پاسخ نمایی را به عنوان حدس خوب اولیه در نظر می‌گیریم و بررسی را آغاز می‌کنیم که ببینیم آیا این حدس اولیه درست است و جوابگوی مسأله است یا نه؟!

۳- **پاسخ نهایی = پاسخ همگن + پاسخ خصوصی**

روش اول: اشتراک مشتق

مثال ۱: پاسخ معادلهٔ رو به رو را بیابید. $u_{xy} + u_x = e^x \sin y$

توجه: در مشتقات موجود $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ، مشتق بر حسب x مشترک است.

جملهٔ u نیز وجود ندارد، لذا تغییر متغیری مانند $v = u_x$ یک تغییر متغیر مناسب است.

$$v = u_x \rightarrow u_{xy} = v_y \rightarrow v_y + v = e^x \sin y$$

یادداشت:

۱- حال دیگر معادلهٔ اصلی به یک معادله دیفرانسیل عادی تک متغیره بر حسب y تبدیل شد.

۲- پس می‌توان x را ثابت فرض کرد.

این یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است که پاسخ آن بدین شرح است:

$$v' + v = e^x \sin y$$

$$v(y) = e^{-\int dy} \left[\int e^{+\int dy} e^x \sin y \, dy + c_1(x) \right]$$

$$= c_1(x) e^{-y} + \frac{1}{2} e^x \sin y - \frac{1}{2} e^x \cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = c_1(x) e^{-y} + \frac{1}{2} e^x \sin y - \frac{1}{2} e^x \cos y \quad \text{با توجه به تغییر متغیر داریم:}$$

اکنون با یکبار انتگرال گیری بر حسب x می توان به u رسید.

نکته: این بار ثابت بر حسب y خواهد بود.

$$u(x, y) = \int \left[c_1(x) e^{-y} + \frac{1}{2} e^x \sin y - \frac{1}{2} e^x \cos y \right] dx$$

$$u(x, y) = e^{-y} \int c_1(x) dx + \frac{1}{2} e^x \sin y - \frac{1}{2} e^x \cos y + c_2(y)$$

نکته‌ها:

۱- در حل انتگرال و به دست آوردن $v(y)$ ، عبارت e^x به صورت ثابت فرض شد.

۲- در انتگرال‌گیری، عدد ثابت یعنی جمله‌ای که در آن متغیر انتگرال‌گیری وجود ندارد.

۳- در توابع یک متغیره، قسمت ثابت به صورت یک عدد مطلق است.

۴- در توابع دو متغیره مانند $u(x, y)$ ، وقتی از تابع نسبت به y انتگرال می‌گیریم، قسمت ثابت انتگرال

بر حسب x خواهد بود و بالعکس. پس در این مثال نیز قسمت ثابت انتگرال بر حسب x است.

با فرض $\int c_1(x)dx = f(x)$ و $c_2(y) = g(y)$ داریم:

$$u(x, y) = f(x)e^{-y} + \frac{1}{2}e^x \sin y - \frac{1}{2}e^x \cos y + g(y)$$

با جایگذاری $f(x)$ و $g(y)$ می‌توان به جواب خصوصی رسید.

$$\text{مثلاً } f(x) = 2 \text{ و } g(y) = y^2$$

$$u(x, y) = 2e^{-y} + \frac{1}{2}e^x \sin y - \frac{1}{2}e^x \cos y + y^2 \quad \blacksquare$$

مثال ۲: پاسخ معادله روبه رو را بیابید.

$$u_{txxxx} + u_{tx} = te^{2x}$$

اینجا نیز متغیر t ، مشترک است. پس تغییر متغیر: $v = u_t$

این معادله ناهمگن است. ابتدا پاسخ قسمت همگن را می‌یابیم:

$$v_{xxxx} + v_x = 0$$

با استفاده از روش عملگر داریم:

$$D^3 + D = 0 \rightarrow D(D^2 + 1) = 0 \rightarrow D_1 = 0, \quad D_{2,3} = 0 \pm i$$

$$v = c_1 e^{0x} + e^{0x} (c_2 \cos x + c_3 \sin x)$$

توجه داریم که ضرایب ثابت، تابع زمان اند: $c = c(t)$

$$v = c_1(t) + c_2(t) \cos x + c_3(t) \sin x \quad \text{پاسخ همگن:}$$

برای قسمت ناهمگن نیز چون جمله ناهمگن، نمائی است، یک جواب ناهمگن نمایی فرض می کنیم:

$$\text{ناهمگن: } v = Ae^{2x} \rightarrow v_x = 2Ae^{2x} \rightarrow v_{xx} = 4Ae^{2x} \rightarrow v_{xxx} = 8Ae^{2x}$$

$$v_{xxx} + v_x = te^{2x} \quad \text{با جایگذاری در معادله ناهمگن داریم:}$$

$$8Ae^{2x} + 2Ae^{2x} = te^{2x} \rightarrow 10Ae^{2x} = te^{2x} \rightarrow A = \frac{t}{10}$$

$$\text{ناهمگن: } v = \frac{t}{10} e^{2x}$$

$$v(x, t) = c_1(t) + c_2(t) \cos x + c_3(t) \sin x + \frac{t}{10} e^{2x}$$

حال تغییر متغیری که در ابتدا دادیم یعنی $(v = u_t)$ را برمی گردانیم:

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = c_1(t) + c_2(t) \cos x + c_3(t) \sin x + \frac{t}{10} e^{2x}$$

$$u(x, t) = \int \left[c_1(t) + c_2(t) \cos x + c_3(t) \sin x + \frac{t}{10} e^{2x} \right] dt$$

$$u(x, t) = f_1(t) + f_2(t) \cos x + f_3(t) \sin x + \frac{t^2}{20} e^{2x} + g(x) \quad \blacksquare$$

روش دوم: معادله فقط شامل یکی از مشتقات نسبی باشد

مثال ۳: پاسخ معادله روبه رو را بیابید.

$$ut + \frac{\partial u}{\partial x} - yx^2 = 0$$

در اینجا $u = u(x, y, t)$ است ولی در معادله فقط نسبت به x مشتق داریم.
پس می‌توان با استفاده از ODE و معادله خطی مرتبه اول، پاسخ مسأله را یافت:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + tu = yx^2 \quad p = t, \quad q = yx^2$$

$$u(x, y, t) = e^{-\int t dx} \left[\int e^{+\int t dx} yx^2 dx + c(y, t) \right]$$

چون نسبت به x انتگرال گرفتیم، ثابت بر حسب y و t خواهد بود: $c = f(y, t)$

$$u = e^{-tx} \left(\int e^{tx} y x^2 dx + c \right)$$

$$u = ce^{-tx} + ye^{-tx} \left(\frac{x^2}{t} e^{tx} - \frac{2x}{t^2} e^{tx} + \frac{2}{t^3} e^{tx} \right)$$

$$u = ce^{-tx} + y \left(\frac{x^2}{t} - \frac{2x}{t^2} + \frac{2}{t^3} \right)$$

$$u(x, y, t) = f(y, t) e^{-tx} + y \left(\frac{x^2}{t} - \frac{2x}{t^2} + \frac{2}{t^3} \right)$$

$\oplus x^2$	e^{tx}
$\ominus 2x$	$\frac{1}{t} e^{tx}$
$\oplus 2$	$\frac{1}{t^2} e^{tx}$
0	$\frac{1}{t^3} e^{tx}$

■

مثال ۴: پاسخ معادله روبه رو را بیابید. $u_{xx} + 2u_x + 2u = 2x^2 \sin t$

در اینجا نیز در معادله فقط نسبت به x مشتق داریم. پس می‌توان از ODE استفاده کرد.

۱- مرحله اول: پاسخ قسمت همگن:

$$u_{xx} + 2u_x + 2u = 0$$

$$(D^2 + 2D + 2)u = 0 \rightarrow D^2 + 2D + 2 = 0 \rightarrow D = -1 \pm i$$

پاسخ همگن: $u = e^{-x} [c_1(t) \cos x + c_2(t) \sin x]$

۲- مرحله دوم: پاسخ قسمت ناهمگن:

برای قسمت ناهمگن نیز چون جمله ناهمگن از درجه ۲ است، پس ما نیز چنین فرضی می‌کنیم:

$$\text{ناهمگن : } u = Ax^2 + Bx + C \rightarrow u_x = 2Ax + B \rightarrow u_{xx} = 2A$$

با جایگذاری خواهیم داشت: $2A + 4Ax + 2B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = 2x^2 \sin t$

$$2Ax^2 + (4A + 2B)x + 2(A + B + C) = 2x^2 \sin t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2A = 2 \sin t \\ 4A + 2B = 0 \\ 2(A + B + C) = 0 \end{array} \right.$$

از مقایسه دو طرف داریم:

$$\begin{cases} A = \sin t \\ B = -2 \sin t \\ C = \sin t \end{cases}$$

$$\text{ناهمگن : } u = (\sin t)x^2 - (2 \sin t)x + \sin t = (\sin t)(x^2 - x + 1)$$

$$u(x, t) = e^{-x}[c_1(t) \cos x + c_2(t) \sin x] \\ + (\sin t)x^2 - (2 \sin t)x + \sin t \quad \blacksquare$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

فصل ۳: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

روش‌های حل: دستگاه لاگرانژ

توسط: سید محمد جعفری

۲- دستگاه لاگرانژ

این روش فقط برای معادلات مرتبه اول به کار می‌رود.

اگر معادله مرتبه اول بدین صورت باشد:

$$P(x, y, t, \dots, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, t, \dots, z) \frac{\partial z}{\partial y} + \dots = R(x, y, t, \dots, z)$$

که در آن تابع Z وابسته به $x, y, t, \dots$ است.

برای حل این معادله، دستگاهی بدین شرح تشکیل می‌دهیم.

$$\frac{dx}{P} = \dots = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad *$$

□ این دستگاه، به دستگاه لاگرانژ موسوم است.

□ با حل دو به دو دستگاه لاگرانژ باید به n پاسخ مستقل، بدین شرح برسیم.

$$u_1(x, y, t, \dots) = C_1, u_2(x, y, t, \dots) = C_2, \dots, u_n(x, y, t, \dots) = C_n$$

□ سپس می‌توان جواب عمومی را چنین فرض کرد:

$$\phi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0 \quad \blacksquare$$

□ که ϕ تابعی دلخواه است. گاهی اوقات نیز پاسخ‌ها از هم مستقل نیستند و باید با انجام

یک سری اعمال جبری و خاصیت تناسب، معادلات قابل حل را بیابیم.

مثال ۱: معادلهٔ روبه‌رو را حل کنید.

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

پاسخ:

$$\rightarrow P = x, Q = -y^2, R = z$$

دستگاه لاگرانژ را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y^2} = \frac{dz}{z}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y^2} \\ \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \end{cases}$$

چون دو متغیر مستقل داریم، باید دو جواب بیابیم:

از حل این دستگاه داریم:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y^2} \rightarrow \ln C_1 x = \frac{1}{y}$$

$$\rightarrow C_1 x = e^{\frac{1}{y}} \rightarrow e^{\frac{1}{y}}/x = C_1 \rightarrow u_1 = e^{\frac{1}{y}}/x$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \rightarrow \ln C_2 x = \ln z$$

$$\rightarrow C_2 x = z \rightarrow \frac{z}{x} = C_2 \rightarrow u_2 = \frac{z}{x}$$

$$\phi\left(\frac{1}{x}e^{\frac{1}{y}}, \frac{z}{x}\right) = 0$$

پس جواب عمومی بدین صورت است:

جواب عمومی را بدین صورت هم می‌توان نوشت:

$$\frac{z}{x} = f\left(\frac{1}{x}e^{\frac{1}{y}}\right) \rightarrow z = xf\left(\frac{1}{x}e^{\frac{1}{y}}\right)$$

به عنوان مثال می‌توان تابع f را مثلثاتی یا نمایی فرض کرد:

$$z_1 = x \sin\left(\frac{1}{x}e^{\frac{1}{y}}\right)$$

$$z_2 = x \exp\left(\frac{1}{x}e^{\frac{1}{y}}\right)$$

مثال ۲: معادلهٔ روبه‌رو را حل کنید. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2u$

پاسخ: $\rightarrow P = x, Q = y, R = 2u$

دستگاه لاگرانژ را تشکیل می‌دهیم: $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{2u}$

$$\begin{cases} \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \rightarrow \ln x = \ln C_1 y \rightarrow x = C_1 y \\ \frac{du}{2u} = \frac{dy}{y} \rightarrow \frac{1}{2} \ln u = \ln C_2 y \rightarrow \ln u = 2 \ln C_2 y \rightarrow u = C_2 y^2 \end{cases}$$

پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{x}{y} \rightarrow u_1 = \frac{x}{y} \\ C_2 = \frac{u}{y^2} \rightarrow u_2 = \frac{u}{y^2} \end{cases}$$

$$\phi\left(\frac{x}{y}, \frac{u}{y^2}\right) = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{u}{y^2} = f\left(\frac{x}{y}\right) \rightarrow u = y^2 f\left(\frac{x}{y}\right) \quad \blacksquare$$

مثال ۳: شکل کلی پاسخ معادله جابه‌جایی را بیابید. $u_t + \alpha u_x = 0$

پاسخ: این معادله را نیز می‌توان با دستگاه لاگرانژ حل کرد چون مرتبه اول است.

$$\rightarrow P = \alpha, Q = 1, R = 0$$

□ چون $R = 0$ است. پس می‌توان گفت $u = C_1$ یک مقدار ثابت است.

□ در کل اگر مخرج هر یک از معادلات لاگرانژ صفر بود، می‌توان آن را ثابت فرض کرد.

$$\rightarrow \frac{dx}{\alpha} = \frac{dt}{1} \rightarrow dx = \alpha dt \rightarrow x = \alpha t + C_2 \rightarrow C_2 = x - \alpha t$$

$$C_1 = u \rightarrow \phi(u, x - \alpha t) = 0 \rightarrow u = f(x - \alpha t)$$

در اینجا f به شرط اولیه بستگی دارد.

$$au_x + bu_y + cu = 0$$

مثال ۴: شکل کلی پاسخ معادلهٔ روبه‌رو را بیابید.

پاسخ: در اینجا ضرایب مشتقات همگی عدد ثابت اند.

$$\rightarrow P = a, Q = b, R = -cu \rightarrow \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{-cu}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{a} = \frac{du}{-cu} \rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{c}{a} dx \rightarrow \ln C_1 u = -\frac{c}{a} x \rightarrow C_1 u = e^{-\frac{c}{a} x} \\ \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \rightarrow a dy = b dx \rightarrow ay = bx + C_2 \end{cases}$$

چون ضریب C_1 ثابت است، می‌توان وارون آن را نیز در نظر گرفت.

$$C_1 u = e^{-\frac{c}{a}x} \rightarrow C_1 = e^{-\frac{c}{a}x} / u \quad \text{یا} \quad C_3 = 1/C_1 = u / e^{-\frac{c}{a}x}$$

$$C_2 = bx - ay \quad \text{یا} \quad C_4 = ay - bx$$

$$u_1 = u / e^{-\frac{c}{a}x}, u_2 = ay - bx \rightarrow \phi \left(u / e^{-\frac{c}{a}x}, ay - bx \right) = 0$$

$$u / e^{-\frac{c}{a}x} = f(ay - bx) \rightarrow u = e^{-\frac{c}{a}x} f(ay - bx) \quad \blacksquare$$

از ابتدا اگر دستگاه معادله را با اشتراک dy/b حل می‌کردیم، به این شکل می‌رسیدیم:

$$u = e^{-\frac{c}{b}y} f(ay - bx) \quad \blacksquare$$

هر دو شکل قابل قبول اند.

مثال ۵: معادلهٔ روبه‌رو را حل کنید. $u_x + 2u_y = x$

$$\rightarrow P = 1, Q = 2, R = x \rightarrow \frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{du}{x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} dx = \frac{du}{x} \rightarrow du = x dx \rightarrow u = \frac{x^2}{2} + C_1 \\ dx = \frac{dy}{2} \rightarrow dy = 2 dx \rightarrow y = 2x + C_2 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} C_1 = u - \frac{x^2}{2} \\ C_2 = y - 2x \end{cases} \rightarrow \phi\left(u - \frac{x^2}{2}, y - 2x\right) = 0$$

$$u - \frac{x^2}{2} = f(y - 2x) \rightarrow u = f(y - 2x) + \frac{x^2}{2} \quad \blacksquare$$

مثال ۶: معادلهٔ روبه‌رو را با شرط داده شده حل کنید.

$$u_x - 4u_y = 0, \text{ Condition: } u(0, y) = 8e^{-3y}$$

این معادله دقیقاً مشابه معادلهٔ جابه‌جایی است. پس می‌توان با توجه به مثال‌های قبل نوشت:

$$u = f(y + 4x)$$

□ حال باید با توجه به شرط داده شده، تابع f را بیابیم.

□ چون شرط داده شده، نمایی است ما نیز تابع f را نمایی فرض می‌کنیم.

$$u(x, y) = Ae^{B(y+4x)}$$

حال اگر $x = 0$ را جایگذاری کنیم، باید شرط داده شده برقرار باشد یعنی:

$$u(0, y) = 8e^{-3y} = Ae^{By} \rightarrow A = 8, B = -3$$

پس جواب خصوصی بدین صورت خواهد شد:

$$u(x, y) = 8e^{-3(y+4x)} \quad \blacksquare$$

مثال ۷: معادلهٔ روبه‌رو را حل کنید.

$$3u_x - 4u_y = x + y^2 - 2u$$

دستگاه لاگرانژ:

$$\frac{dx}{3} = \frac{dy}{-4} = \frac{du}{x + y^2 - 2u}$$

□ اما حل این دستگاه کمی دشوار است!

□ در این پرسش و پرسش‌هایی شبیه به این، می‌توان معادله را بدین شکل نوشت:

$$3u_x - 4u_y + 2u = x + y^2 \quad *$$

$$\underbrace{3u_x - 4u_y + 2u}_{\text{جمله‌های همگن}} = \underbrace{x + y^2}_{\text{جمله‌های ناهمگن}}$$

□ سمت چپ معادله فوق، یک معادله همگن با ضرایب ثابت است و سمت راست

معادله، جمله‌های ناهمگن وجود دارند.

□ لذا می‌توان پاسخ را از روی حاصل جمع جواب همگن با جواب خصوصی برای

جمله‌های ناهمگن به دست آورد.

□ ابتدا جواب همگن را می‌یابیم.

□ با توجه به نکته‌ای که در مثال‌های قبل گفتیم، داریم:

$$au_x + bu_y + cu = 0 \rightarrow u = e^{-\frac{c}{a}x} f(ay - bx)$$

$$3u_x - 4u_y + 2u = 0 \rightarrow u = e^{-\frac{2}{3}x} f(3y + 4x) \quad \text{پاسخ همگن:}$$

□ برای یافتن پاسخ ناهمگن به خود جمله‌های ناهمگن نگاه می‌کنیم.

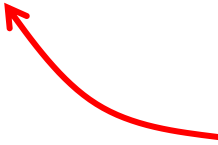
□ متغیر x در جمله‌های ناهمگن از درجه ۱ است و متغیر y از درجه ۲

□ لذا ما نیز حدس اولیه را برای پاسخ ناهمگن به همین صورت فرض می‌کنیم.

فرض پاسخ ناهمگن:

$$u(x, y) = \underbrace{Ax + B}_{\text{جمله درجه ۱}} + \underbrace{Cy^2 + Dy + E}_{\text{جمله درجه ۲}}$$

ساده سازی پاسخ ناهمگن فرضی: $u(x, y) = Ax + Cy^2 + Dy + \boxed{B + E}$

یک ضریب جدید به نام F 

$$u(x, y) = Ax + Cy^2 + Dy + F$$

حال مشتقات را بررسی می کنیم:

$$u_x = A, u_y = 2Cy + D$$

جایگذاری در معادله ناهمگن (*):

$$3u_x - 4u_y + 2u = x + y^2$$

$$3A - 4(2Cy + D) + 2(Ax + Cy^2 + Dy + F) = x + y^2$$

$$2Ax + 2Cy^2 + (2D - 8C)y + 3A - 4D + 2F = x + y^2$$

$$\rightarrow A = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{2}, D = 2, F = \frac{13}{4} \quad \text{با مقایسه دو سمت معادله داریم:}$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y^2 + 2y + \frac{13}{4} \quad \text{پاسخ ناهمگن:}$$

$$u = e^{-\frac{2}{3}x} f(3y + 4x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y^2 + 2y + \frac{13}{4} \quad \blacksquare \quad \text{پاسخ کامل:}$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

روش‌های حل: روش جداسازی متغیرها

توسط: سید محمد جعفری

۳- جداسازی متغیرها: separation of variables (Fourier method)

□ این روش یکی از کاربردی‌ترین روش‌های حل معادلات مشتقات جزئی است.

□ به‌منظور استفاده از این روش، تابع مجهول u ، به‌صورت حاصل ضرب توابعی از متغیرهای وابسته‌اش در نظر گرفته می‌شود. با جاگذاری این پاسخ در معادله، معادله دیفرانسیل پاره‌ای به چند معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود.

□ به‌طور طبیعی حل معادلات دیفرانسیل معمولی حاصل بسیار ساده‌تر از حل معادله دیفرانسیل پاره‌ای است و در اغلب موارد پاسخ تحلیلی برای آن وجود دارد.

□ پس از حل معادلات دیفرانسیل معمولی حاصل و اعمال شرایط مرزی به‌نحو مناسب، پاسخ کلی با ضرب جواب‌ها بدست می‌آید.

مثال:

□ در این روش اگر متغیر وابسته u تابعی از متغیرهای مستقلی چون x و t باشد، در این صورت یک

فرض کارآمد می‌کنیم و تابع u را بدین صورت فرض می‌کنیم:

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

□ یعنی قسمت زمانی و مکانی تشکیل دهنده تابع u را دو تابع جدا فرض کنیم و در هم ضرب کنیم.

□ حال پاسخ فرضی را در معادله جایگذاری می‌کنیم.

□ اکنون باید بتوانیم جملات شامل $x, F, F', \dots$ و جملات شامل $t, G, \dot{G}, \dots$ را از هم جدا کرده و هر

یک را به یک طرف ببریم:

$$P(x, F, F', \dots) = Q(t, G, \dot{G}, \dots)$$

□ سپس برای اینکه تساوی برقرار باشد، هر دو طرف را برابر با یک عدد ثابت قرار می‌دهیم زیرا عبارت سمت چپ بر حسب مکان است و بُعد مکان دارد در حالی که عبارت سمت راست بر حسب زمان است و بُعد آن نیز بالتبع بر حسب زمان است.

□ تنها راه اینکه دو عبارت بر حسب دو بُعد مختلف با هم برابر باشند این است که هر دو طرف برابر با یک عدد ثابت باشند یعنی: $P = Q = k \text{ (const)}$

□ پس از درک این موضوع هر طرف را جداگانه حل می‌کنیم و u به دست می‌آید.

□ در این روش اگر نتوانیم دو عبارت P و Q را از هم جدا کنیم و در دو طرف تساوی قرار دهیم، این روش جواب نمی‌دهد.

مثال: جواب عمومی معادله $u_{xxy} - xyu_x = 0$ را بیابید.

فرض: $u = u(x, y) = X(x) Y(y)$

$$u_x = X'(x)Y(y) \rightarrow u_{xx} = X''(x)Y(y) \rightarrow u_{xxy} = X''(x)Y'(y)$$

$$\rightarrow X''(x)Y'(y) - xyX'(x)Y(y) = 0 \rightarrow X''(x)Y'(y) = xyX'(x)Y(y)$$

$$\xrightarrow{\div xX'Y'} \frac{X''}{xX'} = \frac{yY}{Y'} \rightarrow P(x) = \frac{X''}{xX'} \text{ و } Q(y) = \frac{yY}{Y'}$$

جملات $P(x)$ و $Q(x)$ را یافتیم، حال هر دو را برابر عدد ثابت k قرار می‌دهیم:

$$\frac{X''}{xX'} = \frac{yY}{Y'} = k \rightarrow \begin{cases} \frac{X''}{xX'} = k \\ \frac{yY}{Y'} = k \end{cases}$$

این عدد ثابت سه احتمال برای آن وجود دارد که باید بررسی شوند:

1. صفر

2. عددی مثبت

3. عددی منفی

۱- فرض صفر بودن عدد ثابت: $k = 0$

$$\begin{cases} \frac{X''}{xX'} = 0 \rightarrow X'' = 0 \rightarrow X' = C_1 \rightarrow X(x) = C_1x + C_2 \\ \frac{yY}{Y'} = 0 \rightarrow Y = 0 \end{cases}$$

در اینجا ثابت‌هایی که برای X و Y به دست می‌آیند، عدد هستند و بر حسب x و y نیستند زیرا فرض اصلی این روش جدا بودن متغیرها است.

$$X(x) = C_1x + C_2, Y(y) = 0 \rightarrow u(x, y) = XY = 0 \times (C_1x + C_2) = 0$$

این یک پاسخ بدیهی است و لذا غیرقابل قبول است.

۲- فرض مثبت بودن: $k = p^2$

$$\frac{X''}{xX'} = p^2 \rightarrow X'' - xp^2X' = 0$$

تغییر متغیر: $X' = v$ $v' - xp^2v = 0$

$$\frac{dv}{dx} = xp^2v \rightarrow \frac{dv}{v} = p^2x dx \rightarrow \ln C_2v = p^2 \frac{x^2}{2}$$

$$\rightarrow C_2v = e^{p^2 \frac{x^2}{2}} \rightarrow v = C'_2 e^{p^2 \frac{x^2}{2}}$$

بازگرداندن تغییر متغیر: $\frac{dX}{dx} = v = C'_2 e^{p^2 \frac{x^2}{2}} \rightarrow X(x) = \int C'_2 e^{p^2 \frac{x^2}{2}} dx$

ادامهٔ فرض مثبت بودن: $k = p^2$

$$\frac{yY}{Y'} = p^2 \rightarrow p^2 Y' = yY \rightarrow \frac{dY}{dy} = \frac{1}{p^2} yY$$

$$\rightarrow \frac{dY}{Y} = \frac{y}{p^2} dy \rightarrow \ln C_1 Y = \frac{y^2}{2p^2} \rightarrow C_1 Y = e^{\frac{y^2}{2p^2}} \rightarrow Y = C_1' e^{\frac{y^2}{2p^2}}$$

$$u(x, y) = X(x)Y(y) = \left(\int C_2' e^{p^2 \frac{x^2}{2}} dx \right) C_1' e^{\frac{y^2}{2p^2}}$$

$$u(x, y) = C e^{\frac{y^2}{2p^2}} \int e^{p^2 \frac{x^2}{2}} dx \quad \blacksquare$$

۳- فرض منفی بودن: $k = -p^2$ با این فرض نیز به همان پاسخ فرض مثبت بودن می‌رسیم.

مثال: پاسخ معادله $u_{xy} - u_x + x + y = 0$ را با روش جداسازی متغیرها بیابید.

فرض: $u = u(x, y) = X(x) Y(y)$

$$u_x = X'Y \rightarrow u_{xy} = X'Y'$$

جایگذاری در معادله $X'Y' - X'Y + x = -y \rightarrow X'(Y' - Y) + y = -x$

□ همانگونه که مشخص است، نمی‌توان X و Y را از هم جدا کنیم و از روش جداسازی متغیرها این پرسش قابل حل نیست.

□ این مثال برای این بود که تأکید کنیم برای استفاده از روش جداسازی متغیرها، معادله حتماً باید همگن باشد. ☺

مثال: پاسخ معادله $u_{xx} + u_x - u_t = 0$ را با روش جداسازی متغیرها بیابید.

فرض: $u = u(x, t) = X(x) T(t)$

$$u_x = X'T \rightarrow u_{xx} = X''T \quad 9$$

$$u_t = X\dot{T}$$

$$X''T + X'T - X\dot{T} = 0 \quad \xrightarrow{\div XT} \quad \frac{X'' + X'}{X} = \frac{\dot{T}}{T} = k$$

$$\frac{X'' + X'}{X} = 0 \rightarrow X'' + X' = 0$$

۱- فرض صفر بودن عدد ثابت: $k = 0$

$$\xrightarrow{X' = u} u' + u = 0 \rightarrow \frac{du}{dx} = -u$$

$$\rightarrow \frac{du}{u} = -dx \rightarrow \ln u = -x + C_1 \rightarrow u = C_1' e^{-x}$$

$$\xrightarrow{X' = u} X(x) = C_1'' e^{-x} + C_2$$

$$\rightarrow \frac{\dot{T}}{T} = 0 \rightarrow \dot{T} = 0 \rightarrow T = C_3$$

$$\rightarrow u(x, t) = X(x)T(t) = C_3(C_1'' e^{-x} + C_2) = Ae^{-x} + B \quad \blacksquare$$

۲- فرض غیر صفر بودن عدد ثابت: $k \neq 0$

$$\frac{X'' + X'}{X} = k \rightarrow X'' + X' - kX = 0$$

$$\rightarrow D^2 + D - k = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4k \rightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{4} & \Delta = 0 \\ k < -\frac{1}{4} & \Delta < 0 \\ k > -\frac{1}{4} & \Delta > 0 \end{cases}$$

$$D = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}$$

$$\rightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{4} & \rightarrow X(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x} \\ k < -\frac{1}{4} & \rightarrow X(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{\Delta}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{\Delta}}{2} x \right) \\ k > -\frac{1}{4} & \rightarrow X(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_1 e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2} x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2} x} \right) \end{cases}$$

$$\frac{\dot{T}}{T} = k \rightarrow \dot{T} = kT \rightarrow \frac{dT}{dt} = kT \rightarrow \frac{dT}{T} = k dt$$

برای تابع زمان T داریم:

$$\rightarrow \ln T = kt + C_3 \rightarrow T = C'_3 e^{kt}$$

$$\rightarrow u(x, t) = X(x)T(t) = C'_3 e^{kt} X(x) \quad \blacksquare$$

مثال: پاسخ معادله $x^2 u_{xy} + 3y^2 u = 0$ را بیابید.

فرض: $u = u(x, y) = X(x) Y(y) \rightarrow x^2 X' Y' + 3y^2 XY = 0$

$$\rightarrow x^2 X' Y' = -3y^2 XY \xrightarrow{\div XT} -x^2 \frac{X'}{X} = 3y^2 \frac{Y}{Y'} = k$$

در مسائلی که به معادله مرتبه اول می‌رسیم نیازی به تفکیک مثبت و منفی برای k نیست و تفکیک صفر و ناصفر کافی است.

۱- فرض صفر بودن عدد ثابت: $k = 0$

جواب بدیهی: $3y^2 \frac{Y}{Y'} = 0 \rightarrow Y = 0 \rightarrow u(x, y) = 0$

۲- فرض غیر صفر بودن عدد ثابت: $k \neq 0$

$$-x^2 \frac{X'}{X} = k \rightarrow -x^2 X' = kX \rightarrow -x^2 \frac{dX}{dx} = kX$$

$$\rightarrow \frac{dX}{X} = -\frac{k}{x^2} dx \rightarrow \ln X = \frac{k}{x} + C_1 \rightarrow X = C_1' e^{\frac{k}{x}}$$

$$3y^2 \frac{Y}{Y'} = k \rightarrow kY' = 3y^2 Y \rightarrow k \frac{dY}{dy} = 3y^2 Y$$

$$\rightarrow \frac{dY}{Y} = 3 \frac{y^2}{k} dy \rightarrow \ln Y = \frac{y^3}{k} + C_2 \rightarrow Y = C_2' e^{\frac{y^3}{k}}$$

$$u = u(x, y) = X(x) Y(y) = C_1' e^{\frac{k}{x}} \cdot C_2' e^{\frac{y^3}{k}} = C e^{\left(\frac{k}{x} + \frac{y^3}{k}\right)} \quad \blacksquare$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

فصل ۳: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

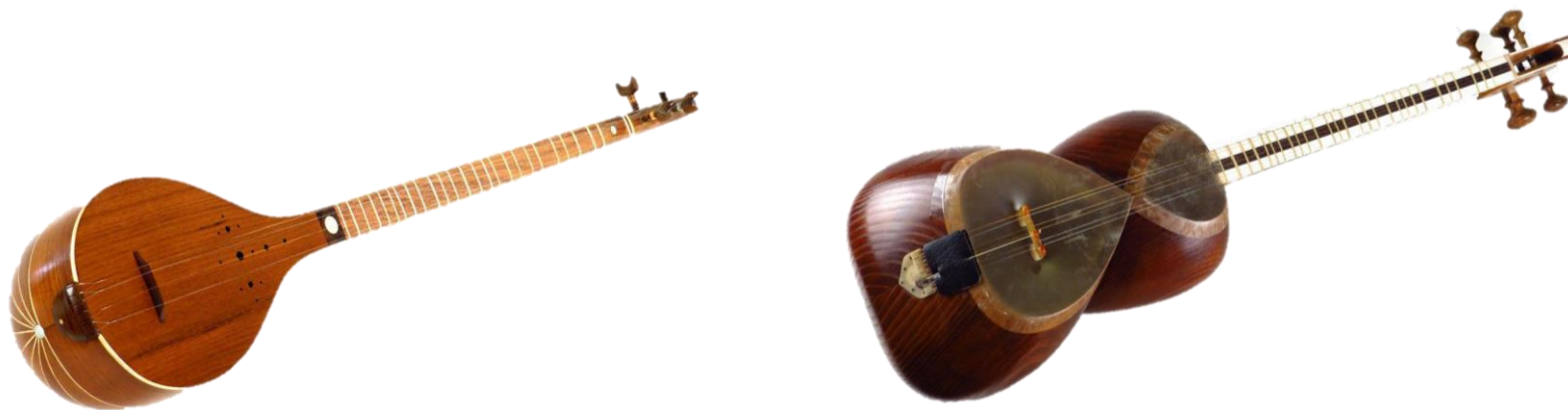
معادله موج: معادله تار مرتعش همگن
(معادله پاسخ نهایی در حالت کلی)

توسط: سید محمد جعفری

۱- معادله موج همگن با دو سر ثابت



$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$





$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

□ برای پرسش ۲ شرط مرزی و دو شرط اولیه نیاز داریم، چون دو سر تار ثابت است.

□ پس شرط مرزی به صورت شرط مرزی دیریکله است.

$$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{انحراف اولیه:}$$

$$u_t(x, 0) = g(x) \quad \text{سرعت اولیه:}$$

□ دو شرط اولیه را بدین صورت فرض می‌کنیم:

فرض: $u = u(x, t) = X(x)T(t)$

$$u_{xx} = X''T, \quad u_{tt} = X\ddot{T}$$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \rightarrow X\ddot{T} = c^2 X''T$$

$$\xrightarrow{\div c^2 XT} \frac{\ddot{T}}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = k \quad \left\{ \begin{array}{l} X'' - kX = 0 \\ \ddot{T} - c^2 kT = 0 \end{array} \right.$$

چون معادله‌ها مرتبه دو هستند، باید سه شرط مثبت، منفی و صفر را بررسی کنیم:

$$X'' = 0 \rightarrow X' = A \rightarrow X = Ax + B \quad \text{فرض اول } (k = 0):$$

برای یافتن A و B می‌توان از شرایط مرزی استفاده کرد:

$$u(0, t) = 0 \rightarrow X(0)T(t) = 0 \rightarrow X(0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$u(L, t) = 0 \rightarrow X(L)T(t) = 0 \rightarrow X(L) = 0 \rightarrow A(L) = 0$$

$$\rightarrow u(x, t) = X(x)T(t) = 0 \quad \rightarrow A = 0$$

این جواب بدیهی است و البته با شرایط اولیه همخوانی ندارد، پس قابل قبول نیست.

فرض دوم $(k = p^2)$:

$$X'' - p^2 X = 0 \rightarrow (D^2 - p^2)X = 0$$

$$\rightarrow D^2 - p^2 = 0 \rightarrow D = \pm p$$

$$X(x) = Ae^{px} + Be^{-px}$$

$$\begin{cases} X(0) = 0 \rightarrow Ae^0 + Be^0 = 0 \rightarrow A + B = 0 \rightarrow A = -B \\ X(L) = 0 \rightarrow Ae^{pL} - Ae^{-pL} = 0 \rightarrow A(e^{pL} - e^{-pL}) = 0 \end{cases}$$

صفر نمی شود

$$\rightarrow A = B = 0 \rightarrow u(x, t) = XT = 0$$

این جواب بدیهی است و البته با شرایط اولیه همخوانی ندارد، پس قابل قبول نیست.

فرض سوم $(k = -p^2)$:

$$X'' + p^2 X = 0 \rightarrow (D^2 + p^2)X = 0 \rightarrow D = \pm ip$$

$$X(x) = A \cos px + B \sin px$$

$$\left. \begin{array}{l} X(0) = 0 \rightarrow A \cos 0 + B \sin 0 = 0 \rightarrow A = 0 \\ X(L) = 0 \rightarrow B \sin pL = 0 \end{array} \right\} \text{شرایط مرزی:}$$

□ در اینجا دو حالت داریم یا $B = 0$ یا $\sin pL = 0$.

□ اگر $B = 0$ باشد، به $u = 0$ می‌رسیم. پس این حالت را در نظر نمی‌گیریم.

$$\rightarrow \sin pL = 0 \rightarrow pL = n\pi \rightarrow p = \frac{n\pi}{L} \quad \rightarrow X(x) = B \sin \frac{n\pi}{L} x$$

برای $T(t)$ نیز داریم: $\ddot{T} + p^2 c^2 T = 0$

$p = \frac{n\pi}{L}$ $\rightarrow$ $\ddot{T} + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} T = 0$ $\lambda_n = \frac{n\pi c}{L} \quad n = 1, 2, \dots$

$$\ddot{T} + \lambda_n^2 T = 0 \rightarrow (D^2 + \lambda_n^2)T = 0 \rightarrow D = \pm \lambda_n i$$

$$T(t) = C \cos \lambda_n t + E \sin \lambda_n t$$

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = B \sin \frac{n\pi}{L} x (C \cos \lambda_n t + E \sin \lambda_n t)$$

$$= \left(C_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + E_n \sin \frac{n\pi c}{L} t \right) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

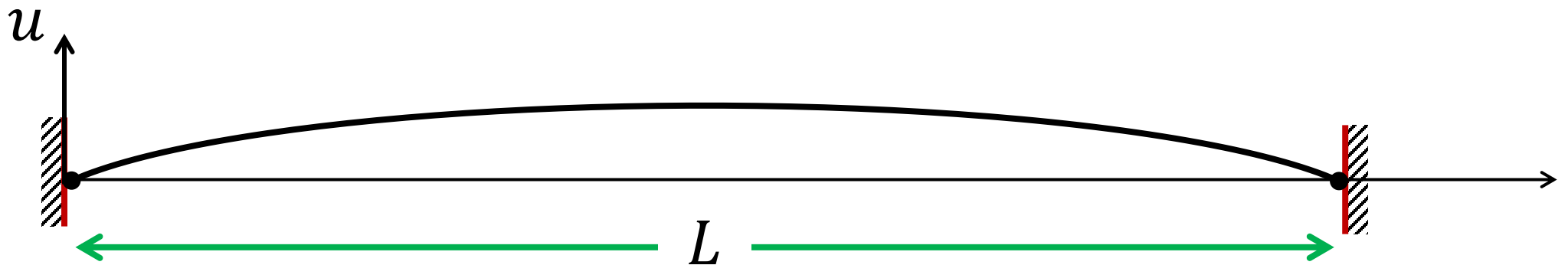
□ در اینجا u علاوه بر x و t تابعی از n نیز می‌باشد

□ یعنی با جایگذاری به جای n نیز به جواب‌های مستقل از هم می‌رسیم.

□ در معادلات خطی اگر n جواب مستقل بیابیم، جواب کلی مجموع این جواب‌ها است.

□ پس جواب کلی u بدین شکل است:

$$u = u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + E_n \sin \frac{n\pi c}{L} t \right) \sin \frac{n\pi}{L} x$$



برای یافتن C_n و E_n از شرایط اولیه استفاده می‌کنیم:

شرایط اولیه: (۱) انحراف اولیه

$$u(x, 0) = f(x) \rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

□ **توجه:** در اینجا $f(x)$ بر حسب مجموعی از سینوس‌ها نوشته شده است

□ پس می‌توان آن را سری فوریه سینوسی فرض کرد:

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

خوب ضریب اول به دست آمد:

شرایط اولیه: (۲) سرعت اولیه

$$u_t(x, 0) = g(x) \rightarrow g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} E_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\frac{n\pi c}{L} E_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$E_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

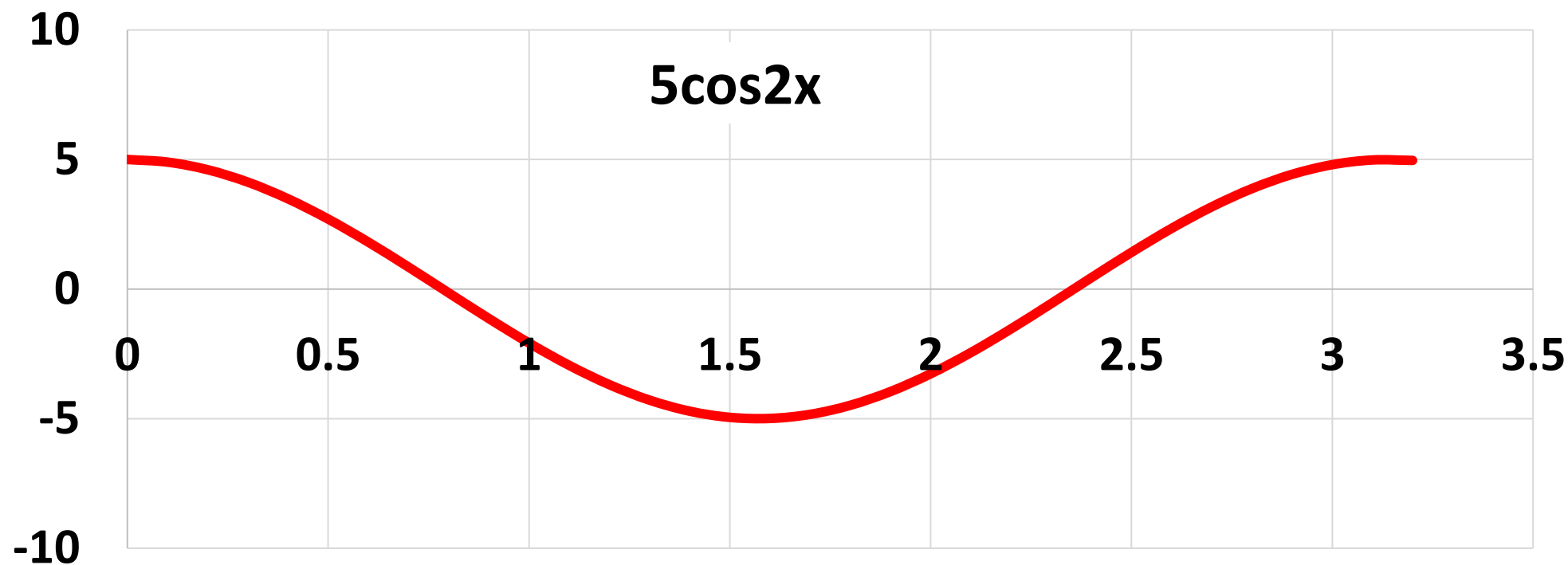
ضریب دوم نیز به دست آمد.

پاسخ نہائی:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \right) \cos \left(\frac{n\pi c}{L} t \right) + \left(\frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \right) \sin \left(\frac{n\pi c}{L} t \right) \right] \sin \frac{n\pi}{L} x \quad \blacksquare$$

مثال: تار به طول π که دو سر آن آزاد است، با یک انحراف اولیه و بدون سرعت اولیه رها می‌شود. پاسخ معادله ارتعاش تار را بیابید.

$$u_{tt} = 4u_{xx} , u(x, 0) = 5 \cos 2x$$



نکته: در علم ارتعاشات ثابت می‌شود وقتی سر تار آزاد است از نظر ریاضی بدین معناست که در آن سر، مشتق مکان تار نسبت به جابه‌جایی، صفر خواهد بود.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$$

□ پس شرایط مرزی، بدین صورت شرط مرزی نیومن است.

□ و چون سرعت اولیه، صفر است پس شرایط اولیه بدین صورت است:

$$u(x, 0) = 5 \cos 2x$$

$$u_t(x, 0) = 0 \quad (\text{سرعت اولیه صفر})$$

$$\rightarrow u = X(x)T(t) \rightarrow X\ddot{T} = 4X''T$$

$$\xrightarrow{\div 4XT} \frac{\ddot{T}}{4T} = \frac{X''}{X} = k \quad \left\{ \begin{array}{l} X'' - kX = 0 \\ \ddot{T} - c^2 k T = 0 \end{array} \right.$$

□ در اینجا نیز مانند قبل $k = 0$ و $k = p^2$ جوابی به ما نمی‌دهند.

□ فقط فرض $k = -p^2$ به جواب قابل قبول می‌رسد.

$$\frac{X''}{X} = -p^2 \rightarrow X'' + p^2 X = 0 \rightarrow (D^2 + p^2)X = 0 \rightarrow D = \pm ip$$

$$X(x) = A \cos px + B \sin px$$

$$X'(x) = -Ap \sin px + Bp \cos px$$

$$X'(0) = 0 \rightarrow Bp = 0 \rightarrow B = 0$$

$$X'(\pi) = 0 \rightarrow -Ap \sin p\pi = 0$$

اعمال شرایط مرزی:

$$\rightarrow p\pi = n\pi \rightarrow p = n$$

$$\rightarrow X(x) = A \cos nx$$

برای $T(t)$ نیز داریم:

$$\ddot{T} + 4n^2 T = 0$$

$$(D^2 + 4n^2)T = 0 \rightarrow D = \pm 2n$$

$$T(t) = C \cos 2nt + D \sin 2nt$$

در نتیجه جواب بدین صورت است:

$$u = u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n \cos 2nt + D_n \sin 2nt) \cos nx$$

چون سری ما کسینوسی است پس n از صفر شروع می شود.

اعمال شرایط اولیه:

$$u(x, 0) = 5 \cos 2x$$

$$5 \cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos nx$$

□ در اینجا عبارت سمت راست، سری فوریه کسینوسی تابع $5 \cos 2x$ است.

□ طبق قضیه تعامد می‌دانیم که سری فوریه عبارت‌های مثلثاتی، خود همان توابع هستند.

پس سری فوریه کسینوسی تابع $5 \cos 2x$ همان $5 \cos 2x$ است.

□ لذا خواهیم داشت:

$$5 \cos 2x = C_n \cos nx \rightarrow n = 2, C_2 = 5$$

□ چون سرعت اولیه نداریم یعنی $g(x) = 0$ است، پس $D_n = 0$ است.

□ در مجموع، پاسخ نهایی بدین شکل است:

$$u = u(x, t) = X(x)T(t) = 5 \cos 2x \cos 2t \quad \blacksquare$$



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

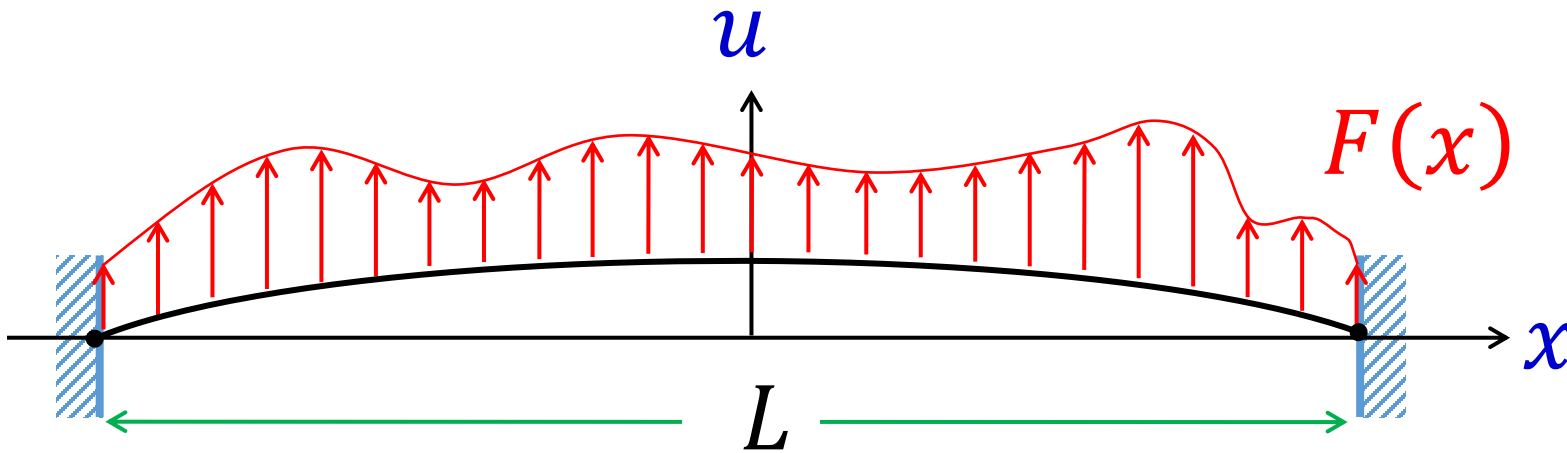
ریاضیات مہندسی

فصل ۳: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

معادلہ موج: معادلہ تار مرتعش ناہمگن

توسط: سید محمد جعفری

۲- معادله موج ناهمگن



$$\text{B.C.: } u(0, t) = a$$

$$u(L, t) = b$$

$$\text{I.C.: } u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

اگر تار مرتعش تحت تأثیر یک نیروی خارجی قرار گیرد، آنگاه معادله دیفرانسیل حاکم بر

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x) \quad \text{آن ناهمگن می شود:}$$

این جمله ناهمگن می تواند دو حالت داشته باشد:

(الف) نیروی خارجی فقط تابع مکان (x) باشد.

در اینجا همانند ODE جواب کلی را به دو صورت تقسیم می کنیم:

$$u(x, t) = V(x, t) + W(x) \quad \text{قسمت همگن و } W(x) \text{ قسمت ناهمگن}$$

در اینجا ابتدا قسمت ناهمگن را با شرایط روبه رو به دست می آوریم:

$$c^2 W_{xx} + F(x) = 0, \quad W(0) = a, \quad W(L) = b$$

اکنون با جایگذاری $u = V(x, t) + W(x)$ در معادله، می توان V را نیز به دست آورد.

مثال: معادلهٔ روبه رو را با شرایط داده شده حل کنید.

$$u_{tt} - u_{xx} = 2$$

B.C.: $u(0, t) = 0$ $u(1, t) = 1$

I.C.: $u(x, 0) = 0$ $u_t(x, 0) = x$

فرض اول: $u(x, t) = V(x, t) + W(x)$

$$c^2 = 1 \rightarrow W_{xx} + 2 = 0$$

فرض دوم: $V(0, t) = V(1, t) = 0$

$$W_{xx} = -2 \rightarrow W_x = -2x + C_1$$

$$W(x) = -x^2 + C_1x + C_2$$

$$W(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$W(1) = 1 \rightarrow -1 + C_1 = 1 \rightarrow C_1 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} W(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0 \\ W(1) = 1 \rightarrow -1 + C_1 = 1 \rightarrow C_1 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow W(x) = -x^2 + 2x$$

$$u(x, t) = V(x, t) - x^2 + 2x$$

$$u_x = V_x - 2x + 2 \rightarrow u_{xx} = V_{xx} - 2$$

$$u_t = V_t \rightarrow u_{tt} = V_{tt}$$

جایگذاری در معادله:

$$u_{tt} - u_{xx} = 2 \rightarrow V_{tt} - V_{xx} + 2 = 2 \rightarrow V_{tt} = V_{xx} \quad \blacksquare$$

همانطور که شاهد هستید، معادله همگن شد.

حال همین شرایط را برای شرایط مرزی هم لحاظ می‌کنیم: $V_{tt} = V_{xx}$

B.C.:

$$u(0, t) = V(0, t) + W(0) = 0 \xrightarrow{W(0) = 0} V(0, t) = 0$$

$$u(1, t) = V(1, t) + W(1) = 1 \xrightarrow{W(1) = 1} V(1, t) = 0$$

معادله $V_{tt} = V_{xx}$ الان همان معادلهٔ تار مرتعش با دو سر ثابت شد که پیش از این پاسخ آن را یافتیم و برابر شد با:

$$(L = 1, c = 1)$$

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\pi t + D_n \sin n\pi t) \sin n\pi x$$

برای یافتن C_n و D_n باید شرایط اولیه را بررسی کنیم:

I.C.: $u(x, 0) = V(x, 0) + W(x) = 0$

$$\rightarrow V(x, 0) - x^2 + 2x = 0$$

$$\rightarrow V(x, 0) = x^2 - 2x$$

$$u_t(x, 0) = V_t(x, 0) + \underbrace{W_t(x)}_0 = x$$

$$\rightarrow V_t(x, 0) = x$$

پس داریم: $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = x$

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$C_n = 2 \int_0^1 (x^2 - 2x) \sin n\pi x \, dx = \frac{2(-1)^n}{n\pi} + \frac{4[(-1)^n - 1]}{n^3\pi^3}$$

$$D_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$D_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^1 x \sin n\pi x \, dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}$$

حال که V به دست آمد، می‌توان جواب کلی را بدین گونه نوشت:

$$u(x, t) = V(x, t) + W(x)$$

$$u(x, t) = -x^2 + 2x + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\pi t + D_n \sin n\pi t) \sin n\pi x$$

$$u(x, t) = -x^2 + 2x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \left\{ \frac{2(-1)^n}{n\pi} + \frac{4[(-1)^n - 1]}{n^3\pi^3} \right\} \cos n\pi t + \left[\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} \right] \sin n\pi t \right\rangle \sin n\pi x \quad \blacksquare$$

(ب) حالت دوم این است که تابع خارجی (نیروی خارجی) هم تابع مکان (x) و هم تابع زمان (t) باشد.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + H(x, t)$$

$$\text{B.C.: } u(0, t) = p(t) , u(L, t) = q(t)$$

$$\text{I.C.: } u(x, 0) = f(x) , u_t(x, 0) = g(x)$$

در این حالت روندی بسیار طولانی و طاقت‌فرسا دارد. به همین دلیل شکل کلی جواب را به طور خلاصه می‌نویسیم:

$$W(x, t) = p(t) + \frac{q(t) - p(t)}{L} x$$

$$u = W(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t + \phi_n(t)] \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - W(x, 0)] \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L [g(x) - W_t(x, 0)] \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$\psi_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L [H(x, t) - W_{tt}(x, t)] \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$\phi_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \psi_n(\tau) \sin \lambda_n(t - \tau) \, d\tau$$

البته معادلات بیان شده، برای تار دو سر ثابت است. اگر حالت‌های دیگری برای شرایط مرزی داشته باشیم باشد ابتدا W را بیابیم، سپس V را به صورت همگن حل کنیم تا به جواب برسیم که این مراحل بدین شرح اند:

(۱) مرحلهٔ نخست: یافتن جواب ناهمگن $W(x,t)$

توجه: شرایط مرزی داده شده در تار مرتعش ۴ حالت دارند:

۱. دو سر بسته

۲. ابتدا بسته، انتها باز

۳. ابتدا باز، انتها بسته

۴. دو سر باز

$$(1) \begin{cases} u(0, t) = p(t) \\ u(L, t) = q(t) \end{cases}$$

شرایط مرزی برای حالت تار دو سر بسته:

$$(2) \begin{cases} u(0, t) = p(t) \\ u_x(L, t) = q(t) \end{cases}$$

شرایط مرزی برای حالت تار ابتدا بسته، انتها باز:

در سه حالت اول $W(x, t) = ax + b$ و در حالت چهارم $W(x, t) = ax^2 + bx$ است.

ضرائب a و b از همین شرایط مرزی به دست می‌آیند.

$$(3) \begin{cases} u_x(0, t) = p(t) \\ u(L, t) = q(t) \end{cases}$$

شرایط مرزی برای حالت تار ابتدا باز، انتها بسته:

$$(4) \begin{cases} u_x(0, t) = p(t) \\ u_x(L, t) = q(t) \end{cases}$$

شرایط مرزی برای حالت تار دو سر باز:

□ در سه حالت اول $W(x, t) = ax + b$

□ در حالت چهارم $W(x, t) = ax^2 + bx$ است.

□ ضرائب a و b از همین شرایط مرزی به دست می آیند.

(۲) مرحله دوم: یافتن جواب همگن $V(x,t)$

طبق شرایط مرزی شکل $V(x,t)$ به یکی از ۴ حالت زیر است:

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

دو سر بسته:

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{(2n-1)\pi}{2L} x$$

ابتدا بسته، انتها باز:

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{(2n-1)\pi}{2L} x$$

ابتدا باز، انتها بسته:

دو سر باز:

$$V(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{n\pi}{L} x = T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{n\pi}{L} x$$

(۳) مرحله سوم: یافتن ضریب مجهول $T_n(t)$

با جایگذاری $u = V + W$ در معادله تنها مجهول ما $T_n(t)$ خواهد بود که با استفاده از شرایط

مرزی و اولیه و سری فوریه به دست می‌آید.

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

مثال: معادلهٔ روبه رو را با شرایط داده شده حل کنید.

$$\text{B.C.: } u(0, t) = t, \quad u(\pi, t) = t + \pi$$

$$\text{I.C.: } u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x$$

فرض اول: $u(x, t) = V(x, t) + W(x, t)$

فرض دوم: $V(0, t) = V(\pi, t) = 0$

مرحله ۱: ابتدا W را به دست می آوریم. چون دو سر بسته است پس:

$$W(x, t) = ax + b$$

$$W(0, t) = t \rightarrow b = t$$

$$W(\pi, t) = t + \pi \rightarrow a\pi + t = t + \pi \rightarrow a = 1$$

$$W(x, t) = x + t$$

مرحله ۲: شکل $V(x, t)$ را به دست می آوریم.

چون دو سر بسته است پس شکل $V(x, t)$ نیز بدین صورت است:

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x \xrightarrow{L = \pi} V = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx$$

مرحله ۳: جایگذاری:

$$u(x, t) = V(x, t) + W(x, t)$$

$$u(x, t) = x + t + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx$$

$$u_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n(t) \sin nx$$

$$u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) (-n^2) \sin nx$$

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n(t) \sin nx - \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)(-n^2) \sin nx = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{T}_n + n^2 T) \sin nx = 0$$

$$\ddot{T}_n + n^2 T = 0 \rightarrow (D^2 + n^2)T = 0$$

$$D = \pm in \rightarrow T_n(t) = A \cos nt + B \sin nt$$

برای یافتن A و B از شرایط اولیه استفاده می‌کنیم:

$$u(x, t) = x + t + \sum_{n=1}^{\infty} (A \cos nt + B \sin nt) \sin nx$$

طبق سری فوریه سینوسی داریم:

$$u(x, 0) = x + \sum_{n=1}^{\infty} A \sin nx = 0 \rightarrow -x = \sum_{n=1}^{\infty} A \sin nx$$

$$\rightarrow A = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} -x \sin nx \, dx = \frac{2(-1)^n}{n}$$

$$u_t(x, 0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (nB \cos nt) \sin nx = x$$

$$x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} (nB \cos nt) \sin nx$$

$$\rightarrow B = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} (x - 1) \sin nx \, dx$$

$$\rightarrow B = -2 \left[\frac{1 + (\pi - 1)(-1)^n}{\pi n^2} \right]$$

$$u(x, t) = x + t + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx$$

$$T_n(t) = A \cos nt + B \sin nt$$

$$T_n(t) = \frac{2(-1)^n}{n} \cos nt - 2 \left[\frac{1 + (\pi - 1)(-1)^n}{\pi n^2} \right] \sin nt$$

$$u = x + t + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2(-1)^n}{n} \cos nt - 2 \left[\frac{1 + (\pi - 1)(-1)^n}{\pi n^2} \right] \sin nt \right\} \sin nx \quad \blacksquare$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مہندسی

فصل ۳: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

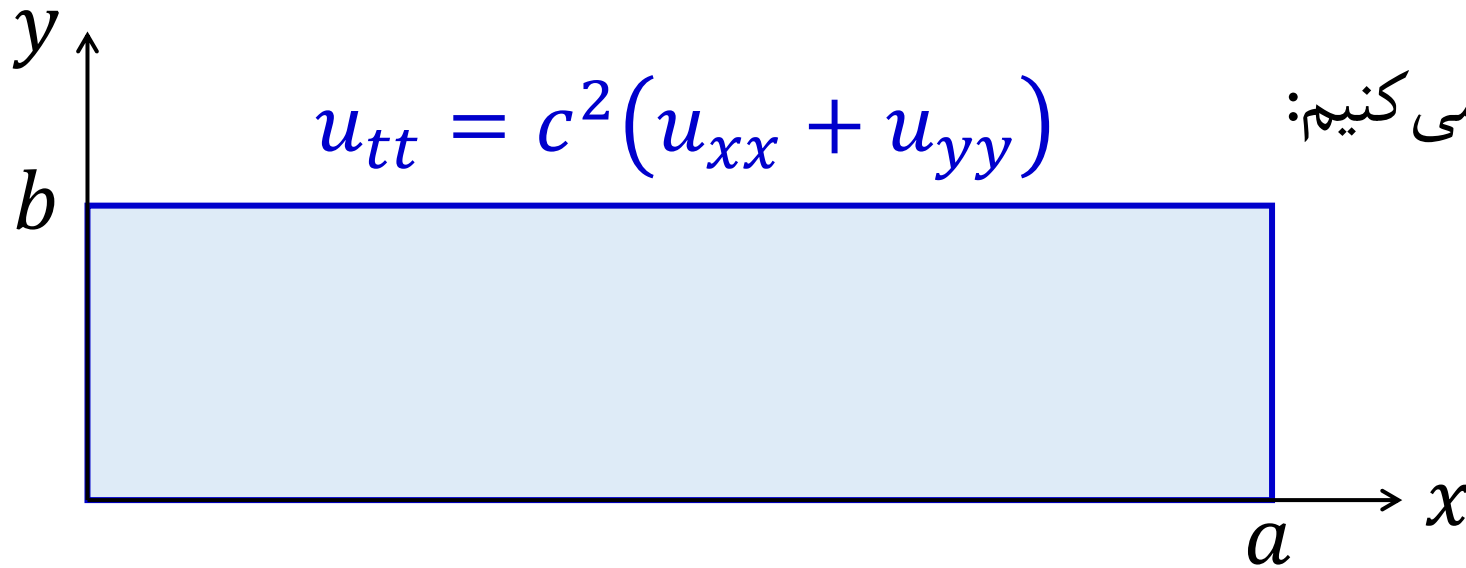
معادلہ موج: ارتعاش غشاء دو بُعدی

توسط: سید محمد جعفری

۳- معادله موج دو بُعدی

□ این معادله حاکم بر ارتعاش یک غشای مستطیلی است.

□ از روش جداسازی متغیرها استفاده می کنیم:



شرایط مرزی: $u(0, y, t) = u(a, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0$

شرایط اولیه: $u(x, y, 0) = f(x, y) , u_t(x, y, 0) = g(x, y)$

در این معادله جداسازی متغیرها را بدین صورت انجام می‌دهیم:

$$u(x, y, t) = F(x, y)T(t) \rightarrow F\ddot{T} = c^2(F_{xx}T + F_{yy}T)$$

$$\xrightarrow{\div c^2 FT} \frac{\ddot{T}}{c^2 T} = \frac{F_{xx} + F_{yy}}{F} = k = -p^2$$

مانند قبل، عدد ثابت k باید منفی باشد.

$$\begin{cases} F_{xx} + F_{yy} + p^2 F = 0 & \text{معادله مکان یا Helmholtz equation} \\ \ddot{T} + c^2 p^2 T = 0 & \text{معادله زمان} \end{cases}$$

حال برای حل معادله مکان، دوباره از جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم.

$$F(x, y) = X(x)Y(y) \rightarrow X''Y + XY'' + p^2XY = 0$$

$$\xrightarrow{\div XY} \quad \frac{X''}{X} = -\frac{1}{Y}(Y'' + p^2Y) = -k^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X'' + k^2X = 0 \\ Y'' + \underbrace{(p^2 - k^2)}_{v^2}Y = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X(x) = A \cos kx + B \sin kx \\ Y(y) = C \cos vy + D \sin vy \end{array} \right.$$

و طبق شرایط مرزی (مشابه مسأله موج) داریم:

$$\begin{cases} X(0) = 0 & X(a) = 0 \\ Y(0) = 0 & Y(b) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X_m(x) = \sin \frac{m\pi}{a} x \\ Y(y) = \sin \frac{n\pi}{b} y \end{cases}$$

که در آن m و n اعداد صحیح هستند.

برای قسمت زمانی $T(t)$ نیز داریم: $\ddot{T} + c^2 p^2 T = 0$

$$p^2 = k^2 + v^2 = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2$$

$$c^2 p^2 = \lambda^2 = c^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \rightarrow \lambda_{mn} = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

$$\rightarrow T(t) = A_{mn} \cos(\lambda_{mn} t) + B_{mn} \sin(\lambda_{mn} t)$$

$$u_{mn}(x, y, t) = T_{mn}(t)F_{mn}(x, y)$$

$$u_{mn} = (A_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn} \sin \lambda_{mn} t) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

و با جمع جواب‌ها داریم:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn} \sin \lambda_{mn} t) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

با اعمال شرایط اولیه ضرایب A_{mn} و B_{mn} را می‌یابیم:

$$u(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = f(x, y)$$

برای یافتن ضریب A_{mn} باید دو بار از سری فوریه استفاده کنیم.

$$K_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{n\pi}{b} y \quad \text{فرض } y \text{ ثابت:}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} K_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x = f(x, y) \rightarrow K_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x, y) \sin \frac{m\pi}{a} x \, dx$$

$$K_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{n\pi}{b} y$$

$$A_{mn}(y) = \frac{2}{b} \int_0^b K_m(y) \sin \frac{n\pi}{b} y \, dy$$

ضرب اول به دست آمد:

$$\rightarrow A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \, dx dy$$

شرط دوم شرایط اولیه:

$$u_t(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \lambda_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = g(x, y)$$

به همین ترتیب برای B_{mn} نیز مسیری مانند A_{mn} را می‌رویم و بدین پاسخ می‌رسیم:

$$B_{mn} = \frac{4}{abc\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}} \int_0^b \int_0^a g(x, y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \, dx dy$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

فصل ۳: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

معادله انتقال گرمای یک بعدی

هدایت گرمایی در میله با طول محدود

توسط: سید محمد جعفری

معادله انتقال گرمای یک بُعدی (میله متناهی)

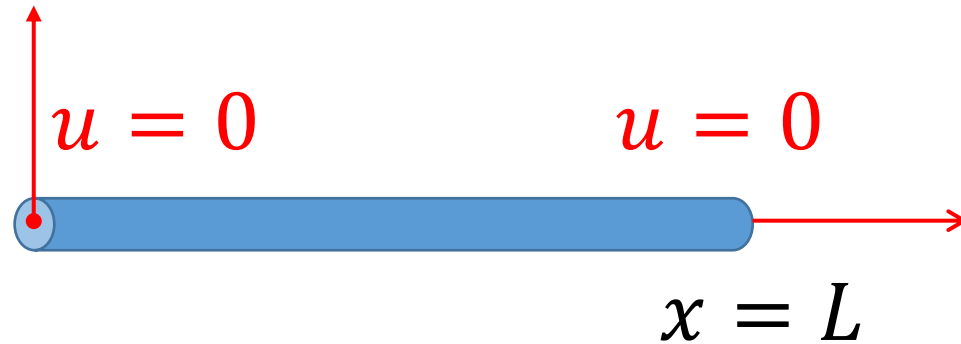
□ این معادله برای حل کامل به یک شرط اولیه (دمای اولیه) و دو شرط مرزی نیاز دارد.

□ برای مثال ابتدا با شرط داشتن دمای دو سر میله شروع می کنیم:

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

$$u(x, 0) = f(x)$$



□ ابتدا جداسازی متغیرها را انجام می دهیم:

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

$$F\dot{G} - c^2 F''G = 0 \xrightarrow{\div c^2 FG} \boxed{\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k}$$

□ در اینجا نیز مانند معادله موج، باید k یک عدد منفی باشد. زیرا قسمت x این معادله دقیقاً همان

شرایط معادله موج را دارد و فقط در قسمت زمانی (t) تفاوت دارند.

$$k = -p^2 \rightarrow \begin{cases} F'' + p^2 F = 0 \rightarrow (D^2 + p^2)F = 0 \rightarrow D^2 + p^2 = 0 \\ \dot{G} + c^2 p^2 G = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow D = \pm ip \rightarrow F(x) = A \cos px + B \sin px \quad \square \text{ شرایط مرزی:}$$

$$\begin{cases} F(0) = 0 \rightarrow A = 0 \\ F(L) = 0 \rightarrow B \sin pL = 0 \rightarrow pL = n\pi \rightarrow p = \frac{n\pi}{L} \rightarrow F(x) = B \sin \frac{n\pi}{L} x \end{cases}$$

$$\dot{G} + c^2 p^2 G = 0 \rightarrow \frac{dG}{dt} = -c^2 p^2 G \rightarrow \frac{dG}{G} = -c^2 p^2 dt$$

$$\rightarrow \ln G = -c^2 p^2 t + D$$

$$G(t) = D' e^{-c^2 p^2 t} \rightarrow G(t) = D' e^{-\frac{c^2 \pi^2 n^2}{L^2} t}$$

□ مانند قبل داریم:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\frac{c^2 \pi^2 n^2}{L^2} t} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

□ برای یافتن ضریب مجهول D_n از شرط اولیه استفاده می‌کنیم:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi}{L} x \rightarrow D_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

مثال: دمای میله‌ای را که دو سر آن عایق شده است را پس از گذشت زمان طولانی بیابید.

$$u_t = u_{xx} \quad u(x, 0) = \cos 4x + 1 \quad 0 \leq x \leq L = \pi$$

□ شرط مرزی این پرسش این است که دو سر میله عایق است. یعنی نرخ انتقال گرما از دو سر میله، صفر

است. یعنی مشتق تابع نسبت به مکان در سری از میله که عایق است، صفر است:

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$$

□ ابتدا جداسازی متغیرها را انجام می‌دهیم:

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

$$F \dot{G} = F'' G \quad \xrightarrow{\div FG} \quad \frac{\dot{G}}{G} = \frac{F''}{F} = -p^2$$

$$\rightarrow F(x) = A \cos px + B \sin px \quad \rightarrow F'(x) = -Ap \sin px + Bp \cos px$$

$$\begin{cases} F'(0) = 0 \rightarrow B = 0 \\ F'(\pi) = 0 \rightarrow p\pi = n\pi \rightarrow p = n \rightarrow F(x) = A \cos nx \end{cases}$$

$$\dot{G} + n^2 G = 0 \rightarrow \frac{dG}{dt} = -n^2 G \rightarrow \frac{dG}{G} = -n^2 dt \rightarrow \ln G = -n^2 t + C$$

$$\rightarrow G(t) = C_n e^{-n^2 t} \quad \rightarrow u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-n^2 t} \cos nx$$

□ چون دنباله کسینوسی است، پس n از صفر ($n = 0$) شروع می‌شود.

□ پاسخ را بدین شکل نیز می توان نوشت:

$$\rightarrow u(x, t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n^2 t} \cos nx$$

□ حال با شرط اولیه داریم:

$$u(x, 0) = \cos 4x + 1 = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos nx$$

□ با توجه به مفاهیم و مقایسه با سری فوریه داریم:

$$C_0 = 1, \quad C_4 = 1 \ (n = 4), \ C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_6 = \dots = 0$$

$$\rightarrow u(x, t) = 1 + e^{-16t} \cos 4x \quad \blacksquare$$

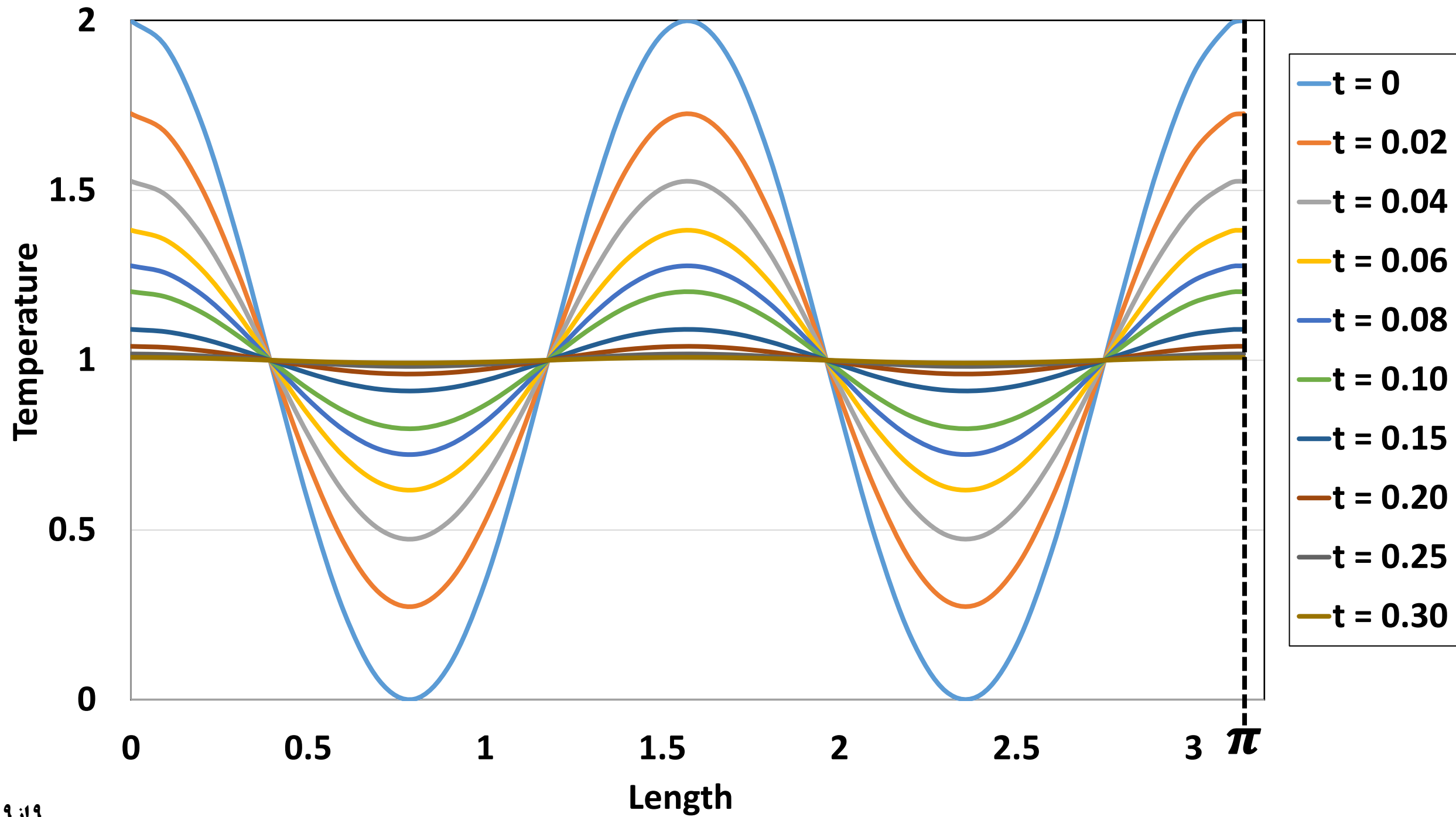
□ در زمان طولانی دما بدین شکل محاسبه می‌شود:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + e^{-16t} \cos 4x) = 1$$

□ در نتیجه پس از زمان طولانی به دمای پایدار ۱ می‌رسیم.

□ این پدیده ناشی از جمله نفوذ u_{xx} است. زیرا نفوذ در ابتدا به علت ناهمگونی یک خاصیت در دامنه پاسخ ایجاد می‌شود ولی همیشه ادامه ندارد.

□ پس از گذشت زمان، این ناهمگونی از بین می‌رود و نفوذ کم می‌شود. همانند دمای میله که پس از گذشت زمان ثابت می‌شود.



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

فصل ۳: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

معادله انتقال گرمای یک بُعدی

هدایت گرمایی در میله با طول نامحدود

توسط: سید محمد جعفری

معادله گرمای یک بعدی (بدون مرز)

در برخی از مسائل میله مورد نظر از یک سمت یا دو سمت بدون مرز (نامتناهی) است، در این شرایط شرط مرزی معنی ندارد و فقط می‌توان از صورت حدی استفاده کرد. این یعنی دمای میله را به صورت حد در بی‌نهایت به عنوان شرط مرزی القا کرد.

معادله گرمای میله بدون مرز (نامتناهی) را بیابید.

$$u_t = c^2 u_{xx} \quad -\infty < x < +\infty, t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0$$

نخست جداسازی متغیرها:

$$u(x, t) = F(x)G(t) \rightarrow F \dot{G} = c^2 F'' G \xrightarrow{\div c^2 F G} \frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k$$

فرض ۱: $k = 0$ به ما جواب بدیهی می‌دهد پس سراغ این فرض نمی‌رویم.

$$\text{شرط مرزی: } F'' - p^2 F = 0 \rightarrow F(x) = Ae^{px} + Be^{-px}$$

فرض ۲: $k = p^2$ باید بررسی شود.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (Ae^{px} + \cancel{Be^{-px}}) = 0 \rightarrow A = 0$$

0

در این حالت نیز به جواب بدیهی صفر می‌رسیم. لذا این فرض نیز قابل قبول نیست.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\cancel{Ae^{px}} + Be^{-px}) = 0 \rightarrow B = 0$$

0

فرض ۳: $k = -p^2$

$$\begin{cases} F'' + p^2 F = 0 \rightarrow F(x) = A \cos px + B \sin px \\ \dot{G} + c^2 p^2 G = 0 \rightarrow G(t) = C e^{-c^2 p^2 t} \end{cases}$$



$$u(x, t) = (A' \cos px + B' \sin px) e^{-c^2 p^2 t}$$

در اینجا u علاوه بر x و t تابعی از p نیز هست و به ازاء هر p یک جواب مستقل می‌دهد. پس همانند قبل که با $\sum$ جواب کلی را به دست می‌آوردیم، در اینجا نیز با جمع جواب‌ها می‌توان به جواب کلی رسید. در اینجا چون متغیر ما یعنی p مانند n متغیر گسسته نیست، به جای $\sum$ ، از انتگرال استفاده می‌کنیم:

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} (A' \cos px + B' \sin px) e^{-c^2 p^2 t} dp$$

برای A' و B' نیز از شرایط اولیه استفاده می‌کنیم:

$$u(x, 0) = \int_0^{\infty} (A' \cos px + B' \sin px) dp = f(x)$$

□ در اینجا به جای سری فوریه، شاهد انتگرال فوریه هستیم

□ لذا A' و B' همان ضرائب انتگرال فوریه هستند:

$$A' = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos pv \, dv$$

$$B' = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin pv \, dv$$

حال A' و B' را جایگذاری می‌کنیم:

$$u(x, t) = \int_0^\infty \frac{e^{-c^2 p^2 t}}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^\infty \underbrace{[f(v) \cos pv \cos px + f(v) \sin pv \sin px]}_{f(v) \cos p(x-v)} dv \right\} dp$$

$$u(x, t) = \int_0^\infty \frac{e^{-c^2 p^2 t}}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^\infty [f(v) \cos p(x-v)] dv \right\} dp$$

و با کمی جابه‌جائی در ترتیب انتگرال داریم:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v) \left\{ \int_0^\infty [e^{-c^2 p^2 t} \cos p(x-v)] dp \right\} dv$$

حال می‌توان انتگرال داخلی را با تغییر متغیر به شکل انتگرال زیر در آورد:

$$S^2 = c^2 p^2 t \rightarrow S = cp\sqrt{t} \rightarrow dS = c\sqrt{t}dp \rightarrow dp = \frac{dS}{c\sqrt{t}}$$

$$p(x - v) = 2bS \rightarrow p(x - v) = 2bcp\sqrt{t} \rightarrow b = \frac{x - v}{2c\sqrt{t}}$$

$$\int_0^\infty \left[e^{-c^2 p^2 t} \cos p(x - v) \right] dp = \int_0^\infty \left[e^{-S^2} \cos 2bS \right] \frac{dS}{c\sqrt{t}}$$

$$= \frac{1}{c\sqrt{t}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2} = \frac{1}{c\sqrt{t}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\left(\frac{x-v}{2c\sqrt{t}}\right)^2}$$

و با جایگذاری انتگرال داخلی نیز به تصویری ساده‌تر می‌رسیم:

$$u(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}} dv$$

البته با فرض دیگری نیز مانند روبه‌رو با می‌توان شکل ساده‌تری یافت:

$$z^2 = \frac{(x - v)^2}{4c^2 t} \rightarrow -z = \frac{x - v}{2c\sqrt{t}}$$

$$\rightarrow -x + v = 2c\sqrt{t}z \rightarrow v = x + 2cz\sqrt{t} \rightarrow dv = 2c\sqrt{t}dz$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2cz\sqrt{t}) e^{-z^2} dz \quad \blacksquare$$