۱

گزینه ۳

باید دو عدد ۱/۴ و ۱/۸ در بازه باشند، پس:

$$\left.\begin{array}{l} ۱-۴x<۱/۴\Rightarrow ۴x>-۰/۴\Rightarrow x>-۰/۱ \\ ۲-x>۱/۸\Rightarrow x<۰/۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} -۰/۱<x<۰/۲$$

۲

گزینه ۳

برای آنکه بازهٔ داده‌شده یک همسایگی عدد ۳ باشد، باید داشته باشیم:

$$a-۱<۳<۲a+۳\Rightarrow \begin{cases} a-۱<۳ \\ ۳<۲a+۳ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a<۴ \\ ۰<a \end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} ۰<a<۴$$

بنابراین مجموعه مقادیر قابل‌قبول a برابر است با $۰<a<۴$ و بیشترین مقدار صحیح a برابر با ۳ است.

۳

گزینه ۴

همسایگی راست عدد ۲ به‌صورت $(۲, m)$ می‌باشد $(m>۲)$؛ بنابراین:

$$۱)\ a-۲b=۲\Rightarrow a=۲b+۲ \qquad (۱)$$

$$۲)\ ۲a+b>۰\xrightarrow{(۱)} ۲\left(۲b+۲\right)+b>۲$$

$$\Rightarrow ۴b+۴+b>۲\Rightarrow ۵b>-۲\Rightarrow b>-\frac{۲}{۵}$$

فقط بازهٔ داده‌شده در گزینهٔ (۴) در شرط $b>-\frac{۲}{۵}$ صدق می‌کند.

۴

گزینه ۳

باتوجه‌به تساوی $(۳b-۲a, ۷)\cup(c, ۲a+b)=(c, ۲a+b)\cup(۳b-۲a, ۷)$داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲a+b=۴ \\ ۳b-۲a=۴ \end{cases}\Rightarrow ۴b=۸\Rightarrow b=۲$$

$$\Rightarrow ۲a+b=۴\xrightarrow{b=۲} a=۱$$

بازهٔ (a, b) برابر با $(۱, ۲)$ است که باتوجه‌به گزینه‌ها، یک همسایگی برای $\frac{۴}{۳}$ است.

۵

گزینه ۴

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱:

$$x^{۲} - ۲x - ۸ < ۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۴) < ۰ \Rightarrow -۲ < x < ۴$$

این مجموعه یک همسایگی عدد ۱− است.

گزینهٔ ۲:

$$|x+۲| < ۲ \Rightarrow -۲ < x+۲ < ۲ \Rightarrow -۴ < x < ۰$$

این مجموعه یک همسایگی عدد ۱− است.

گزینهٔ ۳:

$$\frac{x^{۲}+۲x+۱}{x^{۲}-۴} \leq ۰ \Rightarrow \frac{(x+۱)^{۲}}{x^{۲}-۴} \leq ۰ \Rightarrow x^{۲}-۴ < ۰ \Rightarrow x^{۲} < ۴ \Rightarrow -۲ < x < ۲$$

این مجموعه هم یک همسایگی عدد ۱− است.

گزینهٔ ۴:

$$(x+۱)(x^{۳}+x+۲) < ۰ \Rightarrow (x+۱)(x+۱)(x^{۲}-x+۲) < ۰$$
$$\Rightarrow (x+۱)^{۲}(x^{۲}-x+۲) < ۰ \xrightarrow{(x+۱)^{۲} \geq ۰} (x^{۲}-x+۲) < ۰$$
$$\Delta = ۱ - ۸ = -۷ < ۰ \Rightarrow \varnothing$$

این نامعادله دارای مجموعه جواب تهی است.

۶

گزینه ۱

$$x+۱ < ۳ < ۲x-۱$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x+۱ < ۳ \Rightarrow x < ۲ \\ ۲x-۱ > ۳ \Rightarrow ۲x > ۴ \Rightarrow x > ۲ \end{cases} \xrightarrow{\cap} \varnothing$$

۷

گزینه ۱

عدد ۲− باید عضو بازهٔ $(۲x-۱, ۳x+۱)$ باشد، بنابراین باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۲x-۱ < -۲ \Rightarrow x < -\frac{۱}{۲} & (۱) \\ ۳x+۱ > -۲ \Rightarrow x > -۱ & (۲) \end{cases}$$
$$\xrightarrow{(۱),(۲)} x \in (-۱, -\frac{۱}{۲})$$

پس حداکثر مقدار $b - a$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۸

گزینه ۲

دامنهٔ تابع را به دست می‌آوریم:

$$۲ - [x] = ۰ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow ۲ \leq x < ۳ \Rightarrow D_f = (-\infty, ۲) \cup [۳, +\infty)$$

پس همسایگی راست نقطهٔ $x = ۲$ در دامنهٔ تابع قرار ندارد.

۹

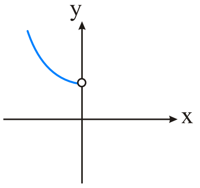
گزینه ۱

باتوجه‌به دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ که به‌صورت $D_f : x \geq 1$ یا به‌عبارت‌دیگر بازهٔ $[1, +\infty)$ است، تابع f به ازای مقادیر بیشتر از یک تعریف می‌شود، اما به ازای مقادیر کمتر از یک تعریف نمی‌شود، پس می‌توان گفت تابع f در همسایگی راست یک تعریف شده ولی در همسایگی چپ آن تعریف نمی‌شود. توجه کنید که در گزینهٔ (۲) تابع f هم در همسایگی راست و هم در همسایگی چپ یک تعریف می‌شود. همچنین در گزینه‌های (۳) و (۴) تابع در همسایگی چپ یک تعریف می‌شود ولی در همسایگی راست آن تعریف نمی‌شود.

۱۰

گزینه ۲

در گزینهٔ (۲) تابع به ازای مقادیر بیشتر از صفر تعریف نمی‌شود، بنابراین در همسایگی راست صفر تعریف نشده است، اما تابع به ازای مقادیر کمتر از صفر تعریف شده است؛ بنابراین در همسایگی چپ صفر تعریف شده است.



در گزینه‌های (۱) و (۴) تابع هم در همسایگی راست و هم در همسایگی چپ صفر تعریف شده است.
در گزینهٔ (۳) تابع در همسایگی راست صفر تعریف شده است ولی در همسایگی چپ آن تعریف نشده است.

۱۱ گزینه ۴

طبق تعریف همسایگی، هر بازهٔ باز شامل عدد حقیقی $x_۰$ را یک همسایگی $x_۰$ می‌نامیم.
به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$\text{گزینهٔ۱}: \frac{۱}{|x-\frac{۵}{۲}|} > ۱ \xrightarrow{x\neq\frac{۵}{۲}} ۱ > \left|x-\frac{۵}{۲}\right| \Rightarrow -۱ < x-\frac{۵}{۲} < ۱$$

$$\xrightarrow{+\frac{۵}{۲}} \frac{۳}{۲} < x < \frac{۷}{۲} \Rightarrow \left(\frac{۳}{۲},\frac{۷}{۲}\right) - \left\{\frac{۵}{۲}\right\}$$

درنتیجه این بازهٔ شامل عدد ۳ است، پس شامل یک همسایگی عدد ۳ است.

$$\text{گزینهٔ ۲}: \frac{x^۲-۷x+۱۰}{x^۲-۸x+۱۶} < ۰ \Rightarrow \frac{(x-۲)(x-۵)}{(x-۴)^۲} < ۰$$

توجه کنید که عبارت $(x-۴)^۲$ همواره نامنفی است $\left((x-۴)^۲ \geq ۰\right)$؛ بنابراین:

$$\xrightarrow{x\neq ۴} (x-۲)(x-۵) < ۰$$

x		۲		۵	
(x−۲)(x−۵)	+	۰	−	۰	+

$$\Rightarrow (۲,۵) - \{۴\}$$

درنتیجه این بازه شامل عدد ۳ است، پس شامل یک همسایگی عدد ۳ است.

$$\text{گزینهٔ ۳}: |x-۲| > \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x-۲ > \frac{۱}{۲} \Rightarrow x > \frac{۵}{۲} \\ x-۲ < -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x < \frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow \left(-\infty,\frac{۳}{۲}\right) \cup \left(\frac{۵}{۲},+\infty\right)$$

درنتیجه این بازه شامل عدد ۳ است. پس شامل یک همسایگی عدد ۳ است.

$$\text{گزینهٔ ۴}: (-۴,۱) \cup (۳,۵)$$

درنتیجه این بازه شامل عدد ۳ نیست. پس این بازه شامل همسایگی عدد ۳ نخواهد بود.

۱۲ گزینه ۳

$$\frac{x-۶}{x^۲-۲x+۴} < -۱ \Rightarrow \frac{x-۶}{x^۲-۲x+۴} + ۱ < ۰ \Rightarrow \frac{x-۶+x^۲-۲x+۴}{x^۲-۲x+۴} < ۰$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲-x-۲}{x^۲-۲x+۴} < ۰ \Rightarrow \frac{(x-۲)(x+۱)}{x^۲-۲x+۴} < ۰$$

توجه کنید که:

$$x^۲-۲x+۴ \Rightarrow \begin{cases} \Delta = (-۲)^۲ - ۴(۱)(۴) = -۱۲ < ۰ \\ x^۲\text{ضریب} = ۱ > ۰ \end{cases} \Rightarrow \text{این عبارت همواره مثبت است}$$

$$(x-۲)(x+۱) < ۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱) < ۰$$

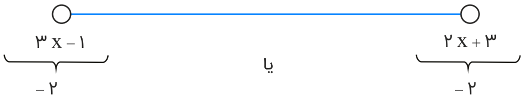
x		−۱		۲	
(x−۲)(x+۱)	+	۰	−	۰	+

$$\Rightarrow (-۱,۲)$$

درنتیجه همسایگی راست عدد (-۱) است.

۱۳ گزینه ۲

برای آنکه بازهٔ داده‌شده، یک همسایگی عدد ۲− نباشد، باید عدد ۲− در داخل این بازه قرار نگیرد، یعنی:



$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x-۱ \geq -۲ \Rightarrow ۳x \geq -۱ \Rightarrow x \geq -\frac{۱}{۳} \\ ۲x+۳ \leq -۲ \Rightarrow ۲x \leq -۵ \Rightarrow x \leq -\frac{۵}{۲} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اجتماع}} (-\infty, -\frac{۵}{۲}] \cup [-\frac{۱}{۳}, +\infty) \qquad (۱)$$

توجه کنید که در هر بازه باید عدد سمت راست بزرگ‌تر از عدد سمت چپ باشد؛ بنابراین:

$$۳x-۱ < ۲x+۳ \Rightarrow x < ۴ \quad (۲)$$

$$(۱) \cap (۲) = (-\infty, -\frac{۵}{۲}] \cup [-\frac{۱}{۳}, ۴)$$

۱۴ گزینه ۱

$$۱)\ -x^۲ + ۶x - ۸ \geq ۰ \Rightarrow -\left(x^۲ - ۶x + ۸\right) \geq ۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۴) \leq ۰$$

x		۲		۴	
(x−۲)(x−۴)	+	۰	−	۰	+

$$\Rightarrow [۲, ۴] \quad (۱)$$

$$۲)\ x^۲ - ۶x + ۹ \neq ۰ \Rightarrow (x-۳)^۲ \neq ۰ \Rightarrow x \neq ۳ \quad (۲)$$

$$D_f = (۱) \cap (۲) = [۲, ۴] - \{۳\}$$

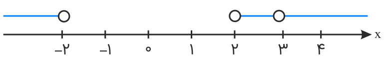
درنتیجه مجموعه جواب به‌دست‌آمده، شامل یک همسایگی محذوف عدد ۳ است.

۱۵ گزینه ۲

نامعادلهٔ $\frac{x^۲ - ۴}{|x-۳|} > ۰$ را حل می‌کنیم؛ با شرط $x \neq ۳$ داریم:

$$x^۲ - ۴ > ۰ \Rightarrow x^۲ > ۴ \Rightarrow \begin{cases} x > ۲ \\ \text{یا} \\ x < -۲ \end{cases}$$

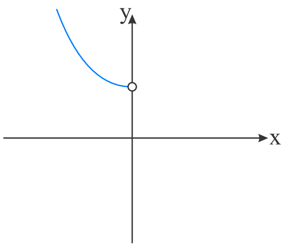
مجموعه جواب نامعادله به‌صورت زیر است:



هیچ همسایگی چپی از نقطهٔ $x = ۲$ در این بازه وجود ندارد.

۱۶ گزینهٔ ۲

در گزینهٔ (۲) تابع به ازای مقادیر بیشتر از صفر تعریف نمی‌شود، بنابراین در همسایگی راست صفر تعریف نشده است، اما تابع به ازای مقادیر کمتر از صفر تعریف نشده است، بنابراین در همسایگی چپ صفر تعریف شده است.



در گزینه‌های (۱) و (۴) تابع هم در همسایگی راست و هم در همسایگی چپ صفر تعریف شده است.
در گزینهٔ (۳) تابع در همسایگی راست صفر تعریف شده است ولی در همسایگی چپ آن تعریف نشده است.

۱۷ گزینهٔ ۴

دامنهٔ تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{۱}{[x]} \Rightarrow D_f : [x] \neq ۰ \quad (*)$$

می‌دانیم اگر $۰ \leq x < ۱$، آنگاه $[x] = ۰$، پس باتوجه‌به $(*)$ می‌توان گفت:

$$D_f = \mathbb{R} - [۰,۱) \text{ یا } D_f = (-\infty, ۰) \cup [۱, +\infty)$$

باتوجه‌به گزینه‌ها و D_f، تابع هیچ نوع همسایگی در $x = \frac{۱}{۲}$ ندارد.
گزینهٔ (۱): تابع در همسایگی چپ $x = ۰$ تعریف می‌شود.
گزینهٔ (۲): تابع در همسایگی راست $x = ۱$ تعریف می‌شود.
گزینهٔ (۳): تابع هم در همسایگی چپ و هم در همسایگی راست $x = -۱$ تعریف می‌شود.

۱۸ گزینهٔ ۱

می‌دانیم اگر $x \in (a,b)$ باشد، آنگاه بازهٔ (a,b) یک همسایگی x است، پس:

$$\Rightarrow ۳ \in (۲a - ۱, a + ۲) \Rightarrow \begin{cases} ۲a - ۱ < ۳ \Rightarrow a < ۲ \\ a + ۲ > ۳ \Rightarrow a > ۱ \end{cases} \Rightarrow ۱ < a < ۲$$