

[Mathbook.M ihanblog.C om](http://mathbook.mihanblog.com)

Mathematical Books Download

Mathematical Softwares Download



CLICK HERE FOR COME TO SITE

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، شماره ۲۲۳

فخستین درس احتمال

تألیف

اس - راس

ترجمه

دکتر حسنعلی آذرنوش - دکتر ابوالقاسم بزرگ نیا

دکتر علی مشکانی - دکتر حسینعلی نیرومند

۱۳۷۶

Ross, Sheldon M.

راس . شلدون

نخستین درس احتمال / تألیف . اس . راس ؛ ترجمه حسنعلی آذرنوش ... [و دیگران] . -
مشهد : دانشگاه فردوسی (مشهد) . ۱۳۷۶ .

بازده ، ۴۷۳ ص. : جدول ، نمودار . - (انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد ؛ ۲۲۳) .

ISBN: 964-6335 - 07 - 1

فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیبا (فهرست‌نویسی پیش از انتشار) .

A First Course in Probability.

عنوان اصلی :

۱. احتمالات. الف. آذرنوش، حسنعلی ، ۱۳۱۹ - مترجم . ب . دانشگاه فردوسی (مشهد) . ج .

عنوان .

۵۱۹/۲

QA ۲۷۳/ر ۲ ن ۳

۱۳۷۶

م ۶۶ ۶۸۷۷

کتابخانه ملی ایران

شناسنامه کتاب

نام : نخستین درس احتمال

تألیف : راس ، شلدون

ترجمه : دکتر حسنعلی آذرنوش - دکتر ابوالقاسم بزرگ‌نیا

دکتر علی مشکانی - دکتر حسینعلی نیرومند

ناشر : انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ انتشار : زمستان ۱۳۷۶

تعداد : ۲۰۰۰ نسخه - چاپ اول

امور فنی و چاپ : مؤسسه چاپ و انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد

قیمت : ۹۳۰۰ ریال

شابک : ۱ - ۰۷ - ۶۳۳۵ - ۹۶۴ - ۶۳۳۵ - ۰۷ - ۱ (ISBN: 964 - 6335 - 07 - 1)

فهرست مطالب

۱	پیشگفتار مترجمان
۳	پیشگفتار مؤلف
۷	فصل اول - آنالیز ترکیبی
۷	۱- مقدمه
۸	۲- اصل اساسی شمارش
۸	اصل اساسی شمارش
۹	اصل اساسی تعمیم یافته شمارش
۱۰	۳- جایگشتها
۱۲	۴- ترکیبها
۱۷	۵- ضرایب چند جمله‌ای
۱۹	قضیه چند جمله‌ای
۱۹	۶- توزیع گلوله در کیسه‌ها
۲۳	تمرینهای نظری
۲۶	مسائل
۳۱	فصل دوم - اصول احتمال
۳۱	۱- مقدمه

۳۱	۲- فضای نمونه و پیشامدها
۳۷	۳- اصول احتمال
۴۰	۴- چند حکم ساده
۴۴	۵- فضاهای نمونه با برآمدهای همشانس
۵۴	۶- احتمال یک تابع مجموعه ای پیوسته است
۵۹	۷- احتمال به عنوان میزان باور
۶۱	تمرینهای نظری
۶۵	مسائل
۷۱	فصل سوم - احتمال شرطی و استقلال
۷۱	۱- مقدمه
۷۱	۲- احتمالهای شرطی
۷۶	۳- فرمول بیز
۸۷	۴- پیشامدهای مستقل
۱۰۲	۵- تابع $P(0 F)$ یک احتمال است
۱۱۱	تمرینات نظری
۱۱۷	مسائل
۱۳۱	فصل چهارم - متغیرهای تصادفی
۱۳۱	۱- مقدمه
۱۳۶	۲- توابع توزیع
۱۳۹	۳- متغیرهای تصادفی گسسته
۱۴۲	۴- متغیرهای تصادفی برنولی و دو جمله ای
۱۵۰	۴-۱ محاسبه تابع توزیع دو جمله ای
۱۵۲	۵- متغیر تصادفی پواسن

۱۶۰	۵-۱ محاسبه تابع توزیع پواسن
۱۶۲	۶- سایر توزیعهای احتمال گسسته
۱۶۲	۶-۱ متغیر تصادفی هندسی
۱۶۳	۶-۲ متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی
۱۶۵	۶-۳ متغیر تصادفی فوق هندسی
۱۶۷	۶-۴ توزیع زتا (زیپ)
۱۶۸	تمرینهای نظری
۱۷۲	مسائل
۱۸۳	فصل پنجم - متغیرهای تصادفی پیوسته
۱۸۳	۱- مقدمه
۱۸۷	۲- متغیر تصادفی یکتواخت
۱۹۱	۳- متغیرهای تصادفی نرمال
۱۹۹	۳-۱ تقریب نرمال برای توزیع دوجمله‌ای
۱۹۹	قضیه حدی دو موآر- لاپلاس
۲۰۲	۴- متغیرهای تصادفی نمایی
۲۰۷	۴-۱ تابع نرخ خرابی
۲۰۹	۵- توزیعهای پیوسته دیگر
۲۰۹	۵-۱ توزیع گاما
۲۱۱	۵-۲ توزیع وایبل
۲۱۲	۵-۳ توزیع کوشی
۲۱۴	۵-۴ توزیع بتا
۲۱۵	۶- توزیع تابعی از یک متغیر تصادفی
۲۱۶	قضیه ۶-۱
۲۱۷	تمرینات نظری

۲۲۰

مسائل

۲۲۷

فصل ششم - توزیع توأم متغیرهای تصادفی

۲۲۷

۱- تابع توزیع توأم

۲۳۷

۲- متغیرهای تصادفی مستقل

۲۴۹

۳- مجموع متغیرهای تصادفی مستقل

۲۵۱

قضیه ۱-۳

۲۵۳

قضیه ۲-۳

۲۵۴

۴- توزیعهای شرطی - حالت گسسته

۲۵۷

۵- توزیعهای شرطی - حالت پیوسته

۲۶۶

۷- توزیع احتمال توأم توابعی از متغیرهای تصادفی

۲۷۳

تمرینات نظری

۲۷۸

مسائل

۲۸۵

فصل هفتم - میانگین

۲۸۵

۱- مقدمه و تعاریف

۲۹۴

۲- میانگین تابهی از یک متغیر تصادفی

۲۹۵

حکم ۱-۲ قانون نا آگاهی

۳۰۱

۳- میانگین مجموع متغیرهای تصادفی

۳۱۴

۴- واریانس

۳۱۵

تعریف

۳۱۸

۵- کو واریانس ، واریانس مجموع و همبستگی

۳۲۷

۶-۱ تعاریف

۳۳۵

۶-۳ محاسبه احتمالات با شرطی کردن

۳۳۷	۴-۶ واریانس شرطی
۳۳۹	۷- میانگین شرطی و پیشگویی
۳۴۶	۸- تابع مولد گشتاور
۳۵۹	۹- تعریف کلی میانگین
۳۶۲	تمرینهای نظری
۳۷۲	مسائل
۳۸۹	فصل هشتم - فضای حدی
۴۸۹	۱- مقدمه
۳۸۹	۲- نامساوی چیشف و قانون ضعیف اعداد بزرگ
۳۸۹	حکم ۱-۲ نامساوی مارکف
۳۹۰	حکم ۲-۲ نامساوی چیشف
۳۹۲	حکم ۳-۲
۳۹۲	قضیه ۱-۲ قانون ضعیف اعداد بزرگ
۳۹۳	۳- قضیه حد مرکزی
۳۹۳	قضیه ۱-۳ قضیه حد مرکزی
۳۹۹	قضیه ۲-۳ قضیه حد مرکزی برای متغیرهای تصادفی مستقل
۳۹۹	۴- قانون قوی اعداد بزرگ
۳۹۹	قضیه ۱-۴ قانون قوی اعداد بزرگ
۴۰۰	قضیه ۲-۴ نامساوی کلموگروف
۴۰۳	حکم ۱-۴ لم کرونکر
۴۰۳	قضیه ۳-۴ قانون قوی اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی مستقل
۴۰۵	۵- نامساویهای دیگر
۴۰۶	حکم ۱-۵ نامساوی چیشف یک طرفه
۴۰۸	نتیجه ۱-۵

۴۱۰	تعریف
۴۱۰	حکم ۵-۲ نا مساوی جنس
۴۱۱	تمرینهای نظری
۴۱۴	مسائل
فصل نهم - چند موضوع دیگر احتمال	
۴۱۹	۱- فرایند پواسن
۴۲۱	حکم ۱-۱
۴۲۲	قضیه ۱-۱
۴۲۲	۲- زنجیرهای مارکف
۴۲۵	حکم ۲-۱ معادلات چپمن - کلموگروف
۴۲۷	قضیه ۲-۱
۴۲۹	۳- شگفتی ، عدم اطمینان و آنتروپی
۴۳۰	اصل ۱
۴۳۰	اصل ۲
۴۳۰	اصل ۳
۴۳۰	اصل ۴
۴۳۰	قضیه ۳-۱
۴۳۳	حکم ۳-۱
۴۳۴	قضیه ۳-۲
۴۳۴	۴- نظریه کدگذاری و آنتروپی
۴۳۷	قضیه ۴-۱ قضیه کدگذاری بدون اغتشاش
۴۴۱	قضیه ۴-۲ قضیه کدگذاری با اغتشاش
۴۴۲	مسائل و تمرینهای نظری

۴۴۵	فصل دهم - شبیه سازی
۴۴۵	۱- مقدمه
۴۴۹	۲- تکنیکهای کلی برای شبیه سازی متغیرهای تصادفی پیوسته
۴۴۹	۱-۲ روش تبدیل معکوس
۴۴۹	حکم ۱-۲
۴۵۱	۲-۲ روش عدم پذیرش
۴۵۱	روش عدم پذیرش
۴۵۲	حکم ۲-۲
۴۵۸	۳- شبیه سازی توزیعیهای گسسته
۴۶۱	۴- روشهای کاهش واریانس
۴۶۲	۴- ۱ استفاده از متغیرهای متضاد
۴۶۳	۴- ۲ کاهش واریانس با مشروط نمودن
۴۶۵	۴- ۳ متغیرهای کنترل
۴۶۶	مسائل

پیشگفتار مترجمان

پیدایش دانش احتمال به اوایل قرن هفدهم برمی گردد و با پژوهشهای علمی روی بازیهای تصادفی و مسائل بخت و اقبال آغاز شده است و ریاضی دانان برجسته ای چون پاسکال و فرما آن را پایه گذاری کرده اند .

اهمیت علم احتمال در سالهای اخیر یعنی از زمانی که مفهوم آن با دانش آمار توأم گردید و در زمینه های مختلف فنی به کار گرفته شد، فزونی یافته است . لذا تألیف و ترجمه کتابهایی در این زمینه ضروری به نظر می رسد.

روش کتاب حاضر به این صورت است که پس از بیان اصول و قضایای مربوط به هر فصل مثالهای کاربردی و محسوس زیادی را مطرح می سازد و به این ترتیب مطالب نظری را قابل درک و دلچسب تر جلوه می دهد .

در ترجمه این کتاب تلاش بر آن بوده است که تا حد امکان امانت در ترجمه و روانی متن حفظ شود . واژه های فارسی معادل متن اصلی از لغت نامه مرکز نشر دانشگاهی انتخاب شده اند .

این کتاب برای درس احتمال و کاربرد آن در رشته آمار می تواند به عنوان یک کتاب درسی باشد و برای سایر رشته های مهندسی و فنی در سطح کارشناسی و کارشناسی ارشد نیز مرجع بسیار مفیدی خواهد بود . ضمناً چون برای اغلب مسائل برنامه های کامپیوتری تهیه گردیده بر سایر کتابهای مشابه قبلی ارجح است .

پیشگفتار مؤلف

«می بینیم که نظریه احتمال در نهایت، درك شهودی را به صورت قابل محاسبه در می آورد و با دقت و درستی تمام آنچه را بطور غریزی احساس می شود و اغلب قادر به استدلال نیستیم برای ما مشخص می سازد. قابل ذکر است که این علم با توجه به بازیهای تصادفی شروع شد و در نهایت یکی از مهمترین موضوعات دانستیهای بشری شده است. در واقع مسائل حیاتی در اکثر موارد تنها از نوع مسائل احتمالی است.»

عبارات فوق از بیانات ریاضی دان و منجم مشهور فرانسوی پیر سیمون مارکز دولاپلاس (نیوتن فرانسه) است. بسیاری از مردم گرچه ممکن است احساس کنند مارکز مشهور که خود سهم بسزایی در توسعه احتمال نیز داشته است باید تا حدودی مبالغه کرده باشد ولی این که نظریه احتمال وسیله ای مهم و اساسی تقریباً برای تمام علوم مهندسی، داروسازی، حقوق و صاحبان کارخانه هاست واقعیت دارد. در حقیقت شخص متفکر سؤال نمی کند که «چرا چنین است» بلکه می پرسد «احتمال این که چنین باشد چقدر است؟».

این کتاب به عنوان مقدمه ای بر نظریه ریاضی احتمال برای دانشجویان ریاضی، مهندسی و علوم (شامل علوم اجتماعی و علوم مدیریت) که پیش نیاز دانش محاسبات مقدماتی را دارا می باشند در نظر گرفته شده است. این کتاب نه تنها ریاضیات نظریه احتمال بلکه با توجه به مثالهای بی شمار کاربردهای ممکن این موضوع را نیز ارائه می کند.

در فصل (۱) اصول اساسی آنالیز ترکیبی که در محاسبه احتمالات فایده زیادی دارند ارائه شده است.

در فصل (۲) اصول نظریه احتمال را در نظر می گیریم و چگونگی کاربرد آنها را برای محاسبه احتمالات گوناگون مورد توجه در نظر می گیریم. این فصل شامل اثبات خاصیت مهم پیوستگی احتمالات (که اغلب نادیده گرفته می شود) است که از آن در مطالعه «پارادوکس

منطقی» استفاده نمی شود.

فصل (۳) با موضوعات بسیار مهم احتمال شرطی و استقلال پشامدها سروکار دارد. با چند مثال نقش احتمالهای شرطی را نه فقط وقتی اطلاعات نسبی میسر است بلکه به عنوان وسیله ای که به ما توان می دهد تا احتمالها را ساده تر محاسبه کنیم و حتی وقتی اطلاعات نسبی را نداشته باشیم بتوانیم تشریح کنیم، این روش بسیار مهم محاسبه احتمالها با «شرطی کردن» در فصل (۷) دوباره ظاهر می شود که از آن برای به دست آوردن امیدهای ریاضی استفاده می کنیم.

در فصول (۴)، (۵) و (۶) مفهوم متغیرهای تصادفی را معرفی می کنیم. در فصل ۴ و ۵ و ۶ به ترتیب به متغیرهای تصادفی گسسته، متغیرهای تصادفی پیوسته و متغیرهای تصادفی که دارای توزیع مشترک هستند می پردازیم.

فصل (۷) مفهوم مهم امید ریاضی را معرفی می کند. بعد از این که امید ریاضی متغیر تصادفی را تعریف کردیم طریقه محاسبه امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی را با استفاده از قانون آماردان ناآگاه نشان می دهیم که برای آن یک اثبات مقدماتی ارائه شده است. با چند مثال آورده شده در این قسمت، فایده این نتیجه را که امید ریاضی مجموع متغیرهای تصادفی برابر مجموع امیدهای ریاضی آنهاست تشریح می کنیم. این فصل بخشهایی را در مورد امید شرطی که از آن در تخمین و توابع مولد گشتاورها استفاده می شود، نیز در بر می گیرد.

در فصل (۸) بیشترین نتایج نظری نظریه احتمال را معرفی می کنیم. بویژه قانون قوی اعداد بزرگ و قضیه حد مرکزی را برای متغیرهای مستقل هموزیع اثبات می کنیم. اثبات قانون قوی اعداد بزرگ (از طریق نامساوی کلموگرف و خاصیت پیوستگی احتمالها) کامل است در صورتی که اثبات قضیه حد مرکزی قضیه پیوستگی لوی را فرض می گیرد.

در فصل (۹) چند موضوع اضافی مانند زنجیرهای مارکف، فرآیند پواسون، مقدمه ای بر نظریه اطلاع و کُد گذاری ارائه می شود و در فصل (۱۰) شبیه سازی مورد بررسی واقع می شود.

در سرتاسر این کتاب مثالهای زیادی حل شده و مقدار زیادی مسأله نیز وجود دارد که به دو بخش «مسائل نظری» و «مسائل» تقسیم شده که توسط دانشجویان حل خواهد شد در انتهای کتاب جواب بیشتر مسائل داده شده است. در این جا لازم است از افراد زیر تشکر و

قدردانی نمايم : توماس . آر . فيشر، از دانشگاه A & M تکزاس، جی د وور از دانشگاه پلی تکنیک کالیفرنیا، راب . جی . مورهد از دانشگاه ميشیگان، دیوید هيس از دانشگاه کُرَنل، ام . ساموئل از دانشگاه پُردو، آی . آر . سویج از دانشگاه بال و بالاخره از آر . ميلر از دانشگاه استانفورد.

اس . آر

فصل اول

آنالیز ترکیبی

۱ - مقدمه

ابتدا یک مثال جالب در ارتباط با احتمال ارائه می دهیم. یک سیستم مخابراتی مرکب از n آنتن ظاهراً یکسان است که قرار است به ترتیب خطی به یکدیگر وصل شوند. در این صورت سیستم حاصل، مادامی که هیچ دو آنتن متوالی معیوب نباشد؛ قادر به دریافت همه علائم ارسالی خواهد بود، و آن را *کارا* می نامند حال اگر؛ دقیقاً m آنتن از این n آنتن معیوب باشد، احتمال این که سیستم حاصل کارا باشد چقدر است؟ برای مثال در حالت خاص $n = 4$ و $m = 2$ ، شش آرایش ممکن سیستم به قرار زیر است.

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

که در آن 0 به معنی کارا بودن آنتن و 0 به معنی معیوب بودن آن است، پس سیستم حاصل در سه آرایش اول کارا و در سه آرایش باقیمانده غیر کاراست و منطقی به نظر می رسد که مقدار $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ را به عنوان احتمال مطلوب اختیار کنیم. برای مقادیر کلی n و m ، احتمالی را

که سیستم کارا باشد به طریقی مشابه می توان محاسبه کرد؛ یعنی می توان تعداد آرایشهایی، که منجر به کارایی سیستم می شود شمرد و سپس آن را به تعداد کل تمام آرایشهای ممکن تقسیم کرد. از مطلب بالا در می یابیم که وجود، یک روش مؤثر برای شمارش تعداد راههایی که چیزها رخ می دهند سودمند است. در واقع، بسیاری مسائل را در نظریه احتمال می توان با شمردن تعداد راههای مختلفی که یک پشامند ممکن است رخ دهد، حل کرد. نظریه ریاضی شمارش را **آنالیز ترکیبی** می نامند.

۲- اصل اساسی شمارش

اصل شمارش زیر برای کلیه مطالب بعدی بنیادی است. با بیان ساده، این اصل بیانگر آن است که اگر آزمایشی بتواند به هر یک از m برآمد ممکن و آزمایشی دیگری به هر یک از n برآمد ممکن منجر شود، آن گاه mn برآمد ممکن در دو آزمایش وجود دارد.

اصل اساسی شمارش

فرض کنید قرار است دو آزمایش انجام شود. در این صورت اگر آزمایش (۱) بتواند به هر یک از m برآمد ممکن منتهی شود و اگر برای هر برآمد آزمایش (۱)، n برآمد ممکن از آزمایش (۲) وجود داشته باشد، آن گاه برای دو آزمایش جمعاً mn برآمد ممکن وجود دارد.

اثبات اصل اساسی: این اصل اساسی را می توان با شمارش کلیه برآمدهای ممکن دو آزمایش به صورت زیر ثابت کرد:

$$\begin{aligned} &(1, 1), (1, 2), \dots, (1, n) \\ &(2, 1), (2, 2), \dots, (2, n) \\ &\vdots \\ &(m, 1), (m, 2), \dots, (m, n) \end{aligned}$$

که در آن می گوئیم برآمد (i, j) است، اگر آزمایش (۱) به برآمد ممکن i و سپس آزمایش (۲) به برآمد ممکن j منجر شود، پس مجموعه برآمدهای ممکن عبارت است از m سطر که هر سطر شامل n عنصر است که در نتیجه حکم ثابت می شود.

مثال ۲ الف. گروه کوچکی متشکل از ده مرد است که هر یک از آنها سه فرزند پسر دارد.

اگر قرار باشد یک مرد و یکی از پسرانش را عنوان پدر و پسر سال انتخاب کنند، چند انتخاب مختلف امکان دارد؟

حل: اگر انتخاب این مرد را به عنوان برآمد آزمایش نخست و انتخاب بعدی یکی از پسرانش را به عنوان برآمد آزمایش دوم در نظر بگیریم، از اصل اساسی نتیجه می شود که $3 \times 10 = 30$ انتخاب ممکن وجود دارد.

هنگامی که بیش از دو آزمایش باید انجام شود، اصل اساسی را می توان به صورت زیر تعمیم داد:

اصل اساسی تعمیم یافته شمارش

اگر r آزمایش که قرار است انجام شوند طوری باشند که اولی بتواند به هریک از n_1 برآمد ممکن منجر شود، و اگر برای هریک از این n_1 برآمد ممکن، n_2 برآمد ممکن از آزمایش دوم وجود داشته باشد، و برای هریک از برآمدهای ممکن این دو آزمایش، n_3 برآمد ممکن از آزمایش سوم وجود داشته باشد، و الی آخر... آن گاه کلاً $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$ برآمد ممکن از r آزمایش وجود دارد.

مثال ۲ ب. کمیته طرح ریزی دانشکده ای مرکب از ۳ دانشجوی سال اول، ۴ دانشجوی سال دوم، ۵ دانشجوی سال سوم و ۲ دانشجوی سال چهارم است. می خواهیم زیر کمیته ای که در آن ۴ نفر و از هر کلاسی یک نفر شرکت دارند تشکیل دهیم. چند زیر کمیته مختلف می توان تشکیل داد؟

حل: انتخاب یک زیر کمیته را می توان به عنوان ترکیب برآمد چهار آزمایش جداگانه انتخاب یک نماینده از هریک از کلاسها در نظر گرفت. پس با در نظر گرفتن حالت تعمیم یافته اصل اساسی نتیجه می شود که $3 \times 4 \times 5 \times 2 = 120$ زیر کمیته ممکن وجود دارد.

مثال ۲ پ. چند پلاک نمره اتومبیل مختلف می توان ساخت، در صورتی که بدانیم از ۷ جای در نظر گرفته شده، ۳ جای اول با حروف و چهار جای بعدی با اعداد پر می شود.

حل: بنا به شکل تعمیم یافته اصل اساسی پاسخ عبارت است از

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 175760000$$

مثال ۲ ت. تعداد توابعی که بر n نقطه تعریف می شود چندتا است، اگر مقادیر تابع برابر ۰ یا ۱ باشد؟

حل: فرض کنید نقاط عبارت است از ۱، ۲، ...، n چون برای هر n ، $i = 1, 2, \dots$ ؛ $f(i)$ باید ۰ یا ۱ باشد. بنابراین 2^n تابع ممکن وجود دارد.

مثال ۲ ث. در مثال ۲ پ، اگر تکرار بین حرفها یا اعداد جایز نباشد، چند پلاک نمره وجود دارد؟

حل: در این حالت به تعداد $7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 24 \times 25 \times 26 = 78624000$ پلاک نمره وجود دارد.

۳- جایگشتها

چند آرایش مرتب شده مختلف از حروف a ، b و c امکان دارد؟
 باشمارش مستقیم ملاحظه می کنیم که ۶ آرایش وجود دارد که عبارت است از abc ، acb ، bac ، cab و cba . هر آرایش یک جایگشت نامیده می شود. بنابراین، مجموعه ای مرکب از ۳ شیء دارای ۶ جایگشت ممکن است. این نتیجه را از اصل اساسی نیز می توان به دست آورد، زیرا اولین شیء در جایگشت می تواند هر یک از ۳ شیء باشد، و سپس شیء دوم در جایگشت را می توان هر یک از ۲ شیء باقیمانده انتخاب کرد و بالاخره شیء سوم در جایگشت از ۱ شیء باقیمانده انتخاب می شود. در نتیجه $6 = 3 \times 2 \times 1$ جایگشت ممکن حاصل می شود.

اکنون فرض کنید که n شیء داریم. استدلالی مشابه آنچه که برای ۳ حرف به کار بردیم نشان می دهد که

$$n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

جایگشت مختلف از n شیء داریم.

مثال ۳ الف. چند ترتیب مختلف برای یک تیم بیسبال مرکب از ۹ بازیکن امکان دارد؟

حل: تعداد ترتیبهای ممکن $9! = 362880$ است.

مثال ۳ ب. کلاس درس احتمال مرکب از ۶ دانشجوی پسر و ۴ دانشجوی دختر است.

بعد از گرفتن امتحان، دانشجویان برحسب نمراتشان رتبه بندی می شوند. فرض کنید هیچ دو دانشجویی نمره برابر نگرفته باشند.

(الف) چند رتبه بندی مختلف امکان دارد؟

(ب) اگر دو گروه دانشجویین خودشان رتبه بندی شوند، چندرتبه بندی مختلف امکان

دارد؟

حل: (الف) چون هر رتبه بندی متناظر با آرایش مرتب شده خاصی از ۱۰ نفر است،

پس پاسخ این قسمت عبارت است از $10! = 3628800$.

(ب) چون ۶ رتبه بندی ممکن از پسران دانشجو و ۴ رتبه بندی ممکن

از دختران دانشجو بین خودشان وجود دارد، از اصل اساسی نتیجه می شود که $17280 = (24)(720) = (4!)(6!)$ رتبه بندی در این حالت موجود است.

مثال ۳ پ. دانشجویی ۱۰ کتاب دارد که می خواهد در قفسه ای بچیند. از این کتابها

۴ کتاب ریاضی، ۳ کتاب شیمی، ۲ کتاب تاریخ و یکی زبان خارجی است. او می خواهد کتابهایش را طوری مرتب کند که کتابهای مربوط به یک موضوع در قفسه کنار هم باشند. چند آرایش مختلف امکان دارد؟

حل: ۱! ۱! ۱! ۲! ۳! ۴! آرایش وجود دارد بطوری که کتابهای ریاضی در ابتدای ردیف، سپس

کتابهای شیمی، بعد کتابهای تاریخ و بالاخره کتاب زبان است. بطور مشابه برای هر ترتیب ممکن از موضوعها ۱! ۲! ۳! ۴! آرایش ممکن وجود دارد. چون ۴! ترتیب ممکن از این چهار موضوع وجود دارد، پاسخ مطلوب برابر $4! 4! 3! 2! 1! 1! = 6912$ است.

اکنون به تعیین تعداد جایگشتهای مجموعه π شی' که بعضی از آنها متمایز از یکدیگر

نیستند می پردازیم. برای روشن شدن مطلب، مثال زیر را در نظر می گیریم.

مثال ۳ ت. با استفاده از حروف PEPPER چند آرایش حرفی مختلف می توان تشکیل داد؟

حل: ابتدا ملاحظه می کنیم که وقتی سه حرف P و دو حرف E از یکدیگر متمایزند، ۶!

جایگشت از حروف $P_1 E_1 P_2 P_3 E_2 R$ وجود دارد. با وجود این جایگشت دلخواهی از این جایگشتها، مثلاً $P_1 P_2 E_1 P_3 E_2 R$ را در نظر بگیرید. اکنون اگر P ها را بین هم و E ها را بین هم جابه جا کنیم، آرایش حاصل باز هم به شکل P P E P E R خواهد بود. یعنی کلیه ۳! ۲! جایگشت

$P_1 P_2 E_1 P_3 E_2 R$	$P_1 P_2 E_2 P_3 E_1 R$
$P_1 P_3 E_1 P_2 E_2 R$	$P_1 P_3 E_2 P_2 E_1 R$
$P_2 P_1 E_1 P_3 E_2 R$	$P_2 P_1 E_2 P_3 E_1 R$
$P_2 P_3 E_1 P_1 E_2 R$	$P_2 P_3 E_2 P_1 E_1 R$
$P_3 P_1 E_1 P_2 E_2 R$	$P_3 P_1 E_2 P_2 E_1 R$
$P_3 P_2 E_1 P_1 E_2 R$	$P_3 P_2 E_2 P_1 E_1 R$

به شکل P P E P E R است. بنابراین این از حروف P E P P E R ، $6! / (3! 2!) = 60$ آرایش ۶ حرفی ممکن می‌توان به وجود آورد.

بطور کلی، با استدلالی مشابه با مثال ۳ ت می‌توان نشان داد که

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

جایگشت مختلف از n شیئی وجود دارد که n_1 تا، n_2 تا، \dots تا n_r تا از آنها شبیه یکدیگرند.

مثال ۳ ت. در مسابقه شطرنجی ۱۰ نفر به قرار زیر شرکت دارند: ۴ نفر روسی، ۳ نفر امریکایی، ۲ نفر انگلیسی و ۱ نفر برزیلی. اگر نتیجه مسابقه برحسب ملیتهای بازیکنها به ترتیب احراز مقامشان در مسابقه وارد لیست شود، چند برآمد ممکن است؟

حل: $12600 = \frac{10!}{4! 3! 2! 1!}$ برآمد ممکن وجود دارد.

مثال ۳ ج. مجموعه‌ای مرکب از ۴ پرچم سفید، ۳ پرچم قرمز و ۲ پرچم آبی است، چند آرایش مختلف با این ۹ پرچم که در یک خط آویخته شده است می‌توان ساخت؟ در صورتی که پرچمهای هم‌رنگ یکسان است.

حل: $1260 = \frac{9!}{4! 3! 2!}$ آرایش مختلف وجود دارد.

۴- ترکیبها

معمولاً تعیین تعداد گروههای مختلف از r شیئی که می‌توان از n شیئی تشکیل داد مورد توجه ماست. برای مثال، چند گروه مختلف ۳ تایی از اقلام A, B, C, D, E می‌توان انتخاب کرد؟ برای پاسخ دادن به این مسأله، به صورت زیر استدلال می‌کنیم: برای انتخاب قلم اول ۵ راه، سپس برای انتخاب قلم بعدی ۴ راه و برای انتخاب قلم نهایی ۳ راه وجود دارد، بنابراین وقتی ترتیب انتخاب اقلام را در نظر بگیریم ۳، ۴، ۵ راه برای انتخاب گروه ۳ تایی وجود دارد.

با وجود این، چون هر گروه ۳ تایی مثلاً گروه مرکب از اقلام A, B, C، ۶ بار شمرده می شود (یعنی وقتی ترتیب انتخاب رعایت می شود، کلیه جایگشتها، ABC، ACB، BAC، BCA، CAB و CBA شمرده می شوند) در نتیجه تعداد کل گروههایی که می توان تشکیل داد برابر است با

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

بطور کلی، وقتی ترتیب انتخاب رعایت می شود، $n(n-1)\dots(n-r+1)$ ، تعداد راههای مختلفی را که یک گروه r تایی را می توان از n قلم انتخاب کرد ارائه می دهد و چون هر گروه r تایی $r!$ بار در این شمارش شمرده می شود، تعداد گروههای مختلف r تایی را که از مجموعه n قلم می توان تشکیل داد عبارت است از

$$\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

نماد گذاری و اصطلاحات

برای $r \leq n$ ، $\binom{n}{r}$ را به صورت

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

تعریف کرده و می گوئیم که $\binom{n}{r}$ تعداد ترکیبات n شی' را r به r نشان می دهد. پس $\binom{n}{r}$ تعداد گروههای مختلف به حجم r را نشان می دهد که از مجموعه n شی' بدون در نظر گرفتن ترتیب انتخاب شده است.

مثال ۴ الف. می خواهیم از بین یک گروه ۲۰ نفری، کمیته ای سه نفری تشکیل دهیم. چند کمیته مختلف می توان تشکیل داد؟

$$\text{حل: } \binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$$

مثال ۴ ب. از گروهی مرکب از ۵ مرد و ۷ زن، چند کمیته مختلف که از ۲ مرد و ۳ زن تشکیل شده باشد می توان تشکیل داد؟ اگر ۲ نفر از زنان باهم قهر باشند و از کار در یک کمیته

$$۱- \text{ بنا به قرارداد } 0! \text{ را برابر } 1 \text{ تعریف می کنیم } \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

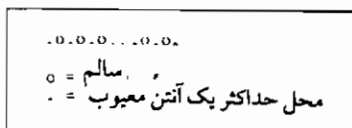
خودداری کنند، چند کمیته ممکن است.

حل: چون $\binom{5}{2}$ گروه ممکن مرکب از ۲ مرد و $\binom{7}{3}$ گروه ممکن مرکب از ۳ زن وجود دارد، از اصل اساسی نتیجه می شود که $\binom{5}{2}\binom{7}{3} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 350$ کمیته ممکن مرکب از ۲ مرد و ۳ زن وجود دارد.

از طرفی اگر دو نفر از زنان از همکاری در یک کمیته خودداری کنند، در این صورت $\binom{5}{0}\binom{7}{3}$ گروه ممکن مرکب از سه زن وجود دارد که شامل هیچ یک از دو زن مورد نظر نیست و $\binom{5}{1}\binom{7}{2}$ گروه مرکب از سه زن وجود دارد که دقیقاً یکی از دو زن مذکور را شامل است، بنابراین نتیجه می شود که $\binom{5}{0}\binom{7}{3} + \binom{5}{1}\binom{7}{2} = 30$ گروه مرکب از سه زن وجود دارد که دوزنی را که باهم قهرند شامل نیست. چون به $\binom{5}{2}$ راه می توان دو مرد را انتخاب کرد، پس در این حالت نتیجه می شود که $\binom{5}{2} = 300$ کمیته ممکن وجود دارد.

مثال ۴ پ. مجموعه ای از n آنتن را در نظر بگیرید که m تا معیوب و $n - m$ تا سالم است و فرض کنید کلیه آنتنهای معیوب و کلیه آنتنهای سالم غیر متمایز است. چند ترتیب خطی وجود دارد که در آنها هیچ دو آنتن معیوب پهلوی هم قرار نگیرند؟

حل: تصور کنید که $n - m$ آنتن سالم را در یک ردیف قرار داده ایم. اکنون اگر قرار باشد که هیچ دو آنتن معیوب پهلوی هم واقع نشوند، باید فضاهای بین آنتنهای سالم هر یک حداکثر شامل یک آنتن معیوب باشد. یعنی در $n - m + 1$ موضع ممکن بین $n - m$ آنتن سالم، که در شکل ۱-۱ با نماد \ast نشان داده شده است، باید m موضع از آنها را برای جای دادن آنتنهای معیوب انتخاب کرد. بنابراین $\binom{n - m + 1}{m}$ ترتیب ممکن که در آنها حداقل یک آنتن سالم بین هر دو آنتن معیوب قرار دارد وجود دارد.



شکل ۱-۱

یک تساوی ترکیبی سودمند به صورت زیر است

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \quad 1 \leq r \leq n \quad (1-4)$$

معادله (۱-۴) را می توان بطور تحلیلی یا با استدلال ترکیبی زیر ثابت کرد. گروهی مرکب از n شیء در نظر گرفته و یکی از این اشیاء را که با شماره ۱ مشخص می کنیم، در نظر بگیرید. اکنون $\binom{n-1}{r-1}$ ترکیب با حجم r که شامل شیء ۱ است وجود دارد (زیرا هر ترکیبی از این نوع با انتخاب $r-1$ شیء از $n-1$ شیء باقیمانده تشکیل می شود) همچنین $\binom{n-1}{r}$ ترکیب با حجم r وجود دارد که شامل شیء ۱ نیست. چون در کل $\binom{n}{r}$ ترکیب با حجم r وجود دارد، معادله (۱-۴) نتیجه می شود.

مقادیر $\binom{n}{r}$ را اغلب ضرایب دو جمله ای می نامند، دلیل آن هم وجود این مقادیر در قضیه دو جمله ای است.

قضیه دو جمله ای

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (2-4)$$

دو اثبات از قضیه دو جمله ای ارائه می دهیم. اولی اثباتی با استقراء ریاضی و دیگری براساس ملاحظات ترکیبی است.

اثبات قضیه دو جمله ای با استقراء: وقتی $n=1$ ، معادله (۲-۴) به صورت

$$x+y = \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0 = x+y$$

ساده می شود.

فرض کنید معادله (۲-۴) برای $n-1$ برقرار باشد، اکنون داریم

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= (x+y)(x+y)^{n-1} \\ &= (x+y) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} \end{aligned}$$

در مجموع اول قرار می دهیم $i = k + 1$ و در مجموع دوم $i = k$ ، حاصل می شود

$$\begin{aligned}(x + y)^n &= \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} x^i y^{n-i} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i y^{n-i} \\ &= x^n + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} \right] x^i y^{n-i} + y^n \\ &= x^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} + y^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}\end{aligned}$$

تساوی آخر طبق معادله (۴-۱) نتیجه می شود. پس قضیه به استقراء ثابت شده است.

اثبات ترکیبی قضیه دو جمله ای : حاصل ضرب

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \cdots (x_n + y_n)$$

را در نظر بگیرید. گسترش آن عبارت از مجموع 2^n جمله است که هر جمله حاصل ضرب n عامل است. به علاوه هر یک از 2^n جمله در مجموع، شامل عامل x_i یا y_i برای $i = 1, 2, \dots, n$ می باشند. برای مثال،

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = x_1 x_2 + x_1 y_2 + y_1 x_2 + y_1 y_2$$

اکنون باید دید چند جمله از 2^n جمله در مجموع دارای k عامل از x_i ها و $(n - k)$ عامل از y_i هاست؟ چون هر جمله متشکل از k تا x_i و $n - k$ تا y_i متناظر با انتخاب یک گروه k تایی از n مقدار x_1, \dots, x_n است، پس تعداد این نوع جمله ها برابر $\binom{n}{k}$ است. اکنون با قراردادن $x_i = x$ و $y_i = y$ ، $i = 1, \dots, n$ مشاهده می کنیم که

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

مثال ۴ ت. $(x + y)^3$ را بسط دهید.

حل :

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= \binom{3}{0} x^3 y^0 + \binom{3}{1} x^2 y^1 + \binom{3}{2} x^1 y^2 + \binom{3}{3} x^0 y^3 \\ &= y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3\end{aligned}$$

مثال ۴ ت. یک مجموعه n عضوی دارای چند زیر مجموعه است؟

حل: چون $\binom{n}{k}$ زیر مجموعه k عضوی وجود دارد، پاسخ مطلوب عبارت است از

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

این نتیجه را می توان با نسبت دادن عدد ۰ یا ۱ به هر یک از اعضای مجموعه نیز به دست آورد. به هر انتساب اعداد، یک زیر مجموعه بطور یک به یک متناظر است که اعضای آن متشکل از اعضایی باشد که عدد ۱ به آن نسبت داده شده است. چون 2^n انتساب ممکن وجود دارد، نتیجه حاصل می شود.

توجه کنید زیر مجموعه ای که دارای ۰ عضو است (یعنی مجموعه تهی) را نیز به حساب آورده ایم. بنابراین تعداد زیر مجموعه هایی که حداقل شامل یک عضو است برابر است با $2^n - 1$.

۵- ضرایب چند جمله ای

در این بخش مسأله زیر را در نظر می گیریم: می خواهیم مجموعه ای مرکب از n عضو متمایز را به r گروه متمایز به ترتیب با حجمهای n_1, n_2, \dots, n_r تقسیم کنیم، که در آن $\sum_{i=1}^r n_i = n$. چند تقسیم مختلف امکان دارد؟ برای پاسخ به مسأله، توجه داریم که برای گروه اول $\binom{n}{n_1}$ انتخاب ممکن وجود دارد، برای هر انتخاب گروه اول $\binom{n-n_1}{n_2}$ انتخاب ممکن برای گروه دوم وجود دارد، برای هر انتخاب دو گروه اول، $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ انتخاب ممکن برای گروه سوم وجود دارد؛ و به همین ترتیب الی آخر. بنابراین از اصل اساسی شمارش تعمیم یافته، به تعداد

$$\begin{aligned} & \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \dots \binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{r-1}}{n_r} \\ &= \frac{n!}{(n-n_1)! n_1!} \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)! n_2!} \dots \frac{(n-n_1-n_2-\dots-n_{r-1})!}{0! n_r!} \\ &= \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!} \end{aligned}$$

تقسیم ممکن وجود دارد.

نمادگذاری

اگر $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ آنگاه $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$ را با

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

تعریف می‌کنیم. پس $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$ تعداد تقسیم‌های ممکن n شیء متمایز را به r گروه متمایز به ترتیب با حجم‌های n_1, n_2, \dots, n_r نشان می‌دهد.

مثال ۵ الف. یک پاسگاه انتظامی در شهر کوچکی دارای ۱۰ پرسنل با درجه افسری است. برنامه تنظیمی پاسگاه به این صورت است که ۵ افسر در خیابانهای شهر گشت می‌زنند، ۲ افسر تمام وقت در پاسگاه کار می‌کنند و ۳ نفر از افسران جزو گروه ذخیره‌اند. چند تقسیم مختلف از این ۱۰ افسر به سه گروه ممکن است؟

حل: $\frac{10!}{5! 2! 3!} = 2520$ تقسیم ممکن وجود دارد.

مثال ۵ ب. می‌خواهیم ۱۰ ورزشکار را به دو تیم A و B هریک شامل ۵ عضو تقسیم کنیم. تیم A در یک گروه ورزشی و تیم B در گروه دیگر بازی خواهد کرد. چند تقسیم مختلف وجود دارد؟

حل: $\frac{10!}{5! 5!} = 252$ تقسیم ممکن وجود دارد.

مثال ۵ ب. برای بازی بسکتبال ۱۰ ورزشکار در زمین بازی به دو تیم ۵ نفری تقسیم می‌شوند. چند تقسیم مختلف ممکن است؟

حل: توجه کنید که این مثال با مثال قبل متفاوت است، زیرا در اینجا ترتیب دو تیم در نظر گرفته نمی‌شود. یعنی تیم A و B ای وجود ندارد، بلکه تنها تقسیم به دو گروه ۵ نفری مورد نظر است. بنابراین پاسخ مطلوب عبارت است از

$$\frac{10! / 5! 5!}{2!} = 126$$

اثبات قضیه زیر که تعمیم قضیه دو جمله‌ای است به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

قضیه چند جمله‌ای

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_r): \\ n_1 + \dots + n_r = n}} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}$$

یعنی، جمع بندی روی تمام بردارهای با مؤلفه‌های صحیح نامنفی (n_1, n_2, \dots, n_r) است بطوری که $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$. اعداد $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$ ضرایب چند جمله‌ای نام دارند.

مثال ۵ ت.

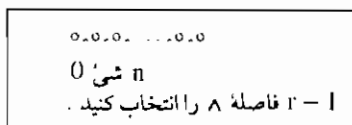
$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3)^2 &= \binom{2}{2, 0, 0} x_1^2 x_2^0 x_3^0 + \binom{2}{0, 2, 0} x_1^0 x_2^2 x_3^0 \\ &\quad + \binom{2}{0, 0, 2} x_1^0 x_2^0 x_3^2 + \binom{2}{1, 1, 0} x_1^1 x_2^1 x_3^0 \\ &\quad + \binom{2}{1, 0, 1} x_1^1 x_2^0 x_3^1 + \binom{2}{0, 1, 1} x_1^0 x_2^1 x_3^1 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \end{aligned}$$

۶- توزیع گلوله در کیسه‌ها

وقتی n گلوله متمایز را در r کیسه متمایز توزیع کنیم r^n برآمد ممکن وجود دارد، زیرا هر گلوله می‌تواند در هریک از r کیسه متمایز قرار گیرد. با وجود این، اکنون فرض کنید که n گلوله از یکدیگر متمایز نباشند. در این صورت چند برآمد مختلف امکان دارد؟ چون گلوله‌ها متمایز نیستند پس از آن نتیجه می‌شود که برآمد آزمایش توزیع n گلوله در r کیسه را می‌توان با بردار (x_1, x_2, \dots, x_r) توصیف کرد که در آن x_i تعداد گلوله‌هایی را که در کیسه i ام قرار دارد نشان می‌دهد. بنابراین مسأله به پیدا کردن تعداد بردارهای (x_1, x_2, \dots, x_r) که مؤلفه‌های آن مقادیر صحیح نامنفی هستند کاهش می‌یابد بطوری که

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$$

برای حل آن، با در نظر گرفتن تعداد جوابهای صحیح و مثبت آغاز می‌کنیم. برای این منظور فرض کنید که n شی متمایز را ردیف کرده و می‌خواهیم آنها را به r گروه غیرتهی تقسیم کنیم.



شکل ۲-۱

برای انجام این کار می‌توانیم $r-1$ از $n-1$ فاصله بین اشیاء مجاور را به عنوان نقاط تقسیم انتخاب کنیم (شکل ۲-۱). برای مثال، اگر $n=8$ و $r=3$ و ۲ مقسوم را به صورت زیر انتخاب کنیم.

ooo|ooo|oo

بردار حاصل برابر $x_1=3, x_2=3, x_3=2$ می‌شود. چون $\binom{n-1}{r-1}$ انتخاب ممکن وجود دارد، حکم زیر حاصل می‌شود

حکم ۱-۶

تعداد $\binom{n-1}{r-1}$ بردار (x_1, x_2, \dots, x_r) متمایز که مؤلفه‌های آنها اعداد صحیح و مثبت اند وجود دارد که در تساویهای

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n, \quad x_i > 0, i = 1, \dots, r$$

صدق می‌کند.

برای به دست آوردن تعداد جوابهای نامنفی (در مقابله با جوابهای مثبت)، توجه داشته باشید که تعداد جوابهای نامنفی $x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$ برابر با تعداد جوابهای مثبت $y_1 + y_2 + \dots + y_r = n + r$ می‌باشد (از $y_i = x_i + 1$ ، $i = 1, \dots, r$ ، نتیجه می‌شود). بنابراین از حکم ۱-۶ حکم زیر را به دست می‌آوریم.

حکم ۲-۶

تعداد $\binom{n+r-1}{n}$ بردار (x_1, x_2, \dots, x_r) متمایز که مؤلفه‌های آنها اعداد صحیح و

نامنفی هستند وجود دارد که در تساوی

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n \quad (۱-۶)$$

صدق می کند.

مثال ۶ الف. چند جواب متمایز با مقادیر صحیح نامنفی برای $x_1 + x_2 = 3$ وجود دارد؟

حل: $4 = \binom{3+2-1}{3}$ جواب وجود دارد که عبارتند از: $(0,3)$ ، $(1,2)$ ، $(2,1)$ ، $(3,0)$

مثال ۶ ب. سرمایه داری ۲۰ هزار دلار دارد که می خواهد در ۴ مورد سرمایه گذاری کند. هر سرمایه گذاری باید بر حسب واحد هزار دلار باشد. اگر تمام ۲۰ هزار دلار را سرمایه گذاری کند، چند طرح سرمایه گذاری مختلف امکان دارد؟ اگر کل پول برای سرمایه گذاری مورد نظر نباشد چه می توان گفت؟

حل: اگر x_i ، $i = 1, 2, 3, 4$ ، تعداد هزار دلاریهای سرمایه گذاری شده در مورد سرمایه گذاری i ام را نشان دهد در این صورت x_1 ، x_2 ، x_3 و x_4 اعداد صحیحی هستند که در

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20, \quad x_i \geq 0$$

صدق می کنند. پس بنا به حکم ۶-۲، $\binom{23}{3} = 1771$ استراتژی سرمایه گذاری ممکن وجود دارد. اگر به سرمایه گذاری کل پول نیازی نباشد، مقدار پولی را که در ذخیره می ماند با x_5 نشان می دهیم، یک استراتژی عبارت از بردار $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ با مقادیر صحیح نامنفی است که در

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

صدق می کند.

بنابراین، بنا به حکم ۶-۲، اکنون $\binom{24}{4} = 10,626$ استراتژی ممکن وجود دارد.

مثال ۶ پ. در بسط عبارت چند جمله ای

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n$$

چند جمله وجود دارد؟

حل:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n = \sum \binom{n}{n_1, \dots, n_r} x_1^{n_1} \dots x_r^{n_r}$$

که در آن جمع بندی روی کلیه مقادیر صحیح نا منفی (n_1, \dots, n_r) است، بطوری که $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ ، به موجب حکم ۶-۲، $\binom{n+r-1}{n}$ از این جمله ها وجود دارد.

مثال ۶ ت. مثال ۴ پ را دوباره در نظر می گیریم. در این مثال، مجموعه ای مرکب از n قلم داریم که از آنها m قلم (غیر متمایز و) معیوب و $n - m$ قلم باقیمانده (نیز غیر متمایز و) سالم است. هدف ما تعیین تعداد ترتیبهای خطی است بطوری که هیچ دو قلم معیوب پهلوئی هم قرار نگیرند. برای تعیین این مقدار تصور می کنیم که اقلام معیوب باهم ردیف شده اند و اقلام سالم را باید در بین آنها قرار دهیم. فرض کنید x_1 تعداد اقلام سالم در سمت چپ اولین قلم معیوب، x_2 تعداد اقلام سالم بین اولین دو قلم معیوب را نشان می دهد و به همین ترتیب الی آخر. یعنی بطور نمادی، داریم

$$x_1 \oslash x_2 \oslash \dots \oslash x_m \oslash x_{m+1}$$

اکنون بین هر زوج معیوب، مادامی که $x_i > 0$ ، $i = 2, \dots, m$ ، لا اقل یک قلم سالم وجود دارد. پس تعداد برآمدهایی که در شرط صدق کند برابر تعداد بردارهای x_1, \dots, x_{m+1} است که در

$$x_1 + \dots + x_{m+1} = n - m \quad x_1 \geq 0, x_{m+1} \geq 0, x_i > 0, i = 2, \dots, m$$

صدق می کند. با قراردادن

$$y_1 = x_1 + 1, y_i = x_i, i = 2, \dots, m, y_{m+1} = x_{m+1} + 1$$

مشاهده می کنیم که این تعداد برابر تعداد بردارهای مثبت (y_1, \dots, y_{m+1}) است که در

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{m+1} = n - m + 2$$

صدق می کند. پس بنا به حکم ۶-۱، $\binom{n-m+1}{m}$ برآمد وجود دارد که با نتایج مثال ۴ پ مطابقت دارد.

اکنون فرض کنید که به تعداد برآمدهایی توجه داریم که هر زوج از اقلام معیوب حداقل با ۲ قلم سالم از هم جدا شده باشند با استدلالی نظیر آنچه در بالا به کار بردیم، این مقدار برابر تعداد بردارهایی است که در

$$x_1 + \dots + x_{m+1} = n - m \quad x_1 \geq 0, x_{m+1} \geq 0, x_i \geq 2, i = 2, \dots, m$$

صدق می کند، با قرارداد

$$y_1 = x_1 + 1, y_i = x_i - 1, i = 2, \dots, m, y_{m+1} = x_{m+1} + 1$$

در می یابیم که این مقدار همان تعداد جوابهای مثبت

$$y_1 + \dots + y_{m+1} = n - 2m + 3$$

است، پس از حکم ۱-۶، $\binom{n-2m+2}{m}$ از این برآمدها وجود دارد.

تمرینهای نظری

- ۱- صورت تعمیم یافته اصل اساسی، شمارش را ثابت کنید.
- ۲- دو آزمایش قرار است انجام شود. اولی می تواند به هریک از n برآمد ممکن منجر شود. اگر آزمایش اول به نتیجه شماره i منتهی شود، آن گاه آزمایش دوم می تواند به هریک از n_i برآمد ممکن منتهی شود $i = 1, 2, \dots, m$. تعداد برآمدهای ممکن دو آزمایش چندتا است؟
- ۳- r شیء از مجموعه n شیء را به چند راه می توان انتخاب کرد در صورتی که ترتیب انتخاب در نظر گرفته شود؟
- ۴- توضیحی ترکیبی برای تساوی $\binom{n}{r}$ با $\binom{n}{n-r}$ ارائه دهید.
- ۵- از n گلوله که r تا سیاه و $n-r$ تا سفید است $\binom{n}{r}$ جایگشت وجود دارد. توضیحی ترکیبی برای این حقیقت ارائه دهید.
- ۶- اثباتی تحلیلی از معادله (۱-۴) ارائه دهید.
- ۷- ثابت کنید

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \dots + \binom{n}{r}\binom{m}{0}$$

که در آن $r \leq n, r \leq m$

راهنمایی: گروهی مرکب از n مرد و m زن در نظر بگیرید. چند گروه با حجم r ممکن است؟

۸- تحقیق کنید که برای $n > 4$

$$\binom{n+1}{4} = \frac{\binom{n}{2}}{3}$$

اکنون دلیلی ترکیبی برای تساوی بالا ارائه دهید.

راهنمایی: گروهی مرکب از $n+1$ قلم را در نظر بگیرید که یکی از آنها ویژه است. ثابت کنید که هر دو طرف اتحاد بالا، تعداد زیر مجموعه های با حجم ۴ را نشان می دهند.

$$9- \text{ توضیحی ترکیبی برای } \binom{n}{r} = \binom{n}{r, n-r} \text{ ارائه دهید.}$$

۱۰- ثابت کنید

$$\begin{aligned} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} &= \binom{n-1}{n_1-1, n_2, \dots, n_r} \\ &+ \binom{n-1}{n_1, n_2-1, \dots, n_r} + \dots \\ &+ \binom{n-1}{n_1, n_2, \dots, n_r-1} \end{aligned}$$

۱۱- قضیه چند جمله ای را ثابت کنید.

۱۲- نشان دهید که برای $n > 0$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} = 0$$

۱۳- (الف) اتحاد ترکیبی زیر را به استقراء ثابت کنید

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

(ب) با در نظر گرفتن مجموعه ای مرکب از n فردو تعیین تعداد انتخابهای ممکن یک کمیته و یک رئیس کمیته، به دو راه، دلیلی ترکیبی برای رابطه بالا ارائه دهید.

(پ) درستی اتحاد زیر را برای $n = 1, 2, 3, 4$ تحقیق کنید:

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^2 = 2^{n-2} n(n+1)$$

برای اثبات ترکیبی رابطه بالا مجموعه ای مرکب از m فرد را در نظر گرفته و نشان دهید که هر دو طرف اتحاد بالاتعداد انتخابهای مختلف یک کمیته، رئیس و منشی (که احتمالاً با رئیس یکی است) آن را نشان می دهد.

راهنمایی: ۱- چند انتخاب مختلف ممکن است به کمیته ای که دقیقاً شامل k فرد است منتهی شود؟

۲- چند انتخاب مختلف ممکن که در آنها رئیس و منشی یکسان است، وجود

دارد؟ (پاسخ: $n2^{n-1}$).

۳- چند انتخاب مختلف ممکن به رئیس و منشی متفاوت منتهی می شود؟

(ت) اکنون ثابت کنید

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^3 = 2^{n-3} n^2 (n+3)$$

۱۴- n گلوله غیر متمایز به چند راه در r کیسه، بطوری که کیسه i شامل حداقل m_i گلوله باشد، توزیع می شود؟ فرض کنید

$$n \geq \sum_{i=1}^r m_i$$

$$\binom{n - \sum m_i + r - 1}{n - \sum m_i}$$

پاسخ:

۱۵- نشان دهید

$$\binom{n+r-1}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n-i+r-2}{n-i}$$

راهنمایی: از حکم ۶-۲ استفاده کنید.

۱۶- ثابت کنید دقیقاً $\binom{r}{k} \binom{n-1}{n-r+k}$ جواب برای $x_1 + x_2 + \dots + x_r = m$ وجود دارد که برای آنها دقیقاً k تا از x ها برابر ۰ است.

۱۷- تابع n متغیری $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را در نظر بگیرید. چند مشتق جزئی مرتبه r مختلف وجود دارد؟

۱۸- با استفاده از تمرین نظری ۷ ثابت کنید

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

۱۹- (الف) با استفاده از استقرای ریاضی و اتحاد ترکیبی

$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}$$

اتحاد زیر را ثابت کنید

$$\binom{n+r}{n} = \sum_{j=0}^n \binom{j+r-1}{j}$$

(ب) با این استدلال که هر دو طرف تساوی بالا تعداد جوابهای صحیح نامنفی متمایز

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r \leq n$$

است، اثبات دومی ارائه دهید.

۲۰- می‌خواهیم از مجموعه n عضوی کمیته‌ای با حجم z و از این کمیته نیز زیر کمیته‌ای با حجم i ، $i < z$ ، انتخاب کنیم.

(الف) با محاسبه تعداد انتخابهای ممکن این کمیته و زیر کمیته، به دوراه، اتحادی ترکیبی به دست آورید. اولاً فرض کنید که ابتدا کمیته و سپس زیر کمیته انتخاب می‌شود، ثانیاً فرض کنید که ابتدا زیر کمیته و سپس بقیه اعضای کمیته انتخاب می‌شوند.

(ب) با استفاده از (الف)، اتحاد ترکیبی زیر را ثابت کنید:

$$\sum_{j=i}^n \binom{n}{j} \binom{j}{i} = \binom{n}{i} 2^{n-i}, \quad i \leq n$$

(پ) با استفاده از (الف) و تمرین نظری ۱۲، نشان دهید

$$\sum_{j=i}^n \binom{n}{j} \binom{j}{i} (-1)^{n-j} = 0, \quad i \leq n$$

مسائل

۱- (الف) چند پلاک نمره اتومبیل با ۷ علامت مختلف ممکن است اگر دو علامت اول از حروف و ۵ علامت دیگر از اعداد ترکیب شده باشد.

(ب) با این فرض که هیچ حرف یا عددی در یک پلاک تکی نمی‌تواند تکرار شود (الف) را تکرار کنید.

۲- یک گروه نوازنده چهار نفری، با ۴ آلت موسیقی باهم همکاری دارند. اگر هر یک از این افراد چهار آلت موسیقی را بتوانند بنوازند، چند آرایش مختلف ممکن است؟ اگر دو نفر آنها هر چهار آلت موسیقی ولی دو نفر دیگر هر یک تنها پیانو و طبل بنوازند، چند آرایش مختلف امکان دارد؟

۳- اگر ۴ آمریکایی، ۳ فرانسوی و ۳ انگلیسی بخواهند در یک ردیف بنشینند، چند آرایش برای این نشست ممکن است اگر قرار باشد که افراد با ملیت یکسان در پهلو هم قرار گیرند.

- ۴- (الف) به چند راه سه دختر و سه پسر می توانند در یک ردیف بنشینند؟
 (ب) به چند راه سه دختر و سه پسر می توانند در یک ردیف بنشینند، اگر قرار باشد که پسران باهم و دختران هم با هم، باشند؟
 (پ) اگر فقط پسران ملزم به نشستن پهلوی یکدیگر باشند، چند راه وجود دارد؟
 (ت) اگر هیچ دو نفر همجنس مجاز به نشستن پهلوی یکدیگر نباشند، چند راه وجود دارد؟
 ۵- چند آرایش مختلف می توان از حروف زیر ساخت؟
 (الف) FLUKE ، (ب) PROPOSE ، (پ) MISSISSIPPI ، (ت) ARRANGE !
- ۶- کودکی ۱۲ مکعب چوبی دارد که ۶ عدد آن سیاه، ۴ عدد قرمز، ۱ عدد سفید و ۱ عدد آبی است. اگر این کودک مکعبها را در یک ردیف بچیند، چند آرایش ممکن وجود دارد؟
 ۷- هشت نفر به چند راه می توانند در یک ردیف بنشینند اگر
 (الف) هیچ قیدی در ترتیب نشستن وجود نداشته باشد،
 (ب) دو فرد A و B ملزم به نشستن پهلوی هم باشند.
 (پ) اگر ۴ مرد و ۴ زن باشند و هیچ دو مرد یا دو زن نتوانند پهلوی هم بنشینند.
 (ت) ۵ مرد وجود داشته باشد و ملزم به نشستن پهلوی هم باشند.
 (ث) ۴ زوج زن و شوهر باشند و هر زوجی ملزم به نشستن پهلوی هم باشند؟
- ۸- سه کتاب داستان ۲ کتاب ریاضی و ۱ کتاب شیمی را به چند راه در یک قفسه می توان چید اگر
 (الف) کتابها را با هر ترتیب دلخواهی بتوان چید.
 (ب) قرار باشد کتابهای ریاضی باهم و کتابهای داستان هم با هم باشند.
 (پ) کتابهای داستان پهلوی هم، ولی کتابهای دیگر آرایش دلخواهی داشته باشند.
- ۹- از باشگاهی مرکب از ۱۰ عضو، باید یک رئیس، خزانة دار و منشی که متفاوتند انتخاب کنیم. چند انتخاب مختلف از این افراد ممکن است اگر
 (الف) هیچ قیدی وجود نداشته باشد.
 (ب) A و B باهم نباشند.
 (پ) C و D با هم باشند یا باهم نباشند.
 (ت) عضو E حتماً جزو این سه نفر باشد
 (ث) عضو F رئیس باشد.
- ۱۰- قرار است پنج جایزه جداگانه (عالی، خیلی خوب و الی آخر) به دانشجویان منتخب از

- یک کلاس ۳۰ نفری اعطا شود. چند برآمد مختلف ممکن است اگر
 (الف) یک دانشجو بتواند هر تعدادی از جایزه ها را دریافت کند؟
 (ب) هر دانشجو بتواند حداکثر یک جایزه دریافت کند؟
- ۱۱- در بازی پوکر چند دست کارت ۵ تایی وجود دارد؟
- ۱۲- می خواهیم کمیته ای ۷ نفری مرکب از ۲ جمهوری خواه، ۳ دمکرات و ۳ استقلال طلب از یک گروه شامل ۵ جمهوری خواه، ۶ دمکرات و ۴ استقلال طلب هستند تشکیل دهیم. چند کمیته امکان دارد؟
- ۱۳- دانشجویی باید به ۷ سؤال از ۱۰ سؤال در امتحانی پاسخ دهد. چندان انتخاب برای وی وجود دارد؟ در صورتی که باید لااقل به ۳ سؤال از ۵ سؤال اول پاسخ دهد، چند انتخاب ممکن است؟
- ۱۴- خانمی ۸ دوست دارد که ۵ نفر از آنها را می خواهد به مهمانی دعوت کند. اگر دو نفر از دوستان وی باهم قهر و مایل به شرکت همزمان در مهمانی نباشند، چند انتخاب برای او امکان دارد؟ در صورتی که فقط دو نفر از دوستانش مایل به شرکت همزمان در مهمانی باشند، چند انتخاب ممکن است؟
- ۱۵- یک آزمایشگاه روان شناسی که در آن تحقیقی در مورد خواب دیدن در حال انجام است. شامل سه اتاق هریک با دو تختخواب است. اگر بخواهیم سه مجموعه از دو قلوهای یکسان را به این ۶ تختخواب نسبت دهیم بطوری که هر مجموعه از دو قلوها در تختخوابهای مختلف ولی در یک اتاق بخوابند، چند انتساب مختلف امکان دارد؟
- ۱۶- $(3x^2 + y)^5$ را بسط دهید.
- ۱۷- بازی بریج با ۴ بازیکن انجام می شود، که هریک از آنها ۱۳ کارت دارد. چند نوع تقسیم امکان پذیر است.
- ۱۸- $(x_1 + 2x_2 + 3x_3)^4$ را بسط دهید.
- ۱۹- اگر بخواهیم ۱۲ نفر را به سه کمیته که تعداد اعضای آنها به ترتیب ۳، ۴ و ۵ نفرند تقسیم کنیم، چند تقسیم مختلف امکان دارد؟
- ۲۰- پدری می خواهد ۷ هدیه را بین سه فرزند خود تقسیم کند بطوری که بزرگترین آنها سه هدیه و دو فرزند دیگر هریک ۲ هدیه دریافت کنند. به چند راه امکان پذیر است؟
- ۲۱- ۸ تخته سیاه یکسان قرار است بین ۴ دبستان توزیع شود، چند حالت امکان دارد؟ اگر

- هر مدرسه باید حداقل یک تخته سیاه دریافت کند، چند حالت ممکن است؟
- ۲۲- اگر قرار باشد ۸ نفر معلم جدید به ۴ مدرسه داده شود، چند حالت امکان دارد؟ اگر هر مدرسه دو معلم را بپذیرد، چند حالت امکان دارد؟
- ۲۳- آسانسوری با ۸ نفر از طبقه زیر زمین شروع به حرکت می کند (بدون در نظر گرفتن مأمور آسانسور) و تا زمانی که به طبقه ششم می رسد همه را پیاده می کند. این مأمور به چند طریق می تواند افرادی که آسانسور را ترک می کنند مشاهده کند، در صورتی که کلیه افراد به نظر وی یکسان باشند؟ و اگر این ۸ نفر از ۵ مرد و ۳ زن تشکیل شده باشند و این مأمور قادر به تمیز مرد از زن باشد به چند طریق امکان دارد؟
- ۲۴- یک مجموعه آثار هنری شامل ۴ اثر از دالی، ۵ اثر از وان گوگ و ۶ اثر از پیکاسو حراج شده است. در این حراج ۵ عتیقه دار حاضرند. گزارشگر صفحه اجتماعی تنها تعداد آثار هنری هریک از سه هنرمند را که توسط عتیقه دار خریداری شد، مشاهده کرد. اگر همه آن آثار به فروش رفته باشد، این گزارشگر چند نتیجه مختلف ممکن است ثبت کرده باشد؟
- ۲۵- ده وزنه بردار در یک مسابقه وزنه برداری با هم رقابت می کنند. از این وزنه برداران، ۳ نفر امریکایی، ۴ نفر روسی، ۲ نفر چینی و ۱ نفر کانادایی است. اگر در امتیاز بندی تنها کشورهای شرکت کنندگان و نه خود آنان در نظر گرفته شوند، چند حالت مختلف از نظر امتیازها امکان دارد؟ چند حالت ممکن به نتایجی که در کشور امریکا یک شرکت کننده در ردیف بالاتر از ۳ و ۲ شرکت کننده پایینتر از ۳ داشته باشد، متناظر است؟
- ۲۶- هیأتی از ۱۰ کشور، از جمله روسیه، فرانسه، انگلستان و امریکا قرار است در یک ردیف بنشینند. اگر قرار باشد هیأتیهای فرانسوی و انگلیسی در پهلوهای یکدیگر بنشینند و هیأتیهای روسی و امریکایی پهلوهای هم نباشند، چندآرایش مختلف برای نشستن امکان دارد؟
- ۲۷- ۲۰ هزار دلار سرمایه داریم که باید در ۴ موقعیت ممکن سرمایه گذاری شود. هر سرمایه گذاری باید با تقریب یک واحد گرد شود (یک هزار دلار)، و در سرمایه گذاری حداقلی نیز وجود دارد که لازم است در صورت سرمایه گذاری در این موقعیتها رعایت شود. سرمایه گذاریهای حداقل ۲، ۲، ۳، و ۴ هزار دلار می باشد. چند راه سرمایه گذاری مختلف موجود است اگر

(الف) در هر موقعیت یک سرمایه گذاری صورت گیرد.

(ب) در حداقل ۳ تا از ۴ موقعیت سرمایه گذاری صورت گیرد.

فصل دوم

اصول احتمال

۱ - مقدمه

در این فصل ابتدا مفهوم احتمال یک پیشامد را معرفی می‌کنیم و سپس طرز محاسبه این احتمالها را در بعضی حالات نشان می‌دهیم. ولی به عنوان مقدمه به بیان مفهوم فضای نمونه و پیشامدهای یک آزمایش می‌پردازیم.

۲ - فضای نمونه و پیشامدها

آزمایشی را در نظر بگیرید که برآمدهای آن بطور قطع از قبل قابل پیش بینی نباشد. اگرچه برآمد آزمایش از قبل معلوم نیست ولی فرض می‌کنیم مجموعه تمام برآمدهای ممکن معلوم باشد. این مجموعه را **فضای نمونه** آزمایش گویند و آن را با S نشان می‌دهند. برای روشن شدن مطلب به چند مثال زیر توجه کنید:

۱- اگر برآمد یک آزمایش تعیین جنس یک نوزاد باشد، آن گاه

$$S = \{g, b\}$$

که در آن g به معنای نوزاد دختر و b به معنای نوزاد پسر است.

۲- اگر برآمد یک آزمایش ترتیب برنده شدن ۷ اسب در یک مسابقه باشد که در محلهای

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 قرار گرفته اند، آن گاه

$S = \{ \text{تمام ۷! جایگشت } (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \}$

مثلاً برآمد (2, 3, 1, 6, 5, 4, 7) به این معناست که اسب شماره ۲ اول شده است بعد از آن اسب شماره ۳ و سپس اسب شماره ۱ و الی آخر.

۳- اگر آزمایش، پرتاب دو سکه باشد، آن گاه فضای نمونه عبارت است از

$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$

اگر دو سکه شیر بیاید برآمد (H, H) است و اگر اولی شیردومی خط بیاید برآمد (H, T) و اگر اولی خط و دومی شیر بیاید برآمد (T, H) و بالاخره اگر هر دو خط بیاید برآمد (T, T) خواهد بود.

۴- اگر آزمایش، پرتاب دو تاس باشد، آن گاه فضای نمونه شامل ۳۶ نقطه است

$S = \{(i, j) \mid i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

که در آن (i, j) وقتی رخ می دهد که تاس اول i و دیگری j آمده باشد.

۵- اگر آزمایش طول عمر (به ساعت) یک ترانزیستور باشد، آن گاه فضای نمونه شامل تمام اعداد حقیقی نامنفی است؛ یعنی

$S = \{x: 0 \leq x < \infty\}$

هر زیر مجموعه E از فضای نمونه را یک پیشامد گوئیم. یعنی یک پیشامد مجموعه ای از برآمدهای ممکن آزمایش است. اگر برآمد آزمایش در E باشد، می گوئیم پیشامد E رخ داده است. برای روشن شدن مطلب به چند نمونه زیر از پیشامدها توجه کنید.

در مثال ۱، اگر $E = \{g\}$ ، آن گاه E پیشامد «نوزاد دختر است»، می باشد، همین طور اگر $F = \{b\}$ ، آن گاه F پیشامد «نوزاد دختر است»، می باشد. در مثال ۲، اگر

$E = \{ \text{تمام برآمدهای } S \text{ که با } ۳ \text{ شروع می شوند} \}$

آن گاه E پیشامد «اسب شماره ۳ مسابقه را می برد» می باشد.

در مثال ۳، اگر $E = \{(H, H), (H, T)\}$ ، آن گاه E پیشامد «سکه اول شیر می آید» می باشد.

در مثال ۴، اگر $E = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$ ، آن گاه، E پیشامد «مجموع تاسها برابر ۷ است» می باشد.

در مثال ۵، اگر $E = \{x : 0 < x < 5\}$ ، آن گاه E پیشامد «طول عمر ترانزیستور از ۵ ساعت بیشتر نیست» می باشد.

برای هر دو پیشامد E و F در یک فضای نمونه S ، پیشامد جدید $E \cup F$ شامل تمام برآمدهایی است که در E یا در F یا در هر دو باشند.

یعنی پیشامد $E \cup F$ وقتی رخ می دهد که E یا F رخ دهد. مثلاً در مثال ۱ اگر $E = \{g\}$ و $F = \{b\}$ ، آن گاه

$$E \cup F = \{g, b\}$$

یعنی $E \cup F$ تمام فضای نمونه S است. در مثال ۳، اگر $E = \{(H, H), (H, T)\}$ و $F = \{(T, H)\}$ ، آن گاه

$$E \cup F = \{(H, H), (H, T), (T, H)\}$$

پس $E \cup F$ وقتی رخ می دهد که یکی از سکه ها شیر بیاید.

پیشامد $E \cup F$ را اجتماع پیشامد E و F گویند

همین طور از هر دو پیشامد E و F یک پیشامد جدید EF تعریف می شود به نام اشتراک E و F ، و آن شامل تمام برآمدهایی است که در هر دو پیشامد E و F باشند.

یعنی، پیشامد EF فقط وقتی رخ می دهد که هر دو پیشامد E و F رخ دهند. مثلاً، در مثال ۳، اگر

$$E = \{(H, H), (H, T), (T, H)\}$$

پیشامد حداقل یک شیر و $F = \{(H, T), (T, H), (T, T)\}$ پیشامد حداقل یک شیر و $F = \{(H, T), (T, H), (T, T)\}$ پیشامد حداقل یک خط باشد، آن گاه

$$EF = \{(H, T), (T, H)\}$$

پیشامد یک شیر و یک خط خواهد بود. در مثال ۴ اگر

$$E = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

پیشامد مجموع ۷ و

$$F = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

پیشامد مجموع E باشد، آن گاه پیشامد EF شامل هیچ برآمدی نخواهد بود و در نتیجه نمی تواند رخ دهد. این پیشامد را به \emptyset نشان می دهیم و آن را پیشامد تهی یا پوچ گوئیم (یعنی، \emptyset پیشامدی است که شامل هیچ برآمدی نباشد). اگر $EF = \emptyset$ ، آن گاه E و F را جدا یا ناسازگار نامند.

اجتماع و اشتراك بیش از دو پیشامد را نیز می توان به صورتی مشابه تعریف کرد. اگر E_1, E_2, \dots پیشامد باشند، اجتماع این پیشامدها که آن را با $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ نشان می دهیم پیشامدی است که نقاط آن حداقل به یک E_n ، $n = 1, 2, \dots$ متعلق باشد. همین طور اشتراك پیشامدهای E_n که آن را با $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ نشان می دهیم پیشامدی است که نقاط آن به همه E_n ها، $n = 1, 2, \dots$ متعلق باشد.

بالاخره برای هر پیشامد E پیشامد جدید E^c را تعریف می کنیم و آن را مکمل E گوئیم، این پیشامد شامل تمام نقاط فضای نمونه است که در E نیستند. یعنی E^c فقط و فقط وقتی رخ می دهد که E^c رخ نداده باشد. در مثال ۴، اگر $E = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$ ، آنگاه، E وقتی رخ می دهد که مجموع دو تاس برابر ۷ باشد. همچنین توجه کنید که چون نتیجه آزمایش باید به یک برآمد منتهی شود پس داریم $S^c = \emptyset$.

برای هر دو پیشامد E و F ، اگر تمام نقاط E در F نیز باشند، آن گاه E را زیر مجموعه F گوئیم و می نویسیم $E \subset F$ (یا بطور معادل $F \supset E$). پس اگر $E \subset F$ ، رخ دادن E لزوماً رخ دادن F را ایجاب می کند. اگر $E \subset F$ و $F \subset E$ ، پیشامدهای E و F را برابر گوئیم و می نویسیم $E = F$.

یک نمایش تصویری که برای روشن شدن روابط منطقی بین پیشامدها بسیار مفید است، نمودار وِن می باشد. فضای S به وسیله تمام نقاط یک مستطیل بزرگ، و پیشامدهای E, F, G, \dots به صورت تمام نقاط مفروض در دایره های داخل این مستطیل نشان داده می شود. در این صورت پیشامدهای مورد توجه را می توان با سایه زدن نواحی مناسب مشخص نمود. مثلاً، در سه تصویر ون شکل ۱-۲ ناحیه های سایه دار به ترتیب پیشامدهای $E \cup F$ ، $E \cap F$ و E^c را نشان می دهند. تصویر ون در شکل ۲-۲ نشان می دهد که $E \cap F$.

اعمال تشکیل اجتماع اشتراك، و مکمل پیشامدها از قواعدی پیروی می کنند که با قواعد جبری تفاوت زیادی ندارند. بعضی از این قواعد را در زیر فهرست می کنیم.

$$E \cup F = F \cup E \quad , \quad EF = FE$$

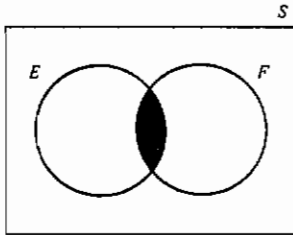
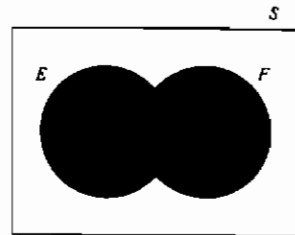
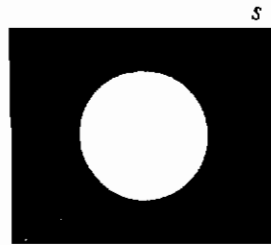
قانون جابجایی

$$(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G) \quad , \quad (EF)G = E(FG)$$

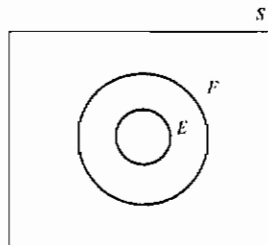
قانون شرکت پذیری

$$(E \cup F)G = EG \cup FG \quad , \quad EF \cup G = (E \cup G)(F \cup G)$$

قانون پخش

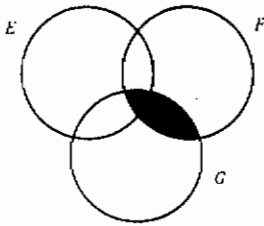
(ب) ناحیه سایه دار EF (الف) ناحیه سایه دار $E \cup F$ (پ) ناحیه سایه دار E^c

شکل ۱-۲

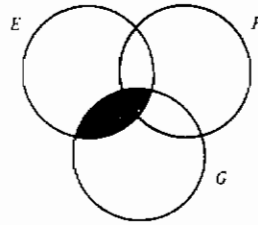
 $E \subset F$

شکل ۲-۲

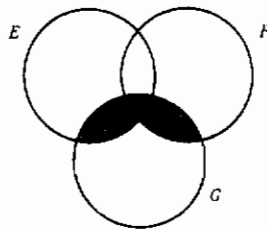
این روابط را می توان ثابت کرد، به این ترتیب که نشان دهیم هر برآمد که در پیشامد سمت چپ تساوی است به پیشامد سمت راست نیز متعلق است و برعکس. یک راه نشان دادن این مطلب به کمک تصویر ون است. مثلاً قانون پخشی را می توان به وسیله دنباله تصاویر شکل ۳-۲ تحقیق کرد.



(ب) ناحیه سایه دار FG



(الف) ناحیه سایه دار EG

(پ) ناحیه سایه دار $(E \cup F)G$

$$(E \cup F)G = EG \cup FG$$

شکل ۳-۲

روابط مفید زیر بین سه عمل اصلی اجتماع، اشتراك و مکمل به قوانین دمورگان

معروف است.

$$\left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n E_i^c$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^n E_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^n E_i^c$$

برای اثبات قوانین دمورگان، ابتدا فرض کنید x یک نقطه $\left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right)^c$ باشد.

در این صورت x به $\bigcup_{i=1}^n E_i$ متعلق نیست، یعنی x در هیچ کدام از پیشامدهای E_1, E_2, \dots, E_n

نیست، در نتیجه x در تمام E_i^c ها $i = 1, \dots, n$ خواهد بود. پس x به $\bigcap_{i=1}^n E_i^c$ متعلق است. از طرف دیگر فرض کنید x نقطه‌ای از $\bigcap_{i=1}^n E_i^c$ باشد. در این صورت x به E_i^c به ازای $i = 1, \dots, n$ متعلق است، یعنی x در $\bigcup_{i=1}^n E_i$ نخواهد بود پس به $\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)^c$ متعلق است. به این ترتیب اولین قانون دمورگان ثابت می‌شود.
برای اثبات قانون دوم از قانون اول استفاده می‌کنیم.

$$\left(\bigcup_{i=1}^n E_i^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^n (E_i^c)^c$$

و چون $E = (E^c)^c$ ، می‌توان نوشت

$$\left(\bigcup_{i=1}^n E_i^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^n E_i$$

اگر از طرفین مکمل بگیریم نتیجه حاصل می‌شود، یعنی

$$\bigcup_{i=1}^n E_i^c = \left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right)^c$$

۳- اصول احتمال

یک راه ممکن تعریف احتمال یک پیشامد، استفاده از فراوانی نسبی است. این تعریف معمولاً به صورت زیر است: فرض کنید یک آزمایش که فضای نمونه آن S است، با شرایطی یکسان تکرار می‌شود. برای هر پیشامد E از این فضای نمونه S ، تعداد دفعاتی را که در n تکرار اول آزمایش، پیشامد E رخ می‌دهد با $n(E)$ نشان می‌دهیم. سپس $P(E)$ ، احتمال پیشامد E به صورت زیر تعریف می‌شود

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(E)}{n}$$

یعنی $P(E)$ ، به صورت درصد (حدی) دفعاتی که پیشامد E رخ می‌دهد تعریف می‌شود. در این تعریف، احتمال حد فراوانی نسبی پیشامد E است.

هرچند تعریف فوق از نظر شهودی رضایت بخش است و باید خواننده همواره به خاطر

بسپارد، ولی دارای یک اشکال جدی است: چگونه بدانیم که $\frac{n(E)}{n}$ به عددی ثابت به وسیله هر دنباله از تکرارهای آزمایش میل می کند؟ مثلاً، فرض کنید آزمایش تکراری پرتاب یک سکه باشد. چگونه بدانیم که نسبت شیرهای به دست آمده در n پرتاب اول وقتی n بزرگ می شود به سمت عدد معینی میل می کند؟ همچنین با فرض این که این دنباله به عدد معینی همگرا باشد چگونه بدانیم که در تکرارهای بعدی بازم به همان نسبت از شیرها خواهیم رسید؟

طرفداران تعریف فراوانی نسبی احتمال، معمولاً به این اعتراض چنین پاسخ می دهند که همگرایی $\frac{n(E)}{n}$ به یک مقدار ثابت یک فرض یا یک اصل سیستم است. در هر صورت فرض همگرایی $\frac{n(E)}{n}$ به یک مقدار ثابت یک فرض خیلی پیچیده به نظر می رسد. زیرا، با وجود این که باید امیدوار بود که چنین حدی ثابتی وجود دارد، به هیچ وجه از قبل روشن نیست که این حالت پیش آید. آیا به نظر معقولتر نمی رسد که مجموعه ای از اصول ساده تر و نسبتاً بدیهی را در مورد احتمال فرض بگیریم و سپس سعی کنیم وجود چنین حد ثابتی را به شکلی اثبات کنیم؟ شیوه اخیر روش اصول موضوع جدید نظریه احتمال است که در این کتاب پذیرفته شده است. بخصوص فرض می کنیم که برای هر پیشامد E در فضای نمونه S مقداری مانند $P(E)$ وجود دارد که به آن احتمال E گوئیم. سپس فرض می کنیم که این احتمالها در مجموعه معینی از اصول صدق می کنند، با این امید که خواننده پذیرفته باشد که این اصول بر مبنای مفهوم شهودی احتمال است.

آزمایشی را در نظر بگیرید که فضای نمونه آن S است. برای هر پیشامد E از این فضای نمونه S ، فرض می کنیم که عددی مانند $P(E)$ وجود دارد که در سه اصل زیر صدق می کند:

اصل ۱

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

اصل ۲

$$P(S) = 1$$

اصل ۳

برای هر دنباله از پیشامدهای دو به دو ناسازگار E_1, E_2, \dots (یعنی پیشامدهایی که

$$E_i E_j = \phi, \quad i \neq j$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

بنا به تعریف، $P(E)$ را احتمال پیشامد E گوئیم.

پس اصل (۱) بیان می‌کند که احتمال این که برآمد آزمایش نقطه‌ای از E باشد عددی بین ۰ و ۱ است. اصل (۲) بیان می‌کند که با احتمال ۱، برآمد یک نقطه فضای نمونه S خواهد بود. اصل (۳) بیان می‌کند که برای هر دنباله از پیشامدهای ناسازگار احتمال این که حداقل یک از این پیشامدها رخ دهد دقیقاً برابر است با مجموع احتمالهای متناظر آنها.

اگر دنباله E_1, E_2, \dots را در نظر بگیریم به قسمی که $E_i = S$ و برای $i > 1$ و $E_i = \emptyset$ آن‌گاه چون پیشامدها دو به دو ناسازگارند و داریم $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ ، از اصل (۳) نتیجه می‌شود که

$$P(S) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset)$$

یا

$$P(\emptyset) = 0$$

یعنی احتمال رخ دادن پیشامد تهی برابر ۰ است.

همچنین باید توجه داشت که برای هر دنباله متناهی از پیشامدهای دو به دو ناسازگار

$$E_1, E_2, \dots, E_n$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n P(E_i) \quad (3-1)$$

این تساوی از اصل (۳) با تعریف E_i ، $i > n$ برابر پیشامد تهی به دست می‌آید. اصل (۳) با معادله (۳-۱) وقتی فضای نمونه متناهی باشد معادل است (چرا؟). با وجود این تعمیم اصل (۳) وقتی لازم می‌شود که فضای نمونه دارای بی‌نهایت نقطه باشد.

مثال ۳ الف. اگر آزمایش پرتاب یک سکه باشد و فرض کنیم آمدن شیر یا خط یکسان

باشد، در این صورت داریم

$$P(\{H\}) = P(\{T\}) = \frac{1}{2}$$

از طرف دیگر، اگر سکه اریب باشد و احساس کنیم که احتمال آمدن شیر دو برابر آمدن

خط است، آن‌گاه

$$P(\{H\}) = \frac{2}{3} \quad P(\{T\}) = \frac{1}{3}$$

مثال ۳ ب. اگر تاسی را بیندازیم و فرض کنیم که تمام ۶ وجه آن همشانس باشند، آن گاه داریم

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

از اصل (۳) نتیجه می شود که احتمال آمدن یک عدد زوج برابر است با

$$P(\{2, 4, 6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{2}$$

فرض وجود یک تابع مجموعه ای مانند P ، که بر پیشامدهای یک فضای نمونه S تعریف شده است و در اصول ۱، ۲ و ۳ صدق می کند، رهیافت جدید ریاضی، نظریه احتمال را می سازد. انتظار می رود که خواننده با این اصول طبیعی و با مفهوم شهودی احتمال که با شانس و تصادف در ارتباط است موافق باشد. علاوه بر این با استفاده از این اصول می توانیم ثابت کنیم که اگر یک آزمایش مرتباً تکرار شود آن گاه، با احتمال ۱ نسبت دفعاتی که یک پیشامد خاص E رخ می دهد برابر $P(E)$ خواهد بود. این نتیجه به نام **قانون قوی اعداد بزرگ** معروف است و در فصل (۸) ارائه خواهد شد. به علاوه، یک تعبیر دیگر احتمال را به عنوان اندازه باوری که داریم در بخش (۷) این فصل ارائه خواهیم داد.

تبصره: فرض کردیم که $P(E)$ برای تمام پیشامدهای E از فضای نمونه تعریف شده باشد. در واقع وقتی فضای نمونه یک مجموعه نامتناهی و نا شماراست $P(E)$ فقط برای پیشامدهای به اصطلاح اندازه پذیر تعریف می شود. ولی این محدودیت مورد توجه ما نیست زیرا تمام پیشامدهای مورد توجه اندازه پذیرند.

۴- چند حکم ساده

در این بخش چند حکم ساده را در ارتباط با احتمال ثابت خواهیم کرد. ابتدا توجه کنید که چون همیشه E و E^c ناسازگارند و $E \cup E^c = S$ ، بنا به اصول (۲) و (۳) داریم

$$1 = P(S) = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$$

یا به عبارت معادل، گزاره حکم ۴-۱ صحیح است.

حکم ۱-۴

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

به عبارت دیگر حکم ۱-۴ بیان می کند: احتمال این که یک پیشامد رخ ندهد برابر است با ۱ منهای احتمال آن که پیشامد رخ دهد. مثلاً، اگر احتمال آمدن یک شیر در پرتاب یک سکه $\frac{3}{8}$ باشد احتمال آمدن خط باید $\frac{5}{8}$ باشد.

حکم بعدی بیان می کند که اگر پیشامد E زیر مجموعه پیشامد F باشد احتمال E نمی تواند بزرگتر از احتمال F باشد.

حکم ۲-۴

$$P(E) \leq P(F)$$

اگر $E \subset F$ ، آن گاه

برهان: چون $E \subset F$ ، پیشامد F را می توان به صورت زیر نوشت

$$F = E \cup E^c F$$

بنابراین، چون E و $E^c F$ ناسازگارند از اصل ۳ نتیجه می شود

$$P(F) = P(E) + P(E^c F)$$

$$P(E^c F) \geq 0$$

که حکم را ثابت می کند زیرا

حکم ۲-۴ بیان می کند که مثلاً احتمال آمدن ۱ در ریختن یک تاس کمتر یا مساوی احتمال آمدن عدد فرد است.

حکم بعدی رابطه بین احتمال اجتماع دو پیشامد و هر یک از آنها و احتمال اشتراك آنها را به دست می دهد.

حکم ۳-۴

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$$

برهان: برای یافتن رابطه ای برای $P(E \cup F)$ ابتدا توجه کنید که $E \cup F$ را می توان

به صورت اجتماع دو پیشامد ناسازگار E و $E^c F$ نوشت. پس بنا به اصل ۳ داریم

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= P(E \cup E^c F) \\ &= P(E) + P(E^c F) \end{aligned}$$

علاوه بر این، چون $EF \cup E^c F$ ، از اصل ۳ داریم

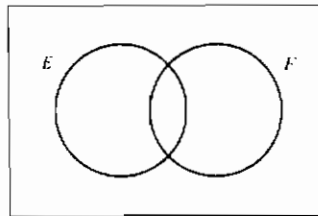
$$P(F) = P(EF) + P(E^c F)$$

یا بطور معادل

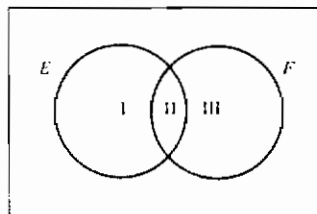
$$P(E^c F) = P(F) - P(EF)$$

و در نتیجه حکم ثابت می شود.

حکم ۳-۴ را می توان با توجه به تصویر ون در شکل ۲-۴ نیز ثابت کرد. این تصویر را به سه مجموعه جدا از هم همان طور که در شکل ۲-۵ نشان داده شده است تقسیم می کنیم. در این تصویر، مجموعه I تمام نقاطی از E را نشان می دهد که در F نیستند (یعنی $E F^c$)، مجموعه II تمام نقاطی را که در E و F هستند نشان می دهد (یعنی EF) و مجموعه III تمام نقاطی از F را نشان می دهد که در E نیستند (یعنی $E^c F$).



شکل ۲-۴ تصویر ون



شکل ۲-۵ تصویر ون به صورت تقسیمات

در شکل ۲-۵ دیده می شود که

$$\begin{aligned} E \cup F &= I \cup II \cup III \\ E &= I \cup II \\ F &= II \cup III \end{aligned}$$

چون I، II و III جدا از هم هستند، بنا به اصل ۳ داریم

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= P(I) + P(II) + P(III) \\ P(E) &= P(I) + P(II) \\ P(F) &= P(II) + P(III) \end{aligned}$$

که نشان می دهد

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(II)$$

در نتیجه حکم ۴-۳ ثابت می شود زیرا $II = EF$.

مثال ۲ الف. دو سکه را می اندازیم فرض کنید هریک از چهار نقطه فضای نمونه

$$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

همشانس و در نتیجه با احتمال $\frac{1}{4}$ رخ دهند. فرض کنید

$$E = \{(H, H), (H, T)\} \quad \text{و} \quad F = \{(H, H), (T, H)\}$$

یعنی E پیشامد سکه اول شیر و F پیشامد سکه دوم شیر است.

بنا به حکم ۴-۳، $P(E \cup F)$ احتمال این که سکه اول یا سکه دوم شیر بیاید عبارت

است از

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= P(E) + P(F) - P(EF) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - P(\{(H, H)\}) \\ &= 1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

البته این احتمال را مستقیماً نیز می توان محاسبه کرد، زیرا

$$P(E \cup F) = P(\{(H, H), (H, T), (T, H)\}) = \frac{3}{4}$$

همچنین می توان احتمال رخ دادن یکی از سه پیشامد E یا F یا G را محاسبه کرد:

$$P(E \cup F \cup G) = P[(E \cup F) \cup G]$$

که بنا به حکم ۴-۳ برابر است با

$$P(E \cup F) + P(G) - P[(E \cup F)G]$$

چون با توجه به قانون پخشیشامدهای $(E \cup F)G$ و $EG \cup FG$ معادلند، می توان نوشت

$$\begin{aligned} P(E \cup F \cup G) &= P(E) + P(F) - P(EF) + P(G) - P(EG \cup FG) \\ &= P(E) + P(F) - P(EF) + P(G) - P(EG) - P(FG) + P(EGFG) \\ &= P(E) + P(F) + P(G) - P(EF) - P(EG) - P(FG) + P(EFG) \end{aligned}$$

در واقع حکم زیر را می توان به استقرا ثابت کرد.

حکم ۴-۴

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) &= \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(E_{i_1} E_{i_2}) + \dots \\ &\quad + (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_r}) \\ &\quad + \dots + (-1)^{n+1} P(E_1 E_2 \dots E_n) \end{aligned}$$

مجموع $\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_r})$ روی تمام $\binom{n}{r}$ زیر مجموعه ممکن به حجم r از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ در نظر گرفته می شود.

به عبارت دیگر حکم ۴-۴ بیان می کند که احتمال اجتماع k پیشامد برابر است با مجموع احتمالهای این پیشامدها یک به یک منهای مجموع احتمالهای این پیشامدها دو به دو به اضافه مجموع احتمالهای این پیشامدها سه به سه و الی آخر.

۵- فضاهای نمونه با برآمدهای همشانس

در بسیاری از آزمایشها طبیعی است که فرض کنیم تمام برآمدهای فضای نمونه از نظر رخ دادن یکسان هستند، یعنی، اگر یک آزمایش که فضای نمونه آن یک مجموعه متناهی است مانند $S = \{1, 2, \dots, N\}$ را در نظر بگیریم، آن گاه اغلب طبیعی است که فرض کنیم

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{N\})$$

که بنا به اصول (۲) و (۳) (چرا؟) داریم

$$P(\{i\}) = \frac{1}{N} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

و با توجه به اصل (۳) برای هر پیشامد E داریم

$$P(E) = \frac{\text{تعداد نقاط متعلق به E}}{\text{تعداد نقاط متعلق به S}}$$

به عبارت دیگر، اگر فرض کنیم که تمام برآمدهای یک آزمایش از نظر رخ دادن همشانس هستند، آن گاه احتمال هر پیشامد E برابر است با نسبت تعداد نقاط فضای نمونه که به E متعلق است.

مثال ۵ الف. در ریختن دو تاس احتمال مجموع ۷ چقدر است؟

حل: این مسأله را با این فرض که ۳۶ برآمد ممکن هم احتمال هستند حل می‌کنیم. چون ۶ برآمد معین (۱و۶)، (۲و۵)، (۳و۴)، (۴و۳)، (۵و۲)، و (۶و۱) وجود دارد که مجموع تاسها برابر ۷ می‌شود، احتمال مطلوب برابر است با $\frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$.

مثال ۵ ب. اگر دو مهره از جعبه‌ای شامل ۶ مهره سفید و ۵ مهره سیاه بطور تصادفی خارج کنیم، احتمال این که یکی از مهره‌های خارج شده سفید و دیگری سیاه باشد چقدر است؟

حل: اگر ترتیب استخراج مهره‌های موردنظر باشد فضای نمونه شامل $۱۱ \times ۱۰ = ۱۱۰$ نقطه خواهد بود. به علاوه $۶ \times ۵ = ۳۰$ حالت وجود دارد که در آنها مهره اول سفید و مهره دوم سیاه است. همین‌طور $۵ \times ۶ = ۳۰$ حالت وجود دارد که در آنها مهره اول سیاه و مهره دوم سفید است. با فرض این که «استخراج تصادفی» به این معناست که ۱۱۰ نقطه فضای نمونه هم احتمال هستند، احتمال مطلوب به صورت زیر است

$$\frac{۳۰ + ۳۰}{۱۱۰} = \frac{۶}{۱۱}$$

این مسأله را می‌توان با در نظر گرفتن برآمد آزمایش به صورت مجموعه (نامرتب) از مهره‌های خارج شده حل کرد. با توجه به این مطلب فضای نمونه $\binom{۱۱}{۲} = ۵۵$ نقطه دارد.

چون بنا به فرض تمام برآمدهای ممکن هم احتمال هستند احتمال مطلوب عبارت است از

$$\frac{\binom{6}{1} \binom{5}{1}}{\binom{11}{2}} = \frac{6}{11}$$

که البته با جواب قبلی برابر است .

مثال ۵ پ. کمیته ای ۵ نفری از یک گروه شامل ۶ مرد و ۹ زن انتخاب می شود . اگر انتخاب بتصادف صورت گیرد، احتمال این که کمیته از ۳ مرد و ۲ زن تشکیل شود چقدر است؟
حل: فرض می کنیم « انتخاب تصادفی » است یعنی هر یک از $\binom{15}{5}$ انتخاب ممکن احتمال انتخاب شدن یکسان دارند . پس احتمال مطلوب عبارت است از

$$\frac{\binom{6}{3} \binom{9}{2}}{\binom{15}{5}} = \frac{240}{1001}$$

مثال ۵ ت. یک دست پوکر شامل ۵ ورق است، اگر ورقها متمایز با مقادیر متوالی ولی همه از یک خال نباشند دست را استریت گویند . مثلاً، دستی که شامل ۵ پیک، ۶ پیک، ۷ پیک، ۸ پیک و ۹ دل باشد یک استریت است . احتمال داشتن یک استریت چقدر است؟

حل: فرض می کنیم تمام $\binom{52}{5}$ دست پوکر هم احتمال باشند . برای تعیین تعداد برآمدهایی که استریت هستند، ابتدا برآمدهای ممکن آس، دو، سه، چهار و پنج (صرف نظر از خال) را معین می کنیم . چون آس می تواند یکی از ۴ آس موجود باشد و همین طور دو، سه، چهار، پنج، نتیجه می شود که 4^5 برآمد به صورت فوق خواهیم داشت . پس چون در ۴ تا از این برآمدها، همه ورقها از یک خال هستند (این دست را استریت فلش گویند)، نتیجه می شود $4^5 - 4$ دست به صورت آس، دو، سه، چهار، پنج استریت می سازند . همین طور $4^5 - 4$ دست به صورت ده، سرباز، بی بی، شاه و آس استریت می سازند .

بنابراین $10(4^5 - 4)$ دست استریت وجود دارد . پس احتمال مطلوب عبارت است از

$$\frac{10(4^5 - 4)}{\binom{52}{5}} \approx .0039$$

مثال ۵ ث. یک دست ۵ تایی پوکر را یک فول گوئیم اگر از ۳ ورق همنام و ۲ ورق همنام

تشکیل شده باشد. (یعنی فول عبارت است از ۳ ورق از یک نوع و یک جفت) احتمال آوردن فول چقدر است؟

حل: فرض می‌کنیم تمام $\binom{52}{5}$ دست ممکن هم احتمال باشند. برای تعیین تعداد فولهای ممکن، توجه کنید که $\binom{4}{2} \binom{4}{3}$ ترکیب متمایز از مثلاً ۲ ده و ۳ سرباز وجود دارد. چون ۱۳ حالت برای انتخاب جفت و ۱۲ حالت برای انتخاب ورقهای باقی مانده امکان پذیر است پس احتمال آوردن یک فول برابر است با

$$\frac{13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} \binom{4}{3}}{\binom{52}{5}} \approx .0014$$

مثال ۵ ج. در بازی بریج تمام ۵۲ ورق بین ۴ بازیکن توزیع می‌شود. احتمال آن که یکی از بازیکنها ۱۳ پیک داشته باشد چقدر است؟

حل: حالت‌های ممکن تقسیم ورقها بین ۴ بازیکن برابر است با $\binom{52}{13, 13, 13, 13}$ چون $\binom{39}{13, 13, 13}$ حالت وجود دارد که در آنها یکی از بازیکنها تمام ۱۳ پیک می‌رسد، پس احتمال مطلوب عبارت است از

$$\frac{4 \binom{39}{13, 13, 13}}{\binom{52}{13, 13, 13, 13}} \approx 6.3 \times 10^{-12}$$

مثال بعد نشان می‌دهد که نتایج احتمال گاهی در اولین برخورد تعجب آور هستند.

مثال ۵ ج. اگر در اتاقی n نفر باشند، احتمال این که هیچ دو نفری در یک روز متولد نشده باشند چقدر است؟ عدد n باید به چه بزرگی باشد تا این احتمال کمتر از $\frac{1}{2}$ شود؟

حل: چون هر فرد ممکن است در یکی از ۳۶۵ روز متولد شده باشد. پس تعداد برآمدهای ممکن " (۳۶۵) است. (از امکان تولد یک فرد در ۲۹ فوریه صرف نظر می‌کنیم) فرض می‌کنیم برآمدها همشانس باشند، در این صورت احتمال مطلوب برابر است با

$$\frac{365(364) \dots (365 - n + 1)}{(365)^n}$$

تعجب آور است که برای $n = 23$ این احتمال کمتر از $\frac{1}{2}$ است. یعنی اگر ۲۳ نفر در اتاق باشند، احتمال این که حداقل دونفرشان یک تاریخ تولد داشته باشند بیشتر از $\frac{1}{2}$ است. بیشتر مردم از این مطلب تعجب می کنند. ولی تعجب آورتر است که این احتمال تا 0.975 افزایش پیدا می کند اگر در اتاق ۵۰ نفر باشند. و با ۱۰۰ نفر این نسبت بیشتر از ۳ میلیون به ۳ میلیون و یک خواهد بود یعنی احتمال بزرگتر از $(3 \times 10^6) / (3 \times 10^6 + 1)$ است.

مثال ۵ ح. در یک تیم فوتبال ۲۰ سیاه و ۲۰ سفید بازی می کنند. بازیکنها به گروههای ۲ تایی برای انتخاب هم اتاقی تقسیم می شوند. اگر انتخاب دو تاییها تصادفی باشد، احتمال این که هیچ سفید با سیاه هم اتاقی نباشد چقدر است؟ احتمال آن که $2i$ ، $i = 1, 2, \dots, 10$ سفید و سیاه هم اتاقی باشند چقدر است؟

حل: تقسیم ۴۰ بازیکن به ۲۰ زوج مرتب به حالتیهای زیر امکان پذیر است

$$\binom{40}{2, 2, \dots, 2} = \frac{(40)!}{(2!)^{20}}$$

[یعنی $(40)! / 2^{20}$ حالت برای تقسیم بازیکنها به اولین زوج دومین زوج و الی آخر وجود دارد]. بنابراین $(20)! / 2^{20} / 40!$ حالت برای تقسیم بازیکنها به گروههای ۲ تایی (بدون ترتیب) امکان پذیر است. علاوه بر این، چون تقسیم بازیکنها به قسمی که هیچ زوجی سفید و سیاه نباشد به این صورت خواهد بود که سیاهها (سفیدها) بین خودشان به گروههای ۲ تایی تقسیم شوند در نتیجه $[(20)! / 2^{10} (10)!]^2$ حالت امکان پذیر است. بنابراین احتمال مطلوب به صورت زیر محاسبه می شود.

$$P_0 = \frac{\left(\frac{(20)!}{2^{10} (10)!} \right)^2}{\frac{(40)!}{2^{20} (20)!}} = \frac{[(20)!]^3}{[(10)!]^2 (40)!}$$

برای محاسبه P_2 احتمال این که $2i$ زوج سفید و سیاه داشته باشیم، ابتدا توجه کنید که حالت برای انتخاب $2i$ سفید و $2i$ سیاه وجود دارد. این ۴۱ بازیکن را می توان به صورت $\binom{20}{2i}$ (۲۸) زوج سفید و سیاه تقسیم کرد. (زیرا اولین سیاه را می توان با هریک از $2i$ سفید قرار داد و سیاه دوم را با هریک از $2i - 1$ سفید در یک اتاق قرار داد.) چون $2i - 20$ سفید

(سیاه) باقیمانده باید بین خودشان تقسیم شوند، تعداد حالات مطلوب عبارت است از

$$\binom{20}{2i}^2 (2i)! \left[\frac{(20-2i)!}{2^{10-i}(10-i)!} \right]^2$$

بنابر این

$$P_{2i} = \frac{\binom{20}{2i}^2 (2i)! \left[\frac{(20-2i)!}{2^{10-i}(10-i)!} \right]^2}{\frac{(40)!}{2^{20}(20)!}} \quad i = 0, 1, \dots, 10$$

حال مقدار P_{2i} ، $i = 0, 1, \dots, 10$ را می‌توان محاسبه کرد یا مقدار تقریبی آن را با استفاده از فرمول استرلینگ که $n!$ را تقریباً برابر $n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$ در نظر می‌گیرد به دست آورد. به عنوان نمونه داریم

$$P_0 = 1.3403 \times 10^{-6}$$

$$P_{10} = .345861$$

$$P_{20} = 7.6068 \times 10^{-6}$$

مثال بعدی در این بخش نه تنها جوابی تعجب‌آور دارد بلکه از جنبه نظری نیز حائز اهمیت است.

مثال ۵ خ. مسأله جور کردن. فرض کنید N مرد در یک مهمانی کلاه‌های خود را به وسط اتاق پرتاب می‌کنند. ابتدا کلاه‌ها خوب مخلوط می‌شوند سپس هر مرد بطور تصادفی کلاهی انتخاب می‌کند.

- ۱- احتمال این که هیچ کدام کلاه خود را انتخاب نکرده باشد چقدر است؟
- ۲- احتمال این که فقط ۴ مرد کلاه‌های خود را انتخاب کرده باشند چقدر است؟

حل: در جواب (۱) ابتدا این احتمال را که حداقل یک مرد کلاه خود را انتخاب کرده باشد محاسبه می‌کنیم. فرض کنید E_i ، $i = 1, 2, \dots, N$ این پیشامد باشد که مرد i ام کلاه خود را انتخاب کرده است، حال با توجه به حکم ۴-۴ این احتمال به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$P\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right) = \sum_{i=1}^N P(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(E_{i_1} E_{i_2}) + \dots \\ + (-1)^{n+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_n}) \\ + \dots + (-1)^{N+1} P(E_1 E_2 \dots E_N)$$

اگر برآمد این آزمایش را به صورت یک بردار N بعدی در نظر بگیریم که عضو i ام آن شماره کلاهی باشد که توسط مرد i ام انتخاب شده است، آن گاه تعداد برآمدهای ممکن $N!$ خواهد بود. [برآمد $(1, 2, \dots, N)$ به عنوان مثال نشان می دهد که هر مرد کلاه خودش را انتخاب کرده است]. علاوه بر این، $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_n}$ این پیشامد است که هریک از n مرد i_1, i_2, \dots, i_n کلاه خودش را انتخاب کرده است، و می تواند به یکی از $1, 2, 3, \dots, (N-n), (N-n-1), \dots, (N-n)$ حالت رخ دهد؛ زیرا از $N-n$ مرد باقیمانده اولی می تواند، هریک از $N-n$ کلاه را انتخاب کند، دومی می تواند هریک از $N-(n+1)$ کلاه را و الی آخر بنابراین با فرض این که $N!$ برآمد ممکن هم احتمال هستند، داریم

$$P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_n}) = \frac{(N-n)!}{N!}$$

همچنین چون $\binom{N}{n}$ جمله در $\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_n})$ وجود دارد، دیده می شود که

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_n}) = \frac{N!(N-n)!}{(N-n)!n!N!} = \frac{1}{n!}$$

در نتیجه

$$P\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{N+1} \frac{1}{N!}$$

و احتمال این که هیچ کدام کلاه خود را انتخاب نکرده باشند برابر است با

$$1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^N}{N!}$$

که برای مقادیر بزرگ N تقریباً برابر است با $e^{-1} \approx 0.36788$. به عبارت دیگر برای N بزرگ احتمال این که هیچ مردی کلاه خود را انتخاب نکند برابر 0.37 است. (چه بسا خوانندگانی که این فکر اشتباه را دارند که اگر $N \rightarrow \infty$ این احتمال به یک نزدیک می شود.

برای محاسبه احتمال این که دقیقاً k مرد کلاه خود را انتخاب کنند، ابتدا به یک مجموعه

k مرد مشخص توجه می کنیم. تعداد حالاتی که فقط این k مرد کلاههای خودشان را انتخاب کنند برابر است با تعداد حالاتی که $N-k$ مرد باقیمانده کلاههای خودشان را انتخاب نکنند. ولی چون

$$1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!}$$

احتمال این است که هیچ یک از $N-k$ مرد کلاه خود را انتخاب نکنند، نتیجه می گیریم که تعداد حالاتی که k مرد مشخص کلاههای خود را انتخاب کنند برابر است با:

$$(N-k)! \left[1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!} \right]$$

بنابراین، چون k مرد را می توان به $\binom{N}{k}$ طریق انتخاب کرد تعداد حالات مساعد برابر است با

$$\binom{N}{k} (N-k)! \left[1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!} \right]$$

پس احتمال مطلوب عبارت است از

$$\frac{\binom{N}{k} (N-k)! \left[1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!} \right]}{N!} = \frac{1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!}}{k!}$$

که به ازای مقادیر بزرگ N تقریباً برابر $1/k!$ است. مقدار $\frac{e^{-1}}{k!}$ ، $k=0, 1, \dots$ از جنبه نظری بسیار مهم است، زیرا این مقدار با توزیع پواسون در ارتباط است. این مطلب را در فصل ۴ بررسی خواهیم کرد.^۱

برای تشریح بیشتر کاربرد حکم ۴-۴ به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۵.۵ اگر ۱۰ زوج متأهل بتصادف دور یک میز گرد بنشینند، این احتمال را حساب

کنید که هیچ مردی پهلوی زنش قرار نگیرد.

۱- برای ملاحظه یک روش دیگر به مثال ۵ فصل ۳ مراجعه کنید.

حل: اگر $E_i, i = 1, 2, \dots, 10$ این پیشامد باشد که زوج i ام پهلوی هم قرار گرفته باشند، احتمال مطلوب عبارت است از $1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{10} E_i\right)$ حال با استفاده از حکم ۴-۴، داریم

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{10} E_i\right) = \sum_1^{10} P(E_i) - \dots + (-1)^{n+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_n}) \\ + \dots - P(E_1 E_2 \dots E_{10})$$

برای محاسبه $P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_n})$ ابتدا توجه کنید که ۲۰ نفر به ۱۹! حالت مختلف می توانند دور میز گرد بنشینند (چرا؟). تعداد ترتیبهایی که n مرد پهلوی خانمهایشان بنشینند باسانی محاسبه می شود؛ اگر هر زن و شوهر را به عنوان یک فرد در نظر بگیریم در این حالت لازم است $n + n - 2 = 2n - 2 = 20 - n$ فرد را دور میز گرد بنشانیم که تعداد آنها برابر $(20 - n - 1)!$ خواهد بود. بالاخره چون هر یک از n زوج به دو طریق می توانند پهلوی هم قرار گیرند تعداد حالات مساعد برابر $(20 - n - 1)! 2^n$ خواهد بود، بنابراین

$$P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_n}) = \frac{2^n (19 - n)!}{(19)!}$$

حال با توجه به حکم ۴-۴ احتمال این که حداقل یک زوج پهلوی هم قرار بگیرند به صورت زیر محاسبه می شود

$$\binom{10}{1} 2^1 \frac{(18)!}{(19)!} - \binom{10}{2} 2^2 \frac{(17)!}{(19)!} + \binom{10}{3} 2^3 \frac{(16)!}{(19)!} - \dots - \binom{10}{10} 2^{10} \frac{9!}{(19)!} = .6605$$

و احتمال مطلوب برابر 0.3395 است.

مثال ۵ ذ. گشتها. یک تیم ورزشکار را در نظر بگیرید که در پایان کار دارای n برد و m باخت است. با بررسی دنباله بردها و باختها امیدواریم که بتوانیم تعیین کنیم که آیا این تیم باید بازیهایی را که در آنها احتمال برد بیشتر است نسبت به سایر بازیها بیشتر طول بدهد. یک راه به دست آوردن اطلاعاتی در مورد این سؤال شمردن تعداد گشتهای برد و محاسبه احتمال آن است وقتی تمام $\frac{(n+m)!}{n!(m!)}$ ترتیب n برد و m باخت را هم احتمال در نظر بگیریم. منظور از یک گشت برد دنباله بردهای متوالی است. مثلاً اگر $n = 10$ و $m = 6$ باشد و دنباله برآمدها WWLLWWLLWLLWWWW باشد تعداد گشتهای برد برابر ۴ است. گشت اول به طول ۲، گشت دوم به طول ۳ و گشت سوم به طول ۱ و آخری به طول ۴ است.

حال فرض کنید تیم دارای n برد و m باخت است. و فرض کنید تمام ترتیبا

$$(n+m)!/(n!m!) = \binom{n+m}{n}$$

هم احتمال هستند، می خواهیم احتمال r گشت برد را محاسبه کنیم. برای این کار برداری از اعداد صحیح مثبت x_1, x_2, \dots, x_r را در نظر می گیریم که در آن $x_1 + \dots + x_r = n$ و تعداد برآمدهایی را که در آن r گشت برد وجود دارد و طول گشت i ام برابر x_i ، $i = 1, 2, \dots, r$ است. برای هر یک از این برآمدها اگر y_1 تعداد باختهای قبل از اولین گشت برد باشد و y_2 تعداد باختهای بین اولین دو گشت برد باشد، \dots ، $y_r + 1$ تعداد باختها بعد از آخرین گشت برد باشد، آن گاه y_i در شرایط زیر صدق می کند

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{r+1} = m \quad y_1 \geq 0, y_{r+1} \geq 0, y_i > 0, i = 2, \dots, r$$

و برآمد را به صورت زیر می توان نشان داد.

$$\underbrace{LL\dots L}_{y_1} \underbrace{WW\dots W}_{x_1} \underbrace{L\dots L}_{y_2} \underbrace{WW\dots W}_{x_2} \dots \underbrace{WW\dots W}_{x_r} \underbrace{L\dots L}_{y_{r+1}}$$

بنابراین تعداد برآمدهایی که دارای r گشت برد هستند و گشت i ام آنها به طول x_i ، $i = 1, 2, \dots, r$ است، برابر تعداد اعداد صحیح y_1, \dots, y_{r+1} است که در شرایط فوق صدق می کنند، یا به عبارت معادل برابر با تعداد اعداد صحیح مثبت

$$\bar{y}_1 = y_1 + 1, \quad \bar{y}_i = y_i, i = 2, \dots, r, \quad \bar{y}_{r+1} = y_{r+1} + 1$$

است که در شرط زیر صدق کنند

$$\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \dots + \bar{y}_{r+1} = m + 2$$

بنابه حکم ۶-۱ در فصل ۱ تعداد این برآمدها برابر $\binom{m+1}{r}$ است. پس تعداد کل برآمدهای دارای r گشت برد برابر $\binom{m+1}{r}$ ضرب در تعداد جوابهای صحیح و مثبت $x_1 + \dots + x_r = n$ است. همچنین با توجه به حکم ۶-۱ تعداد برآمدهای شامل r گشت برد برابر $\binom{m+1}{r} \binom{n-1}{r-1}$ است. و چون $\binom{n+m}{n}$ برآمد هم احتمال هستند داریم

$$P(\{r \text{ گشت برد}\}) = \frac{\binom{m+1}{r} \binom{n-1}{r-1}}{\binom{m+n}{n}}, \quad r \geq 1$$

مثلاً اگر $n = 8$ ، $m = 6$ ، آن گاه احتمال r گشت برابر است با

$$\binom{7}{7} \binom{7}{6} / \binom{14}{8} = 1/429$$

در صورتی که تمام $\binom{14}{8}$ برآمد هم احتمال باشند. پس اگر برآمد

WLWLWLWLWWLWLW

باشد باید مضمون باشیم که احتمال برد تیم به مرور زمان تغییر کرده باشد. (بخصوص، احتمال این که تیم ببرد بسیار زیاد است وقتی آخرین بازی را باخته باشد و خیلی کم است وقتی آخرین بازی را برده باشد.) از طرف دیگر اگر برآمد به صورت زیر باشد.

WWWWWWWWLLLLLL

یعنی فقط یک گشت وجود داشته باشد، چون

$$P(\text{یک گشت}) = \binom{7}{1} \binom{7}{0} / \binom{14}{8} = 1/429$$

بازهم به نظر می رسد که احتمال برد تیم در ۱۴ بازی بدون تغییر باقی می ماند.

۶- احتمال یک تابع مجموعه ای پیوسته است

دنباله پیشامدهای $\{E_n, n \geq 1\}$ را دنباله صعودی گوئیم اگر

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$$

و آن را نزولی گوئیم اگر

$$E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \dots$$

اگر $\{E_n, n \geq 1\}$ یک دنباله صعودی از پیشامدها باشد، آن گاه پیشامد جدید $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

که در آن به ازای هر n ، $E_n \subset E_{n+1}$. همین طور، اگر $\{E_n, n \geq 1\}$ دنباله ای نزولی از پیشامدها باشد پیشامد $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$$

که در آن به ازای هر n ، $E_n \supset E_{n+1}$ ،
حال حکم ۱-۶ را ثابت می‌کنیم.

حکم ۱-۶

اگر $\{E_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای صعودی یا نزولی از پیشامدها باشد، آن‌گاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n)$$

پروهان: ابتدا فرض می‌کنیم $\{E_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای صعودی باشد و پیشامدهای F_n ،
 $n \geq 1$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$F_1 = E_1$$

$$F_n = E_n \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \right)^c = E_n E_{n-1}^c \quad n > 1$$

که در آن از تساوی $\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i = E_{n-1}$ استفاده شده است، زیرا پیشامدها صعودی هستند. به عبارت دیگر F_n ها پیشامدهای ناسازگارند، به قسمی که

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad \text{و} \quad \bigcup_{i=1}^n F_i = \bigcup_{i=1}^n E_i$$

پس

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right)$$

$$= \sum_1^{\infty} P(F_i)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n P(F_i)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n)$$

(بنا به اصل ۳)

که حکم را برای دنباله صعودی $\{E_n, n \geq 1\}$ ثابت می کند.
 اگر $\{E_n, n \geq 1\}$ یک دنباله نزولی باشد، آن گاه $\{E_n^c, n \geq 1\}$ یک دنباله صعودی است، بنابراین با توجه به معادلات قبلی داریم

$$P\left(\bigcup_1^{\infty} E_i^c\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n^c)$$

اما چون $\bigcup_1^{\infty} E_i^c = \left(\bigcap_1^{\infty} E_i\right)^c$ دیده می شود که

$$P\left(\left(\bigcap_1^{\infty} E_i\right)^c\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n^c)$$

یا به عبارت معادل،

$$1 - P\left(\bigcap_1^{\infty} E_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - P(E_n)] = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n)$$

یا

$$P\left(\bigcap_1^{\infty} E_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n)$$

که حکم را ثابت می کند.

مثال ۶ الف. احتمال و یک پارادوکس یک جعبه بزرگ و تعداد نامتناهی مهره با شماره های ۱، ۲، ۳، ... مفروض است آزمایش زیر را در نظر بگیرید:

یک دقیقه به ساعت ۱۲ شب مهره های ۱ تا ۱۰ را در جعبه قرار می دهیم و مهره شماره ۱۰ را خارج می کنیم (فرض کنید خارج کردن مهره زمان نمی برد) $\frac{1}{2}$ دقیقه به ۱۲ مهره های شماره ۱۱ تا ۲۰ را در جعبه قرار داده و مهره شماره ۲۰ را خارج می کنیم. $\frac{1}{4}$ دقیقه به ۱۲ مهره های شماره ۲۱ تا ۳۰ را در جعبه قرار داده و مهره شماره ۳۰ را خارج می کنیم. در $\frac{1}{8}$ دقیقه به ۱۲ و الی آخر.

سؤال مورد نظر این است که در ساعت ۱۲ چند مهره داخل جعبه خواهد بود؟

جواب بدیهی مسأله این است که تعداد مهره های داخل جعبه در ساعت ۱۲ بی نهایت خواهد بود، زیرا هر مهره که شماره آن به شکل $n \geq 1, 10n$ نباشد در جعبه قرار می گیرد و قبل از ساعت ۱۲ از آن خارج نمی شود. سپس مسأله به صورت فوق حل می شود.
 با وجود این اگر آزمایش را تغییر دهیم و فرض کنیم در ۱ دقیقه به ۱۲ شب مهره های

شماره ۱ تا ۱۰ در جعبه قرار گیرند و مهره شماره ۱ از آن خارج شود، در $\frac{1}{2}$ دقیقه به ۱۲ مهره های شماره ۱۱ تا ۲۰ در جعبه قرار گیرند و مهره شماره ۲ از آن خارج شود، در $\frac{1}{4}$ دقیقه به ۱۲ مهره های ۲۱ تا ۳۰ در جعبه قرار گیرند و مهره شماره ۳ از آن خارج شود، در $\frac{1}{8}$ دقیقه به ۱۲ مهره های شماره ۳۱ تا ۴۰ در جعبه قرار گیرند و مهره شماره ۴ از آن خارج شود، و الی آخر.

برای این آزمایش جدید در ساعت ۱۲ چند مهره در جعبه خواهد بود؟ با تعجب بسیار، حالا جواب این است که جعبه در ساعت ۱۲ خالی است زیرا هر مهره را که در نظر بگیرید - مثلاً مهره شماره n - در یک فاصله زمانی تا ساعت ۱۲ [بخصوص، در $(\frac{1}{2})^{n-1}$ دقیقه به ۱۲] این مهره از جعبه خارج شده است. پس به ازای هر n ، مهره شماره n در ساعت ۱۲ داخل جعبه نخواهد بود، در نتیجه باید در این ساعت خالی باشد.

از بحث فوق دیده می شود که طرز خارج کردن مهره های انتخابی متفاوت است زیرا در حالت اول تنها مهره های با شماره $n \geq 10$ ، از جعبه خارج می شود، در صورتی که در حالت دوم تمام مهرها بالاخره خارج می شوند. حال فرض کنید وقتی یک مهره خارج می شود انتخاب آن تصادفی باشد. یعنی فرض کنید که در یک دقیقه به ۱۲ مهره شماره ۱ تا ۱۰ در جعبه قرار می گیرند و یک مهره بتصادف از آن خارج می شود، و الی آخر. در این حالت در ساعت ۱۲ چند مهره در جعبه خواهد بود؟

حل: ثابت می کنیم با احتمال ۱، جعبه در ساعت ۱۲ خالی خواهد بود. ابتدا مهره شماره ۱ را در نظر بگیرید. فرض کنید E_n این پیشامد باشد که مهره شماره ۱ بعد از n استخراج هنوز در جعبه باشد. بدیهی است که

$$P(E_n) = \frac{9 \cdot 18 \cdot 27 \cdots (9n)}{10 \cdot 19 \cdot 28 \cdots (9n+1)}$$

[برای روشن شدن این مطلب، توجه کنید که اگر مهره شماره ۱ بعد از n استخراج هنوز در جعبه باشد، اولین مهره خارج شده می تواند هریک از ۹ مهره باشد، دومی هریک از ۱۸ مهره (در موقع استخراج دوم در جعبه ۱۹ مهره وجود دارد که یکی از آنها باید مهره شماره ۱ باشد). و الی آخر. مخرج نیز به همین صورت به دست می آید].

حال این پیشامد که مهره شماره ۱ در ساعت ۱۲ هنوز در جعبه است دقیقاً

عبارت است از $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$. چون پیشامدهای E_n ، $n \geq 1$ ، نزولی هستند از حکم ۶-۱ نتیجه می شود که:

(مهرة شماره ۱ در ساعت ۱۲ داخل جعبه است)

$$\begin{aligned} &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9n}{9n+1}\right) \end{aligned}$$

حال نشان می دهیم که

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{9n}{9n+1} = 0$$

چون

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9n}{9n+1}\right) = \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9n+1}{9n}\right)\right]^{-1}$$

پس کافی است نشان دهیم که

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{9n}\right) = \infty$$

از طرفی برای هر $m \geq 1$ ، داریم

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{9n}\right) &\geq \prod_{n=1}^m \left(1 + \frac{1}{9n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{9}\right) \left(1 + \frac{1}{18}\right) \left(1 + \frac{1}{27}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{9m}\right) \\ &> \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{9m} \\ &= \frac{1}{9} \sum_{i=1}^m \frac{1}{i} \end{aligned}$$

بنابراین اگر $m \rightarrow \infty$ با توجه به $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i = \infty$ داریم

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{9n}\right) = \infty$$

پس اگر F_i این پیشامد باشد که مهره i در ساعت ۱۲ داخل جعبه است، نشان داده ایم که $P(F_i) = 0$. همین طور، می توان نشان داد که به ازای هر i ، $P(F_i) = 0$ (مثلاً، استدلالی مشابه نشان می دهد که برای $i = 11, 12, \dots, 20$ ، $\prod_{n=2}^{\infty} [9n / (9n + 1)]$ ، $i = 11, 12, \dots, 20$ ، $P(\bigcup_i F_i)$ بنا به نامساوی بول در شرط زیر صدق می کند.

$$P\left(\bigcup_i F_i\right) \leq \sum_i P(F_i) = 0$$

[به تمرینهای نظری (بخشهای ۳-۶) و ۳ و ۱۵ مراجعه نمایید] پس با احتمال ۱ جعبه در ساعت ۱۲ خالی خواهد بود.

۷ - احتمال به عنوان میزان باور

تا این جا احتمال یک پیشامد از آزمایشی مفروض به صورت فراوانی رخ دادن این پیشامد وقتی آزمایش مرتباً تکرار شود تعبیر شد. ولی، کلمه **احتمال** یک کاربرد دیگر هم دارد. مثلاً، این قبیل گزاره ها را خیلی شنیده ایم «۹۰ درصد احتمال دارد که هملت را شکسپیر نوشته باشد» یا «احتمال این که اسوالد به تنهایی در قتل کندی شرکت داشته باشد ۰/۸ است» این گزاره ها را چگونه می توان تعبیر کرد؟

ساده ترین و طبیعی ترین تعبیر این است که احتمالها در این گزاره ها به مقدار اعتقاد و باور شخصی بستگی دارد. به عبارت دیگر، فردی که گزاره های فوق را به کار می برد کاملاً مطمئن است که اسوالد به تنهایی حمله کرده است و حتی با اطمینان بیشتر معتقد است که هملت را شکسپیر نوشته است. این تعبیر احتمال به عنوان اندازه ای از باور و اعتقاد را اغلب احتمال شخصی یا ذهنی می نامند.

منطقی است اگر فرض کنیم که یک «اندازه باور» در تمام اصول احتمال صدق می کند. مثلاً، اگر ۷۰ درصد اطمینان داشته باشیم شکسپیر ژولیوس سزار را نوشته و ۱۰ درصد مطمئن

باشیم که کار مارلو است آن گاه منطقی است که فرض کنیم با ۸۰ درصد کار شکسپیر یا مارلو است. بنابراین، چه احتمال را به صورت اندازه باور و چه به صورت فراوانی رخداد پیشامد در درآمدت تعبیر کنیم، خواص ریاضی آن بدون تغییر باقی می ماند.

مثال ۲ الف. فرض کنید در یک مسابقه اسب دوانی که در آن ۷ اسب شرکت دارند شما احساس می کنید دو اسب اول ۲۰ درصد شانس بردن و اسب ۳ و ۴ هریک ۱۵ درصد و ۳ اسب باقیمانده ۱۰ درصد شانس بردن دارند.

آیا برای شما بهتر است که بطور مساوی شرط بندی کنید، که برنده یکی از سه اسب اول است، یا این که برنده یکی از اسبهای ۱، ۵، ۶ و ۷ است؟

حل: بر مبنای احتمالات شخصی در مورد برآمدهای مسابقه، احتمال برد اولین شرط عبارت است از $0/55 = 0/20 + 0/20 + 0/15$ ، در صورتی که احتمال دومین شرط بندی عبارت است از $0/5 = 0/10 + 0/10 + 0/10$ پس شرط بندی اول جذابتر است.

باید توجه کرد وقتی احتمالات ذهنی یک فرد همواره با اصول احتمال سازگارند که او فردی ایده آل باشد. مثلاً اگر از کسی سؤال شود که در باره شانسهایی زیر چه فکر می کند

الف - امروز بیارد

ب - فردا بیارد

پ - امروز و فردا بیارد

ت - امروز یا فردا بیارد

کاملاً امکان دارد که بعد از مقداری بررسی جواب این شخص به صورت ۴۰ درصد، ۲۰ درصد و ۶۰ درصد باشد. ولی متأسفانه این جوابها (یا این احتمالات ذهنی) با اصول احتمال سازگاری ندارند (چرا؟) البته انتظار داریم که بعد از این آگاهی پاسخ دهنده جوابهایش را تغییر دهد.

(یک امکان که آن را می توان پذیرفت عبارت است از ۳۰ درصد، ۴۰ درصد،

۱۰ درصد و ۶۰ درصد)

تمرینهای نظری

بخشهای ۱-۲

روابط زیر را ثابت کنید

$$EF \subset E \subset E \cup F. \quad -۱$$

$$E \subset F, \rightarrow F^c \subset E^c. \quad -۲$$

$$F = FE \cup FE^c, \text{ و } E \cup F = E \cup E^c F. \quad -۳$$

$$\left(\bigcup_i E_i \right) F = \bigcup_i E_i F, \text{ و } \left(\bigcap_i E_i \right) \cup F = \bigcap_i (E_i \cup F). \quad -۴$$

۵- برای هر دنباله از پیشامدهای E_1, E_2, \dots دنباله جدید F_1 و F_2 و ... از پیشامدهای

ناسازگار (یعنی پیشامدهایی که $F_i F_j = \emptyset$ وقتی $i \neq j$) را به قسمی تعریف کنید که برای

هر $n \geq 1$

$$\bigcup_1^n F_i = \bigcup_1^n E_i$$

۶- فرض کنید E, F, G سه پیشامد باشند. عبارت پیشامدهای زیر را بر حسب E, F, G بیان کنید:

(الف) فقط E رخ دهد.

(ب) E و G رخ دهند ولی F رخ ندهد.

(پ) حداقل یکی از آنها رخ دهد.

(ت) حداقل دو تا از آنها رخ دهند.

(ث) هر سه رخ دهند.

(ج) هیچ کدام رخ ندهد.

(چ) حداکثر یکی از آنها رخ دهد.

(ح) حداکثر دو تا از آنها رخ دهد.

(خ) دقیقاً دو تا از آنها رخ دهد.

(د) حداکثر سه تا از آنها رخ دهد.

۷- عبارت ساده پیشامدهای زیر را پیدا کنید.

$$\begin{aligned} & (E \cup F)(E \cup F^c); \\ & (E \cup F)(E^c \cup F)(E \cup F^c); \\ & (E \cup F)(F \cup G). \end{aligned}$$

۸- فرض کنید S مجموعه مفروضی باشد. اگر برای $k > 0$ ، S_1, S_2, \dots, S_k زیرمجموعه‌های جدا از هم S باشند به قسمی که $\bigcup_{i=1}^k S_i = S$ ، آن‌گاه مجموعه $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ را یک افراز S گویند. فرض کنید T_n تعداد افرازهای مختلف $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد، در این صورت $T_1=1$ (تنها افراز عبارت است از $\{1\}$) و $T_2=2$ (دو افراز عبارتند از $\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$)

(الف) با محاسبه تمام افرازها نشان دهید که $T_3 = 5$ ، $T_4 = 15$.

(ب) ثابت کنید که

$$T_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} T_k$$

با استفاده از این مقدار T_{10} را محاسبه کنید.

بشنگهای ۳-۶

۱- فرض کنید آزمایشی n بار اجرا می‌شود. برای هر پیشامد E از فضای نمونه $n(E)$ تعداد دفعاتی است که پیشامد E رخ می‌دهد، و تعریف می‌کنیم $f(E) = \frac{n(E)}{n}$. ثابت کنید $f(0)$ در اصول ۱، ۲ و ۳ صدق می‌کنند.

۲- ثابت کنید

$$P(E \cup F \cup G) = P(E) + P(F) + P(G) - P(E^c F G) - P(E F^c G) - P(E F G^c) - 2P(E F G).$$

۳- نامساوی بول را ثابت کنید

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(E_i)$$

۴- اگر $P(E)=0.9$ ، $P(F)=0.8$ ، نشان دهید که $P(EF) \geq 0.7$. بطور کلی نامساوی بن فرونی را ثابت کنید، یعنی

$$P(EF) \geq P(E) + P(F) - 1$$

۵- نشان دهید احتمال این که دقیقاً یکی از دو پیشامد E یا F رخ دهد برابر است با

$$P(E) + P(F) - 2P(EF)$$

۶- ثابت کنید

$$P(EF^c) = P(E) - P(EF)$$

۷- ثابت کنید

$$P(E^c F^c) = 1 - P(E) - P(F) + P(EF)$$

۸- حکم ۴-۴ را ثابت کنید.

۹- جعبه ای دارای M مهره سفید و N مهره سیاه است. اگر یک نمونه تصادفی به حجم r انتخاب کنیم، احتمال این که شامل k مهره سفید باشد چقدر است؟ اگر $M = k = 1$ ، چقدر است؟

۱۰- نا مساوی بن فرونی را باستقرا برای n پیشامد ثابت کنید یعنی نشان دهید که

$$P(E_1 E_2 \cdots E_n) \geq P(E_1) + \cdots + P(E_n) - (n - 1)$$

۱۱- مسأله جور کردن مشال ۵ ج را در نظر بگیرید. و A_N را برابر تعداد حالاتی که N مرد می توانند کلاههایشان را انتخاب کنند به قسمی که هیچ کدام کلاه خود را انتخاب نکنند تعریف می کنیم. ثابت کنید

$$A_N = (N - 1)(A_{N-1} + A_{N-2})$$

این رابطه را با شرایط مرزی $A_1 = 0$ و $A_2 = 1$ می توان نسبت به A_N حل کرد و احتمال این که هیچ کدام جور نشود برابر $\frac{A_N}{N!}$ خواهد بود.

راهنمایی: بعد از این که اولین مرد یک کلاه انتخاب کند که از خودش نباشد، $N-1$ مرد باقیمانده از بین $N-1$ کلاه باقیمانده که کلاه یکی از آنها را شامل نمی شود باید انتخاب کنند پس یک مرد و یک کلاه اضافی وجود دارد. حال استدلال کنید که انتخابها جور نمی شود خواه مرد اضافی کلاه اضافی را انتخاب کند یا مرد اضافی کلاه اضافی را انتخاب نکند.

۱۲- فرض کنید f_n تعداد حالاتی باشد که در n پرتاب یک سکه شیرهای متوالی ظاهر نشده است. تحقیق کنید که

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad n \geq 2, \quad \text{و} \quad f_0 \equiv 1, f_1 \equiv 2$$

اگر P_n احتمال این باشد که شیرهای متوالی هرگز در n پرتاب ظاهر نشود، مقدار P_n (برحسب f_n) را وقتی تمام برآمدهای ممکن n پرتاب هم احتمال هستند حساب کنید. P_{10} را محاسبه کنید:

$$P_{10} = 144/2^{10} = .141. \quad \text{جواب:}$$

۱۳- آزمایشی را در نظر بگیرید که فضای نمونه آن بی نهایت نقطه شما را باشد. نشان دهید که تمام نقاط فضای نمونه نمی توانند هم احتمال باشند. آیا احتمال رخ دادن تمام نقاط می تواند مثبت باشد؟

۱۴- مثال ۵ را در ارتباط با تعداد گشتهای برد در n برد و m باخت که بطور تصادفی قرار دارند در نظر بگیرید. حال مجموعه تمام گشتهای را مورد توجه قرار دهید یعنی گشتهای برد به اضافه گشتهای باخت - و ثابت کنید که

$$P\{\text{کنت} \geq k\} = 2 \frac{\binom{m-1}{k-1} \binom{n-1}{k-1}}{\binom{m+n}{n}}$$

$$P\{\text{کنت} \geq k+1\} = \frac{\binom{m-1}{k-1} \binom{n-1}{k} + \binom{m-1}{k} \binom{n-1}{k-1}}{\binom{m+n}{n}}$$

۱۵- با استفاده از نامساوی بول برای تعداد متناهی پیشامد، نشان دهید برای هر دنباله نامتناهی از پیشامدهای E_i ، $i \geq 1$ ،

$$P\left(\bigcup_1^{\infty} E_i\right) \leq \sum_1^{\infty} P(E_i)$$

۱۶- ثابت کنید اگر $P(E_i) = 1$ ، $i \geq 1$ ، آن گاه $P\left(\bigcap_1^{\infty} E_i\right) = 1$.

۱۷- برای دنباله ای از پیشامدهای E_i ، $i \geq 1$ ، پیشامد جدید $\limsup E_i$ را به صورت مجموعه تمام برآمدهایی که در بینهایت E_i ، $i \geq 1$ ، وجود دارند تعریف می کنیم. نشان دهید که

$$\limsup_i E_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i$$

۱۸- نشان دهید که اگر $\sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) < \infty$ ، آن گاه $P(\limsup_i E_i) = 0$. این یک نتیجه مهم

است و بیان می کند که اگر $\sum_1^{\infty} P(E_i) < \infty$ ، آن گاه احتمال این که تعداد بی نهایت E_i رخ دهد برابر 0 است.

راهنمایی: از نامساوی زیر استفاده کنید

$$\limsup_i E_i \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i \subset \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i$$

مسائل

بخشهای ۱-۲

۱- در جعبه ای ۳ مهره است: ۱ قرمز، ۱ سبز و ۱ آبی. آزمایشی عبارت است از بیرون آوردن یک مهره از جعبه و سپس قراردادن آن در جعبه و استخراج مهره دوم از آن، فضای نمونه را مشخص کنید. بدون جایگزاری مهره اول، مسأله را حل کنید.

۲- تاسی را پی در پی می اندازیم تا ۶ بیاید، در چه نقطه ای آزمایش متوقف می شود؟ فضای نمونه این آزمایش چیست؟ اگر E_n این پیشامد باشد که برای تکمیل آزمایش لازم است تاس n بار پرتاب شود، چه نقاطی از فضای نمونه در E_n خواهند بود؟ پیشامد $\left(\bigcup_1^{\infty} E_n\right)^c$ چیست؟

۳- دو تاس را می اندازیم. اگر E پیشامد مجموع دو تاس فرد و F پیشامد حداقل یکی از تاسها ۱ و G پیشامد مجموع ۵ باشد، پیشامدهای EF ، $E \cup F$ ، FG ، E^c و EFG را توصیف کنید.

۴- A و B و C سکه ای را پرتاب می کنند. اولین کسی که شیر بیاورد برنده خواهد بود. فضای نمونه این آزمایش را می توان به صورت زیر تعریف کرد.

$$S = \{1, 01, 001, 0001, \dots, 0000\dots\}$$

(الف) فضای نمونه را تعییر کنید .

(ب) پیشامدهای زیر را بر حسب S تعریف کنید .

$$A = \text{برنده شود} \quad (i)$$

$$B = \text{برنده شود} \quad (ii)$$

$$(A \cup B)^c \quad (iii)$$

فرض کنید ابتدا A سکه را پرتاب می کند سپس B و از آخر C و به همین ترتیب الی آخر .

بخشهای ۳-۶

۱- شهری با جمعیت ۱۰۰۰۰۰ نفر دارای ۳ روزنامه است : I و II و III . نسبت اشخاصی که این روزنامه ها را می خوانند به قرار زیر است :

$$I : 10 \text{ درصد} , \quad I \text{ و } II : 8 \text{ درصد} , \quad I \text{ و } II \text{ و } III : 1 \text{ درصد}$$

$$II : 30 \text{ درصد} , \quad I \text{ و } III : 2 \text{ درصد}$$

$$III : 5 \text{ درصد} , \quad II \text{ و } III : 4 \text{ درصد}$$

(این فهرست به عنوان مثال فرض می کند که ۸۰۰۰ نفر روزنامه I و II را می خوانند)

(الف) تعداد افرادی را پیدا کنید که فقط یک روزنامه را می خوانند .

(ب) چند نفر حداقل دو روزنامه را می خوانند .

(ج) اگر I و III روزنامه صبح و II روزنامه عصر باشد، چند نفر حداقل یک روزنامه صبح و یک روزنامه عصر را می خوانند؟

(ت) چند نفر فقط یک روزنامه صبح و یک روزنامه عصر را می خوانند؟

۲- داده های زیر از مطالعه یک گروه ۱۰۰۰ نفری از مشترکین یک مجله به دست آمده است :

در ارتباط با جنسیت، وضع تاهل و تحصیلات، در این داده ها ۳۱۲ مرد، ۴۷۰ متأهل ۵۲۵ فارغ التحصیل دانشکده، ۴۲ مرد فارغ التحصیل دانشکده، ۱۴۲ متأهل فارغ التحصیل دانشکده، ۸۶ مرد متأهل و ۲۵ مرد متأهل فارغ التحصیل وجود داشت . نشان دهید که تعداد گزارش داده شده باید اشتباه باشد .

راهنمایی : فرض کنید M، W و G به ترتیب مجموعه مردان، متاهلان و فارغ التحصیلان

- دانشکده باشد. از ۱۰۰۰ نفر یکی را بتصادف انتخاب کرده و با استفاده از حکم ۴-۴ نشان دهید که اگر اعداد فوق صحیح باشند، آن گاه $P(M \cup W \cup G) > 1$.
- ۳- یک دست ورق بازی توزیع می شود. احتمال آن که چهاردهمین ورق توزیع شده آس باشد چقدر است؟ احتمال این که اولین آس چهاردهمین ورق توزیع شده باشد چقدر است؟
- ۴- اگر فرض کنیم $\binom{52}{5}$ دست پوکر هم احتمال باشد. احتمال هریک از توزیعهای زیر چقدر است:

- (الف) یک فلش؟ (یک دست را فلش گوئیم اگر ۵ ورق آن همه از یک خال باشند).
- (ب) یک جفت؟ (یعنی ورقها به صورت a و a و b و c و d باشد به قسمتی که a و b و c و d همه متمایز باشند).
- (پ) دو جفت؟ (یعنی ورقها به صورت a و a و b و b و c باشد به قسمتی که a و b و c متمایز باشند).
- (ت) سه ورق از یک خال؟ (یعنی ورقها به صورت a و a و a و b و c باشد به قسمتی که متمایز باشند).
- (ث) چهار ورق مشابه؟ (یعنی ورقها به صورت a و a و a و a و b باشد).

۵- بازی پوکر با تاس عبارت است از ریختن ۵ تاس باهم. نشان دهید که

$$P(\text{هیچ دو تا مساوی نباشند}) = 0,0926$$

$$P(\text{یک جفت}) = 0,463$$

$$P(\text{دو جفت}) = 0,2315$$

$$P(\text{سه تا مساوی}) = 0,1543$$

$$P(\text{فول}) = 0,0386$$

$$P(\text{چهار تا مساوی}) = 0,0192$$

$$P(\text{۵ تا مساوی}) = 0,0008$$

۶- اگر ۸ رخ بتصادف روی صفحه شطرنج گذاشته شود مطلوب است احتمال آن که هیچ کدام از آنها دیگری را نگیرد. یعنی احتمال این که هیچ سطر یا ردیف بیش از یک رخ نداشته باشد.

۷- دو ورق بتصادف از یک دست ورق پوکر انتخاب می شود. احتمال این که یک ورق آس و دیگری یکی از ورقهای ده، سر باز، بی بی یا شاه باشد چقدر است؟

۸- اگر دو تاس ریخته شوند، احتمال آن که مجموع آنها برابر i شود چقدر است؟ آن را برای $i = 2, 3, \dots, 12$ محاسبه کنید.

۹- دو تاس ریخته می شوند تا مجموع آنها ۵ یا ۷ شود. مطلوب است احتمال آن که ۵ اول رخ دهد. راهنمایی: فرض کنید E_n این پیشامد باشد که یک ۵ در ریختن n ام رخ داده است و در $n-1$ ریختن قبل هیچ ۵ یا ۷ رخ نداده است. احتمال $P(E_n)$ را محاسبه کرده و نشان دهید که احتمال مطلوب برابر $\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$ است.

۱۰- یک بازی با تاس به صورت زیر است:

یکی از بازیکنها دو تاس را می ریزد. اگر مجموع تاسها ۲، ۳ یا ۱۲ شود بازی را می بازد؛ اگر مجموع ۷ یا ۱۱ شود بازی را می برد. اگر برآمد چیز دیگری شود بازیکن تاسها را می ریزد تا برآمد نخستین یا یک ۷ به دست آید. اگر اول ۷ به دست آید بازنده خواهد بود ولی اگر برآمد نخست قبل از ۷ دوباره رخ دهد بازیکن برنده است. احتمال برد بازیکن را در این بازی محاسبه کنید.

راهنمایی: فرض کنید E_i این پیشامد باشد که برآمد نخست i است و بازیکن برنده شده است. احتمال مطلوب عبارت است از $\sum_{i=2}^{12} P(E_i)$. برای محاسبه $P(E_i)$ پیشامدهای $E_{i,n}$ را به صورت پیشامد مجموع نخست i و بازیکن در ریختن n ام برنده شده است تعریف کنید. ثابت کنید $P(E_i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_{i,n})$

۱۱- جعبه ای دارای ۳ مهره قرمز و ۷ مهره سیاه است. بازیکن A و B متوالیاً از این جعبه مهره ای خارج می کنند تا یک مهره قرمز انتخاب شود. مطلوب است احتمال آن که A مهره قرمز را انتخاب کند. (A مهره اول را خارج می کند و سپس B والی آخر، و انتخاب مهره ها بدون جایگذاری صورت می گیرد).

۱۲- جعبه ای دارای ۵ مهره قرمز و ۶ مهره آبی و ۸ مهره سبز است. اگر ۳ مهره بتصادف انتخاب کنیم، احتمال آن که هم رنگ باشند چقدر است؟ با رنگهای مختلف باشند چقدر است؟ مسأله را تکرار کنید با این فرض که پس از خارج شدن مهره اول رنگ آن را ثبت کرده و آن را قبل از استخراج مهره دوم در جعبه قرار می دهیم. این عمل را نمونه گیری با جایگذاری گوئیم.

۱۳- جعبه A دارای ۳ مهره قرمز و ۳ مهره سیاه است و جعبه B دارای ۴ مهره قرمز و ۶ مهره

- سیاه است. اگر مهره‌ای بتصادف از هر جعبه انتخاب شود، احتمال آن که مهره‌ها هم‌رنگ باشند چقدر است؟
- ۱۴- در یک بازی بسکتبال سه نفره، یک نفر گارد یک نفر فوروارد و یک نفر سانتر است. اگر یک نفر بتصادف از هر یک از سه تیم انتخاب شود، احتمال آن که یک تیم کامل تشکیل دهند چقدر است؟ احتمال آن که هر سه یک نقش داشته باشند چقدر است؟
- ۱۵- گروهی از b پسر و g دختر بطور تصادفی در یک صف قرار می‌گیرند. یعنی فرض می‌کنیم $(b + g)!$ جایگشت هم احتمال هستند. احتمال این که نفر i ام $1 \leq i \leq b + g$ دختر باشد چقدر است؟
- ۱۶- در جنگلی ۲۰ گوزن وجود دارد، که از آنها ۵ تا گرفته شده پس از علامت گذاری رها می‌شوند. بعد از مدتی ۴ گوزن از ۲۰ گوزن گرفته می‌شود. احتمال این که دو گوزن گرفته شده علامت دار باشند چقدر است؟ چه فرضهایی را در نظر می‌گیرید.
- ۱۷- شهری ۵ هتل دارد. اگر ۳ نفر در یک روز به هتل بروند احتمال این که هر کدام در یک هتل ساکن شده باشند چقدر است؟ چه فرضهایی را در نظر می‌گیرید.
- ۱۸- شهری دارای ۴ تعمیرگاه تلویزیون است. اگر ۴ تلویزیون خراب شود، احتمال این که دقیقاً i تعمیرگاه مورد استفاده قرار گیرد چقدر است؟ مسأله را برای 4 و 3 و 2 و $1 = i$ حل کنید. چه فرضهایی را در نظر می‌گیرید.
- ۱۹- اگر تاسی را ۴ بار بیندازیم، احتمال این که ۶ حداقل یک بار بیاید چقدر است؟
- ۲۰- دو تاس را n بار می‌اندازیم. احتمال حداقل یک جفت شش را محاسبه کنید. n باید به چه بزرگی باشد تا این احتمال حداقل $\frac{1}{4}$ شود؟
- ۲۱- اگر N نفر که A و B نیز جزء آنها هستند بطور تصادفی در یک صف مرتب شوند احتمال این که A و B پهلوی هم قرار گیرند چقدر است؟ اگر دور یک میز گرد بنشینند این احتمال چقدر است؟
- ۲۲- از گروهی شامل ۳ دانش‌آموز دبستانی، ۴ دانش‌آموز راهنمایی و ۴ دبیرستانی و ۳ دانشگاهی یک کمیته ۴ نفری بتصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که کمیته شامل (الف) یک نفر از هر کلاس باشد. (ب) ۲ دانش‌آموز راهنمایی و ۲ دانش‌آموز دبیرستانی باشد و (پ) فقط دانش‌آموزان راهنمایی و دبیرستانی باشند چقدر است؟
- ۲۳- زنی n کلید دارد، که از آنها یکی در را باز می‌کند. اگر کلیدها را بتصادف امتحان کند، و

- کلیدهایی که در را باز نمی کنند کنار بگذارد، احتمال این که در را با کلید k ام باز کند چقدر است؟ اگر کلیدها را کنار نگذارد این احتمال چقدر خواهد بود؟
- ۲۴- ۲۰ نفر را در نظر بگیرید، احتمال این که در ۱۲ ماه سال ۴ ماه دقیقاً شامل ۲ روز تولد و ۴ ماه دیگر شامل ۳ روز تولد باشد چقدر است؟
- ۲۵- یک گروه شامل ۶ مرد و ۶ زن بطور تصادفی به دو گروه ۶ نفری تقسیم می شوند احتمال این که تعداد مردان هر دو گروه یکسان باشند چقدر است؟
- ۲۶- در یک دست بریج، احتمال آن که شما ۵ خاج و طرف مقابل ۸ خاج باقیمانده را داشته باشد چقدر است؟
- ۲۷- فرض کنید n مهره بتصادف در N محل توزیع می شود. مطلوب است احتمال این که m مهره در محل اول قرار گیرد. فرض کنید تمام N^n ترتیب هم احتمال هستند.
- ۲۸- در گنجه ای ۱۰ جفت کفش قرار دارد. اگر ۸ جفت بتصادف انتخاب شود احتمال این که سه کفش آن (الف) جفت نباشد و (ب) دقیقاً یک جفت باشد چقدر است؟
- ۲۹- یک تیم بسکتبال از ۶ بازیکن سیاه و ۴ سفید تشکیل شده است. اگر بازیکنها بطور تصادفی به صورت هم اتاقی تقسیم شوند. مطلوب است احتمال آن که ۲ جفت سیاه و سفید هم اتاقی باشند.
- ۳۰- اگر ۴ زوج متأهل در یک ردیف قرار گیرند، مطلوب است احتمال آن که هیچ شوهری پهلوی همسرش قرار نگیرد.
- ۳۱- مطلوب است احتمال آن که یک دست بریج حداقل فاقد یک خال باشد. توجه کنید که جواب به صورت زیر نیست

$$\frac{\binom{4}{1} \binom{39}{13}}{\binom{52}{13}} \quad (\text{چرا؟})$$

راهنمایی : از حکم ۴-۴ استفاده کنید.

- ۳۲- مطلوب است احتمال این که یک دست ۱۳ تایی (الف) شامل یک آس و یک شاه از یک خال باشد، (ب) حداقل شامل یک ۴ تایی از ۱۳ نوع ورق باشد.

فصل سوم

احتمال شرطی و استقلال

۱ - مقدمه

در این فصل یکی از مهمترین مفاهیم نظریهٔ احتمال یعنی احتمال شرطی را معرفی می‌کنیم. این مفهوم از دو جهت با اهمیت است. اول این که، غالباً به محاسبهٔ احتمالهایی علاقه‌مندیم که پاره‌ای اطلاعات مربوط به نتیجهٔ آزمایش، در دسترس است، در چنین وضعیتی احتمالهای مطلوب، احتمالهای شرطی اند. دوم این که، حتی هنگامی که دسترسی به هیچ‌گونه اطلاعات نسبی نداریم، اغلب استفاده از احتمالهای شرطی به عنوان ابزار، به ما امکان می‌دهد، احتمالهای مورد نظر را ساده‌تر محاسبه کنیم.

۲ - احتمالهای شرطی

دو تاس را می‌ریزیم و فرض می‌کنیم که هریک از ۳۶ برآمد ممکن با احتمال مساوی رخ دهد و بنابراین احتمال هریک از آنها $\frac{1}{36}$ است. به علاوه فرض کنید که مشاهده شود تاس اول دارای ۳ است. اکنون با معلوم بودن این مطلب، احتمال این که مجموع دو تاس برابر ۸ باشد، چیست؟ برای محاسبهٔ این احتمال به طریق زیر استدلال می‌کنیم: با فرض این که تاس اول ۳ باشد، آزمایش مورد بحث حداکثر دارای ۶ برآمد ممکن (۱ و ۳)، (۳ و ۳)، (۳ و ۴)، (۳ و ۵) است. چون هریک از این برآمدها در اصل دارای احتمال یکسانند، این

برآمدها هم احتمال هستند، یعنی، با دانستن این که تاس اول برابر ۳ است، احتمال شرطی هریک از برآمدهای (۳ و ۱)، (۳ و ۲)، (۳ و ۳)، (۳ و ۴)، (۳ و ۵) و (۳ و ۶) برابر $\frac{1}{6}$ است، در صورتی که احتمال (شرطی) ۳۰ نقطه دیگر در فضای نمونه صفر است. بنابراین احتمال مورد نظر $\frac{1}{6}$ است.

اگر E و F به ترتیب پیشامدهای مجموع خالهای دو تاس برابر ۸ و تاس اول برابر ۳ را نمایش دهند، احتمالی را که در بالا به دست آمد، احتمال شرطی این که «E رخ دهد در صورتی که F رخ داده است» می نامند و با

$$P(E|F)$$

نشان داده می شود.

فرمول کلی برای $P(E|F)$ که برای کلیه پیشامدهای E و F معتبر است به طریقی مشابه حاصل می شود: اگر پیشامد F رخ بدهد، آن گاه برای این که E رخ دهد لازم است که برآمد واقعی نقطه ای در E و F یعنی در EF باشد. اکنون، با علم به این که F رخ داده است، نتیجه می شود که F فضای نمونه جدید ما کاهش یافته است، بنابراین، احتمال این که پیشامد E|F رخ دهد برابر است با احتمال EF نسبت به احتمال F. یعنی تعریف زیر را داریم

تعریف

اگر $P(F) > 0$ ، آن گاه

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} \quad (1-2)$$

مثال ۲ الف. سکه ای را دوبار پرتاب می کنیم. اگر فرض کنیم که هر چهار نقطه در فضای نمونه $S = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$ دارای احتمال برابرند، احتمال شرطی این که در هر دو پرتاب شیر ظاهر شود، در صورتی که می دانیم پرتاب اول شیر بوده است چقدر است؟

حل: اگر $E = \{(H,H)\}$ پیشامد هر دو پرتاب شیر و $F = \{(H,H), (H,T)\}$ پیشامد پرتاب اول شیر باشد، در این صورت احتمال مطلوب عبارت است از

$$\begin{aligned} P(E|F) &= \frac{P(EF)}{P(F)} \\ &= \frac{P(\{(H, H)\})}{P(\{(H, H), (H, T)\})} \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

مثال ۲ ب - کیسه‌ای محتوی ۱۰ مهره سفید، ۵ مهره زرد و ۱۰ مهره سیاه است. مهره‌ای بتصادف از کیسه انتخاب شده و مشاهده می‌شود که این مهره سیاه نیست. احتمال این که مهره زرد باشد چقدر است.

حل: فرض کنید Y پشامد زرد بودن و B^c پشامد سیاه نبودن مهره انتخاب شده باشد. از معادله (۲-۱) داریم.

$$P(Y|B^c) = \frac{P(YB^c)}{P(B^c)}$$

با وجود این، $YB^c = Y$ ، زیرا این مهره زرد است و سیاه نیست اگر فقط اگر زرد باشد. بنابراین، با این فرض که انتخاب هریک از ۲۵ مهره دارای شانس برابر باشد، داریم

$$P(Y|B^c) = \frac{\frac{5}{25}}{\frac{15}{25}} = \frac{1}{3}$$

باید توجه داشت که این احتمال را می‌توانستیم با در نظر گرفتن فضای نمونه کاهش یافته به دست آوریم یعنی، در صورتی که می‌دانیم مهره منتخب سیاه نیست، این مسأله به محاسبه این احتمال که «یک مهره که بتصادف از یک کیسه شامل ۱۰ مهره سفید و ۵ مهره زرد بیرون کشیده می‌شود زرد باشد» تبدیل می‌شود که بروشنی برابر $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$ است.

وقتی که کلیه پشامدهای ساده را هم احتمال فرض می‌کنیم، غالباً محاسبه یک احتمال شرطی با در نظر گرفتن نمونه کاهش یافته ساده‌تر از کاربرد مستقیم (۲-۱) است.

مثال ۲ ب. در بازی بریج، ۵۲ کارت بطور مساوی بین ۴ بازیکن موسوم به شرق، غرب، شمال و جنوب تقسیم می‌شود. اگر شمال و جنوب بین کارتهایشان کلاً ۸ پیک داشته باشند، احتمال این که شرق، ۳ پیک از ۵ پیک باقیمانده را دارا باشد چقدر است؟

حل: ساده‌ترین راه برای حل این مسأله احتمالاً استفاده از فضای نمونه کاهش یافته

است. یعنی با دانستن این که شمال - جنوب بین ۲۶ کارت خود کلاً ۸ پیک دارند، ۲۶ کارت باقی می ماند که دقیقاً ۵ عدد از آنها پیک است که باید بین شرق و غرب توزیع شود. چون هر توزیع هم احتمال است، لذا این احتمال شرطی که شرق دقیقاً ۳ پیک بین ۱۳ کارت خودش داشته باشد برابر است با

$$\frac{\binom{5}{3} \binom{21}{10}}{\binom{26}{13}} = .339$$

مثال ۲ ت: مؤسسه ای که آقای حامد در آن کار می کند یک مهمانی شام پدر - پسر، برای کارمندانی که حداقل یک فرزند پسر دارند ترتیب داده است. هریک از این کارمندان به همراه پسر ارشدشان برای شرکت در مهمانی دعوت شده اند. اگر بدانیم که حامد دارای دو فرزند است، احتمال شرطی این که هر دو پسر باشند، در صورتی که می دانیم آقای حامد به مهمانی دعوت شده است چقدر است؟ فرض کنید فضای نمونه با $S = \{(b,b), (b,g), (g,b), (g,g)\}$ داده شده است و کلیه پیشامدهای ساده هم احتمال اند [مثلاً (b, g) به این معناست که فرزند بزرگتر پسر و فرزند کوچکتر دختر است].

حل: دانستن این که حامد به مهمانی شام دعوت شده است هم ارز با این است که وی حداقل یک پسر دارد. بنابراین، اگر E پیشامدی را که هر دو فرزند پسرند و F پیشامدی را که لااقل یکی از آنها پسر است نمایش دهند، احتمال مطلوب $P(E|F)$ از رابطه زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} P(E|F) &= \frac{P(EF)}{P(F)} \\ &= \frac{P(\{(b, b)\})}{P(\{(b, b), (b, g), (g, b)\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

بسیاری از خوانندگان بغلط استدلال می کنند که این احتمال شرطی دو پسر برابر $\frac{1}{4}$ است، در صورتی که احتمال صحیح آن $\frac{1}{3}$ است، زیرا دلیل این گروه آن است که آن فرزند آقای حامد که در مهمانی شرکت نکرده است با احتمال مساوی پسر یا دختر است. زیرا در ابتدا ۴ برآمد هم احتمال وجود داشت. اکنون، آگاهی از این که حداقل یک فرزند پسر است با دانستن این که این برآمد (g, g) نیست هم ارز است. بنابراین برای ماسه برآمد هم احتمال $(g, b), (b, g), (b, b)$ باقی می ماند که نشان می دهد این فرزند حامد که در مهمانی شرکت

نمی‌کند احتمال دختر بودنش دو برابر پسر بودن است.

اگر هر دو طرف معادله (۲-۲) را در $P(F)$ ضرب کنیم، حاصل می‌شود.

$$P(EF) = P(F)P(E|F) \quad (2-2)$$

معادله (۲-۲) بیانگر آن است که احتمال رویداد E و F برابر احتمال رویداد F ضرب در احتمال شرطی E در صورتی که می‌دانیم F رخ داده است می‌باشد. معادله (۲-۲) غالباً در محاسبه احتمال اشتراك پیشامدها بسیار مفید است.

مثال ۴ ث. مریم در این که درس فرانسه یا درس شیمی را انتخاب کند تردید دارد.

با وجودی که وی شیمی را ترجیح می‌دهد ولی در ارزیابی که دارد احتمال گرفتن نمره (آ) در درس فرانسه را $\frac{1}{4}$ و در درس شیمی را تنها $\frac{1}{6}$ می‌داند. اگر مریم تصمیم خود را بر اساس پرتاب یک سکه سالم بگیرد، احتمال این که وی در درس شیمی نمره (آ) بگیرد چقدر است؟

حل: اگر فرض کنیم C پیشامدی که مریم شیمی را انتخاب کند و A پیشامدی که وی از هر درسی انتخاب کرده است نمره (آ) بگیرد را نشان می‌دهند، آن گاه احتمال مطلوب برابر $P(CA)$ است. این احتمال با استفاده از معادله (۲-۲) به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$P(CA) = P(C)P(A|C) \\ = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}$$

مثال ۴ ج. فرض کنید کیسه ای شامل ۸ گلوله قرمز و ۴ گلوله سفید است. دو گلوله بدون جایگذاری از کیسه بیرون می‌آوریم. اگر در هر استخراج احتمال انتخاب شدن هر گلوله در کیسه برابر باشد، احتمال این که هر دو گلوله استخراج شده قرمز باشند چقدر است؟

حل: فرض کنید R_1 و R_2 به ترتیب پیشامدهایی را که گلوله اول و دوم استخراج شده قرمز است نمایش می‌دهد. اکنون با دانستن این که گلوله اول استخراج شده قرمز است، پس گلوله های باقیمانده در کیسه ۷ قرمز و ۴ سفید است و بنابراین $P(R_2|R_1) = \frac{7}{11}$. چون واضح است که $P(R_1) = \frac{8}{12}$ ، احتمال مطلوب عبارت است از

$$P(R_1R_2) = P(R_1)P(R_2|R_1) \\ = \left(\frac{8}{12}\right)\left(\frac{7}{11}\right) = \frac{14}{33}$$

واضح است که این احتمال را می توانستیم از

$$P(R_1 R_2) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}}$$

محاسبه کنیم.

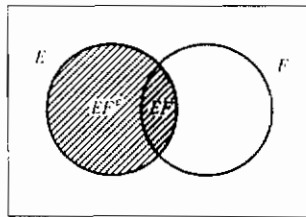
۳- فرمول ییز

فرض کنید E و F دو پیشامد باشند، E را می توان به صورت زیر نوشت

$$E = EF \cup EF^c$$

پس برای این که نقطه ای در E باشد، این نقطه یا باید هم در E و هم در F باشد یا در E بوده ولی در F نباشد. (شکل ۱-۳ را ببینید). چون EF و EF^c دو به دو ناسازگارند، بنابراین موضوع (۳) داریم

$$\begin{aligned} P(E) &= P(EF) + P(EF^c) \\ &= P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c) \\ &= P(E|F)P(F) + P(E|F^c)[1 - P(F)]. \end{aligned} \quad (1-3)$$



شکل ۱-۳ $E = EF \cup EF^c$. EF ناحیه سایه خورده پر رنگ EF^c = ناحیه سایه خورده

معادله (۱-۳) بیانگر آن است که احتمال پیشامد E برابر است با میانگین موزون احتمالی شرطی در صورتی که می دانیم رخ داده است و احتمال شرطی E با فرض این که F رخ نداده است. هر احتمال شرطی به اندازه احتمال پیشامدی که به آن مشروط شده است وزن داده شده است. این فرمول بسیار سودمند است زیرا با استفاده از آن می توانیم احتمال یک پیشامد را ابتدا با

مشروط کردن آن بر رخ دادن یا رخ ندادن یک پیشامد تعیین کنیم. یعنی موارد زیادی وجود دارد که محاسبه مستقیم احتمال یک پیشامد دشوار است، در صورتی که اگر بدانیم پیشامد معین دومی رخ داده یا نداده است محاسبه آن ساده است، با چند مثال آن را توضیح می دهیم.

مثال ۳ الف. (قسمت ۱). شرکت بیمه ای بر این باور است که افراد را می توان به دو گروه تقسیم کرد: گروهی که مستعد تصادف اند و گروهی که نیستند. آمارهای این شرکت نشان می دهد که یک فرد مستعد تصادف، با احتمال 0.4 تصادفی در زمان معینی در ظرف یک دوره یک ساله معین خواهد داشت، در صورتی که این احتمال برای یک فرد فاقد این استعداد به 0.2 کاهش می یابد. اگر فرض کنیم که 30% درصد جامعه ای مستعد تصادف است، احتمال این که بیمه گذار جدیدی در ظرف مدت یک سال از قرار داد بیمه، یک تصادف داشته باشد چقدر است؟

حل: احتمال مطلوب را ابتدا با شرط این که آیا بیمه گذار مستعد تصادف است یا خیر، به دست می آوریم. فرض کنید A_1 پیشامدی را که بیمه گذار در ظرف یک سال از خرید یک تصادف داشته باشد و A پیشامدی را که بیمه گذار مستعد تصادف است نشان دهد، در این صورت احتمال مطلوب $P(A_1)$ عبارت است از

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A_1|A)P(A) + P(A_1|A^c)P(A^c) \\ &= (.4)(.3) + (.2)(.7) = .26 \end{aligned}$$

مثال ۳ الف (قسمت ۲): فرض کنید بیمه گذار جدیدی در ظرف یک سال از خرید بیمه یک تصادف دارد. احتمال این که این فرد مستعد تصادف باشد چقدر است؟

$$\begin{aligned} P(A|A_1) &= \frac{P(AA_1)}{P(A_1)} \\ &= \frac{P(A)P(A_1|A)}{P(A_1)} \\ &= \frac{(.3)(.4)}{.26} = \frac{6}{13} \end{aligned}$$

مثال ۳ ب. در پاسخ به سؤالی در آزمونی چند گزینه ای یک دانشجو یا سوال را می داند، یا آن را حدس می زند. فرض کنید p احتمالی باشد که این دانشجو پاسخ را می داند و $1 - p$ احتمالی که پاسخ را حدس می زند. فرض کنید دانشجویی که پاسخ را حدس می زند با احتمال $\frac{1}{m}$ که m تعداد گزینه هاست، پاسخ درست بدهد. احتمال شرطی این که دانشجویی پاسخ

سؤال را بدانند در صورتی که می دانیم به آن پاسخ درست داده است چقدر است؟

حل: فرض کنید C و K به ترتیب پیشامدی را که این دانشجوی به سؤال پاسخ درست دهد و پیشامدی را که وی واقعاً پاسخ را می داند است نمایش دهند. اکنون

$$\begin{aligned} P(K|C) &= \frac{P(KC)}{P(C)} \\ &= \frac{P(C|K)P(K)}{P(C|K)P(K) + P(C|K^c)P(K^c)} \\ &= \frac{p}{p + (1/m)(1-p)} \\ &= \frac{mp}{1 + (m-1)p} \end{aligned}$$

بنابراین، برای مثال اگر $m = 5$ و $P = \frac{1}{2}$ ، احتمال این که دانشجویی پاسخ سؤالی را که به آن پاسخ درست داده می دانسته است برابر $\frac{5}{9}$ است.

مثال ۳ پ. یک آزمایشگاه آزمون خون در تشخیص یک بیماری وقتی این بیماری واقعاً وجود دارد ۹۵ درصد موفق است. با وجود این، این آزمون نتیجه «مثبت نادرست» برای یک درصد از افراد سالمی که آزمون می شوند نیز فراهم می کند. (یعنی اگر فرد سالمی آزمون شود، با احتمال 0.01 نتیجه این آزمون او را بیمار تشخیص می دهد). اگر 0.05 درصد این جامعه واقعاً مبتلا به این بیماری باشند، احتمال این که فردی مبتلا به بیماری باشد در صورتی که می دانیم نتیجه آزمون مثبت است، چقدر است؟

حل: فرض کنید D پیشامدی را که فرد مورد آزمون مبتلا است و E پیشامدی را که نتیجه آزمون مثبت است نمایش دهند. احتمال مطلوب $P(D|E)$ از رابطه زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} P(D|E) &= \frac{P(DE)}{P(E)} \\ &= \frac{P(E|D)P(D)}{P(E|D)P(D) + P(E|D^c)P(D^c)} \\ &= \frac{(0.95)(0.005)}{(0.95)(0.005) + (0.01)(0.995)} = \frac{95}{294} \approx 0.323 \end{aligned}$$

بنابراین تنها ۳۲ درصد از افرادی که نتیجه آزمون آنها مثبت می شود واقعاً مبتلا به بیماری اند. چون بسیاری از دانشجویان غالباً با این نتیجه شگفت زده می شوند (زیرا انتظار دارند که رقم

حاصل بسیار بزرگتر از این باشد به دلیل این که این دستگاه آزمون خون دستگاه خوبی است)، احتمالاً ارزش این را دارد که استدلال دیگری را هر چند ضعیف تر از اولی، که ملموستر است، در زیر ارائه دهیم.

چون ۰/۵ درصد از این جامعه مبتلا به این بیماری است، نتیجه می شود که بطور متوسط ۱ نفر از هر ۲۰۰ نفر که آزمون می شوند مبتلاست. این آزمون با احتمال ۰/۹۵ بطور درست تأیید می کند که این فرد مبتلا به بیماری است. بنابراین بطور متوسط از هر ۲۰۰ نفر که آزمون می شوند این آزمون بدرستی تأیید می کند که ۰/۹۵ افراد مبتلا هستند. با وجود این از سوی دیگر، (بطور متوسط) از هر ۱۹۹ فرد سالم، این آزمون بغلط بیان می کند که (۰/۰۱)(۱۹۹) نفر از این افراد مبتلا هستند. بنابراین، برای هر ۰/۹۵ افراد مبتلا که این آزمون بدرستی آنها را مبتلا اعلام می کند، (بطور متوسط) (۰/۰۱)(۱۹۹) فرد سالم وجود دارد که این آزمون بنا بر درست بیمار اعلام می کند. در نتیجه، نسبت دفاعاتی که نتیجه آزمون وقتی اعلام می کند که فردی بیمار است برابر است با

$$\frac{.95}{.95 + (199)(.01)} = \frac{95}{294} \approx .323$$

معادله (۳-۱) هر گاه بخواهیم احتمالهای شخصی فردی را به کمک اطلاعات اضافی مجدداً ارزیابی کنیم نیز سودمند واقع می شود، مثالهای زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۳ ت: پزشکی را در نظر بگیرید که به مشکل زیر می اندیشد: اگر ۸۰ درصد اطمینان داشته باشم که مریض مبتلا به این بیماری است، همواره عمل جراحی را توصیه خواهم کرد، در صورتی که به این اندازه مطمئن نباشم، آزمونهای اضافی را که پر هزینه و بعضاً درد آورند توصیه خواهم کرد. اکنون، در ابتدای امر ۶۰ درصد اطمینان داشتم که بیمار مبتلا به این مرض است، و بدین ترتیب آزمون سری A را تجویز کردم، آزمونی که اگر مریض مبتلا به بیماری باشد نتیجه اش مثبت است و تقریباً هرگز نتیجه مثبت نیست اگر وی مبتلا نباشد. نتیجه این آزمون مثبت بود و بنابراین وقتی بیمار برای اولین بار به من اطلاع داد که وی مرض قند دارد تصمیم گرفتم عمل جراحی را به وی توصیه کنم.

این اطلاعات موضوع را پیچیده می سازد زیرا با وجود این که این امر برآورد ۶۰ درصد اولیه مرا که احتمال ابتلای بیمار به این بیماری است تغییر نمی دهد، ولی تعبیر نتایج آزمون A را تحت تأثیر قرار می دهد. زیرا آزمون A، وقتی بیمار سالم است هرگز نتیجه مثبتی

فراهم نمی‌کند، ولی متأسفانه در مورد بیماران قندی که از این بیماری رنج نمی‌برند، در ۳۰ درصد موارد نتیجه مثبت فراهم می‌کند. اکنون باید چه کار کرد؟ آزمونهای دیگر یا جراحی فوری؟

حل: به منظور تصمیم‌گیری در مورد این که عمل جراحی توصیه شود یا خیر، این پزشک ابتدا باید احتمال بروز خود را که شخص مبتلا به بیماری است در صورتی که نتیجه آزمون A مثبت است، محاسبه کند. فرض کنید D پیشامدی را که شخص مبتلاست و E که نتیجه آزمون A مثبت است را نشان می‌دهد. احتمال شرطی مطلوب $P(D|E)$ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} P(D|E) &= \frac{P(DE)}{P(E)} \\ &= \frac{P(D)P(E|D)}{P(E|D)P(D) + P(E|D^c)P(D^c)} \\ &= \frac{(6)1}{1(6) + (.3)(.4)} \\ &= .833 \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که احتمال نتیجه آزمون مثبت با شرط این که آیا شخص مبتلا به بیماری است یا خیر و سپس حقیقتی را که شخص مبتلا به مرض قند است به کار برده و احتمال شرطی یک نتیجه مثبت، در حالی که می‌دانیم فرد مبتلا نیست یعنی $P(E|D^c)$ ، را برابر $0.3/0.4$ به دست می‌آوریم. بنابراین، دکتر اکنون بیش از ۸۰ درصد اطمینان دارد که فرد مبتلا به بیماری است، باید عمل جراحی را تجویز کند.

مثال ۳ ن. در مرحله معینی از یک بررسی جنایی، بازرس مسامور ۶۰ درصد به گناهکار بودن متهم مشخصی متقاعد شده است. اکنون فرض کنید مدرک جدیدی که نشان می‌دهد جنایتکار دارای مشخصه خاصی است (از قبیل چپ دست بودن طاسی یا رنگ موی خرمایی) کشف شده است. اگر ۲۰ درصد جامعه‌ای دارای این مشخصه باشد، کار آگاه اکنون چقدر باید از گناهکاری متهم مطمئن شود اگر معلوم شود که متهم دارای این مشخصه است؟

حل: فرض کنید G پیشامدی را که متهم گناهکار است و C پیشامدی را که وی دارای

مشخصه جنایی است نشان می دهد، داریم .

$$\begin{aligned} P(G|C) &= \frac{P(GC)}{P(C)} \\ &= \frac{P(C|G)P(G)}{P(C|G)P(G) + P(C|G^c)P(G^c)} \\ &= \frac{1(.6)}{1(.6) + (.2)(.4)} \\ &= .882 \end{aligned}$$

که در آن فرض کرده ایم احتمال این که متهم دارای این مشخصه باشد در حالی که واقعاً بی گناه است برابر $1/2$ ، یعنی نسبتی از جامعه که دارای این مشخصه است .

مثال ۳ ج . در مسابقه قهرمانی جهانی بریج که در ماه می ۱۹۶۵ در بوئنوس آیرس برگزار شد، انجمن بریج معروف بریتانیایی مربوط به ترنس ریس و بوریس چاپیرو متهم به تقلب با استفاده از علامات انگشتان شد که می توانست تعداد قلبها در دست بازیکنان را نشان دهد . ریس و چاپیرو این اتهام را رد کردند و سرانجام یک جلسه دادرسی به وسیله اتحادیه بریج بریتانیا تشکیل شد . این جلسه به شکل فرآیندی رسمی با یک دادستان و تیم دفاع بود، که هر دو قدرت احضار و بازپرسی و روبروسازی از شاهدان را داشتند . در طی این فرآیندها، دادیار چند دست بازی خاصی را که توسط ریس و چاپیرو بازی شد، بررسی و اعلام کرد که بازی آنها در این چند دست با فرضی که آنها در به دست آوردن اطلاعات ناروا از خال قلب مقصرتند سازگار است . در این مرحله، وکیل مدافع، خاطر نشان می سازد که بازی آنها در این دستها با بازی استاندارد آنها کاملاً سازگار است . با وجود این، شاکی مدعی است مادامی که بازی آنها با فرض گناهکاری سازگار است، این امر بایستی مدرکی مؤید این فرض محسوب شود . نظر شما درباره این استدلال شاکیان چیست؟

حل : این مسأله اساساً مسأله ای است که تعیین می کند چگونه دخالت یک مدرک جدید (در مثال بالا، این چند دست بازی) احتمال فرض خاصی را تحت تأثیر قرار می دهد . اکنون، اگر فرض کنیم H فرض خاصی را نشان را می دهد (مانند گناهکاری ریس و چاپیرو) و E مدرک جدید را، آن گاه

$$P(H|E) = \frac{P(HE)}{P(E)} \quad (۲-۳)$$

$$= \frac{P(E|H)P(H)}{P(E|H)P(H) + P(E|H^c)[1 - P(H)]}$$

که در آن $P(H)$ ارزیابی ما از درستی فرض قبل از دخالت این مدرک جدید است. این مدرک جدید این فرض را در صورتی که آن را محتمل تر سازد، تقویت می کند یعنی هرگاه $P(H|E) \geq P(H)$. از معادله (۲-۳)، هرگاه

$$P(E|H) \geq P(E|H)P(H) + P(E|H^c)[1 - P(H)]$$

یا هم ارز با آن، هرگاه

$$P(E|H) \geq P(E|H^c)$$

به بیان دیگر، هر مدرک جدیدی را می توان تقویت کننده فرض خاصی در نظر گرفت. هرگاه وقوع آن وقتی این فرض درست است بیشتر از وقتی باشد که فرض نادرست است. در حقیقت، احتمال جدید این فرض به احتمال اولیه آن و نسبت این احتمالهای شرطی بستگی دارد، زیرا از معادله (۲-۳)

$$P(H|E) = \frac{P(H)}{P(H) + [1 - P(H)] \frac{P(E|H^c)}{P(E|H)}}$$

چون در مسأله مورد بحث، این بازی ورقها را تنها در صورتی می توان تقویت کننده فرض گناهکاری در نظر گرفت که چنین نحوه بازی هنگامی که این دو نفر تقلب می کردند محتملتر از هنگامی باشد که تقلب نکنند. چون دادیار هرگز چنین اظهاراتی نکرده است، اظهاراتش مبنی بر این که این مدرک فرض گناهکاری را تقویت می کند معتبر نیست.

معادله (۱-۳) را می توان به طریق زیر گسترش داد: فرض کنید F_1, F_2, \dots, F_n ، پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند، بطوری که

$$\bigcup_{i=1}^n F_i = S$$

به بیان دیگر، دقیقاً یکی از پیشامدهای F_1, \dots, F_n باید رخ دهد. با نوشتن

$$E = \bigcup_{i=1}^n EF_i$$

و استفاده از این واقعیت که پیشامدهای EF_i ، $i = 1, \dots, n$ دو به دو ناسازگارند، حاصل می شود.

$$\begin{aligned} P(E) &= \sum_{i=1}^n P(EF_i) \\ &= \sum_{i=1}^n P(E|F_i)P(F_i) \end{aligned} \quad (3-3)$$

بنابراین معادله (۳-۳) نشان می دهد که برای پیشامدهای مفروض F_1, F_2, \dots, F_n یکی از آنها باید رخ دهد، چگونه می توان $P(E)$ را ابتدا با مشروط نمودن بر این که کدام یک از F_i ها رخ دهد محاسبه کرد. یعنی، معادله (۳-۳) بیانگر آن است که $P(E)$ برابر میانگین موزون $P(E|F_i)$ است که هر جمله آن با احتمال پیشامدی که بر آن شرطی شده است موزون شده است. اکنون فرض کنید که E رخ داده است و می خواهیم تعیین کنیم کدام یک از F_i ها نیز رخ داده است. بنابر معادله (۳-۳) حکم زیر را داریم.

حکم ۳-۱

$$\begin{aligned} P(F_j|E) &= \frac{P(EF_j)}{P(E)} \\ &= \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^n P(E|F_i)P(F_i)} \end{aligned} \quad (4-3)$$

معادله (۴-۳) به فرمول بیز مشهور است که از نام فیلسوف انگلیسی توماس بیز اقتباس شده است. اگر پیشامدهای F_j را به عنوان «فرضهای» ممکن درباره موضوعی بپنداریم، آن گاه فرمول بیز را می توان چنین تعبیر کرد که چگونگی تغییرات پندارها در باره این فرضها را که قبل از آزمایش حکم فرماست (یعنی $P(F_j)$) با مدرک آزمایش بایستی اصلاح شود به ما نشان می دهد.

مثال ۳-۵. هواپیمایی گم شده و گمان می رود که در یکی از مناطق سه گانه ممکن به زمین نشسته باشد. فرض کنید α_i - ۱ احتمال را که این هواپیما به دنبال جستجوی منطقه i ام پیدا شود در صورتی که هواپیما در حقیقت در این منطقه است، $i = 1, 2, 3$ ، نشان می دهد (مقادیر ثابت α_i به احتمالهای چشم انداز موسومند زیرا این مقادیر احتمال نظارت بر این هواپیما را نمایش می دهند و عموماً می توان آنها را به شرایط محیطی و جغرافیایی این منطقه ها نسبت

داد). احتمال شرطی این که این هواپیما در منطقه i ام، ($i = 1, 2, 3$) باشد چقدر است، در صورتی که می دانیم جستجوی منطقه ۱ بدون نتیجه بوده است؟

حل: فرض کنید R_i , $i = 1, 2, 3$ ، پیشامدی را که این هواپیما در منطقه i ام باشد، و E پیشامدی را که جستجوی منطقه ۱ ناموفق بوده است نشان می دهد. از فرمول بیز داریم

$$\begin{aligned} P(R_1|E) &= \frac{P(ER_1)}{P(E)} \\ &= \frac{P(E|R_1)P(R_1)}{\sum_{i=1}^3 P(E|R_i)P(R_i)} \\ &= \frac{(\alpha_1)^{\frac{1}{3}}}{(\alpha_1)^{\frac{1}{3}} + (1)^{\frac{1}{3}} + (1)^{\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 2} \end{aligned}$$

برای $j = 2, 3$

$$\begin{aligned} P(R_j|E) &= \frac{P(E|R_j)P(R_j)}{P(E)} \\ &= \frac{(1)^{\frac{1}{3}}}{(\alpha_1)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{\alpha_1 + 2}, \quad j = 2, 3 \end{aligned}$$

باید توجه داشت که احتمال بروز (یعنی شرطی) که این هواپیما در منطقه j است، در صورتی که می دانیم جستجوی منطقه i ناموفق بوده است، بزرگتر از احتمال اولیه است که هواپیما در منطقه j است هرگاه $1 \neq j$ و کمتر از احتمال اولیه است وقتی $j = 1$ ، که مسلماً بدیهی است، زیرا پیدا نکردن هواپیما به هنگام جستجوی منطقه ۱، به نظر می رسد که احتمال بودن هواپیما در این منطقه را کاهش داده و احتمال بودن آن را در جای دیگر افزایش می دهد. همچنین احتمال مشروط این که این هواپیما در منطقه ۱ باشد، در صورتی که می دانیم جستجوی اولین منطقه ناموفق است تابعی صعودی از احتمال چشم انداز α_1 است، که این نیز بدیهی است زیرا هر چقدر α_1 بزرگتر باشد، منطقی تر است که جستجوی ناموفق را به «بدشانسی» نسبت دهیم در مقابل این که هواپیما آن جا نباشد. بطور مشابهی $P(R_j|E)$ ، $1 \neq j$ تابعی نزولی از α_1 است.

مثال بعدی، غالباً توسط دانشجویان آگاه به احتمال ۱ برای بردن پول از دوستان نا آگاه خود مورد استفاده قرار می گیرد.

مثال ۳ ج. فرض کنید سه کارت داریم که از نظر شکل یکسانند ولی دو طرف کارت اول به رنگ قرمز و دو طرف کارت دوم به رنگ مشکی و یک طرف کارت سوم به رنگ قرمز و طرف دیگرش به رنگ مشکی است. این سه کارت را در داخل کلاهی خوب مخلوط و ۱ کارت را بتصادف از آن بیرون کشیده و بر روی میز قرار می دهیم. اگر طرف رو شده آن به رنگ قرمز باشد، احتمال این که طرف دیگرش به رنگ مشکی باشد چقدر است؟

حل: فرض کنید RR , BB , RB به ترتیب پیشامدهای کارت منتخب تمام قرمز، تمام مشکی یا نیمی قرمز نیمی مشکی است را نشان می دهند. فرض کنید R پیشامدی را که طرف رو شده کارت منتخب قرمز است نمایش می دهد در این صورت احتمال مطلوب از رابطه زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} P(RB|R) &= \frac{P(RB \cap R)}{P(R)} \\ &= \frac{P(R|RB)P(RB)}{P(R|RR)P(RR) + P(R|RB)P(RB) + P(R|BB)P(BB)} \\ &= \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{3})}{(1)(\frac{1}{3}) + (\frac{1}{2})(\frac{1}{3}) + 0(\frac{1}{3})} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

بنابراین پاسخ برابر $\frac{1}{3}$ است. برخی دانشجویان پاسخ را برابر $\frac{1}{4}$ حدس می زنند با این استدلال نادرست که در صورتی که می دانیم طرف قرمز رو شده است، دو امکان هم احتمال وجود دارد: یکی این که، کارت تمام قرمز، یا کارت تمام مشکی است. با وجود این اشتباه آنان در این جاست که فرض می کنند این دو امکان هم احتمالند. زیرا اگر تصور کنیم که هر کارت از دو طرف متمایز تشکیل شده است، آن گاه آزمایش دارای ۶ برآمد هم احتمال است - مثلاً $R_1, R_2, B_1, B_2, R_3, B_3$ - که در آن برآمد R_1 است اگر طرف اول کارت کلاً قرمز رو شود، R_2 است اگر طرف دوم کارت کلاً قرمز رو شود، R_3 است اگر طرف قرمز کارت قرمز - مشکی رو شود و به همین ترتیب الی آخر: چون طرف دیگر کاردی که طرف قرمز آن رو شده تنها در صورتی مشکی است که برآمد R_3 باشد، مشاهده می کنیم که احتمال مطلوب برابر احتمال شرطی R_3 است در صورتی که می دانیم R_1 یا R_2 یا R_3 رخ داده است، که آشکارا برابر $\frac{1}{3}$ است.

مثال ۳ ع. در یک کلینیک روانپزشکی مددکاران اجتماعی بقدری گرفتاراند که بطور متوسط تنها ۶۰ درصد از بیماران جدید بالقوه که به کلینیک تلفن می زنند موفق می شوند بلافاصله با یک مددکار اجتماعی مکالمه کنند. از ۴۰ درصد بقیه خواسته می شود که شماره تلفن خود را بدهند. حدود ۷۵ درصد موارد را یک مددکار اجتماعی در همان روز تلفنی پاسخ می دهد و ۲۵ درصد بقیه را روز بعد. تجربه در کلینیک نشان می دهد احتمال این که تماس گیرنده ای از کلینیک به منظور مشاوره دیدن کند برابر $\frac{۰}{۸}$ است اگر وی بلافاصله موفق به مکالمه با یک مددکار اجتماعی شود، اگر پاسخ تلفن بیمار همان روز یا روز بعد داده شود. این احتمال به ترتیب برابر $\frac{۰}{۶}$ و $\frac{۰}{۴}$ است.

۱- چه درصدی از بیماران که تماس تلفنی می گیرند برای مشاوره از کلینیک دیدن می کنند؟

۲- چه درصدی از بیماران که از کلینیک دیدن می کنند پاسخ تلفن خود را دریافت نکرده اند.

حل: پیشامدهای V, I, S, F را با گزاره های زیر نشان می دهیم.

V : تماس گیرنده از کلینیک برای مشاوره دیدن می کند.

I : تماس گیرنده بلافاصله با یک مددکار اجتماعی مکالمه می کند.

S : به تماس گیرنده بعداً در همان روز پاسخ داده می شود.

F : به تماس گیرنده روز بعد پاسخ داده می شود.

در این صورت

$$\begin{aligned} P(V) &= P(V|I)P(I) + P(V|S)P(S) + P(V|F)P(F) \\ &= (.8)(.6) + (.6)(.4)(.75) + (.4)(.4)(.25) \\ &= .70 \end{aligned}$$

که در آن از این واقعیت که $P(S) = (.4)(.75)$ و $P(F) = (.4)(.25)$ بهره برده ایم. پس به (۱) پاسخ دادیم و برای پاسخ دادن به (۲) توجه داریم

$$\begin{aligned} P(I|V) &= \frac{P(V|I)P(I)}{P(V)} \\ &= \frac{(.8)(.6)}{.7} = .686 \end{aligned}$$

بنابراین ۶۹ درصد بیمارانی که از کلینیک دیدن می کنند پاسخ تلفن خود را بلافاصله توسط یک مددکار اجتماعی دریافت کرده اند.

۴- پیشامدهای مستقل

مثالهای قبلی این فصل نشان می‌دهد که احتمال شرطی E با فرض F یعنی $P(E|F)$ ، عموماً با احتمال غیر شرطی E یعنی $P(E)$ برابر نیست. به بیان دیگر، اگر بدانیم که F رخ داده است، عموماً شانس رخ دادن E تغییر می‌کند. در حالت‌های خاصی که $P(E|F)$ برابر با $P(E)$ می‌شود، می‌گوییم که E مستقل از F است. یعنی، E مستقل از F است هرگاه اطلاع از وقوع F ، احتمال رخ دادن E را تغییر ندهد.

چون $P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$ ، مشاهده می‌کنیم E مستقل از F است اگر

$$P(EF) = P(E)P(F) \quad (۱-۴)$$

چون معادله (۱-۴) برحسب E و F متقارن است، نتیجه می‌شود که هرگاه E مستقل از F باشد، F نیز مستقل از E است. بنابراین تعریف زیر را داریم.

تعریف: دو پیشامد E و F را مستقل گوئیم اگر معادله (۱-۴) برقرار باشد. دو پیشامد E و F که مستقل نباشند نامستقل نامیده می‌شوند.

مثال ۴ الف. یک کارت بتصادف از یک دست ورق بازی ۵۲ تایی بیرون کشیده می‌شود. اگر E این پیشامد باشد که ورق بیرون کشیده شده یک آس است و F پیشامدی را که این ورق پیک است نشان دهد، در این صورت E و F مستقلند. این نتیجه واضح است زیرا $P(EF) = \frac{1}{52}$ در حالی که $P(E) = \frac{4}{52}$ و $P(F) = \frac{13}{52}$.

مثال ۴ ب. دو سکه را پرتاب می‌کنیم و فرض می‌کنیم هر چهار برآمد هم احتمال باشند. اگر E پیشامدی را که در سکه اول شیر ظاهر شود و F پیشامدی را که در سکه دوم خط ظاهر شود نشان دهد، آن گاه E و F مستقلند، زیرا $P(EF) = P(\{(H, T)\}) = \frac{1}{4}$ در صورتی که $P(F) = P(\{(H, T), (T, T)\}) = \frac{1}{2}$ و $P(E) = P(\{(H, H), (H, T)\}) = \frac{1}{2}$.

مثال ۴ پ: فرض کنید دو تاس منظم را می‌ریزیم. فرض کنید E نمایش پیشامد مجموع تاسها برابر ۶ است و F نمایش پیشامد تاس اول ۴ است باشد. پس

$$P(E, F) = P(\{(4, 2)\}) = \frac{1}{36}$$

در حالی که

$$P(E_1)P(F) = \left(\frac{5}{36}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{216}$$

بنابراین E و F مستقل نیستند. بطور شهودی، دلیل این امر روشن است زیرا اگر علاقه مند به امکان ظاهر شدن ۶ (با دو تاس) باشیم، اگر اولین تاس ۴ (یا هر یک از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵) را ظاهر کند باعث خرسندی است زیرا در این صورت امکان به دست آوردن مجموع کل برابر ۶ هنوز برای ما وجود دارد. از سوی دیگر اگر تاس اول ۶ بیاید موجب ناخرسندی است زیرا دیگر شانس به دست آوردن ۶ نخواهیم داشت. به بیان دیگر، شانس به دست آوردن مجموع کل برابر ۶ بستگی به برآمد تاس اول دارد، پس E_1 و F نمی توانند مستقل باشند.

اکنون فرض کنید که E_2 پیشامدی را که مجموع خالهای دو تاس برابر ۷ باشد، نمایش می دهد. آیا E_2 مستقل از F است؟ پاسخ مثبت است، زیرا

$$P(E_2F) = P(\{(4, 3)\}) = \frac{1}{36}$$

در حالی که

$$P(E_2)P(F) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{36}$$

اثبات بدیهی این مطلب که چرا پیشامد «مجموع خالها برابر ۷ باشد» مستقل از برآمد تاس اول است به خواننده واگذار می شود.

مثال ۴ ت. اگر E پیشامدی را که «رئیس جمهور آینده از حزب جمهوری خواه است» و F پیشامدی را که «در ظرف سال آینده زمین لرزه شدیدی روی خواهد داد» نمایش دهند، اکثر مردم تمایل به این فرض دارند که E و F مستقلند. با وجود این، در باره این که آیا منطقی است فرض کنیم که پیشامد E و G مستقلند اختلاف نظر وجود دارد، در این جا G پیشامدی است که می گوید در ظرف دو سال بعد از انتخابات جنگ بزرگی روی خواهد داد. اکنون نشان می دهیم که اگر E مستقل از F باشد، E مستقل از F^c نیز هست.

حکم ۴-۱

اگر E و F مستقل باشند، E و F^c نیز مستقلند

پروهان: فرض کنید E و F مستقلند. چون $E = EF \cup EF^c$ واضح است که EF و EF^c

دو به دو ناسازگارند، داریم

$$\begin{aligned} P(E) &= P(EF) + P(EF^c) \\ &= P(E)P(F) + P(EF^c) \end{aligned}$$

یا هم ارز آن

$$\begin{aligned} P(EF^c) &= P(E)[1 - P(F)] \\ &= P(E)P(F^c) \end{aligned}$$

حکم ثابت شده است .

پس ، اگر E مستقل از F باشد ، احتمال رخ دادن E با اطلاع از رخ دادن F یا عدم آن ثابت می ماند . اکنون فرض کنید E از F و همچنین از G مستقل است . آیا الزاماً مستقل از FG است پاسخ بطور غیر منتظره ای منفی است . مثال زیر را در نظر بگیرید .

مثال ۴ . دو تاس منظم را می ریزیم . گیریم E پیشامدی را که مجموع دو تاس ۶ و F پیشامدی را که تاس اول برابر ۴ و G پیشامدی را که تاس دوم برابر ۳ است ، نمایش دهند . بنابر مثال ۴ ب ، می دانیم که E مستقل از F است و با همان استدلال معلوم می شود که E نیز مستقل از G است ، اما مستقل بودن E و FG واضح نیست [زیرا $P(E|FG) = 1$.

به نظر می رسد که از مثال ۴ پ می توان نتیجه گرفت که تعریف مناسب استقلال سه پیشامد E ، F و G چیزی بالاتر از آن است که فرض کنیم کلیه $\binom{3}{2}$ زوج از پیشامدها مستقلند . بنابراین به تعریف زیر رهنمون می شویم :

تعریف

سه پیشامد E ، F و G مستقل گفته می شوند هرگاه

$$\begin{aligned} P(EFG) &= P(E)P(F)P(G) \\ P(EF) &= P(E)P(F) \\ P(EG) &= P(E)P(G) \\ P(FG) &= P(F)P(G) \end{aligned}$$

مسلماً می توان تعریف استقلال را به بیش از سه پیشامد گسترش داد . پیشامدهای E_1 ، E_2 ، ... ، E_n مستقل نامیده می شوند ، اگر برای هر زیر مجموعه E_1 ، E_2 ، ... ، E_n از این پیشامدها داشته باشیم

$$P(E_1 E_2 \cdots E_r) = P(E_1)P(E_2) \cdots P(E_r)$$

سرانجام مجموعه ای نامتناهی از پیشامدها را مستقل تعریف می کنیم اگر هر زیر مجموعه متناهی از این پیشامدها مستقل باشد.

گاهی پیش می آید که احتمال تجربه تحت مطالعه، عبارت از انجام دنباله ای از زیر تجربه ها باشد. برای مثال، اگر آزمایش عبارت از پرتاب پی در پی سکه باشد، هر پرتاب را می توان یک زیر تجربه تصور کرد. در بسیاری موارد منطقی است فرض کنیم که برآمدهای هر گروه از این زیر تجربه ها اثری بر روی احتمالهای برآمدهای زیر تجربه های دیگر ندارد. اگر چنین چیزی برقرار باشد می گوئیم که زیر تجربه ها مستقلند. بطور مشخص، زیر تجربه ها را مستقل گوئیم هرگاه E_1, E_2, \dots, E_n الزاماً دنباله ای مستقل از پیشامدها باشد، وقتی E_1 پیشامدی باشد که رویداد آن با برآمد زیر تجربه i ام کاملاً تعیین شود. اگر هر زیر تجربه یکسان باشد - یعنی، اگر هر زیر تجربه دارای همان فضای نمونه (زیر نمونه) و همان تابع احتمال بر پیشامدهایش باشد - در این صورت این زیر تجربه ها، آزمایشها نامیده می شوند.

مثال ۴ ج. قرار است دنباله ای نامتناهی از آزمایشهای مستقل انجام شود. هر آزمایش با احتمال p به پیروزی و با احتمال $1-p$ به شکست منتهی می شود. احتمال این که

۱- لااقل ۱ پیروزی در n آزمایش اول رخ دهد،

۲- دقیقاً k پیروزی در n آزمایش اول رخ دهد،

۳- کلیه آزمایشها به پیروزی منتهی شود چقدر است؟

حل: برای تعیین احتمال لااقل ۱ پیروزی در n آزمایش اول، ساده تر است ابتدا احتمال پیشامد متمم یعنی هیچ پیروزی در n آزمایش اول را محاسبه کنیم. اگر E_i پیشامدیک شکست در آزمایش i ام را نشان دهد، احتمال هیچ پیروزی، بنا بر استقلال، برابر است با

$$P(E_1 E_2 \cdots E_n) = P(E_1) P(E_2) \cdots P(E_n) = (1-p)^n$$

بنابر این پاسخ (۱) برابر است با $1 - (1-p)^n$.

برای محاسبه (۲)، هر دنباله خاصی از n برآمد اول را که شامل k پیروزی و $n-k$ شکست است در نظر می گیریم. هر یک از این دنباله ها، بنا بر فرض استقلال آزمایشها، با احتمال

$(1-p)^{n-k} p^k$ رخ می دهد. چون $\binom{n}{k}$ از این دنباله وجود دارد $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ جایگشت از k پیروزی و $n-k$ شکست وجود دارد) احتمال مطلوب در (۲) برابر است با

$$P(\text{دقیقاً } k \text{ پیروزی}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

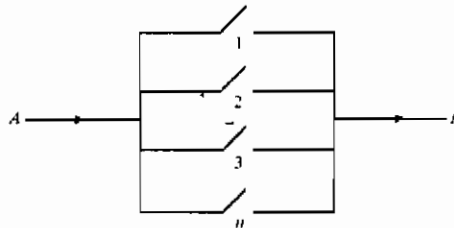
برای پاسخ دادن به (۳)، بنابر (۱) توجه داریم احتمال این که تمام n پیشامد اول به پیروزی منجر شود با رابطه زیر داده می شود

$$P(E_1^c E_2^c \cdots E_n^c) = p^n$$

بنابراین، با استفاده از خاصیت پیوستگی احتمالاتها (بخش ۶ از فصل ۲) احتمال مطلوب $P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c\right)$ با رابطه زیر داده می شود

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c\right) &= P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{i=1}^n E_i^c\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{i=1}^n E_i^c\right) \\ &= \lim_n p^n = \begin{cases} 0 & \text{if } p < 1 \\ 1 & \text{if } p = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

مثال ۲ g. دستگاهی که از n قطعه جداگانه تشکیل شده است، دستگاه موازی نامیده می شود، اگر کار کردن دستگاه منوط به کار کردن حداقل یک قطعه باشد. (شکل ۳-۲ را ببینید). برای این دستگاه، اگر قطعه i ، مستقل از قطعه های دیگر، با احتمال p_i ، $i = 1, \dots, n$ ، کار کند، احتمال این که دستگاه کار کند چقدر است.



شکل ۳-۲ دستگاه موازی: اگر جریان برق از A به B برقرار شود، کار می کند

حل: فرض کنید A_i پشامدی را که قطعه i کار می کند نمایش دهد. در این صورت

$$\begin{aligned} P\{\text{سیستم کار نکند}\} &= 1 - P\{\text{سیستم کار کند}\} \\ &= 1 - P\{\text{کلیه قطعات کار نکند}\} \\ &= 1 - P\left(\bigcap_i A_i^c\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i) \end{aligned} \quad \text{بنابر استقلال}$$

مثال ۴. ع. آزمایشهایی مستقل، که عبارت از پرتاب یک زوج تاس متعادل است انجام می شود. احتمال این که یک برآمد ۵ قبل از یک برآمد ۷ ظاهر شود چقدر است وقتی برآمد یک پرتاب، مجموع خالهای تاسهاست؟

حل: اگر E_n پشامدی را که هیچ ۵ یا ۷ در $n-1$ آزمایش اول ظاهر نشود و در آزمایش n ام ۵ ظاهر شود را نمایش دهد، احتمال مطلوب برابر است با

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

اکنون، چون $P\{\text{۵ در هر آزمایش}\} = \frac{4}{36}$ و $P\{\text{۷ در هر آزمایش}\} = \frac{6}{36}$ ، بنابر استقلال آزمایشها داریم

$$P(E_n) = \left(1 - \frac{10}{36}\right)^{n-1} \frac{4}{36}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \left(\frac{1}{9}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{9} \frac{1}{1 - \frac{13}{18}} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

این نتیجه را می توانستیم با استفاده از احتمالات شرطی نیز به دست آوریم، اگر E

پیشامدی را که یک ۵ قبل از ۷ رخ دهد نمایش دهد، می توان احتمال مطلوب $P(E)$ را با شرطی کردن بر برآمد آزمایش اول به صورت زیر به دست آورد: فرض کنید F پیشامدی که آزمایش اول نتیجه اش ۵ و G پیشامدی که آزمایش اول نتیجه اش ۷ و H پیشامدی که آزمایش اول نتیجه اش ۵ یا ۷ نباشد را نشان می دهد و چون $EF \cup EG \cup EH$ ، داریم

$$\begin{aligned} P(E) &= P(EF) + P(EG) + P(EH) \\ &= P(E|F)P(F) + P(E|G)P(G) + P(E|H)P(H) \end{aligned}$$

با وجود این

$$\begin{aligned} P(E|F) &= 1 \\ P(E|G) &= 0 \\ P(E|H) &= P(E) \end{aligned}$$

دو تساوی اول واضح است. تساوی سوم نتیجه می شود، زیرا اگر برآمد اول نتیجه اش ۵ یا ۷ نباشد، آن گاه وضعیت دقیقاً مثل وقتی است که مسأله ابتدا شروع شد، یعنی آزمایش کننده یک زوج تاس متعادل را آن قدر پرتاب می کند تا این که ۵ یا ۷ ظاهر شود. به علاوه آزمایشها مستقلند، بنابراین برآمد آزمایش اول هیچ تأثیری بر پرتابهای بعدی تاسها نخواهد داشت. چون $P(F) = \frac{4}{36}$ و $PG = \frac{6}{36}$ و $P(H) = \frac{26}{36}$ ملاحظه می کنیم که

$$P(E) = \frac{1}{6} + P(E)\frac{13}{18}$$

یا

$$P(E) = \frac{2}{3}$$

خواننده باید توجه داشته باشد که این پاسخ کاملاً شهودی است. یعنی چون در هر پرتاب ۵ با احتمال $\frac{4}{36}$ و ۷ با احتمال $\frac{6}{36}$ رخ می دهد، بدیهی به نظر می رسد که بختهای این که ۵ قبل از ۷ ظاهر شود باید ۶ به ۴ باشد. این احتمال در واقع باید $\frac{4}{11}$ باشد. استدلالی مشابه نشان می دهد که اگر E و F پیشامدهای دو به دو ناسازگار یک آزمایش باشد، وقتی آزمایشهای مستقل این تجربه انجام می شوند، احتمال این که پیشامد E قبل از پیشامد F رخ دهد برابر است با

$$\frac{P(E)}{P(E) + P(F)}$$

مثال بعدی مسأله ای را که جایگاه والایی در تاریخ نظریه احتمال دارد ارائه می کند. این مسأله مشهور مسأله امتیازهاست. بطور کلی، مسأله این است: دو نفر بازیکن جایزه ای تعیین کرده و باهم یک بازی انجام می دهند با این قرار که جایزه نصیب برنده بازی شود. اگر قبل از این که برنده معلوم شود، لازم باشد بازی متوقف شود، در صورتی که هر یک دارای «امتیاز جزئی» هستند، جایزه را چگونه باید تقسیم کرد؟

این مسأله توسط شوالیه دومیره که در آن عصر قماربازی حرفه ای بود برای پاسکال ریاضیدان فرانسوی مطرح شد. در کوشش برای حل این مسأله، پاسکال این اندیشه مهم را مطرح کرد که اگر قرار باشد بازی در آن امتیاز ادامه پیدا کند، باید نسبت جایزه که به این دو رقیب اختصاص داده می شود به احتمالهای برنده شدن آنان بستگی داشته باشد.

پاسکال بعضی حالات خاص را حل کرد و مهمتر آن که مکاتبه با فرانسوی مشهور فرما را آغاز کرد که شهرت زیادی به عنوان ریاضیدان کسب کرده بود. نتیجه این مکاتبات نه تنها منجر به حل کامل مسأله امتیازها شد، بلکه چارچوب حل بسیاری مسائل دیگر در ارتباط با بازیهای شانسی را تعیین کرد. این مکاتبات مشهور، که به نظر برخی تاریخ تولد نظریه احتمال را رقم زده است، از نظر جلب توجه ریاضیدانان اروپایی به احتمال نیز حایز اهمیت است، زیرا پاسکال و فرما هر دو به عنوان پیشروترین ریاضیدانان عصر به شمار می رفتند. برای مثال، در فاصله زمان کوتاهی از مکاتبه آن دو، نابغه جوان آلمانی هویگنس برای بحث در مورد این مسائل و حل آنها به پاریس مسافرت کرد، و علاقه و تحرك در این رشته جدید بسرعت رو به رشد نهاد.

مثال ۴ خ. مسأله امتیازها. آزمایشهای مستقل، با احتمال پیروزی p و احتمال شکست $1-p$ ، انجام می شوند. احتمال این که n پیروزی قبل از m شکست رخ دهد چقدر است؟ اگر A و B را به عنوان بازیکن هایی که بازی می کنند تصور کنیم بطوری که A یک امتیاز کسب می کند وقتی پیروزی رخ می دهد و B یک امتیاز وقتی شکست، در این صورت احتمال مطلوب، احتمالی است که A برنده شود اگر قرار باشد بازی تا موضعی که در آن A به n و B به m امتیاز دیگر نیاز دارد برنده شود ادامه پیدا کند.

حل: دو راه حل ارائه می دهیم که اولی از فرما و دومی از پاسکال است.

احتمالی را که n پیروزی قبل از m شکست رخ دهد با $P_{n,m}$ نشان می‌دهیم. با شرطی کردن برآمد آزمایش اول داریم (چرا؟ دلیل بیاورید)

$$P_{n,m} = pP_{n-1,m} + (1-p)P_{n,m-1} \quad n \geq 1, m \geq 1$$

با استفاده از شرایط مرزی آشکار $P_{0,m} = 1$ ، $P_{n,0} = 0$ ، این معادلات را می‌توان نسبت به $P_{n,m}$ حل کرد. به جای پرداختن به جزئیات کسل‌کننده، راه حل پاسکال را در نظر می‌گیریم.

پاسکال چنین استدلال می‌کرد برای این که n پیروزی قبل از m شکست رخ دهد، لازم و کافی است که لااقل n پیروزی در $m+n-1$ آزمایش اول وجود داشته باشد. (حتی اگر بازی قرار بود قبل از $m+n-1$ آزمایش کامل شود، می‌توان تصور کرد که آزمایشهای اضافی لازم انجام می‌شود). این امر درست است زیرا اگر n پیروزی در $m+n-1$ آزمایش اول وجود داشته باشد، بایستی حداکثر $m-1$ شکست در این $m+n-1$ آزمایش وجود داشته باشد، پس n پیروزی قبل از m شکست رخ خواهد داد. از سوی دیگر، اگر در $m+n-1$ آزمایش اول، کمتر از n پیروزی وجود داشته باشد بایستی لااقل m شکست در همین تعداد آزمایش وجود داشته باشد، پس n پیروزی قبل از m شکست رخ نمی‌دهد.

بنابراین، چنان که احتمال دقیقاً k پیروزی در $m+n-1$ آزمایش برابر است با $\binom{m+n-1}{k} p^k (1-p)^{m+n-1-k}$ (مثال ۴ ت را ببینید)، ملاحظه می‌کنیم احتمال مطلوب n پیروزی قبل از m شکست برابر است با

$$P_{n,m} = \sum_{k=n}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} p^k (1-p)^{m+n-1-k}$$

راه حل دیگری از مسأله امتیازها در مسأله نظری ۱۲ ارائه شده است. به عنوان توضیح مسأله امتیازها، فرض کنید که دو بازیکن هر یک A ریال می‌پردازد و هر یک از آنان شانس برابر برای بردن هر امتیاز دارد $\left(p = \frac{1}{2}\right)$. اگر n امتیاز برای بردن لازم باشد و بازیکن اول دارای ۱ امتیاز و دومی هیچ امتیازی نداشته باشد، در این صورت بازیکن اول سزاوار

$$2AP_{n-1,n} = 2A \sum_{k=n-1}^{2n-2} \binom{2n-2}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}$$

می‌باشد.

اکنون

$$\begin{aligned} \sum_{k=n-1}^{2n-2} \binom{2n-2}{k} &= \sum_{k=n-1}^{2n-2} \binom{2n-2}{2n-2-k} \\ &= \sum_{i=n-1}^0 \binom{2n-2}{i} \end{aligned}$$

که در آن تساوی اخیر از جانشینی $i = 2n - 2 - k$ نتیجه می شود. بنابراین

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=n-1}^{2n-2} \binom{2n-2}{k} &= \sum_{k=0}^{2n-2} \binom{2n-2}{k} + \binom{2n-2}{n-1} \\ &= (1+1)^{2n-2} + \binom{2n-2}{n-1} \end{aligned}$$

و به این ترتیب بازیکن اول سزاوار

$$A \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{2n-2} \binom{2n-2}{n-1} \right]$$

می باشد .

مثال بعدی با مسأله مشهوری به نام مسأله ورشکستگی قمارباز سروکار دارد .

مثال ۴ د : مسأله ورشکستگی قمارباز - دو قمار باز A و B بر روی برآمدهای پرتابهای

ستوالی شرط بندی می کنند . در هر پرتاب ، اگر سکه شیر بیاید ، A یک واحد پولی از B دریافت می کند ، در صورتی که خط بیاید A یک واحد به B می پردازد . این بازی را این دو نفر آن قدر ادامه می دهند تا پول یکی از آنها تمام شود . اگر فرض شده باشد که پرتابهای پی درپی سکه مستقلند و در هر پرتاب احتمال آمدن شیر p است ، احتمال این که پول بازیکن A به پایان برسد در صورتی که وی با i واحد و B با i - N واحد شروع کرده باشد ، چقدر است؟

حل : فرض کنید E پیشامدی را نشان دهد که پول A تمام می شود وقتی وی با i واحد و

B با i - N واحد شروع کرده باشند ، برای روشن کردن بستگی به پول اولیه A ، قرار دهید $P_i(E) = P_i$. برای عبارتی با شرطی کردن بر برآمد پرتاب اول به صورت زیر به دست

می آوریم : فرض کنید H پیشامدی را که پرتاب اول شیر بیاید نشان دهد ، در این صورت

$$\begin{aligned} P_i &= P(E) = P(E | H)P(H) + P(E | H^c)P(H^c) \\ &= pP(E | H) + (1 - p)P(E | H^c) \end{aligned}$$

اکنون با فرض این که پرتاب اول شیر آمده باشد ، وضعیت بعد از اولین شرط این است

که A دارای $i + 1$ واحد و B دارای $N - (i + 1)$ واحد است . چون پرتابهای پی در پی ، مستقل با

احتمال مشترك p برای شیر فرض شده اند، نتیجه می شود که از این نقطه به بعد، احتمال این که A تمام پول را ببرد دقیقاً برابر است با این که این بازی عیناً با A شروع شده است که دارای سرمایه اولیه $i + 1$ واحد و B دارای سرمایه اولیه $(i + 1) - N$ واحد است بنابراین.

$$P(E|H) = P_{i+1}$$

و بطور مشابه

$$P(E|H^c) = P_{i-1}$$

بنابراین با قرار دادن $q = 1 - p$ ، حاصل می شود

$$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1} \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (۲-۴)$$

با استفاده از شرایط مرزی واضح $P_N = 1$ و $P_0 = 0$ ، اکنون معادله (۲-۴) را حل می کنیم. چون $p + q = 1$ ، این معادلات با

$$pP_i + qP_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}$$

یا

$$P_{i+1} - P_i = \frac{q}{p}(P_i - P_{i-1}) \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (۳-۴)$$

هم ارزند. چون $P_0 = 0$ ، از معادله (۳-۴) حاصل می شود:

$$P_2 - P_1 = \frac{q}{p}(P_1 - P_0) = \frac{q}{p} P_1$$

$$P_3 - P_2 = \frac{q}{p}(P_2 - P_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 P_1$$

⋮

$$P_i - P_{i-1} = \frac{q}{p}(P_{i-1} - P_{i-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} P_1$$

⋮

$$P_N - P_{N-1} = \frac{q}{p}(P_{N-1} - P_{N-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} P_1 \quad (۴-۴)$$

با جمع کردن ۱ - i معادله اول (۴-۴) نتیجه می شود

$$P_i - P_1 = P_1 \left[\left(\frac{q}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} \right]$$

یا

$$P_i = \begin{cases} \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)} P_1 & \text{و } \frac{q}{p} \neq 1 \\ iP_1 & \text{و } \frac{q}{p} = 1 \end{cases}$$

اکنون، با استفاده از این واقعیت که $P_N = 1$ ، داریم

$$P_1 = \begin{cases} \frac{1 - (q/p)}{1 - (q/p)^N} & \text{و } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{N} & \text{و } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

و بنابراین

$$P_i = \begin{cases} \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^N} & \text{و } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{i}{N} & \text{و } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(۵-۴)

فرض کنید Q_i احتمالی را که پول B تمام می شود نشان دهد در حالی که A با i و B با $N - i$ شروع می کند. آن گاه با تقارن با وضعیتی که شرح دادیم، با جانشین کردن p با q و i با $N - i$ مشاهده می کنیم که

$$Q_i = \begin{cases} \frac{1 - (p/q)^{N-i}}{1 - (p/q)^N} & \text{if } q \neq \frac{1}{2} \\ \frac{N-i}{N} & \text{if } q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

به علاوه، چون $q = \frac{1}{2}$ هم ارز با $p = \frac{1}{2}$ است، وقتی $q \neq \frac{1}{2}$ ، داریم

$$\begin{aligned}
 P_i + Q_i &= \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^N} + \frac{1 - (p/q)^{N-i}}{1 - (p/q)^N} \\
 &= \frac{p^N - p^N (q/p)^i}{p^N - q^N} + \frac{q^N - q^N (p/q)^{N-i}}{q^N - p^N} \\
 &= \frac{p^N - p^{N-i} q^i - q^N + q^i p^{N-i}}{p^N - q^N} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

چون این نتیجه با $p = q = \frac{1}{2}$ نیز برقرار است، مشاهده می کنیم

$$P_i + Q_i = 1$$

به عبارتی این معادله بیانگر آن است که پول A یا B با احتمال ۱، تمام می شود، به بیان دیگر، احتمال این که بازی تا بی نهایت ادامه یابد در حالی که سرمایه A همواره بین ۱ و $N-1$ باشد صفر است. (خواننده باید دقت کند زیرا سه برآمد ممکن برای این بازی وجود دارد و نه دو برآمد. یا A می برد یا B و یا بازی تا ابد بدون برنده ادامه می یابد، که در بالا نشان دادیم احتمال پیشامد اخیر صفر است).

به عنوان مثال، اگر قرار باشد A با ۵ واحد و B با ۱۰ واحد شروع کند، احتمال برنده شدن A، $\frac{1}{3}$ است اگر p برابر $\frac{1}{4}$ باشد، در صورتی که این احتمال به

$$\frac{1 - (\frac{3}{4})^5}{1 - (\frac{3}{4})^{15}} \approx .87$$

اگر p برابر $\frac{1}{6}$ باشد افزایش می یابد.

حالت خاصی از مسأله ورشکستگی بازیکن که به مسأله مدت زمان بازی نیز مشهور است، توسط فرمای فرانسوی در ۱۶۵۷ به ریاضیدان آلمانی کریستیان هویگنس پیشنهاد شده بود. در روایتی که وی پیشنهاد کرد و توسط هویگنس حل شد، A و B هریک ۱۲ سکه داشتند. این دو بازیکن برسر این سکه ها در یک بازی با ۳ تاس به صورت زیر بازی کردند. هرگاه مجموع خالها ۱۱ می شد (تفاوتی ندارد که کدام یک تاسها را ریخته باشد)، A یک سکه به B می داد. هرگاه مجموع خالها ۱۴ می شد، B یک سکه به A می داد. فردی که اول تمام سکه ها را می برد، برنده بازی بود. چون $P\{۱۱ \text{ خال}\} = \frac{۲۷}{۲۱۶}$ و $P\{۱۴ \text{ خال}\} = \frac{۱۵}{۲۱۶}$ ، از مثال ۴ مشاهده می کنیم که برای A این مسأله عیناً همان مسأله ورشکستگی قمار باز است و (مثال ۴ د) با

شد و ۸ سال پس از درگذشت وی در سال ۱۷۱۳ انتشار یافت. حالت کلی مسأله ورشکستگی قمار باز به وسیله برنولی حل شد و $N = 24$ ، $i = 12$ ، $P = \frac{15}{22}$

به منظور کاربردی از مسأله ورشکستگی قمار باز به آزمون دارو، فرض کنید دوداروی جدید برای معالجه بیماری معینی عرضه شده است. داروی i دارای نرخ بهبودی P_i ، $i = 1, 2$ ، است، با این مفهوم که هر بیماری که با داروی i معالجه شود با احتمال P_i بهبود می یابد. با وجود این نرخهای بهبودی معلوم نیستند، و به روشی علاقه مندیم که تصمیم بگیریم آیا $P_1 > P_2$ یا $P_2 > P_1$ برای تصمیم گیری در باره یکی از این دو پیشنهاد متناوب، آزمون زیر را در نظر بگیرید: زوجهایی از بیماران را پی در پی مداوامی کنیم به یکی از دو عضو داروی ۱ و به عضو دیگر داروی ۲ تجویز می شود. نتایج برای هر زوج تعیین شده و آزمون متوقف می شود، هرگاه مجموع معالجه ها از یک دارو از مجموع معالجه ها از داروی دیگر از عددی که از قبل تعیین شده است تجاوز کند. بطور دقیق، فرض کنید.

$$X_i \begin{cases} 1 & \text{اگر بیماری که در زوج } i \text{ ام است پس از مصرف داروی ۱ معالجه شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$Y_i \begin{cases} 1 & \text{اگر بیماری که در زوج } i \text{ ام است پس از مصرف داروی ۲ معالجه شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

برای عدد از قبل تعیین شده M ، این آزمون پس از زوج N متوقف می شود که در آن N اولین مقدار n است، بطوری که یا

$$X_1 + \dots + X_n - (Y_1 + \dots + Y_n) = M \quad \text{یا}$$

$$X_1 + \dots + X_n - (Y_1 + \dots + Y_n) = -M$$

در حالت اول فرض $P_1 > P_2$ و در حالت دوم $P_2 > P_1$ را مورد تأکید قرار می دهیم. به منظور این که معلوم شود آیا این آزمون خوبی است یا نه، چیزی که باید بدانیم احتمالی است که این آزمون منتهی به تصمیم نادرست می شود. یعنی، برای P_1 و P_2 مفروض، که در آن $P_1 > P_2$ احتمال این که این آزمون به غلط $P_1 > P_2$ را تأکید کند چقدر است؟ برای تعیین

این احتمال، توجه داشته باشید که بعد از این که هر زوج بررسی شد، تفاضل تراکمی معالجه شده‌هایی که از داروی (۱) استفاده کرده‌اند در مقابل کسانی که داروی (۲) را مورد استفاده قرار داده‌اند با احتمال $P_1(1 - P_2)$ یک واحد افزایش می‌یابد - چون این احتمال این است که داروی (۱) به معالجه منجر می‌شود و داروی (۲) نمی‌شود - یا با احتمال $1(1 - P_1)P_2$ واحد کاهش می‌یابد، یا با احتمال $P_1P_2 + (1 - P_1)(1 - P_2)$ تغییری نمی‌کند. بنابراین، اگر تنها آن زوج‌هایی را که در آنها تفاضل تراکمی تغییر می‌کند در نظر بگیریم، این تفاضل با احتمال

$$P = P\{\text{واحد بالا یا ۱ واحد پائین} \mid \text{واحد بالا}\} \\ = \frac{P_1(1 - P_2)}{P_1(1 - P_2) + (1 - P_1)P_2}$$

۱ واحد افزایش می‌یابد و با احتمال

$$1 - P = \frac{P_2(1 - P_1)}{P_1(1 - P_2) + (1 - P_1)P_2}$$

۱ واحد کاهش می‌یابد.

بنابراین احتمال این که این آزمون $P_2 > P_1$ را بپذیرد برابر با احتمالی است که این قمارباز هر (یک واحد) شرط را که با احتمال P می‌برد M واحد پایین خواهد آمد قبل از آن که M واحد بالا برود. اما معادله (۴-۵)، با $i = M$ ، $N = 2M$ نشان می‌دهد که این احتمال با رابطه زیر داده شده است.

(آزمون $P_2 > P_1$ را بپذیرد) P

$$= 1 - \frac{1 - \left(\frac{1 - P}{P}\right)^M}{1 - \left(\frac{1 - P}{P}\right)^{2M}} \\ = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{1 - P}{P}\right)^M} \\ = \frac{1}{1 + \gamma^M}$$

که در آن

$$\gamma = \frac{P}{1-P}$$

$$= \frac{P_1(1-P_2)}{P_2(1-P_1)}$$

بنابراین، برای مثال، اگر $P_1 = 0.6$ و $P_2 = 0.4$ ، احتمال تصمیم نادرست وقتی $M = 5$ باشد 0.17 است و این احتمال وقتی $M = 10$ ، به 0.003 کاهش می‌یابد.

۵- تابع $P(0|F)$ يك احتمال است

احتمالهای شرطی در همهٔ خواص احتمالات معمولی صدق می‌کند، که در حکم ۱-۵ ثابت شده است و نشان می‌دهد که $P(E|F)$ در سه اصل موضوع احتمال صدق می‌کند.

حکم ۱-۵

$$0 \leq P(E|F) \leq 1. \quad (\text{الف})$$

$$P(S|F) = 1. \quad (\text{ب})$$

(پ) اگر $E_i, i = 1, 2, \dots$ پیشامدهای دوجه دو ناسازگار باشند، آن‌گاه

$$P\left(\bigcup_1^{\infty} E_i | F\right) = \sum_1^{\infty} P(E_i | F).$$

پوهان: برای اثبات قسمت (الف)، باید نشان دهیم که $0 \leq P(EF) / P(F) \leq 1$. نامساوی سمت چپ آشکار است و سمت راست به‌سبب نتیجه می‌شود، زیرا $EF \subset F$ که نتیجه می‌دهد $P(EF) \leq P(F)$.

قسمت (ب) از رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود، زیرا

$$P(S|F) = \frac{P(SF)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1$$

قسمت (پ) نتیجه می‌شود زیرا

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \mid F\right) &= \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \cap F\right)}{P(F)} \\
 &= \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \cap F\right)}{P(F)} \quad \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \cap F = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \cap F \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(E_i \cap F)}{P(F)} \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i \mid F)
 \end{aligned}$$

زیرا

که در آن تساوی ما قبل آخر نتیجه می شود زیرا $E_i \cap E_j = \emptyset$ نتیجه می دهد که $E_i \cap E_j \cap F = \emptyset$. اگر $Q(E) = P(E \mid F)$ تعریف شود از حکم ۱-۵ نتیجه می شود که $Q(E)$ را می توان به عنوان یک تابع احتمال بر پیشامدهای S در نظر گرفت. پس همه احکامی که قبلاً برای احتمالها ثابت شده است بر این تابع اعمال می شود، برای مثال داریم

$$Q(E_1 \cup E_2) = Q(E_1) + Q(E_2) - Q(E_1 E_2)$$

یا هم ارزان

$$P(E_1 \cup E_2 \mid F) = P(E_1 \mid F) + P(E_2 \mid F) - P(E_1 E_2 \mid F)$$

همچنین، اگر احتمال شرطی $Q(E_1 \mid E_2)$ را با $\frac{Q(E_1 E_2)}{Q(E_2)}$ تعریف کنیم، از معادله (۱-۳) مشاهده می کنیم که

$$Q(E_1) = Q(E_1 \mid E_2)Q(E_2) + Q(E_1 \mid E_2^c)Q(E_2^c) \quad (1-5)$$

زیرا

$$\begin{aligned}
 Q(E_1 \mid E_2) &= \frac{Q(E_1 E_2)}{Q(E_2)} \\
 &= \frac{P(E_1 E_2 \mid F)}{P(E_2 \mid F)} \\
 &= \frac{P(E_1 E_2 F)}{P(F)} \\
 &= \frac{P(E_2 F)}{P(F)} \\
 &= P(E_1 \mid E_2 F)
 \end{aligned}$$

دیده می شود که معادله (۵-۱) با

$$P(E_1|F) = P(E_1|E_2F)P(E_2|F) + P(E_1|E_2^cF)P(E_2^c|F)$$

هم ارز است.

مثال ۵ الف. مثال ۳ الف را که مربوط به یک شرکت بیمه است در نظر بگیرید. این شرکت بر این باور است که افراد را می توان به دو طبقه متمایز تقسیم کرد: دسته ای که مستعد تصادف اند و دسته ای که فاقد آنند. در طی سال مفروض دلخواهی یک فرد مستعد تصادف با احتمال 0.4 تصادف خواهد داشت، در حالی که رقم متناظر برای فرد نامستعد تصادف برابر 0.2 است. احتمال شرطی که یک بیمه گذار جدید، تصادفی در سال دومی که دارای بیمه نامه است، داشته باشد چقدر است؟ در صورتی که بدانیم این بیمه گذار یک تصادف در سال اول داشته است.

حل: اگر A پیشامدی را که این بیمه گذار مستعد تصادف است و A_i ، $i = 1, 2$ ، پیشامدی را که وی تصادفی در سال i ام داشته است، نمایش دهند، احتمال مطلوب $P(A_2|A_1)$ را می توان با شرطی کردن بر این که بیمه گذار مستعد تصادف است یا خیر، به طریق زیر به دست آورد:

$$P(A_2|A_1) = P(A_2|AA_1)P(A|A_1) + P(A_2|A^cA_1)P(A^c|A_1)$$

اکنون

$$P(A|A_1) = \frac{P(A_1A)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1|A)P(A)}{P(A_1)}$$

با وجود این، فرض می شود که $P(A)$ برابر $\frac{3}{10}$ است، و در مثال ۳ الف نشان دادیم که $P(A_1) = 0.26$ بنابراین

$$P(A|A_1) = \frac{(.4)(.3)}{.26} = \frac{6}{13}$$

و در نتیجه

$$P(A^c|A_1) = 1 - P(A|A_1) = \frac{7}{13}$$

چون $P(A_2|AA_1) = .4$ و $P(A_2|A^cA_1) = .2$ می بینیم که

$$P(A_2|A_1) = (.4)\frac{6}{13} + (.2)\frac{7}{13} \approx .29$$

مثال بعدی با مسأله ای در نظریه گشتها سروکار دارد.

مثال ۵ ب. آزمایشهای مستقلی که با احتمال p به پیروزی و $1-p$ به شکست منتهی می شوند انجام می شوند. به محاسبه این احتمال که گشتی مرکب از n پیروزی متوالی قبل از گشتی مرکب از m شکست متوالی رخ دهد، علاقه مندیم.

حل: فرض کنید E پیشامدی را که گردش از n پیروزی متوالی قبل از گشتی از m شکست متوالی رخ دهد، نمایش می دهد، برای به دست آوردن $P(E)$ ، با شرطی کردن برآمد آزمایش اول آغاز می کنیم. یعنی اگر H پیشامدی را که آزمایش اول به پیروزی منتهی شود نمایش دهد، حاصل می شود.

$$P(E) = pP(E|H) + qP(E|H^c) \quad (۲-۵)$$

اکنون، با فرض این که آزمایش اول پیروزی بوده است، یک راه که می توان گشتی از n پیروزی قبل از گردش از m شکست به دست آورد این است که $n-1$ آزمایش بعدی کلاً به پیروزی منتهی شود. بدین ترتیب، بیایید بر این که این امر رخ می دهد یا نه شرطی کنیم. یعنی اگر F پیشامدی باشد که آزمایش ۲ تا n همه پیروزی اند، داریم

$$P(E|H) = P(E|FH)P(F|H) + P(E|F^cH)P(F^c|H) \quad (۳-۵)$$

آشکارا، $P(E|FH) = 1$ ، از سوی دیگر، اگر پیشامد F^cH رخ دهد، آزمایش اول باید به پیروزی منتهی شود، ولی شکستی در زمان معینی در طی $n-1$ آزمایش بعدی خواهد بود. با وجود این، وقتی این شکست رخ می دهد، تمام پیروزیهای قبلی را از بین می برد، و وضعیت دقیقاً مثل این است که با یک شکست آغاز کرده باشیم. بنابراین

$$P(E|F^cH) = P(E|H^c)$$

چون استقلال آزمایشها، مستقل بودن E و F را نتیجه می دهند و همچنین $P(F) = p^{n-1}$ ، از (۳-۵) داریم

$$P(E|H) = p^{n-1} + (1-p^{n-1})P(E|H^c) \quad (۴-۵)$$

اکنون به طریقی مشابه عبارتی برای $P(E|H^c)$ به دست می آوریم . یعنی ، G را پیشامدی که آزمایشهای ۲ تا m همه شکست‌اند فرض می کنیم . پس

$$P(E|H^c) = P(E|GH^c)P(G|H^c) + P(E|G^cH^c)P(G^c|H^c) \quad (5-5)$$

اکنون ، GH^c ، پیشامدی است که تمام m آزمایش اول به شکست منتهی شوند ، پس $P(E|GH^c) = 0$ همچنین ، اگر G^cH^c رخ دهد ، اولین آزمایش شکست است ، ولی لااقل یک پیروزی در $m-1$ آزمایش بعدی وجود دارد . بنابراین ، چون این پیروزی همه شکستهای قبلی را از بین می برد ، ملاحظه می کنیم که

$$P(E|G^cH^c) = P(E|H)$$

بنابراین ، چون $P(G^c|H^c) = P(G^c) = 1 - q^{m-1}$ ، از (۵-۵) داریم

$$P(E|H^c) = (1 - q^{m-1})P(E|H) \quad (6-5)$$

از حل معادلات (۴-۵) و (۶-۵) داریم

$$P(E|H) = \frac{p^{n-1}}{p^{n-1} + q^{m-1} - p^{n-1}q^{m-1}}$$

و

$$P(E|H^c) = \frac{(1 - q^{m-1})p^{n-1}}{p^{n-1} + q^{m-1} - p^{n-1}q^{m-1}}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} P(E) &= pP(E|H) + qP(E|H^c) \\ &= \frac{p^n + qp^{n-1}(1 - q^{m-1})}{p^{n-1} + q^{m-1} - p^{n-1}q^{m-1}} \\ &= \frac{p^{n-1}(1 - q^m)}{p^{n-1} + q^{m-1} - p^{n-1}q^{m-1}} \end{aligned} \quad (7-5)$$

جالب است توجه داشته باشیم که ، بنابر تقارن مسأله ، احتمال به دست آوردن گشتی از m شکست قبل از گشتی از n پیروزی ، با همان معادله (۷-۵) داده می شود که در آن p را با q و n را با m تعویض کرده ایم . بنابراین احتمال برابر است با

$$= \frac{q^{m-1}(1-p^n)}{q^{m-1} + p^{n-1} - q^{m-1}p^{n-1}} \quad (۸-۵)$$

چون مجموع معادلات (۷-۵) و (۸-۵) برابر ۱ است، از آن نتیجه می شود که با احتمال ۱ گشتی از n پیروزی یا گشتی از m شکست مآلاً رخ خواهد داد.

به عنوان مثالی از معادله (۷-۵)، مشاهده می کنیم که در پرتاب سکه ای منظم احتمال این که گشتی از ۲ شیر قبل از گشتی از ۳ خط حاصل شود برابر $\frac{7}{10}$ است و برای ۲ شیر متوالی قبل از ۴ خط متوالی این احتمال به $\frac{5}{8}$ افزایش می یابد. در مثال بعدی به مسأله جور بودن مونتمورت (مثال ۵ خ، فصل ۲) باز می گردیم، و این بار با استفاده از احتمالهای شرطی راه حلی ارائه می دهیم.

مثال ۵ پ. در یک میهمانی کلاههای n مرد بطور کامل مخلوط می شود و هر مرد بتصادف کلاهی را انتخاب می کند. اگر مردی کلاه خودش را صاحب شده باشد، گوئیم که یک جور بودن رخ داده است.

۱- احتمال این که هیچ جور بودن وجود نداشته باشد، چقدر است؟

۲- احتمال دقیقاً k جور بودن چقدر است؟

حل: فرض کنید E پیشامدی را نشان می دهد که، هیچ جور بودن رخ ندهد، و برای نشان دادن بستگی به n ، می نویسیم $P_n = P(E)$. با شرطی کردن براین که اولین مرد کلاه خودش را انتخاب می کند یا خیر، آغاز می کنیم. این پیشامدها را M و M^c می نامیم. در این صورت

$$P_n = P(E) = P(E|M)P(M) + P(E|M^c)P(M^c)$$

واضح است که، $P(E|M) = 0$ و بدین ترتیب

$$P_n = P(E|M^c) \frac{n-1}{n} \quad (۹-۵)$$

اکنون، $P(E|M^c)$ برابر این احتمال است که هیچ جور بودن وجود نداشته باشد وقتی $n-1$ مرد از مجموعه $n-1$ کلاه که شامل کلاه یکی از مردها نیست، انتخاب می کنند. این امر ممکن است به صورت هر یک از دو راه دوبه دو ناسازگار رخ دهد. یا هیچ جور بودن وجود ندارد و مرد اضافی کلاه اضافی را انتخاب نمی کند (این کلاه مردی است که ابتدا

انتخاب می کند) یا هیچ جور بودن وجود ندارد و مرد اضافی کلاه اضافی را انتخاب می کند. احتمال پیشامد اول از این پیشامدها درست برابر P_{n-1} است که می توان آن را با در نظر گرفتن کلاه اضافی به عنوان «متعلق بودن به مرد اضافی» فهمید. چون پیشامد دوم دارای احتمال $[1/(n-1)] P_{n-2}$ است، داریم

$$P(E|M^c) = P_{n-1} + \frac{1}{n-1} P_{n-2}$$

و بنابراین، از معادله (۵-۹)

$$P_n = \frac{n-1}{n} P_{n-1} + \frac{1}{n} P_{n-2}$$

یا هم ارز آن

$$P_n - P_{n-1} = -\frac{1}{n} (P_{n-1} - P_{n-2}) \quad (5-10)$$

با وجود این، چون P_n برابر احتمالی است که هیچ جور بودن، وقتی n مرد از بین کلاههای خودشان انتخاب می کنند، وجود نداشته باشد، داریم

$$P_1 = 0 \quad P_2 = \frac{1}{2}$$

و بدین ترتیب، از معادله (۵-۱۰)

$$P_3 - P_2 = -\frac{(P_2 - P_1)}{3} = -\frac{1}{3!} \quad \text{یا} \quad P_3 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}$$

$$P_4 - P_3 = -\frac{(P_3 - P_2)}{4} = \frac{1}{4!} \quad \text{یا} \quad P_4 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$$

و بطور کلی، ملاحظه می کنیم که

$$P_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

به منظور به دست آوردن دقیقاً k جورشدگی، گروه ثابتی از k مرد را در نظر می گیریم. احتمال این که این گروه و تنها این گروه، کلاههای خودشان را انتخاب کنند برابر است با

$$\frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \dots \frac{1}{n-(k-1)} P_{n-k} = \frac{(n-k)!}{n!} P_{n-k}$$

که در آن P_{n-k} برابر احتمال شرطی است که $n-k$ مرد دیگر در انتخاب از بین کلاه‌های خودشان، هیچ جورشدنی نداشته باشند چون $\binom{n}{k}$ انتخاب مجموعه‌ای از k مرد داریم، احتمال مطلوب دقیقاً k جورشدگی برابر است با

$$\frac{P_{n-k}}{k!} = \frac{\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}}{k!}$$

یک مفهوم مهم در نظریه احتمال، استقلال شرطی پیشامدهاست. می‌گوییم که پیشامدهای E_1 و E_2 با فرض F مستقل مشروطند، اگر، در صورت رخ دادن F ، احتمال شرطی رخ دادن E_1 ، به وسیله اطلاعات مربوط به این که E_2 رخ داده است یا خیر، تغییر نکند. بطور رسمی تر، E_1 و E_2 ، با فرض رویدادن F مستقل مشروط، نامیده می‌شوند اگر

$$P(E_1 | E_2 F) = P(E_1 | F) \quad (11-5)$$

یا هم ارز آن

$$P(E_1 E_2 | F) = P(E_1 | F) P(E_2 | F) \quad (12-5)$$

مفهوم استقلال شرطی را سهولت می‌توان به بیش از دو پیشامد گسترش داد که به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

خواننده توجه دارد که مفهوم استقلال شرطی بطور ضمنی در مثال ۵ الف به کار رفته است، که در آنجا بطور ضمنی فرض شده بود که پیشامدهایی که یک بیمه‌گذار در سال i ام تصادفی داشته باشد $i = 1, 2, \dots$ به طور شرطی مستقل بود، با فرض این که این فرد مستعد تصادف باشد یا خیر. [این امر برای محاسبه $P(A_2 | A_1 A_2)$ و $P(A_2 | A_1^c A_2)$ به ترتیب برابر 0.4 و 0.2 به کار رفت] مثال زیر، که گاهی دستور توالی لاپلاس نامیده می‌شود، مفهوم استقلال شرطی را بیشتر روشن می‌کند.

مثال ۵ ت. دستور توالی لاپلاس $k+1$ سکه در جعبه‌ای موجود است. سکه i ام، وقتی پرتاب شود، با احتمال i/k شیر می‌آید $i = 0, 1, \dots, k$. سکه‌ای بتصادف از جعبه بیرون کشیده و سپس آن را مکرراً پرتاب می‌کنیم. اگر n پرتاب اول همه شیر بیایند، احتمال شرطی این که پرتاب $(n+1)$ ام نیز شیر بیاید چقدر است؟

حل: فرض کنید E_i پیشامدی را که در ابتدا سکه i ام بیرون کشیده شده است نمایش می‌دهد F_n پیشامدی را که همه n پرتاب اول شیر آمده است و F پیشامد پرتاب $(n+1)$ ام شیر است باشد. اکنون احتمال مطلوب $P(F|F_n)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P(F|F_n) = \sum_{i=0}^k P(F|F_n E_i) P(E_i|F_n)$$

اکنون، با فرض این که سکه i ام بیرون کشیده شده باشد، منطقی است فرض کنیم این برآمدها بطور شرطی مستقلند و هر کدام با احتمال i/k شیر می‌آید. بنابراین

$$P(F|F_n E_i) = P(F|E_i) = \frac{i}{k}$$

همچنین

$$\begin{aligned} P(E_i|F_n) &= \frac{P(E_i F_n)}{P(F_n)} \\ &= \frac{P(F_n|E_i) P(E_i)}{\sum_{j=0}^k P(F_n|E_j) P(E_j)} \\ &= \frac{(i/k)^n [1/(k+1)]}{\sum_{j=0}^k (j/k)^n [1/(k+1)]} \end{aligned}$$

بنابراین

$$P(F|F_n) = \frac{\sum_{i=0}^k (i/k)^{n+1}}{\sum_{j=0}^k (j/k)^n}$$

اما اگر k بزرگ باشد، می‌توان تقریبهای انتگرال زیر را به کار برد

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{n+1} &\approx \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{k} \sum_{j=0}^k \left(\frac{j}{k}\right)^n &\approx \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

و بدین ترتیب برای k بزرگ

$$P(F|F_n) \approx \frac{n+1}{n+2}$$

تعمیرات نظری

۱- بپذیرید که قانون اعداد بزرگ برنولی درست است، این قانون بیانگر آن است که اگر آزمایشی تحت شرایط دقیقاً یکسانی مدام تکرار شود، نسبت دفعاتی که پیشامد E رخ می دهد، با احتمال 1 ، برابر $P(E)$ است. اکنون آن تکرارهایی از این آزمایش را که برآمد نقطه ای در F است را در نظر بگیرید. نشان دهید که نسبت این تکرارها که در آنها این برآمد در E نیز هست، با احتمال 1 ، برابر با $P(E|F)$ است.

۲- ثابت کنید اگر $P(E_i | E_1 \dots E_{i-1}) > 0$ ، $i = 1, \dots, n$ ، آن گاه

$$P(E_1 E_2 \dots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 E_2) \dots \\ P(E_n | E_1 E_2 \dots E_{n-1})$$

۳- گلوله ای در یکی از n جعبه است و با احتمال P_i ، این گلوله در جعبه i ام است. اگر گلوله در جعبه i باشد، جستجوی این جعبه با احتمال α_i آن را ظاهر می کند. نشان دهید احتمال شرطی این که گلوله در جعبه z باشد، در صورتی که جستجوی جعبه i آن را ظاهر نمی کند، برابر است با

$$\frac{P_j}{1 - \alpha_i P_i} \quad \text{و } j \neq i \\ \frac{(1 - \alpha_i) P_i}{1 - \alpha_i P_i} \quad \text{و } j = i$$

۴- گزاره های زیر را ثابت کنید یا مثالهای نقض ارائه دهید:

(الف) اگر E مستقل از F و E مستقل از G باشد، آن گاه E مستقل از $F \cup G$ است.
 (ب) اگر E مستقل از F و E مستقل از G باشد و $FG = \emptyset$ ، آن گاه E مستقل از $F \cup G$ است.

(پ) اگر E مستقل از F و F مستقل از G باشد و FG از E مستقل باشد، آن گاه G مستقل از EF است.

۵- گویم پیشامد F حامل اطلاعات منفی در باره پیشامد E است و می نویسیم $F \searrow E$ اگر

$$P(E|F) \leq P(E)$$

گزاره های شرطی را ثابت کنید یا مثالهای نقض ارائه دهید:

(الف) اگر $F \searrow E$ ، آن گاه $E \searrow F$.

(ب) اگر $F \searrow E$ و $F \searrow G$ ، آن گاه $E \searrow G$.

(پ) اگر $F \searrow E$ و $G \searrow E$ ، آن گاه $FG \searrow E$.

(الف) ، (ب) ، و (پ) را هرگاه \searrow با \nearrow جانشینی شود تکرار کنید، \nearrow بیانگر آن است که F حامل اطلاعات مثبت در مورد E است و می نویسیم $E \nearrow F$ ، هرگاه

$$P(E|F) \geq P(E)$$

۶- فرض کنید $\{E_n, n \geq 1\}$ و $\{F_n, n \geq 1\}$ دنباله‌هایی صعودی از پیشامدها هستند که دارای حد E و F می‌باشند. نشان دهید که اگر برای هر n ، E_n مستقل از F_n باشد، آن گاه E مستقل از F است.

۷- ثابت کنید اگر E_1, E_2, \dots, E_m پیشامدهای مستقل باشد، آن گاه

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = 1 - [1 - P(E_1)][1 - P(E_2)] \dots [1 - P(E_n)]$$

۸- (الف) کیسه‌ای محتوی n گلوله سفید و m گلوله سیاه است. هر بار یک گلوله بیرون می‌آوریم تا این که تنها گلوله‌های هم‌رنگ باقی بمانند. نشان دهید که با احتمال $n / (n + m)$ همه آنها سفید است.

راهنمایی: تصور کنید این آزمایش تا وقتی همه گلوله‌ها بیرون آورده شوند ادامه می‌یابد و آخرین گلوله بیرون آورده شده را در نظر بگیرید.

(ب) در استخری سه نوع ماهی قرمز، آبی و سبز و به ترتیب r ، b و g عدد وجود دارد. فرض کنید یک ماهی را بتصادف از استخر بیرون می‌آوریم (یعنی هرگزینش با احتمال یکسان یکی از ماهیهای باقی مانده می‌باشد). احتمال این که ماهیهای قرمز اولین نوع باشند که تمام می‌شود چقدر است.

راهنمایی: بنویسید $P\{R\} = P\{RGB\}1 - P\{RGP\}$ و احتمالهای سمت راست را ابتدا با شرطی کردن بر آخرین گونه‌ای که باید بیرون کشیده شود شرطی کنید.

۹- اگر $0 \leq a_i \leq 1$ ، $i = 1, 2, \dots$ ، نشان دهید.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[a_i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - a_j) \right] + \prod_{i=1}^{\infty} (1 - a_i) = 1$$

راهنمایی: فرض کنید تعدادی بی شمار سکه را پرتاب کرده ایم. q را برابر این احتمال که سکه i ام شیر بیاید فرض کنید.

۱۰- احتمال شیر آمدن در یک پرتاب سکه ای برابر p است. نفر A را در نظر بگیرید که شروع به پرتاب این سکه کرده و آن قدر ادامه می دهد تا خط بیاید و از این لحظه به بعد نفر B شروع به پرتاب کرده و آن قدر ادامه می دهد تا خط ظاهر شود، سپس A این عمل را ادامه می دهد و به همین ترتیب الی آخر، فرض کنید $P_{n,m}$ احتمالی را که A دارای n شیر باشد قبل از آن که B ، m شیر جمع آوری کرده باشد، نشان دهد. نشان دهید.

$$P_{n,m} = pP_{n-1,m} + (1-p)(1 - P_{n,n})$$

۱۱- فرض کنید که شخصی با حریفی که دارای ثروت سرشاری است قمار بازی می کند و در هر مرحله این شخص با احتمالهای p و $1-p$ به ترتیب یک واحد می برد یا می بازد. نشان دهید احتمال این که شخص در آخر کار ورشکست شود عبارت است از

$$\begin{aligned} & 1 \quad \text{و} \quad p \leq \frac{1}{2} \\ & (q/p)^i \quad \text{و} \quad p > \frac{1}{2} \quad \text{با} \quad q = 1 - p \end{aligned}$$

که در آن i سرمایه اولیه این شخص است.

۱۲- آزمایشهای مستقل که با احتمال p منتهی به پیروزی می شوند متوالیاً انجام می شوند تا کلاً r پیروزی حاصل شود. نشان دهید احتمال این که دقیقاً n آزمایش لازم باشد برابر است با

$$\binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

با استفاده از این نتیجه، مسأله امتیازها را حل کنید (مثال ۴ د).

۱۳- آزمایشهای مستقل که با احتمال p به پیروزی و احتمال $1-p$ به شکست منتهی می شوند، آزمایشهای برنولی نامیده می شوند. فرض کنید P_n این احتمال را که n آزمایش برنولی به تعداد زوجی از موفقیتها منتهی شود نمایش می دهد (0 را عدد زوج در نظر می گیریم). نشان دهید

$$P_n = p(1 - P_{n-1}) + (1-p)P_{n-1} \quad n \geq 1$$

و با استفاده از این مطلب (با استقرا) ثابت کنید که

$$P_n = \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2}$$

۱۴- فرض کنید Q_n این احتمال را که در n پرتاب یک سکه متعادل هیچ گردش از سه شیر متوالی ظاهر نشود نمایش می دهد. نشان دهید

$$Q_n = \frac{1}{2}Q_{n-1} + \frac{1}{4}Q_{n-2} + \frac{1}{8}Q_{n-3}$$

$$Q_0 = Q_1 = Q_2 = 1$$

Q_8 را پیدا کنید .

۱۵- اگر A دارای $n + 1$ و B دارای n سکه متعادل بوده و آنها را پرتاب کنند، نشان دهید احتمال این که A شیرهای بیشتری از B به دست آورد برابر $\frac{1}{2}$ است .

راهنمایی : براین که کدام بازیکن بعد از آن که n سکه را پرتاب می کند شیرهای بیشتری دارد شرطی کنید (سه حالت ممکن است).

۱۶- مسأله ورشکستگی قمارباز را با این استثنا که A و B موافقت می کنند بیش از n دست بازی نکنند در نظر بگیرید . فرض کنید $P_{n,i}$ احتمالی را که کل پول A تمام می شود نمایش دهد، در صورتی که A با i و B با $N - i$ واحد شروع می کنند برای $P_{n,i}$ معادله ای برحسب $P_{n-1,i-1}$ و $P_{n-1,i+1}$ به دست آورده و $P_{7,3}$ را محاسبه کنید $N = 5$.

۱۷- دو کیسه که هر یک محتوی گلوله های سفید و سیاه است در نظر بگیرید، احتمالهای بیرون آوردن گلوله های سفید از کیسه اول و دوم به ترتیب برابر است با p و p' . گلوله هایی پی در پی با جایگذاری به شرح زیر انتخاب می کنیم :

در ابتدا گلوله ای با احتمال α از کیسه اول و با احتمال $1 - \alpha$ از کیسه دوم بیرون آورده می شود . سپس انتخابهای بعدی طبق این دستور انجام می شود که هرگاه گلوله سفیدی بیرون آورده شود (و جایگذاری شود)، گلوله بعدی از همان کیسه بیرون آورده می شود، ولی اگر گلوله سیاه استخراج شود، گلوله، بعدی از کیسه دیگر برداشته می شود . فرض کنید α_n احتمالی را که گلوله n ام از کیسه اول انتخاب شده است نشان دهد . نشان دهید که

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n(p + p' - 1) + 1 - p' \quad n \geq 1$$

و با استفاده از این مطلب ثابت کنید که

$$\alpha_n = \frac{1-p'}{2-p-p'} + \left(\alpha - \frac{1-p'}{2-p-p'} \right) (p+p'-1)^{n-1}$$

فرض کنید P_n این احتمال را که گلوله n ام انتخاب شده سفید باشد، نشان می دهد. P_n را پیدا کنید. همچنین $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ را محاسبه کنید.

۱۸- مسأله برگه رأی - در انتخاباتی کاندیدای A ، n رأی می آورد که در آن $n > m$ با فرض این که کلیه $m!$ / $n!$ / $(n+m)!$ ترتیب این رأیها، هم احتمال باشند، فرض کنید $P_{n,m}$ ، این احتمال را که A در شمارش آرا همواره جلو باشد نشان دهد.

(الف) $P_{2,1}$ ، $P_{3,1}$ ، $P_{3,2}$ ، $P_{4,1}$ ، $P_{4,2}$ ، $P_{4,3}$ را محاسبه کنید.

(ب) بر اساس نتایج (الف)، مقدار $P_{n,m}$ را حدس بزنید.

(پ) فرمول بازگشتی برای $P_{n,m}$ بر حسب $P_{n-1,m}$ و $P_{n,m}$ با شرطی کردن بر چه کسی رأی ... می آورد (جای خالی را پر کنید) به دست آورید.

(ت) درستی حدس خود را در (ب) با استفاده از (پ) با برهان استقرایی بر $m+n$ تحقیق کنید.

۱۹- به عنوان الگوی ساده شده ای برای پیش بینی وضع هوا، فرض کنید فردا وضع هوا (آفتابی یا بارانی) با احتمال P با وضع آن در امروز یکسان خواهد بود. اگر وضع هوا اول ژانویه آفتابی باشد، نشان دهید P_n ، احتمال این که n روز بعد هوا آفتابی خواهد بود در

$$P_n = (2p-1)P_{n-1} + (1-p) \quad n \geq 1$$

$$P_0 = 1$$

صدق می کند ثابت کنید

$$P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n \quad n \geq 0$$

۲۰- کیسه ای محتوی a گلوله سفید و b گلوله سیاه است. چند گلوله از این کیسه طبق روش زیر بیرون می آوریم:

(الف) گلوله ای بتصادف انتخاب کرده و کنار می گذاریم

(ب) سپس گلوله دومی انتخاب می شود؛ اگر با گلوله قبلی هم رنگ نباشد، به کیسه برگردانده می شود و فرآیند از آغاز تکرار می شود اگر با گلوله قبلی هم رنگ باشد، آن را کنار می گذاریم و از (ب) شروع می کنیم.

به بیان دیگر، گلوله‌ها نمونه‌گیری می‌شوند و کنار گذاشته می‌شوند تا این که تغییر رنگ رخ دهد که در این مرحله آخرین گلوله به کیسه برگردانده شده و فرآیند دوباره شروع می‌شود. فرض کنید $P_{a,b}$ احتمالی را که آخرین گلوله در کیسه سفید باشد نمایش می‌دهد. ثابت کنید که

$$P_{a,b} = \frac{1}{2}$$

راهنمایی: از استقراء بر $k = a + b$ استفاده کنید.

۲۱- مستقیماً ثابت کنید که

$$P(E|F) = P(E|FG)P(G|F) + P(E|FG^c)P(G^c|F)$$

۲۲- هم ارزی معادلات (۵-۱۱) و (۵-۱۲) را ثابت کنید.

۲۳- تعریف استقلال شرطی را به بیش از ۲ پشامد تعمیم دهید.

۲۴- ثابت کنید یا مثالی نقض ارائه دهید که اگر E_1 و E_2 مستقل باشند، آن گاه با معلوم بودن F ، مستقل مشروطند.

۲۵- در دستور توالی لاپلاس (مثال ۵ ت) نشان دهید که اگر n پرتاب اول همه شیر بیایند، احتمال شرطی که m پرتاب بعدی نیز همه شیر باشند برابر است با $(n+1)/(n+m+1)$.

۲۶- در دستور توالی لاپلاس، فرض کنید که n پرتاب اول به r شیر و $n-r$ خط منتهی شده باشد. نشان دهید احتمال این که پرتاب $(n+1)$ ام شیر بیاید برابر است با $\frac{r+1}{n+2}$. برای اثبات آن باید اتحاد زیر را ثابت کرد و به کار برد

$$\int_0^1 y^n (1-y)^m dy = \frac{n! m!}{(n+m+1)!}$$

راهنمایی: برای اثبات اتحاد بالا، فرض کنید $C(n, m) = \int_0^1 y^n (1-y)^m dy$. با انتگرال گیری جزء به جزء داریم

$$C(n, m) = \frac{m}{n+1} C(n+1, m-1)$$

با شروع از $C(n, 0) = 1/n+1$ ، این اتحاد را با استقراء بر m ثابت کنید.

۲۷- فرض کنید یکی از دوستان شما با گرایشی غیر ریاضی ولی گرایشی فلسفی ادعا می‌کند که دستور توالی لاپلاس باید نادرست باشد به این دلیل که می‌تواند به نتایج مضحکی منتهی شود. برای مثال، وی اظهار می‌کند (اگر پسری ۱۰ ساله باشد، طبق این دستور و با توجه

به این که این پسر ۱۰ سال عمر کرده است، احتمال این که یک سال دیگر زنده بماند $\frac{11}{12}$ است. از سوی دیگر، اگر این پسر، پدر بزرگی ۸۰ ساله داشته باشد احتمال این که پدر بزرگ یک سال دیگر زنده باشد برابر $\frac{81}{82}$ است. لذا این امر مسخره است. واضح است که ا شانس زنده ماندن وی یک سال دیگر بیشتر از پدر بزرگش می باشد، چه پاسخی برای دوست خود دارید؟

مسائل

- ۱- دو تاس منظم را می ریزیم احتمال مشروط این که لااقل یکی از آنها با ۶ خال ظاهر شود چقدر است؟ در صورتی که می دانیم این تاسها با خالهای متفاوت ظاهر می شوند.
- ۲- اگر دو تاس منظم را بریزیم احتمال مشروط این که در تاس اول ۶ ظاهر شود چقدر است؟ در صورتی که می دانیم مجموع خالهای دو تاس برابر ۱ است تمام مقادیر i بین ۲ و ۱۲ محاسبه کنید.
- ۳- در یک دست بازی بریج، با استفاده از معادله (۲-۱)، احتمال مشروط این که شرف دارای ۳ خال پیک باشد را محاسبه کنید در صورتی که می دانیم شمال - جنوب کلاً دارای ۸ خال یک می باشند.
- ۴- احتمال این که لااقل یک تاس از یک جفت تاس منظم ۶ بیاید چقدر است، در صورتی که می دانیم مجموع خالها برابر i ، $i = 2, 3, \dots$ است؟
- ۵- کیسه ای محتوی ۶ گلوله سفید و ۹ گلوله سیاه است. اگر بخواهیم ۴ گلوله بتصادف و بدون جایگذاری بیرون آوریم، احتمال این که، دو گلوله اول منتخب سفید و دو گلوله بعدی سیاه باشند چقدر است؟
- ۶- کیسه ای را در نظر بگیرید که محتوی ۱۲ گلوله است که ۸ تایی آنها سفید است. نمونه ای به حجم ۴ با جایگذاری (و بدون جایگذاری) بیرون می آوریم - احتمال مشروط این که (در هر حالت) گلوله اول و سوم بیرون آمده سفید باشد چقدر است؟ در صورتی که می دانیم نمونه منتخب دقیقاً دارای ۳ گلوله سفید است.

۷- شاهی از یک خانواده ای با دو فرزند است. احتمال این که فرزند دیگر خانواده دختر باشد چقدر است؟

۸- زوجی دو فرزند دارند. احتمال این که هر دو دختر باشند، در صورتی که فرزند ارشد دختر باشد، چقدر است؟

۹- سه کیسه را در نظر بگیرید، کیسه A دارای ۲ گلوله سفید و ۴ گلوله قرمز، B دارای A گلوله سفید و ۴ قرمز، و C دارای ۱ گلوله سفید و ۳ قرمز است. اگر از هر کیسه ۱ گلوله بیرون آورده شود، احتمال این که، گلوله منتخب از کیسه A سفید باشد در صورتی که می دانیم دقیقاً ۲ گلوله سفید انتخاب شده است، چقدر است؟

۱۰- در بازی بریج، غرب دارای هیچ آسی نیست. احتمال این که حریف وی دارای: (الف) هیچ آسی نباشد، (ب) دارای ۲ آس یا بیشتر باشد، چقدر است؟ این احتمالها چه مقداری خواهند داشت اگر غرب دقیقاً دارای یک آس باشد.

۱۱- سه کارت بازی بتصادف، بدون جایگذاری، از یک دست ورق بازی معمولی مرکب از ۵۲ کارت بیرون کشیده شده است. این احتمال مشروط را که کارت منتخب اولی پیک باشد، در صورتی که می دانیم کارت دوم و سوم پیک هستند، محاسبه کنید.

۱۲- کیسه ای در ابتدا محتوی ۵ گلوله سفید و ۷ گلوله سیاه است. هربار یک گلوله انتخاب می شود و پس از مشاهده رنگ آن همراه با دو گلوله دیگر هم رنگ خودش به کیسه باز گردانده می شود.

(الف) احتمالی را که دو گلوله اول منتخب سیاه و دو گلوله بعدی سفید باشد محاسبه کنید.

(ب) احتمالی را که از ۴ گلوله اول منتخب، دقیقاً ۲ گلوله سیاه باشد، بیابید.

۱۳- کیسه I محتوی ۲ گلوله سفید و ۴ قرمز است، در حالی که کیسه II محتوی ۱ گلوله سفید و ۱ گلوله قرمز است. گلوله ای بتصادف از کیسه I بیرون آورده و در II قرار می دهیم و سپس گلوله ای به تصادف از کیسه II بیرون می آوریم.

(الف) احتمال این که گلوله منتخب از کیسه II سفید باشد چقدر است؟

(ب) احتمال مشروط این که گلوله جا به جا شده سفید باشد، در صورتی که می دانیم گلوله سفیدی از کیسه II بیرون آورده شده است، چقدر است؟

۱۴- چگونه ۲۰ گلوله، ۱۰ تا سفید و ۱۰ تا سیاه، را می توان در دو کیسه قرار داد بطوری که اگر یک کیسه بتصادف انتخاب شده و یک گلوله از آن بتصادف بیرون آورده شود، احتمال بیرون آوردن یک گلوله سفید بیشینه شود؟

۱۵- هر یک از ۲ گلوله را سیاه یا طلایی رنگ کرده و در یک کیسه قرار می دهیم. فرض کنید هر گلوله با احتمال $\frac{1}{2}$ سیاه رنگ می شود و این پیشامدها مستقل است:

(الف) فرض کنید اطلاعاتی کسب می کنید که رنگ طلایی مصرف شده است (و بنابراین لااقل یکی از گلوله ها طلایی رنگ شده است). این احتمال مشروط را که هر دو گلوله طلایی رنگ شده باشند محاسبه کنید.

(ب) اکنون فرض کنید که کیسه واژگون شده و ۱ گلوله از آن به بیرون پرت می شود که به رنگ طلایی است. احتمال این که هر دو گلوله در این حالت طلایی باشند چقدر است؟ (توضیح دهید).

۱۶- به منظور برآورد تعداد افرادی که بیش از ۵۰ سال داشته و در شهری با جمعیت مشخص ۱۰۰۰۰۰ ساکن هستند روش زیر پیشنهاد شده است. «در حالی که در خیابان قدم می زنید، حساب در صد افرادی را که با آنها برخورد می کنید و بیش از ۵۰ سال دارند نگه دارید. این کار را چند روز ادامه داده و سپس در صد حاصل را در ۱۰۰۰۰۰ ضرب کنید تا برآورد به دست آید» این روش را تعبیر کنید.

راهنامه‌ی: فرض کنید p نسبت افراد بالای ۵۰ سال را در این شهر نشان می دهد. به علاوه فرض کنید α_1 نسبت دفعاتی باشد که فردی زیر ۵۰ سال در خیابانها وقت گذرانی می کند و α_2 همان نسبت برای افراد بالای ۵۰ سال باشد. این روش کدام مقدار را برای برآورد پیشنهاد می کند؟ این مقدار چه وقت تقریباً برابر p است؟

۱۷- فرض کنید ۵ درصد مردان و ۲۵٪ درصد زنان کدر رنگند. فرد کدر رنگی بتصادف انتخاب می شود. احتمال این که این فرد مرد باشد چقدر است؟ فرض کنید تعداد مردان و زنان برابر است اگر در این جمعیت تعداد مردان دوبرابر زنان باشند این احتمال چقدر است؟

۱۸- دو جعبه در نظر بگیرید که یکی محتوی ۱ مهره سیاه و ۱ مهره سفید است و دیگری ۲ مهره سیاه و ۱ مهره سفید است. جعبه ای بتصادف انتخاب شده و از آن مهره ای بتصادف بیرون کشیده می شود. احتمال این که این مهره سیاه باشد چقدر است؟ احتمال این که جعبه اول جعبه منتخب باشد، در صورتی که می دانیم این مهره سفید است، چقدر است؟

۱۹- rigour و rigour به ترتیب املاى امریکایی و انگلیسی کلمه مذکور است. فردی که در هتل پاریس اقامت دارد، این کلمه را می نویسد و حرفی که بتصادف از املاى وی انتخاب شده است یک حرف صدادار است. اگر ۴۰ درصد از انگلیسی زبانان در هتل انگلیسی و ۶۰ درصد امریکایی باشند، احتمال این که این نویسنده انگلیسی باشد چقدر است؟

۲۰- کیسه A محتوی ۲ گلوله سفید و ۱ گلوله سیاه است، در حالی که کیسه B محتوی ۱ سفید و ۵ سیاه است. گلوله ای را بتصادف از کیسه A بیرون آورده و در B قرار می دهیم. گلوله ای را از B بیرون آورده و مشاهده می کنیم سفید است. احتمال این که گلوله جا به جا شده سفید باشد چقدر است؟

۲۱- در مثال ۳ فرض کنید که این مدرک جدید در معرض تغییرهای ممکن مختلف است و در واقع تنها نشان می دهد که ۹۰ درصد احتمال دارد که این بزهکار مشخصه معین را دارا باشد. در این مورد چقدر احتمال دارد که این متهم گناهکار باشد (مانند قبل فرض کنید که وی دارای این مشخصه می باشد)؟

۲۲- کلاس درس احتمالی مرکب از ۳۰ دانشجو است که ۱۵ نفر از آنها قوی، ۱۰ نفر متوسط و ۵ نفر ضعیفند. کلاس درس احتمال دومی نیز مرکب از ۳۰ دانشجو است که ۵ نفر قوی، ۱۰ نفر متوسط و ۱۵ نفر ضعیفند. شما (به عنوان کارشناس) از این اعداد با خبرید ولی نمی دانید مربوط به کدام کلاس است. اگر از دانشجویی که بتصادف از هر کلاس انتخاب شده است امتحان کرده و دریابید که دانشجوی کلاس A دانشجویی متوسط است درحالی که دانشجوی کلاس B ضعیف است، احتمال این که کلاس A کلاسی قوی تر باشد چقدر است؟

۲۳- فروشگاههای A، B و C به ترتیب دارای ۵۰، ۷۵ و ۱۰۰ کارمندند که به ترتیب ۵۰، ۶۰ و ۷۰ درصد آنها زن هستند. کناره گیری از کار بین کلیه کارمندان، بدون توجه به جنسیت دارای احتمال برابر است. کارمندی استعفا می دهد، این کارمند زن است. احتمال این که وی کارمند فروشگاه C باشد چقدر است؟

۲۴- (الف) قماربازی در جیب خود دو سکه دارد یکی منظم و دیگری دو رویه شیر است. یکی از سکه ها را بتصادف انتخاب کرده و پرتاب می کند، سکه شیر می آید احتمال این که سکه منظم باشد چقدر است؟

(ب) فرض کنید که وی همان سکه را برای بار دوم پرتاب می کند و بازهم شیر می آید.

اکنون احتمال این که این سکه منظم باشد چقدر است؟

(پ) فرض کنید وی همان سکه را برای بار سوم پرتاب می کند و سکه خط می آید. اکنون

احتمال این که سکه منظم باشد چقدر است؟

۲۵ - کیسه A دارای ۵ گلوله سفید و ۷ گلوله سیاه است. کیسه B دارای سه گلوله سفید و

۱۲ گلوله سیاه است. سکه منظمی را پرتاب می کنیم، اگر برآمد شیر باشد، گلوله ای از

کیسه A و اگر برآمد خط باشد از کیسه B انتخاب می شود. فرض کنید گلوله سفیدی

انتخاب شده است؛ احتمال این که این سکه خط آمده باشد چقدر است؟

۲۶ - در مثال ۳ الف، احتمال این که کسی در سال دوم تصادفی داشته باشد، در صورتی که

می دانیم در سال اول هیچ تصادفی نداشته است، چقدر است؟

۲۷ - نمونه ای را به حجم ۳ که به طریق زیر بیرون آورده شده است در نظر بگیرید: با کیسه ای

که محتوی ۵ گلوله سفید و ۷ قرمز است آغاز می کنیم. در هر مرحله یک گلوله بیرون

آورده و رنگ آن را یادداشت می کنیم. سپس این گلوله را همراه با یک گلوله اضافی

همرنگ به کیسه بر می گردانیم. احتمالی را که این نمونه شامل دقیقاً (الف) ۵ گلوله سفید،

(ب) ۱ گلوله سفید (پ) ۳ گلوله سفید (ت) ۲ گلوله سفید باشد، چقدر است؟

۲۸ - کیسه ای دارای b گلوله سیاه و r گلوله قرمز است. یکی از گلوله ها بتصادف بیرون آورده

می شود، به هنگام بازگرداندن این گلوله به کیسه C گلوله دیگر هم رنگ با آن را در داخل

کیسه قرار می دهیم. اکنون فرض کنید گلوله دیگری بیرون می آوریم نشان دهید احتمال

این که گلوله اول سیاه باشد، در صورتی که می دانیم گلوله دومی که استخراج شده است

قرمز است، برابر است با $(b/b+r+c)$.

۲۹ - یک دست ورق بازی را بُر زده و سپس به دو نیمه مساوی ۲۶ تایی تقسیم می کنیم. یک

کارت از یکی دو نیمه بیرون می آوریم، آس از کار در می آید. سپس این آس را در نیمه

دوم قرار می دهیم. این نیمه را بُر زده و کاردتی از آن بیرون می آوریم. احتمالی را که این

کارت یک آس باشد، محاسبه کنید.

راهنمایی: بر این که آیا کارت تعویض شده انتخاب شده است یا خیر شرطی کنید.

۳۰ - سه آشپز A، B و C نوع خاصی کیک را می پزند که به ترتیب با احتمالهای ۰٫۰۲، ۰٫۰۳،

و ۰٫۰۵ پُف نمی کند. در رستورانی که این آشپزها کار می کنند، A پنجاه درصد، B

سی درصد و C بیست درصد این کیکها را می پزند. چه نسبتی از شکستهها را A

باعث می شود؟

۳۱- جعبه ای محتوی ۳ سکه است. یکی دو رویه شیر، دیگری منظم و سومی با احتمال شیر آمدن $\frac{75}{100}$ ، اریب است. وقتی یکی از سه سکه بتصادف انتخاب و پرتاب می شود، شیر می آید. احتمالی را که این همان سکه دو رویه شیر باشد محاسبه کنید.

۳۲- سه زندانی به وسیله زندانبان خود با خبر می شوند که یکی از آنها بتصادف برای اعدام انتخاب شده و دو نفر دیگر قرار است آزاد شوند. زندانی A از زندانبان می خواهد که بطور خصوصی این راز را که کدام یک از دوستان زندانبان آزاد خواهد شد با وی در میان بگذارد، چون برملا شدن آن هیچ عیبی ندارد زیرا پیشاپیش می داند که لااقل یکی از این دو آزاد خواهند شد. زندانبان از پاسخ به سؤال وی خودداری کرده و دلیل می آورد که اگر A بداند کدام یک از دوستان هم بندش قرار است آزاد شود، آن گاه احتمال اعدام شدن وی از $\frac{1}{3}$ به $\frac{1}{4}$ افزایش می یابد، زیرا در این صورت خودش یکی از دو زندانی خواهد بود. نظر شما در مورد استدلال زندانبان چیست؟

۳۳- فرض کنید ۱۰ سکه داریم که اگر سکه i ام پرتاب شود، با احتمال $i/10$ ، $i = 1, \dots, 10$ شیر ظاهر می شود. وقتی یکی از سکه ها بتصادف انتخاب و پرتاب می شود، شیر می آید. احتمال شرطی که این سکه پنجم باشد چقدر است؟

۳۴- کیسه ای محتوی ۵ گلوله سفید و ۱۰ گلوله سیاه است. تاس منظمی را پرتاب کرده و به تعداد خالهای رو شده، گلوله از کیسه بیرون می آوریم. احتمال این که همه گلوله های انتخاب شده سفید باشد چقدر است؟ احتمال مشروط که این تاس ۳ بیاید چقدر است، اگر همه گلوله های منتخب سفید باشد؟

۳۵- هریک از دو جعبه که از نظر ظاهر یکسانند دارای دو کشو است. در جعبه A هریک از کشوها دارای یک سکه نقره است و در جعبه B در یکی از کشوها سکه نقره و در دیگری سکه طلاست. جعبه ای بتصادف انتخاب می شود، یکی از کشوهای آن را باز کرده و سکه ای نقره در آن می یابیم. احتمال این که در کشو دیگر سکه نقره باشد چقدر است؟

۳۶- فرض کنید که که آزمونی برای تشخیص سرطان وجود دارد که هم در مورد مبتلایان و هم غیر مبتلایان به این مرض ۹۵ درصد دقت دارد. اگر $\frac{4}{100}$ درصد جمعیتی مبتلا به سرطان باشد این احتمال را که فرد آزمون شده مبتلا به سرطان باشد محاسبه کنید، در صورتی که می دانیم نتیجه آزمون این فرد مثبت بوده است.

۳۷- فرض کنید شرکت بیمه ای مردم را در یکی از طبقات سه گانهٔ مخاطره کم، متوسط و زیاد قرار می دهد. سوابق آنها نشان می دهد که احتمالهای افرادی با مخاطره کم، متوسط و زیاد که در ظرف سال معینی در تصادف دخالت داشته اند به ترتیب عبارت است از $0/05$ ، $0/15$ و $0/3$. اگر 20 درصد جمعیت «با مخاطره کم» 50 درصد «با مخاطره متوسط» و 30 درصد «با مخاطره زیاد» باشند چه نسبتی از جمعیت در سال معینی تصادف خواهند داشت؟ اگر بیمه گذار A در سال 1372 هیچ تصادفی نداشته باشد احتمال این که وی فردی با مخاطره کم (متوسط) باشد چقدر است؟

۳۸- اگر لازم بود الگویی ریاضی برای پیشامدهای E و F چنان که در قسمتهای (الف) تا (ث) شرح داده شده است، بسازید، آیا فرض می کردید که این پیشامدها مستقلند؟ دلیل خود را توضیح دهید.

(الف) E پیشامدی است که یک بازرگان زنی با چشمان آبی دارد و F پیشامدی که منشی او چشمان آبی دارد.

(ب) E پیشامدی است که استادی دارای خودرو است و F پیشامدی که نام وی در دفترچه تلفن موجود است.

(پ) E پیشامدی است که قد مردی کمتر از 183 سانتی متر است و F پیشامدی که وزن وی بیش از 90 کیلوگرم است.

(ت) E پیشامدی است که بانویی در آمریکا زندگی می کند و F پیشامدی که وی در نیمکرهٔ غربی زندگی می کند.

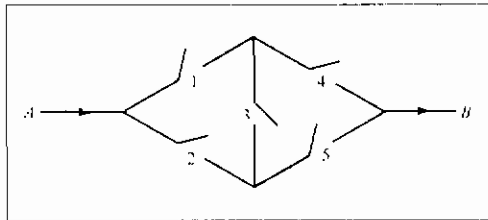
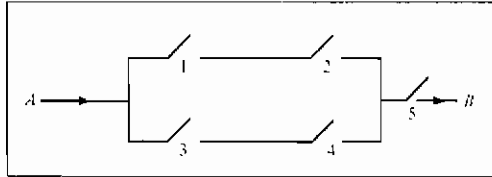
(ث) E پیشامدی است که فردا باران خواهد بارید و F پیشامدی که پس فردا باران خواهد بارید.

۳۹- در کلاس درسی 4 دانشجوی پسر سال اول، 6 دانشجوی دختر سال اول و 6 دانشجوی پسر سال دوم وجود دارد. اگر قرار باشد جنسیت و کلاس مستقل باشند، هرگاه یک دانشجو بتصادف انتخاب شود، چند دانشجوی دختر سال دوم باید حاضر باشند.

۴۰- شخصی دستگاه قمار برای برنده شدن در رولت ابداع کرده است. وقتی وی شرط می بندد، بر سر قرمز شرط می بندد، و تنها وقتی شرط می بندد که 10 چرخش قبلی رولت در شماره سیاهی متوقف شده باشد. دلیل وی این است که شانس برد او بسیار زیاد است زیرا احتمال 11 چرخش متوالی منجر به شماره سیاه بسیار اندک است. نظر شما در مورد

این دستگاه چیست؟

۴۱- احتمال بسته شدن رله i ام در مدار زیر با p_i ، $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ، نشان داده شده است .
اگر همه رله ها مستقلاً کار کنند ، احتمال این که جریانی بین A و B ، برای مدارهای
مربوطه ، برقرار شود چقدر است؟



۴۲- یک دستگاه مهندسی مرکب از n قطعه ، دستگاه $(k - از - n)$ ($k \leq n$) نامیده می شود .
سیستم وقتی کار می کند که لااقل k قطعه از n قطعه کار کنند . فرض کنید همه قطعات بطور
مستقل از یکدیگر کار می کنند .
(الف) اگر قطعه i ام با احتمال p_i ، $i = 1, 2, 3, 4$ ، کار کند احتمالی را که یک دستگاه
 $۲ - از - ۴$ کار کند محاسبه کنید .

(ب) (الف) را برای دستگاه ۳- از - ۵ تکرار کنید .

(پ) برای دستگاه $k - از - n$ وقتی همه p_i ها برابر p می شوند (یعنی $P_i = p, i = 1, 2, \dots, n$)
مسئله را تکرار کنید .

۴۳- ارگانسیم معینی دارای یک جفت از هریک از ۵ نوع ژن مختلف است (که آنها را با ۵ حرف
اول الفبای انگلیسی نشان می دهیم) . هر ژنی در دو شکل ظاهر می شود (که با حروف
کوچک و بزرگ نشان می دهیم) . فرض می شود که حرف بزرگ ژن غالب است ، به این
مفهوم که اگر ارگانسمی دارای جفت ژن xx باشد ، آن گاه این ارگانسیم در خارج ظاهر
ژن X را خواهد داشت . برای مثال ، اگر X رنگ چشمان خاکستری و x رنگ چشمان آبی

را نمایش دهند، آن گاه فردی که دارای جفت ژن XX یا xX است چشمانی به رنگ خاکستری خواهد داشت، در حالی که فردی با جفت ژن xx چشم آبی خواهد بود. مشخصه ظاهری یک ارگانیسم فنوتیپ آن نامیده می شود، در صورتی که ترکیب ژنتیکی آن به ژنوتیپ ارگانیسم موسوم است. (پس ۲ ارگانیسم با ژنوتیپهای مربوطه aa ، bB ، cC ، ee ، dD ، CC ، BB ، AA و ee ، دارای ژنوتیپهای متفاوت ولی فنوتیپهای یکسان خواهند بود.) در عمل جفت گیری بین ۲ ارگانیسم، هریک بتصادف، با یکی از جفت ژن خودش از هر نوع شرکت می کند. این ۵ سهم از یک ارگانیسم (یکی از هریک از ۵ نوع) فرض می شود که از یکدیگر و همچنین از سهم جفت خود مستقل باشند. در جفت گیری بین ارگانیسمهای دارای ژنوتیپهای aa ، bB ، cC ، dD ، eE ، aa و eE ، cC ، bB ، aa و eE ، dD ، cC ، bB ، aa و eE ، احتمال این که فرزند (۱) از نظر فنوتیپی (۲) از نظر ژنوتیپی شبیه به

(الف) ارگانیسم اول

(ب) ارگانیسم دوم

(پ) هر دوی آنها، باشد چقدر است؟

(ت) به هیچ یک از آنها، نباشد چقدر است؟

۴۴- برای ملکه شانس ۵۰ - ۵۰ وجود دارد که حامل ژن بیماری خونی باشد. اگر ملکه حامل بیماری باشد هر شاهزاده، شانس ۵۰ - ۵۰ برای ابتلا به این بیماری دارد. اگر ملکه دارای سه فرزند پسر بدون این بیماری باشد، احتمال این که حامل بیماری باشد چقدر است؟ اگر شاهزاده چهارمی به دنیا بیاید، احتمال این که وی این بیماری خونی را داشته باشد چقدر است؟

۴۵- در صبح روز ۳۱ شهریور ۱۳۶۰، جدول برد و باخت سه تیم رده اول بیسبال جام قهرمانی به صورت زیر بود:

تیم	برد	باخت
شاهین	87	72
پیروزی	86	73
آزادی	86	73

برای هر تیم سه بازی باقیمانده است که باید بازی کند. هر سه بازی پیروزی با آزادی است و سه بازی باقیمانده شاهین در مقابل تیم پارس است. فرض کنید برآمدهای کلیه بازیهای باقیمانده مستقلند و احتمال برد در هر بازی برای شرکت کنندگان برابر است. احتمالهای این که هریک از تیمها این جام را ببرد چقدر است؟ اگر دو تیم برای احراز مقام اولی برابر کنند، یک مسابقه اضافی دارند که در آن هر تیم شانس برابر برای برنده شدن دارد.

۴۶- انجمن شهری با ۷ عضو، شامل یک کمیته منتخب با ۳ عضو است. پیشنهادات جدید برای وضع قانون ابتدا به این کمیته و سپس به انجمن می رود، اگر حداقل ۲ نفر از ۳ نفر عضو کمیته منتخب، این قانون را تصویب کنند، در این مرحله برای تصویب قانون اکثریت آرا (حداکثر ۴ رای) لازم است. اکنون یک پیشنهاد جدید قانون را در نظر گرفته و فرض کنید که هر عضو انجمن شهر، مستقلاً، با احتمال p آن را مورد تصویب قرار می دهد. احتمال این که رای یک عضو کمیته منتخب قاطع باشد چقدر است؟ به این مفهوم که برگشتن رأی این عضو، سرنوشت نهایی این قانون را عوض کند. احتمال متناظر برای یک عضو مفروضی از انجمن که در کمیته منتخب نیست چقدر است؟

۴۷- فرض کنید شانس پسر یا دختر بودن نوزاد در یک خانواده مستقل از توزیع جنسیت فرزندان دیگر خانواده، برابر است. اگر خانواده ای دارای ۵ فرزند باشد، مطلوب است احتمال هریک از پیشامدهای زیر:

(الف) همه فرزندان از یک جنس باشند.

(ب) سه فرزند بزرگتر پسر و بقیه دختر باشند.

(پ) دقیقاً سه فرزند پسر باشند.

(ت) دو فرزند بزرگتر پسر باشند.

(ث) حداقل یک فرزند دختر باشد.

۴۸- احتمال برنده شدن در یک پرتاب تاس برابر p است. A بازی را شروع می کند و در صورت باخت، تاس را به B واگذار می کند که به نوبه خود سعی می کند برنده شود. این دو نفر تاس را آن قدر پرتاب می کنند تا یکی از آنها برنده شود. احتمال برنده شدن مربوط به هریک از آنها چقدر است؟ اگر k بازیکن داشته باشیم، مسأله را تکرار کنید.

۴۹- مسأله ۴۸ را، با این فرض که وقتی A تاس را می ریزد با احتمال P_1 و وقتی B می ریزد با احتمال P_2 برنده می شود تکرار کنید.

۵۰- سه بازیکن همزمان سکه‌هایی را پرتاب می‌کنند. سکه پرتاب شده به وسیله A (B) [C] با احتمال P_1 (P_2) [P_3] شیر می‌آید. اگر فردی برآمدی متفاوت از دونفر دیگر به دست آورد از بازی خارج می‌شود. اگر هیچ فردی از بازی خارج نشود بازیکنان به پرتاب ادامه می‌دهند تا این که سرانجام یک نفر از بازی خارج شود. احتمال این که A از بازی خارج شده باشد چقدر است؟

۵۱- فرض کنید E و F پیشامدهای ناسازگار یک تجربه‌اند. نشان دهید اگر آزمایشهای مستقل از این تجربه انجام شوند، آن گاه E با احتمال $[P(E) + P(F)]$ قبل از F رخ می‌دهد.

۵۲- A و B سکه‌هایی را پرتاب می‌کنند، کسی که سکه اش به خط مفروضی نزدیکتر باشد، ۱ ریال از دیگری می‌برد. اگر A با ۳ و B با ۷ ریال شروع کرده باشند، احتمال این که پول A تمام شود، در صورتی که مهارت هر دو یکسان باشد چقدر است؟ اگر A بازیکن ماهرتری باشد که ۶۰ درصد موارد برنده می‌شود، این احتمال چقدر است؟

۵۳- در پرتاب متوالی یک جفت تاس متعادل، احتمال به دست آوردن ۲ عدد ۷ قبل از ۶ عدد زوج چقدر است؟

۵۴- بازیکنان مهارت یکسانی دارند و در مسابقه‌ای احتمال این که یکی از دو حریف پیروز شود برابر $\frac{1}{4}$ است. یک گروه 2^n بازیکن بتصادف به حریفان دوتایی تقسیم می‌شوند. 2^{n-1} برنده باز بتصادف جفت می‌شوند و به همین ترتیب الی آخر: تا این که برنده‌ای تک باقی بماند. دو حریف مشخص A و B را در نظر گرفته و پیشامدهای A_i را با $n \geq i$:

$A : A_i$ در دقیقاً i مسابقه بازی می‌کند،

$A : E$ و B هرگز باهم بازی نمی‌کنند. تعریف می‌کنیم. مطلوب است.

(الف) $P(A_i)$ ، $i = 1, \dots, n$.

(ب) $P(E)$.

(پ) فرض کنید $P_n = P(E)$. نشان دهید

$$P_n = \frac{1}{2^n - 1} + \frac{2^n - 2}{2^n - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^2 P_{n-1}$$

از این فرمول برای تحقیق درستی جواب حاصل در (ب) استفاده کنید.

۵۵- یک سرمایه‌گذار بازار بورس دارای سهامی در یک بورس است که ارزش فعلی آن ۲۵ امتیاز است. این شخص تصمیم دارد که سهام خود را در صورتی که ۱۰ امتیاز پایین یا

۴۰ امتیاز بالا رود بفروشد. اگر هر تغییر بها با احتمال $0/55$ ، یک امتیاز بالا و با احتمال $0/45$ یک امتیاز پایین برود، و تغییرات متوالی مستقل باشند، احتمال این که این سرمایه گذار به صورت برنده کنار برود چقدر است؟

۵۶- A و B سکه‌هایی پرتاب می‌کنند. بازی را شروع و پرتاب را آن قدر ادامه می‌دهد تا خط بیاید. در این مرحله B پرتاب سکه را آغاز و بازی را آن قدر ادامه می‌دهد تا خط بیاید و سپس A این بازی را ادامه می‌دهد و به همین ترتیب الی آخر. فرض کنید P_1 احتمال این که وقتی سکه را A پرتاب می‌کند شیر بیاید، نشان دهد و P_2 همین احتمال را نشان دهد وقتی B سکه را پرتاب می‌کند. برنده این بازی اولین نفری است که

(الف) ۲ شیر متوالی بیاورد.

(ب) جمعاً ۲ شیر بیاورد.

(پ) شیر متوالی بیاورد.

(ت) جمعاً ۳ شیر بیاورد.

احتمالی را که A، در هر حالت، برنده شود به دست آورید.

۵۷- تاس A دارای ۴ وجه قرمز و ۲ وجه سفید است، در حالی که تاس B دارای ۲ وجه قرمز و ۴ وجه سفید است. سکه‌ای منظم را یک بار پرتاب می‌کنیم. اگر خط بیاید، بازی با تاس A ادامه می‌یابد و اگر شیر بیاید با تاس B.

(الف) نشان دهید که احتمال وجه قرمز در هر پرتاب برابر $\frac{1}{2}$ است.

(ب) اگر دو پرتاب اول به قرمز منتهی شود، احتمال قرمز در ردیف سوم چقدر است؟

(ج) اگر دو پرتاب اول قرمز بیاید، احتمال این که با تاس A باشد چقدر است؟

۵۸- در کیسه‌ای ۱۲ گلوله که ۴ تای آنها سفید است وجود دارد. سه بازیکن - A، B، C - پی در پی از این کیسه گلوله بیرون می‌آورند، ابتدا A، سپس B و سرانجام C، سپس A و به همین ترتیب الی آخر. برنده اولین نفری است که یک گلوله سفید بیرون بکشد. احتمالهای بُرد هر بازیکن را پیدا کنید اگر

(الف) هر گلوله پس از استخراج به کیسه برگردانده شود.

(ب) گلوله‌های استخراج شده جانشین شوند.

۵۹- مسأله ۵۸ را با فرض این که هر یک از ۳ بازی کن از کیسه مخصوص خود گلوله انتخاب کنند تکرار کنید. یعنی این که سه کیسه مختلف هر یک شامل ۱۲ گلوله که ۴ تای آنها سفید

است وجود داشته باشد.

۶۰- در مثال ۵ ت، احتمال شرطی که سکه i ام انتخاب شود چقدر است؟ در صورتی که می دانیم همه n آزمایش اول شیر آمده است.

۶۱- در دستور توالی لاپلاس، مثال ۵ ت، آیا برآمدهای پرتابهای متوالی مستقل اند؟ شرح دهید.

۶۲- فردی که در دادگاهی مرکب از ۳ قاضی محاکمه می شود، گناهکار قلمداد می شود اگر حداقل ۲ قاضی علیه او رأی دهند. فرض کنید هرگاه این متهم در واقع مجرم باشد، هر قاضی بطور مستقل با احتمال 0.7 رأی به گناهکاری وی می دهد، در حالی که اگر متهم در واقع بی گناه باشد، این احتمال به 0.2 تنزل پیدا می کند. اگر 70% درصد متهمان گناهکار باشند، احتمال شرطی را که قاضی شماره ۳ رأی بر گناهکاری بدهد محاسبه کنید، در صورتی که می دانیم.

(الف) قاضی شماره ۱ و ۲ رأی بر گناهکاری وی می دهند.

(ب) قاضی شماره ۱ رأی بر گناهکاری و قاضی شماره ۲ رأی بر بی گناهی وی می دهند.

(پ) قاضی شماره ۱ و ۲ هر دو رأی بر بی گناهی وی می دهند.

فرض کنید E_i ، $i = 1, 2, 3$ ، پیشامدی را که قاضی i رأی بر گناهکاری می دهد نمایش دهد. آیا این پیشامدها مستقلند؟ آیا این پیشامدها بطور مشروط مستقلند؟ شرح دهید.

فصل چهارم

متغیرهای تصادفی

۱ - مقدمه

در اغلب آزمایشهایی که انجام می شود به تابعی از برآمد حاصل در مقابل خود برآمد علاقه مندیم. مثلاً در پرتاب یک تاس اغلب می خواهیم مجموع دو تاس را بدانیم تا مقادیر هریک از آنها را. یعنی ممکن است فقط مجموع ۷ مورد توجه باشد نه برآمدهای (۱، ۶)، (۲، ۵)، (۳، ۴)، (۴، ۳)، (۵، ۲) یا (۶، ۱). همین طور در پرتاب سکه ها ممکن است تعداد کل شیرها مورد توجه باشد نه دنباله شیر و خطهای حاصل از انجام آزمایش، این کمیتها، یا به عبارت دقیقتر این توابع حقیقی، را که بر فضای نمونه تعریف شده اند **متغیرهای تصادفی** نامند. چون مقدار یک متغیر تصادفی با برآمد آزمایش معین می شود، می توانیم به مقادیر ممکن متغیر تصادفی احتمالهایی نسبت دهیم.

مثال ۱ الف. فرض کنید آزمایش مورد توجه پرتاب ۳ سکه سالم باشد. اگر Y تعداد شیرهای ظاهر شده باشد، آن گاه Y یک متغیر تصادفی است که مقادیر ۰، ۱، ۲، ۳ را با احتمالهایی زیر اختیار می کند.

$$\begin{aligned}P\{Y = 0\} &= P\{(T, T, T)\} = \frac{1}{8} \\P\{Y = 1\} &= P\{(T, T, H), (T, H, T), (H, T, T)\} = \frac{3}{8} \\P\{Y = 2\} &= P\{(T, H, H), (H, T, H), (H, H, T)\} = \frac{3}{8} \\P\{Y = 3\} &= P\{(H, H, H)\} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

چون Y باید یکی از مقادیر 0 تا 3 را اختیار کند، باید داشته باشیم

$$1 = P\left(\bigcup_{i=0}^3 \{Y = i\}\right) = \sum_{i=0}^3 P\{Y = i\}$$

که با توجه به احتمالهای فوق تساوی برقرار است.

مثال ۱ ب. سه مهره بتصادف و بدون جایگذاری از جعبه‌ای دارای 20 مهره به شماره‌های 1 تا 20 خارج می‌کنیم. اگر شرط بردن بازی این باشد که حداقل یکی از مهره‌های خارج شده شماره‌ای مساوی یا بزرگتر از 17 داشته باشد، احتمال بردن شرط چقدر است؟

حل: فرض کنید X بزرگترین عدد خارج شده باشد. در این صورت X یک متغیر تصادفی است که مقادیر $3, 4, \dots, 20$ را اختیار می‌کند. علاوه بر این، اگر فرض کنیم هریک از $\binom{20}{3}$ انتخاب ممکن هم احتمال است، آن‌گاه

$$P\{X = i\} = \frac{\binom{i-1}{2}}{\binom{20}{3}} \quad i = 3, \dots, 20 \quad (1-1)$$

برای به دست آوردن معادله $(1-1)$ توجه کنید که پیشامد $\{X = i\}$ وقتی رخ می‌دهد که مهره شماره i و دو مهره از بین شماره‌های 1 تا $i-1$ انتخاب شده باشد. همان‌طور که می‌دانیم تعداد حالات مساعد عبارت است از $\binom{i-1}{2} \binom{1}{1}$. از این معادله دیده می‌شود که

$$P\{X = 20\} = \frac{\binom{19}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{3}{20} = .150$$

$$P\{X = 19\} = \frac{\binom{18}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{51}{380} = .134$$

$$P\{X = 18\} = \frac{\binom{17}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{34}{285} = .119$$

$$P\{X = 17\} = \frac{\binom{16}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{2}{19} = .105$$

چون پیشامد $\{X \geq 17\}$ عبارت است از اجتماع پیشامدهای ناسازگار $\{X = i\}$ ،
 $i = 17, 18, 19, 20$ ، پس احتمال بردن شرط برابر است با

$$P\{X \geq 17\} = .105 + .119 + .134 + .150 = .508$$

مثال ۱۰ سکه ای که احتمال شیر آمدنش p است بطور مستقل متوالیاً پرتاب می شود تا یک شیر بیاید یا تجربه n بار تکرار شود. اگر X تعداد پرتابهای لازم باشد، X یک متغیر تصادفی است که مقادیر $1, 2, \dots, n$ را با احتمالهای زیر اختیار می کند

$$P\{X = 1\} = P\{H\} = p$$

$$P\{X = 2\} = P\{(T, H)\} = (1 - p)p$$

$$P\{X = 3\} = P\{(T, T, H)\} = (1 - p)^2 p$$

$$P\{X = n - 1\} = P\{(\underbrace{T, T, \dots, T}_{n-2}, H)\} = (1 - p)^{n-2} p$$

$$P\{X = n\} = P\{(\underbrace{T, T, \dots, T}_{n-1}, T), (\underbrace{T, T, \dots, T}_{n-1}, H)\} = (1 - p)^{n-1}$$

برای کنترل مقادیر به دست آمده می توان نوشت

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n \{X = i\}\right) &= \sum_{i=1}^n P\{X = i\} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} p(1 - p)^{i-1} + (1 - p)^{n-1} \\ &= p \left[\frac{1 - (1 - p)^{n-1}}{1 - (1 - p)} \right] + (1 - p)^{n-1} \\ &= 1 - (1 - p)^{n-1} + (1 - p)^{n-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

مثال ۱۱ سه مهره از جعبه ای که دارای ۳ مهره سفید، ۳ مهره قرمز و ۵ مهره سیاه است بتصادف خارج می شود. فرض کنید به ازای هر مهره سفید ۱ ریال برنده و به ازای هر مهر سیاه ۱ ریال بازنده می شویم. اگر X مقدار کل برد در این بازی باشد، آن گاه X یک متغیر تصادفی است که مقادیر $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ را با احتمالهای زیر اختیار می کند

$$P\{X = 0\} = \frac{\binom{5}{3} + \binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{11}{3}} = \frac{55}{165}$$

$$P\{X = 1\} = P\{X = -1\} = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{2} + \binom{3}{2}\binom{3}{1}}{\binom{11}{3}} = \frac{39}{165}$$

$$P\{X = 2\} = P\{X = -2\} = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{\binom{11}{3}} = \frac{15}{165}$$

$$P\{X = 3\} = P\{X = -3\} = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{11}{3}} = \frac{1}{165}$$

احتمالهای فوق با توجه به این مطلب به دست آمده اند که مثلاً برای رخ دادن پیشامد $\{X = 0\}$ یا باید هر سه مهره سیاه باشد یا باید از هر رنگ یک مهره انتخاب شده باشد. همین طور، پیشامد $\{X = 1\}$ وقتی رخ می دهد که یک سفید و ۲ سیاه یا ۲ سفید و یک قرمز انتخاب شده باشد. برای کنترل اعداد به دست آمده می توان نوشت

$$\sum_{i=0}^3 P\{X = i\} + \sum_{i=1}^3 P\{X = -i\} = \frac{55 + 39 + 15 + 1 + 39 + 15 + 1}{165} = 1$$

بنابراین احتمال برنده شدن عبارت است از

$$\sum_{i=1}^3 P\{X = i\} = \frac{55}{165} = \frac{1}{3}$$

مثال ۱۸. فرض کنید N کوبین از انواع متمایز داریم و هر بار یکی از آنها مستقل از احتمالهای قبلی با احتمالهای مساوی انتخاب می شود. یک متغیر تصادفی مورد توجه T عبارت از تعداد کوبینهای لازم است تا مجموعه انتخاب شده شامل یک کوبین از هر نوع باشد. به جای محاسبه مستقیم $P\{T = n\}$ ابتدا احتمال پیشامد $\{T > n\}$ را محاسبه می کنیم. برای این کار n را ثابت می گیریم و پیشامدهای A_1, A_2, \dots, A_N را به صورت زیر تعریف می کنیم: A_j پیشامد نبودن کوبین نوع j ، $j = 1, \dots, N$ زد در میان n کوبین اولیه است. بنابراین،

$$\begin{aligned}
 P\{T > n\} &= P\left(\bigcup_{j=1}^N A_j\right) \\
 &= \sum_j P(A_j) - \sum_{j_1 < j_2} P(A_{j_1} A_{j_2}) + \dots \\
 &\quad + (-1)^{k+1} \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_k} P(A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_k}) \dots \\
 &\quad + (-1)^{N+1} P(A_1 A_2 \dots A_N)
 \end{aligned}$$

حال A_j رخ می دهد اگر هریک از n کوبن از نوع j نباشد. چون هریک از کوبنها با احتمال $\frac{N-1}{N}$ از نوع j نخواهد بود، با توجه به فرض استقلال نوع کوبنهای متوالی داریم

$$P(A_j) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$$

همچنین پیشامد $A_{j_1} A_{j_2}$ وقتی رخ می دهد که هیچ یک از n کوبن اولیه از نوع j_1 یا j_2 نباشد. پس، با استفاده مجدد از استقلال داریم

$$P(A_{j_1} A_{j_2}) = \left(\frac{N-2}{N}\right)^n$$

به همین دلیل می توان نوشت:

$$P(A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_k}) = \left(\frac{N-k}{N}\right)^n$$

و دیده می شود که برای $n > 0$

$$\begin{aligned}
 P\{T > n\} &= N \left(\frac{N-1}{N}\right)^n - \binom{N}{2} \left(\frac{N-2}{N}\right)^n + \binom{N}{3} \left(\frac{N-3}{N}\right)^n - \dots \\
 &\quad + (-1)^N \binom{N}{N-1} \left(\frac{1}{N}\right)^n \quad (2-1) \\
 &= \sum_{i=1}^{N-1} \binom{N}{i} \left(\frac{N-i}{N}\right)^n (-1)^{i+1}
 \end{aligned}$$

با توجه به مطالب فوق احتمال $T = n$ را به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$P\{T > n-1\} = P\{T = n\} + P\{T > n\}$$

در نتیجه

$$P\{T = n\} = P\{T > n-1\} - P\{T > n\}$$

متغیر تصادفی جالب دیگر عبارت است از انواع مختلف کوبنهایی که در n انتخاب اول

وجود دارد، این متغیر تصادفی را D_n می‌نامیم. برای محاسبه $P(D_n = k)$ ، ابتدا توجه خود را به مجموعه خاصی از k نوع متمایز معطوف می‌کنیم، و این احتمال را که این مجموعه شامل مجموعه انواع متمایز حاصل در n انتخاب اول است، محاسبه می‌کنیم. اکنون برای این که این وضع پیش آید لازم و کافی است که از n کوپن اولیه

A: هر کوپن یکی از این k نوع باشد.

B: هر یک از این k نوع ارائه شده باشد.

حال هر یک از کوپنهای انتخاب شده، یکی از k نوع کوپن با احتمال $\frac{k}{N}$ است، و بنابراین احتمال A برابر $\left(\frac{k}{N}\right)^n$ است. همچنین اگر معلوم باشد که کوپن به دست آمده یکی از k نوع خاص است، بآسانی دیده می‌شود که هر یک از این k نوع کوپن هم احتمال است. بنابراین احتمال B به شرط A برابر است با احتمال این که مجموعه‌ای از n کوپن که هر یک با احتمال مساوی می‌تواند یکی از نوعهای ممکن باشد، شامل یک مجموعه کامل از تمام k نوع است. ولی این احتمال دقیقاً برابر است با

$$P(A) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

$$P(B|A) = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k-i}{k}\right)^n (-1)^{i+1}$$

بالاخره چون $\binom{N}{k}$ انتخاب ممکن برای مجموعه‌ای از k نوع وجود دارد می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} P\{D_n = k\} &= \binom{N}{k} P(AB) \\ &= \binom{N}{k} \left(\frac{k}{N}\right)^n \left[1 - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k-i}{k}\right)^n (-1)^{i+1} \right] \end{aligned}$$

۲- توابع توزیع

تابع توزیع تجمعی (c. d. f.)، یا به عبارت ساده‌تر تابع توزیع متغیر تصادفی X که آن را با F نشان می‌دهند، برای تمام اعداد حقیقی b ، $-\infty < b < \infty$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$F(b) = P\{X \leq b\}$$

به عبارت دیگر، $F(b)$ احتمال این پیشامد است که متغیر تصادفی X مقداری کمتر یا مساوی b اختیار کند. بعضی از خواص تابع F به قرار زیر است:

۱ - تابع F نازولی است، یعنی، اگر $a < b$ ، آن گاه $F(a) \leq F(b)$.

$$\lim_{b \rightarrow \infty} F(b) = 1. \quad - ۲$$

$$\lim_{b \rightarrow -\infty} F(b) = 0. \quad - ۳$$

۴ - تابع F از راست پیوسته است. یعنی برای هر b و دنباله نزولی b_n ، $n \geq 1$ ، که به b

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(b_n) = F(b)$$
 همگراست داریم

خاصیت ۱ برقرار است زیرا برای $a < b$ پیشامد $\{X \leq a\}$ جزئی از پیشامد $\{X \leq b\}$ است، بنابراین احتمال آن نمی تواند بزرگتر باشد. خاصیت ۲، ۳ و ۴ با توجه به خاصیت پیوستگی احتمالها (بخش ۶ از فصل ۲) برقرارند. مثلاً، برای اثبات خاصیت ۲ توجه کنید که اگر b_n به ∞ صعود کند آن گاه پیشامدهای $\{X \leq b_n\}$ ، $n \geq 1$ ، صعودی هستند و اجتماع آنها پیشامد $\{X < \infty\}$ است. بنابراین بنا به خاصیت پیوستگی احتمالها،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X \leq b_n\} = P\{X < \infty\} = 1$$

اثبات خاصیت ۳ نیز به همین طریق است و آن را به عنوان تمرین می گذاریم. برای اثبات خاصیت ۴ توجه کنید که اگر b_n به b نزول کند، آن گاه $\{X \leq b_n\}$ ، $n \geq 1$ ، پیشامدهای نزولی هستند که اشتراك آنها پیشامد $\{X \leq b\}$ است. بنابراین با توجه به خاصیت پیوستگی می توان نوشت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X \leq b_n\} = P\{X \leq b\}$$

تمام مسائل احتمال در مورد X را می توان بر حسب تابع F پاسخ داد. مثلاً به ازای تمام مقادیر $a < b$

$$P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a) \quad \text{برای هر } a < b \quad (۱-۲)$$

برای روشتر شدن مطلب می توان پیشامد $\{X \leq b\}$ را به صورت اجتماع پیشامدهای جدا از هم $\{X \leq a\}$ و $\{a < X \leq b\}$ نوشت. یعنی،

$$\{X \leq b\} = \{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\}$$

در نتیجه

$$P\{X \leq b\} = P\{X \leq a\} + P\{a < X \leq b\}$$

که باسانی معادله (۱-۲) از آن به دست می آید .

اگر بخواهیم احتمال پیشامد $\{X < b\}$ را محاسبه کنیم ، می توانیم با توجه به خاصیت

پیوستگی بنویسیم

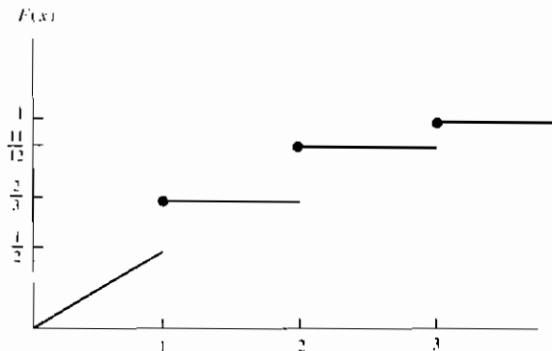
$$\begin{aligned} P\{X < b\} &= P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{X \leq b - \frac{1}{n}\right\}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(X \leq b - \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(b - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

توجه کنید که $P\{X < b\}$ لزوماً برابر $F(b)$ نخواهد بود، زیرا $F(b)$ شامل احتمال $X = b$ نیز هست .

مثال ۲ الف . تابع توزیع متغیر تصادفی X عبارت است از

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{3} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{12} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$$

نمودار تابع $F(x)$ در شکل ۱-۴ رسم شده است .



شکل ۱-۴ نمودار $F(x)$

مطلوب است محاسبه: الف - $P\{X < 3\}$ ، ب - $P\{X = 1\}$ ، ج - $P\left\{X > \frac{1}{2}\right\}$ و د - $P\{2 < X \leq 4\}$.

حل:

$$P\{X < 3\} = \lim_n P\left\{X \leq 3 - \frac{1}{n}\right\} = \lim_n F\left(3 - \frac{1}{n}\right) = \frac{11}{12}$$

$$\begin{aligned} P\{X = 1\} &= P\{X \leq 1\} - P\{X < 1\} \\ &= F(1) - \lim_n F\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left\{X > \frac{1}{2}\right\} &= 1 - P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\} \\ &= 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{2 < X \leq 4\} &= F(4) - F(2) \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

۳- متغیرهای تصادفی گسسته

یک متغیر تصادفی که بتواند حداکثر تعداد شما را مقدار اختیار کند، گسسته نامیده می‌شود. برای یک متغیر تصادفی گسسته X ، تابع جرم احتمال $p(a)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$p(a) = P\{X = a\}$$

تابع جرم احتمال $p(a)$ برای حداکثر تعداد شما را از مقادیر a مثبت است. یعنی، اگر X فقط مقادیر x_1, x_2, \dots را اختیار کند، آن‌گاه

$$\begin{aligned} p(x_i) &\geq 0 & i = 1, 2, \dots \\ p(x) &= 0 & \text{سایر مقادیر } x \end{aligned}$$

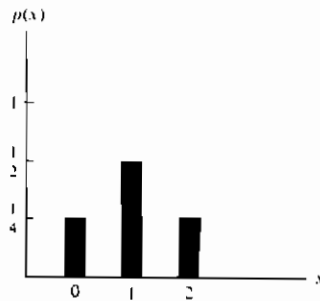
چون X باید یکی از مقادیر x_i را اختیار کند، داریم

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

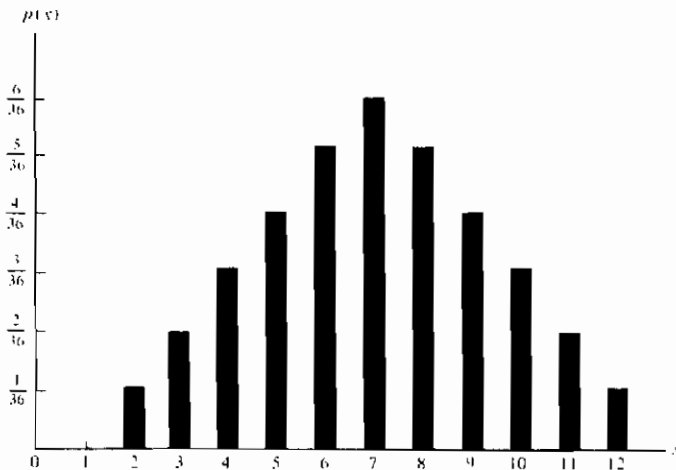
اغلب آموزنده است که تابع جرم احتمال را به صورت نمودار نشان دهیم، به این ترتیب که $p(x_i)$ را روی محور y ها و x_i را روی محور x ها جدا کنیم. مثلاً، اگر تابع جرم احتمال X به صورت زیر باشد

$$p(0) = \frac{1}{4} \quad p(1) = \frac{1}{2} \quad p(2) = \frac{1}{4}$$

نمودار آن را می توان به صورت شکل ۲-۴ رسم کرد. به طریقی مشابه، نمودار تابع جرم احتمال متغیر تصادفی که مجموع خالهای روشده در پرتاب دو تاس را نمایش می دهد، نظیر شکل ۳-۴ می باشد.



شکل ۲-۴



شکل ۳-۴

مثال ۳.۳. تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X عبارت است از

$$p(i) = c\lambda^i / i!, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

که در آن λ یک مقدار مثبت است.

۱- مقدار $P\{X=0\}$ را محاسبه کنید.

۲- مقدار $P\{X>2\}$ را محاسبه کنید.

حل: چون $\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = 1$ ، داریم

$$c \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = 1$$

از طرفی می دانیم، $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} x^i / i!$ ، در نتیجه

$$ce^{\lambda} = 1 \quad \text{یا} \quad c = e^{-\lambda}$$

حال می توان نوشت

$$P\{X=0\} = e^{-\lambda} \lambda^0 / 0! = e^{-\lambda}$$

$$P\{X>2\} = 1 - P\{X \leq 2\} = 1 - P\{X=0\} - P\{X=1\} - P\{X=2\}$$

$$= 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}$$

تابع توزیع تجمعی F را می توان برحسب $p(a)$ به صورت زیر نوشت

$$F(a) = \sum_{x \leq a} p(x)$$

اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با مقادیر ممکن x_1, x_2, \dots ، باشد به قسمی که

$x_1 < x_2 < \dots$ ، آن گاه تابع توزیع آن F یک تابع پله ای است. یعنی مقدار F در فاصله $[x_{i-1}, x_i]$

ثابت است و دارای یک پله (یا جهش) به اندازه $p(x_i)$ در x_i خواهد بود. مثلاً اگر X دارای تابع

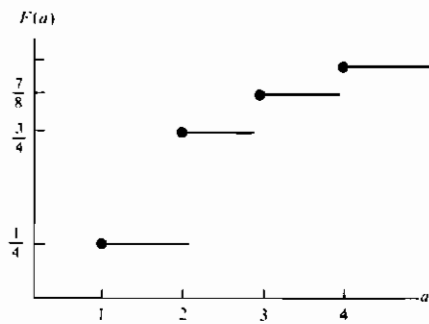
جرم احتمال زیر باشد

$$p(1) = \frac{1}{4} \quad p(2) = \frac{1}{2} \quad p(3) = \frac{1}{8} \quad p(4) = \frac{1}{8}$$

آن گاه تابع توزیع تجمعی آن عبارت است از

$$F(a) = \begin{cases} 0 & a < 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \leq a < 2 \\ \frac{3}{4} & 2 \leq a < 3 \\ \frac{7}{8} & 3 \leq a < 4 \\ 1 & 4 \leq a \end{cases}$$

نمودار این تابع در شکل ۴-۴ رسم شده است .



شکل ۴-۴

باید توجه داشته باشیم که ارتفاع هر پله در هر یک از مقادیر ۱، ۲، ۳ و ۴ برابر است با احتمال این که X آن مقدار خاص را اختیار کند .
متغیرهای تصادفی گسسته اغلب بر حسب مقادیر تابع جرم دسته بندی می شود . در چند بخش بعدی بعضی از آنها را بررسی خواهیم کرد .

۴- متغیرهای تصادفی برنولی و دو جمله ای

تجربه یا آزمایشی را در نظر بگیرید که برآمد آن را بتوان به دو دسته «موفقیت» یا «شکست» تقسیم کرد . وقتی برآمد ، یک موفقیت است می نویسیم $X = 1$ و وقتی برآمد یک شکست است می نویسیم $X = 0$ ، آن گاه ، تابع جرم احتمال X عبارت است از

$$\begin{aligned} p(0) &= P\{X = 0\} = 1 - p \\ p(1) &= P\{X = 1\} = p \end{aligned} \quad (1-4)$$

که در آن p ، $0 \leq p \leq 1$ احتمال این است که نتیجه آزمایش موفقیت باشد. متغیر تصادفی X را یک متغیر تصادفی برنولی گویند (به نام برنولی ریاضیدان سوئسی) اگر تابع جرم احتمال آن با معادلات (۴-۱) داده شود که در آن $p \in (0, 1)$. حال فرض کنید n تجربه برنولی را که احتمال موفقیت آن p و احتمال شکست آن $1-p$ است، بطور مستقل انجام دهیم. اگر X تعداد موفقیتها در n تجربه باشد، آن گاه، X را یک متغیر دو جمله‌ای با پارامترهای (n, p) گویند، پس یک متغیر تصادفی برنولی همان متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای (n, p) است. تابع جرم احتمال متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای (n, p) عبارت است از

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2-4)$$

درستی معادله (۲-۴) را می‌توان با توجه به این مطلب که احتمال هر دنباله از n برآمد شامل i موفقیت و $n-i$ شکست با توجه به فرض استقلال تجربه‌ها، برابر $p^i (1-p)^{n-i}$ است، ثابت کرد. زیرا تعداد دنباله‌های متفاوت فوق برابر $\binom{n}{i}$ است. مثلاً اگر $n=4$ و $i=2$ آن گاه به $\binom{4}{2} = 6$ طریق ۲ موفقیت و ۲ شکست به دست می‌آید، یعنی

$$(s, s, f, f), (s, f, s, f), (s, f, f, s), (f, s, s, f), (f, s, f, s), \text{ or } (f, f, s, s)$$

که در آن (s, s, f, f) یعنی دو آزمایش اول موفقیت و دو آزمایش آخر شکست بوده است.

چون هر یک از این برآمدها با احتمال $(1-p)^2 p^2$ رخ می‌دهد احتمال مطلوب برای ۲ موفقیت در ۴ آزمایش عبارت است از $\binom{4}{2} p^2 (1-p)^2$.

توجه کنید بنا به قضیه دو جمله‌ای مجموع احتمالها برابر یک می‌شود، یعنی

$$\sum_{i=0}^n p(i) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = [p + (1-p)]^n = 1$$

مثال ۴ الف. پنج سکه سالم را می‌اندازیم. اگر برآمدها را مستقل فرض کنیم، تابع جرم احتمال تعداد شیرها را پیدا کنید.

حل: اگر X تعداد شیرها (موفقیتها) باشد، آن گاه X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با

پارامترهای $(n = 5, p = \frac{1}{2})$ است. بنابراین از معادله (۴-۲) نتیجه می شود

$$P\{X = 0\} = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$P\{X = 1\} = \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}$$

$$P\{X = 2\} = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32}$$

$$P\{X = 3\} = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$$

$$P\{X = 4\} = \binom{5}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}$$

$$P\{X = 5\} = \binom{5}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}$$

مثال ۴ ب. می دانیم پیچهای ساخت یک کارخانه با احتمال 0.1 مستقل از یکدیگر معیوبند. این کارخانه پیچها را در بسته های 10 تایی به فروش می رساند و پول خریدار را پس می دهد، اگر حداکثر یکی از 10 پیچ معیوب باشد. چه نسبتی از بسته های فروش شده را کارخانه باید تعویض کند؟

حل: اگر X تعداد پیچهای معیوب در یک بسته باشد، در آن صورت X یک متغیر تصادفی دوجمله ای با پارامترهای $(10, 0.1)$ است. در نتیجه احتمال این که بسته تعویض شود عبارت است از

$$1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 1 - \binom{10}{0} (.01)^0 (.99)^{10} - \binom{10}{1} (.01)^1 (.99)^9 \\ \approx .004$$

بنابراین، 0.4% درصد بسته ها باید تعویض شوند.

مثال ۴ پ. بازی با گردونه شانس بسیار معمول است. یک بازیکن روی یکی از شماره های 1 تا 6 شرط بندی می کند. سپس سه تاس ریخته می شود، و اگر عدد شرط بندی شده

i بار، $i = 1, 2, 3$ ، ظاهر شود، آن گاه بازیکن i واحد برنده می شود، از طرف دیگر، اگر عدد شرط بندی شده ظاهر نگردد بازیکن ۱ واحد بازنده خواهد بود. آیا این بازی برای بازیکن عادلانه است؟ (در واقع بازی با گرداندن یک گردونه که می تواند در سه شماره از ۱ تا ۶ توقف کند شروع می شود، ولی از نظر ریاضی معادل ریختن سه تاس است).

حل: اگر تاسها را سالم و مستقل از یکدیگر فرض کنیم، در آن صورت تعداد دفعاتی که شماره شرط بندی شده ظاهر می شود یک متغیر تصادفی دو جمله ای با پارامترها $(3, \frac{1}{6})$ است. بنابراین اگر X مقدار برد بازیکن باشد، داریم

$$\begin{aligned} P\{X = -1\} &= \binom{3}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} \\ P\{X = 1\} &= \binom{3}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216} \\ P\{X = 2\} &= \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216} \\ P\{X = 3\} &= \binom{3}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216} \end{aligned} \quad (3-4)$$

برای تعیین عادلانه بودن بازی آن را در درازمدت در نظر می گیریم. از معادلات (۳-۴) نتیجه می شود که اگر بازیکن بازی را بی نهایت بار ادامه دهد، در آن صورت در درازمدت از هر ۲۱۶ بازی مقدار برد او بقرار زیر خواهد بود

۱۲۵ بار مقدار برد او برابر ۱- (یعنی باخت) است

۷۵ بار مقدار برد او برابر ۱+ است

۱۵ بار مقدار برد او برابر ۲ است

۳ بار مقدار برد او برابر ۳ است

پس در درازمدت از هر ۲۱۶ بازی مقدار برد او عبارت است از

$$-1(125) + 1(75) + 2(15) + 3(1) = -17$$

یعنی بطور متوسط ۱۷ واحد در هر ۲۱۶ بازی خواهد باخت.

از این نظر بازی عادلانه نیست. (گرچه استدلال فوق جنبه تاریخی دارد ولی کاملاً معتبر است و به وسیله قانون قوی اعداد بزرگ که در فصل ۸ بیان خواهد شد

تأیید می شود). تعبیر صحیح باخت مبلغ ۱۷ واحد در ۲۱۶ بازی این است که کل مبلغ برد بازیکن در n بازی اول تقسیم بر n ، با احتمال ۱، وقتی $n \rightarrow \infty$ به $\frac{17}{216}$ همگرا خواهد بود.

در مثال بعد ساده ترین صورت نظریه وراثت که توسط مندل بسط داده شده است بررسی می شود (۱۸۴۴-۱۸۲۲).

مثال ۴ ت. فرض کنید صفت خاصی (مانند رنگ چشم یا چپ دستی) از یک فرد معین را بر مبنای یک جفت ژن طبقه بندی کنیم و فرض کنید d ، ژن غالب و r ، ژن مغلوب باشد. در این صورت فردی با ژنهای dd غالب خالص و فردی با ژنهای rr مغلوب خالص و فردی با ژنهای rd دو رگه نامیده می شود. غالب خالص و دو رگه در ظاهر مشابهند. اطفال از هریک از والدین یک ژن دریافت می کنند. اگر در ارتباط با یک صفت خاص، والدین دو رگه دارای ۴ بچه باشند، احتمال این که ۳ بچه از ۴ بچه ظاهر غالب داشته باشند چقدر است؟

حل: اگر فرض کنیم که هریک از بچه ها با احتمال مساوی هریک از دو ژن را از والدین به ارث می برند، احتمالهای مربوط به اطفال والدین دو رگه که دارای ژنهای dd یا rr هستند به ترتیب عبارت است از $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4}$.

بنابراین چون یک بچه دارای ظاهر غالب خواهد بود اگر یک جفت ژن او dd یا rd باشد، در نتیجه تعداد این بچه ها دارای توزیع دو جمله ای با پارامترهای $\left(4, \frac{3}{4}\right)$ است. پس احتمال مطلوب برابر است با

$$\binom{4}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$$

مثال ۴ ت. هیأتی از داوران را در نظر می گیریم که در آن برای اثبات جرم باید، ۸ داور از ۱۲ داور جرم را تأیید کنند؛ یعنی برای آن که مدافع مجرم شناخته شود باید حداقل ۸ نفر از داوران رأی به مجرم بودن او بدهند. اگر فرض کنیم رأی داوران مستقل از یکدیگر باشد و هریک تصمیم درست را با احتمال θ اختیار کنند، احتمال این که هیأت داوران رأی صحیح بدهند چقدر است؟

حل: مسأله به صورتی که مطرح شده روشن نیست، زیرا اطلاعات کافی برای حل مسأله در دست نیست. مثلاً، اگر مدافع بی گناه باشد، احتمال این که هیأت داوران تصمیم

صحیح بگیرند برابر است با

$$\sum_{i=5}^{12} \binom{12}{i} \theta^i (1-\theta)^{12-i}$$

حال آن که اگر مقصر باشد، احتمال تصمیم درست برابر است با

$$\sum_{i=8}^{12} \binom{12}{i} \theta^i (1-\theta)^{12-i}$$

بنابراین اگر α احتمال مقصر بودن باشد، با شرطی کردن بر مقصر بودن یا نبودن معلوم می شود که احتمال تصمیم صحیح داوران به صورت زیر است

$$\alpha \sum_{i=8}^{12} \binom{12}{i} \theta^i (1-\theta)^{12-i} + (1-\alpha) \sum_{i=5}^{12} \binom{12}{i} \theta^i (1-\theta)^{12-i}$$

مثال ۴ ج. یک سیستم مخابراتی از n جزء تشکیل می شود که هر یک از آنها بطور مستقل و با احتمال p عمل می کند. کل سیستم وقتی بطور مؤثر فعال خواهد بود که حداقل نصف مؤلفه ها، درست عمل کنند.

(الف) به ازای چه مقادیر p یک سیستم با ۵ مؤلفه بهتر از یک سیستم با ۳ مؤلفه عمل می کند.

(ب) بطور کلی، چه موقع سیستمی با $2k+1$ مؤلفه بهتر از سیستمی دارای $2k-1$ مؤلفه عمل می کند.

حل: (الف) چون تعداد مؤلفه های فعال یک متغیر تصادفی دوجمله ای با پارامترهای (n, p) است، نتیجه می شود احتمال این که سیستمی با ۵ مؤلفه فعال باشد برابر است با

$$\binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1-p) + p^5$$

در صورتی که احتمال فوق برای سیستمی با ۳ مؤلفه برابر است با

$$\binom{3}{2} p^2 (1-p) + p^3.$$

بنابراین، سیستم ۵ مؤلفه ای بهتر است اگر

$$10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5 \geq 3p^2(1-p) + p^3$$

که به صورت زیر خلاصه می شود

$$3(p-1)^2(2p-1) \geq 0$$

یا

$$p \geq 1/2.$$

(ب) بطور کلی سیستمی با $2k+1$ مؤلفه بهتر از $2k-1$ مؤلفه عمل می کند اگر (و فقط اگر) $p > \frac{1}{2}$. برای اثبات این مطلب سیستمی را با $2k+1$ مؤلفه در نظر می گیریم و فرض می کنیم X تعداد اول آن باشد که فعال هستند. در این صورت

$$P_{2k+1}(\text{فعال}) = P\{X \geq k+1\} + P\{X = k\}(1 - (1-p)^2) + P\{X = k-1\}p^2$$

زیرا $2k+1$ مؤلفه سیستم فعال هستند اگر

$$X \geq k+1 \quad (\text{الف})$$

(ب) $X = k$ و حداقل یکی از دو مؤلفه باقیمانده عمل کند.

یا

(پ) $X = k-1$ و هر دو مؤلفه بعدی عمل کنند

چون

$$P_{2k-1}(\text{فعال}) = P\{X \geq k\} \\ = P\{X = k\} + P\{X \geq k+1\}$$

نتیجه می شود

$$P_{2k+1}(\text{فعال}) - P_{2k-1}(\text{فعال}) \\ = P\{X = k-1\}p^2 - (1-p)^2 P\{X = k\} \\ = \binom{2k-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^k p^2 - (1-p)^2 \binom{2k-1}{k} p^k(1-p)^{k-1} \\ = \binom{2k-1}{k} p^k(1-p)^k [p - (1-p)] \quad \text{و} \quad \binom{2k-1}{k-1} = \binom{2k-1}{k} \\ \geq 0 \Leftrightarrow P \geq \frac{1}{2}.$$

حال خواص توابع جرم احتمال یک متغیر دو جمله‌ای را بررسی می‌کنیم. بخصوص حکم زیر را ثابت می‌کنیم

حکم ۱-۴

اگر X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای (n, p) ، $0 < p < 1$ باشد، آن‌گاه وقتی X از 0 تا n تغییر می‌کند، $P\{X = k\}$ ابتدا بطور یکنوا صعود می‌کند و سپس بطور یکنوا نزول خواهد کرد و وقتی به ماکزیمم خود می‌رسد که k بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی $(n+1)p$ باشد.

پرهان: حکم را با توجه به مقدار $P\{X = k\} / P\{X = k-1\}$ ثابت می‌کنیم و معین می‌کنیم که به ازای چه مقادیر k بزرگتر یا کوچکتر از 1 خواهد بود.

$$\begin{aligned} \frac{P\{X = k\}}{P\{X = k-1\}} &= \frac{\frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}}{\frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}} \\ &= \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)} \end{aligned}$$

بنابر این $P\{X = k\} \geq P\{X = k-1\}$ اگر و فقط اگر

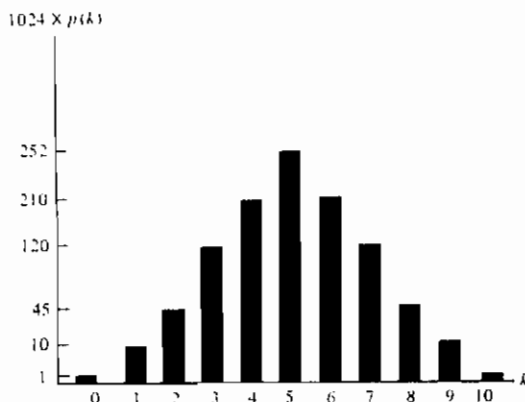
$$(n-k+1)p \geq k(1-p)$$

به عبارت معادل اگر و فقط اگر

$$k \leq (n+1)p$$

به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

به عنوان توضیح بیشتر حکم ۱-۴ به شکل ۴-۵ توجه کنید. این شکل مربوط به تابع جرم احتمال یک متغیر تصادفی با پارامترهای $(10, \frac{1}{2})$ است



$$p(k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \quad \text{شکل ۴-۵ نمودار}$$

۴-۱ محاسبه تابع توزیع دو جمله‌ای

فرض کنید X دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای (n, p) باشد. کلید محاسبه تابع

توزیع

$$P\{X \leq i\} = \sum_{k=0}^i \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

استفاده از رابطه زیر بین $P\{X = k\}$ و $P\{X = k + 1\}$ است، که در اثبات حکم ۴-۱ به دست آمد:

$$P\{X = k + 1\} = \frac{p}{1-p} \frac{n-k}{k+1} P\{X = k\} \quad (۴-۴)$$

مثال ۴. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با پارامترهای $n = 6$ و $p = 0.4$ باشد.

در این صورت با در نظر گرفتن $P\{X = 0\} = (0.6)^6$ و استفاده مکرر از معادله ۴-۴ داریم

$$P\{X = 0\} = (.6)^6 = .0467$$

$$P\{X = 1\} = \frac{4}{3} P\{X = 0\} = .1866$$

$$P\{X = 2\} = \frac{5}{3} P\{X = 1\} = .3110$$

$$P\{X = 3\} = \frac{4}{3} P\{X = 2\} = .2765$$

$$P\{X = 4\} = \frac{3}{4} P\{X = 3\} = .1382$$

$$P\{X = 5\} = \frac{3}{4} P\{X = 4\} = .0369$$

$$P\{X = 6\} = \frac{1}{6} P\{X = 5\} = .0041.$$

یک برنامه کامپیوتری به زبان بیسیک که از معادله برگشتی (۴ - ۴) برای محاسبه تابع توزیع دوجمله ای استفاده می کند در آخر این فصل داده شده است. این برنامه ابتدا $P\{X=0\} = (1-p)^n$ را محاسبه می کند و سپس معادله ۴-۴ را متوالیاً برای محاسبه $P\{X=0\} = (1-p)^n$ به کار می برد. ولی این روش فقط برای مقادیر متوسط n مناسب است، زیرا درحالی که n بزرگ است به خاطر گردشدن اعداد به وسیله کامپیوتر، $P\{X=0\} = (1-p)^n$ برابر صفر به دست می آید. در این صورت تمام جملات بعدی $P\{X=k\}$ ، $k = 1, \dots, i$ نیز برابر صفر خواهد شد.

برای جلوگیری از این عمل برنامه کامپیوتر طوری نوشته می شود که به جای $P\{X=0\}$ مقدار $P\{X=j\}$ را محاسبه کند که در آن

$$j = \begin{cases} i & i \leq (n+1)p \\ [(n+1)p] & i > (n+1)p \end{cases}$$

که در آن $[x]$ که در برنامه $\text{Int}(x)$ نامیده می شود، عبارت از بزرگترین جزء صحیح x است. (از تمام احتمالهای $P\{X=k\}$ ، $k = 0, 1, \dots, i$ که باید محاسبه شوند، $P\{X=j\}$ بزرگترین آنهاست). سپس برنامه بطور برگشتی مقادیر $P\{X=j-1\}$ ، $P\{X=j-2\}$ ، \dots ، $P\{X=0\}$ را محاسبه می کند. به علاوه اگر $i < j$ مقادیر $P\{X=j+1\}$ ، \dots ، $P\{X=i\}$ نیز محاسبه می شود.

برای محاسبه

$$\begin{aligned} P\{X=j\} &= \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j(j-1)\cdots 1} p^j (1-p)^{n-j} \end{aligned}$$

ابتدا از طرفین لگاریتم می گیریم

$$\begin{aligned} \log P\{X=j\} &= \sum_{k=1}^j \log(n+1-k) \\ &\quad - \sum_{k=1}^j \log(k) + j \log p + (n-j) \log(1-p) \end{aligned}$$

و سپس می نویسیم

$$P\{X=j\} = \exp\{\log P\{X=j\}\}$$

مثال ۴ ج. الف) اگر X دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای $(۲۵۰, ۰.۵)$ باشد مقدار $P\{X \leq 145\}$ را محاسبه کنید.

ب) اگر X دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای $(۱۰۰۰, ۰.۱)$ باشد مقدار $P\{X \leq 90\}$ را محاسبه کنید.

حل: از برنامه کامپیوتری زیر برای توزیع دو جمله‌ای استفاده کنید:

```

RUN
THE DISTRIBUTION FUNCTION OF A BINOMIAL(n,p) RANDOM VARIABLE
ENTER n
? 250
ENTER p
? .5
ENTER i
? 145
THE PROBABILITY IS .995255
OK

```

```

RUN
THE DISTRIBUTION FUNCTION OF A BINOMIAL(n,p) RANDOM VARIABLE
ENTER n
? 1000
ENTER p
? .1
ENTER i
? 90
THE PROBABILITY IS .1582189
OK

```

۵- متغیر تصادفی پواسن

متغیر تصادفی X با مقادیر $0, 1, 2, \dots$ را یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λ گوئیم اگر برای $\lambda > 0$ داشته باشیم

$$p(i) = P\{X = i\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1-5)$$

معادله (۱-۵) یک تابع جرم احتمال است، زیرا

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

توزیع احتمال پواسن توسط پواسن در یکی از کتابهایش در مبحث احتمال (۱۸۳۷) معرفی شده است.

متغیر تصادفی پواسن در زمینه‌های مختلف کاربرد زیادی دارد زیرا آن را می‌توان به عنوان تقریب متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای (n, p) وقتی n بزرگ و p کوچک است

به قسمی که np مقدار متوسطی را اختیار می کند در نظر گرفت. برای ملاحظه این مطلب، فرض کنید X یک متغیر تصادفی دو جمله ای با پارامترهای (n, p) باشد و $\lambda = np$. در این صورت

$$\begin{aligned} P\{X = i\} &= \frac{n!}{(n-i)!i!} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= \frac{n!}{(n-i)!i!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-i} \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-i+1)}{n^i} \frac{\lambda^i (1-\lambda/n)^n}{i! (1-\lambda/n)^i} \end{aligned}$$

حال برای n بزرگ و مقدار متوسط λ می توان نوشت

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda} \frac{n(n-1) \cdots (n-i+1)}{n^i} \approx 1 \quad \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^i \approx 1$$

پس در این صورت داریم

$$P\{X = i\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$

به عبارت دیگر، اگر n آزمایش مستقل با احتمال موفقیت p انجام شود، وقتی n بزرگ و p به قدری کوچک باشد که np مقدار متوسطی را اختیار کند آن گاه، تعداد موفقیت‌های حاصل تقریباً یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر $\lambda = np$ است. این مقدار (که معلوم می شود برابر میانگین تعداد موفقیت‌هاست) بطور تجربی به دست می آید.

چند مثال از متغیرهای تصادفی که معمولاً از قانون احتمال پواسن [یعنی از معادله (۵-۱)] تبعیت می کند به قرار زیر است:

- ۱- تعداد غلط‌های چاپی در یک صفحه (یا در تعدادی از صفحات) کتاب.
- ۲- تعداد افراد یک فرقه که ۱۰۰ سال عمر می کنند.
- ۳- تعداد تلفن‌های اشتباه که در یک روز انجام می شود.
- ۴- تعداد بسته های فلفل که در یک فروشگاه معین در روز فروخته می شود.
- ۵- تعداد مشتریان اداره پست در یک روز معین.
- ۶- تعداد پست‌های خالی در یک دادگاه عالی در طول یکسال.
- ۷- تعداد ذرات α در یک دوره ثابت که از یک جسم رادیو اکتیو منتشر می شود.

هریک از مثالهای فوق، و متغیرهای تصادفی دیگر، به همین دلیل دارای توزیع پواسن هستند. یعنی، به علت تقریب پواسن با دو جمله ای. مثلاً، می توان فرض کرد که هر حرف از یک صفحه با احتمال p اشتباه تایپ می شود. بنابراین تعداد اشتباهات در یک صفحه تقریباً دارای توزیع پواسن با پارامتر $\lambda = np$ است که در آن n تعداد حروف یک صفحه است. همین طور، می توان فرض کرد که هر فرد در یک فرقه با احتمال معینی به سن ۱۰۰ سالگی می رسد. همچنین، هر شخص که به یک عطاری وارد می شود می توان فرض کرد که با احتمال معینی یک بسته فلفل می خرد و الی آخر.

مثال ۵ الف. فرض کنید تعداد اشتباهات تایپی در یک صفحه این کتاب دارای توزیع

پواسن با پارامتر $\lambda = \frac{1}{2}$ است. احتمال حداقل یک اشتباه در این صفحه کتاب چقدر است؟

حل: فرض کنید X تعداد اشتباهات در این صفحه باشد، داریم

$$P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - e^{-1/2} \approx .395$$

مثال ۵ ب. فرض کنید کالای تولید شده به وسیله یک ماشین با احتمال 0.1

معیوب است. مطلوب است احتمال آن که در یک نمونه ۱۰ تایی حداکثر یک کالای معیوب باشد.

حل: احتمال مطلوب برابر است با

$$\binom{10}{0} (.1)^0 (.9)^{10} + \binom{10}{1} (.1)^1 (.9)^9 = 7361$$

در صورتی که با تقریب پواسن داریم $e^{-1} + e^{-1} \approx .7358$.

مثال ۵ پ. آزمایش مربوط به شمردن ذرات α را در مدت یک ثانیه از یک گرم جسم

رادیو اکتیو در نظر بگیرید. اگر از قبل بدانیم که بطور متوسط $3/2$ ذره صادر می شود یک تقریب خوب برای احتمال این که بیش از ۲ ذره α صادر نشود پیدا کنید.

حل: اگر یک گرم جسم رادیو اکتیو را متشکل از n اتم در نظر بگیریم که هر یک با

احتمال $\lambda = \frac{3.2}{n}$ تجزیه شده و ذرات α در طول یک ثانیه مورد مطالعه صادر می کند آن گاه با

یک تقریب خوب تعداد α های صادر شده یک متغیر پواسن، پارامتر $\lambda = 3.2$ است. پس

احتمال مطلوب عبارت است از

$$P\{X \leq 2\} = e^{-3.2} + 3.2e^{-3.2} + \frac{(3.2)^2}{2}e^{-3.2} \\ \approx .382$$

نشان داده ایم که توزیع پواسن با پارامتر np به شرط آن که n بزرگ و p کوچک باشد، یک تقریب بسیار خوب برای توزیع تعداد موفقیتها در n آزمایش مستقل است به قسمی که احتمال موفقیت هریک از آزمایشها p باشد، در واقع، این تقریب خوب است حتی اگر آزمایشها مستقل هم نباشند، به شرط آن که این وابستگی «ضعیف» باشد. مثلاً، مسأله جور بودن (مثال ۵ خ در فصل ۲) را به خاطر بیاورید که در آن n مرد بتصادف کلاهی از مجموعه کلاههای خود انتخاب می کنند. انتخاب تصادفی هر کلاه را می توان مانند نتیجه یکی از n آزمایش در نظر گرفت که در آن آزمایش i یک موفقیت است اگر فرد i کلاه خود را انتخاب کند، $i = 1, \dots, n$. پیشامد E_i ، $i = 1, \dots, n$ ، را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$E_i = \{ \text{آزمایش } i \text{ ام موفقیت است} \}$$

در این صورت باسانی دیده می شود که

$$P\{E_i\} = 1/n \quad \text{و} \quad P\{E_i | E_j\} = 1/(n-1), j \neq i$$

پس اگر E_i ها، $i = 1, \dots, n$ ، مستقل نباشند وابستگی آنها برای مقادیر بزرگ n بسیار ضعیف خواهد بود. به این دلیل معقول به نظر می رسد که انتظار داشته باشیم که تعداد موفقیتها تقریباً دارای توزیع پواسن با پارامتر $1 = n(1/n)$ است، و در واقع این مطلب در مثال ۵ خ فصل ۲ ثابت شد.

برای روشن شدن مطلب و این که تقریب پواسن وقتی وابستگی ضعیف است مناسب می باشد مجدداً مثال روز تولد - مثال ۵ چ در فصل ۲ - را در نظر می گیریم. در این مثال فرض می کنیم هر یک از n فرد با احتمال مساوی می تواند در هریک از ۳۶۵ روز سال متولد شده باشد و مسأله عبارت است از تعیین احتمال این که مجموعه ای از n فرد مستقل دارای روزهای تولد مختلف باشند. با استفاده از آنالیز ترکیبی به ازای $n = 23$ این احتمال کمتر از $\frac{1}{2}$ است.

مسأله فوق را می توان با استفاده از تقریب پواسن به صورت زیر حل کرد. فرض کنید برای هریک از $\binom{n}{2}$ زوج مربوط به افراد i و j ، $i \neq j$ یک آزمایش داریم و آزمایش z - i را

موفقیت گوئیم اگر فرد i و z در یک روز متولد شده باشند. اگر E_{ij} این پیشامد باشد که آزمایش i - z یک موفقیت است آن گاه با وجود این که $\binom{n}{2}$ پیشامدها E_{ij} ، $n > i < j \leq n$ مستقل نیستند (تمرین نظری ۱۴) این همبستگی به نظر ضعیف است. (در واقع این پیشامدها «دو به دو مستقل هستند» یعنی هر دو پیشامد E_{ij} و E_{kl} مستقل هستند - مجدداً تمرین ۱۴ را ملاحظه کنید). چون $P(E_{ij}) = \frac{1}{365}$ بی‌مناسبت نیست که فرض کنیم تعداد موفقیتها تقریباً دارای توزیع پواسن با پارامتر زیر است

$$\binom{n}{2} / 365 = n(n-1) / 730.$$

بنابراین

$$P \{ \text{صفر موفقیت} \} = P \{ \text{هیچ دو نفری در یک روز متولد نشده باشند} \} \\ = \exp \{ -n(n-1) / 730 \}$$

برای تعیین کوچکترین مقدار n که به ازای آن این احتمال کمتر از $\frac{1}{2}$ باشد توجه کنید که

$$\exp \{ -n(n-1) / 730 \} \leq \frac{1}{2}$$

به عبارت دیگر

$$\exp \{ n(n-1) / 730 \} \geq 2$$

اگر از طرفین لگاریتم بگیریم داریم

$$n(n-1) \geq 730 \log 2 \\ \approx 505.997$$

که دارای جواب $n = 23$ است، که با نتیجه مثال ۵ خ تطابق دارد.

حال فرض کنید بخواهیم میان n فرد، هیچ سه نفری دارای یک تاریخ تولد یکسان نباشند. هرچند این نیز یک مسأله مشکل ترکیب است، یک تقریب خوب از آن می‌توان به دست آورد. فرض کنید که برای هر یک از $\binom{n}{3}$ سه تایی i, j, k که در آن $n \geq k > j > i \geq 1$ یک آزمایش وجود داشته باشد و آزمایش $k - j - i$ را موفقیت گوئیم اگر افراد i و z و k همه تاریخ تولد یکسان داشته باشند. مانند فوق نتیجه می‌شود که تعداد موفقیتها تقریباً یک متغیر تصادفی است با پارامتر

$$\begin{aligned} \binom{n}{3} P\{i, j, k \text{ ایستتاریخ تولید یکسان}\} &= \binom{n}{3} \left(\frac{1}{365}\right)^2 \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6 \times (365)^2} \end{aligned}$$

بنابراین

$$P(\text{تاریخ تولد هیچ سه نفری یکسان نباشد}) \approx \exp\{-n(n-1)(n-2)/799350\}$$

این احتمال وقتی n در نا مساوی زیر صدق کند کمتر از $\frac{1}{4}$ خواهد بود

$$n(n-1)(n-2) \geq 799350 \log 2 \approx 554067.1$$

که معادل با $n \geq 84$. پس احتمال این که حداقل ۳ فرد در یک گروه ۸۴ نفری یا بزرگتر دارای تاریخ تولد یکسان باشند بیشتر از $\frac{1}{4}$ است.

یک کاربرد دیگر توزیع احتمال بواسن وقتی است که «پیشامدها» در لحظاتی از زمان اتفاق افتند. مثلاً وقتی پیشامد، وقوع یک زمین لرزه باشد، یا پیشامد، ورود به یک سازمان خاص (بانک، اداره پست، پمپ بنزین و ...). باشد؛ یک امکان دیگر پیشامد وقوع یک جنگ است. فرض کنید پیشامدها در لحظات (تصادفی) معینی از زمان رخ دهند، و برای مقدار ثابت λ فرضهای زیر برقرار باشند:

۱- احتمال این که درست یک پیشامد در فاصله ای به طول h رخ دهد برابر $\lambda h + o(h)$ باشد که در آن $o(h)$ تابعی است مانند $f(h)$ به قسمی که $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{f(h)}{h} \rightarrow 0$. [مثلاً $f(h) = h^2$]
برابر $o(h)$ است در صورتی که $f(h) = b$ چنین نیست.

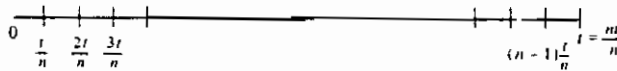
۲- احتمال این که دو پیشامد یا بیشتر در فاصله ای به طول h رخ دهد برابر $o(h)$ است.

۳- برای هر عدد صحیح n ، z_1, z_2, \dots, z_n و هر مجموعه از n بازه جدا از هم، اگر E_i پیشامد وقوع دقیقاً z_i پیشامد مورد نظر در فاصله i ام باشد، آن گاه E_1, E_2, \dots, E_n مستقل هستند.

به عبارت ساده تر، (۱) و (۲) بیان می کنند که برای مقادیر کوچک h احتمال این که درست یک پیشامد در بازه ای به طول h رخ دهد برابر است با λh به اضافه مقداری که در مقایسه با h کوچک است، در صورتی که احتمال وقوع دو پیشامد یا بیشتر در مقایسه با h کوچک است. فرض (۳) بیان می کند که هرچه در یک فاصله رخ دهد اثری در رویدادهای فواصل دیگر

نخواهد داشت.

تحت فرضهای ۱، ۲، ۳ نشان خواهیم داد که تعداد پیشامدهایی که در فاصله به طول t رخ می دهد یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λt است. به عبارت دقیقتر فرض کنید فاصله مورد نظر $[0, t]$ و تعداد پیشامدهایی که در آن رخ می دهند $N(t)$ باشد. برای یافتن مقدار $P\{N(t) = k\}$ ابتدا فاصله $[0, t]$ را به n زیر فاصله جدا از هم به طول $\frac{t}{n}$ افزایش می کنیم



(شکل ۴-۶)

از طرفی

$$P\{N(t) = k\} = P\{\text{تعداد } k \text{ زیر فاصله شامل یک پیشامد و } n - k \text{ فاصله شامل } 0 \text{ پیشامد}\} \\ + P\{\text{حداقل یک زیر فاصله شامل } 2 \text{ پیشامد یا بیشتر و } k\} \quad (۲-۵)$$

زیرا پیشامد سمت چپ معادله (۲-۵) یعنی $\{N(t) = k\}$ با اجتماع دو پیشامد جدای سمت راست معادله برابر است. اگر این دو پیشامد را A و B بنامیم داریم

$$P(B) \leq P\{\text{حداقل یک زیر فاصله شامل دو پیشامد یا بیشتر}\} \\ = P\left(\bigcup_{i=1}^n \{\text{زیر فاصله } i \text{ ام شامل دو پیشامد یا بیشتر باشد}\}\right) \\ \leq \sum_{i=1}^n P\{\text{زیر فاصله } i \text{ ام شامل دو پیشامد یا بیشتر باشد}\} \\ = \sum_{i=1}^n o\left(\frac{t}{n}\right) \\ = no\left(\frac{t}{n}\right) \\ = t \left[\frac{o(t/n)}{t/n} \right]$$

از طرفی به ازای هر t ، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\frac{t}{n} \rightarrow 0$ و در نتیجه بنا به تعریف $o(h)$ اگر $n \rightarrow \infty$ ، آن گاه

پس وقتی $n \rightarrow \infty$ ،

$$P(B) \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty \quad (۳-۵)$$

از طرف دیگر چون از فرض ۱ و ۲ نتیجه می شود

$$P(0) \text{ پشامد در یک فاصله به طول } h \text{ رخ دهد} \\ = 1 - [\lambda h + o(h) + o(h)] = 1 - \lambda h - o(h)^1$$

با توجه به فرض استقلال (۳) معلوم می شود که

$$P(A) = P\{k \text{ زیر فاصله شامل یک پشامد و } n-k \text{ فاصله شامل } 0 \text{ پشامد}\}$$

$$= \binom{n}{k} \left[\frac{\lambda t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right) \right]^k \left[1 - \left(\frac{\lambda t}{n}\right) - o\left(\frac{t}{n}\right) \right]^{n-k}$$

با وجود این چون

$$n \left[\frac{\lambda t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right) \right] = \lambda t + t \left[\frac{o(t/n)}{t/n} \right] \rightarrow \lambda t \text{ و } n \rightarrow \infty$$

مانند استدلالی که برای تقریب دو جمله‌ای با پواسن داشتیم می توان نوشت

$$P(A) \rightarrow e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad \text{و } n \rightarrow \infty \quad (۴-۵)$$

پس $n \rightarrow \infty$ از معادلات (۲-۵)، (۳-۵) و (۴-۵) نتیجه می شود

$$P\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad k = 0, 1, \dots \quad (۵-۵)$$

بنابراین، اگر فرضهای (۱)، (۲) و (۳) برقرار باشند تعداد پیشامدهای رخ داده در فاصله‌ای به طول t ، یک متغیر پواسن با پارامتر λt است، و می‌گوییم که پیشامدها طبق فرآیند پواسن با نرخ λ رخ می‌دهند. مقدار λ که همان نرخ در واحد زمان است مقداری است ثابت که باید بطور تجربی به دست آید.

بحث فوق نشان می‌دهد که چرا یک متغیر تصادفی پواسن یک تقریب خوب برای پدیده‌های گوناگونی به صورت زیر است:

۱- تعداد زمین لرزه‌ها در یک فاصله زمانی ثابت.

۲- تعداد جنگها در سال

۳- تعداد الکترونهاي آزاد شده ، از کاتد در یک فاصله زمانی ثابت .

۴- تعداد مرگ و میر بیمه گذاران یک شرکت بیمه عمر در یک فاصله زمانی مفروض .

مثال ۵ ت. فرض کنید زمین لرزه ها در شرق ایالات متحده تحت شرایط ۱، ۲ و ۳ با $\lambda = 2$ و یک هفته به عنوان واحد زمان رخ می دهند (یعنی زمین لرزه ها طبق سه فرض با نرخ ۲ تا در هفته رخ می دهند):

(۱) احتمال این که حداقل ۳ زمین لرزه در طول ۲ هفته آینده رخ دهد چقدر است؟

(۲) توزیع احتمال زمان را از حالا تا زمین لرزه بعد پیدا کنید.

حل: ۱- از معادله (۵-۵) داریم

$$\begin{aligned} P\{N(2) \geq 3\} &= 1 - P\{N(2) = 0\} - P\{N(2) = 1\} - P\{N(2) = 2\} \\ &= 1 - e^{-4} - 4e^{-4} - \frac{4^2}{2}e^{-4} \\ &= 1 - 13e^{-4} \end{aligned}$$

۲- فرض کنید X زمان لازم (برحسب هفته) تا زمین لرزه بعدی باشد. چون X بزرگتر

از ۱ خواهد بود اگر و فقط اگر هیچ پیشامدی در ۱ واحد زمان بعدی رخ ندهد، از معادله (۵-۵) نتیجه می شود که

$$P\{X > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$$

و بنابراین تابع توزیع احتمال F متغیر تصادفی X به صورت زیر است

$$\begin{aligned} F(t) = P\{X \leq t\} &= 1 - P\{X > t\} = 1 - e^{-\lambda t} \\ &= 1 - e^{-2t} \end{aligned}$$

۵-۱ محاسبه تابع توزیع پواسن

اگر X یک متغیر پواسن با پارامتر λ باشد، آن گاه

$$\frac{P\{X = i + 1\}}{P\{X = i\}} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{i+1} / (i+1)!}{e^{-\lambda} \lambda^i / i!} = \frac{\lambda}{i+1} \quad (۶-۵)$$

اگر با $P\{X = 0\} = e^{-\lambda}$ شروع کنیم می توان با استفاده از (۶-۵) مقادیر زیر را محاسبه کرد

$$P\{X = 1\} = \lambda P\{X = 0\}$$

$$P\{X = 2\} = \frac{\lambda}{2} P\{X = 1\}$$

⋮

$$P\{X = i + 1\} = \frac{\lambda}{i + 1} P\{X = i\}.$$

یک برنامه بیسیک که معادله ۵-۶ را برای محاسبه تابع توزیع پواسن به کار می برد در آخر این فصل ارائه شده است. در این برنامه محاسبه با $e^{-\lambda}$ شروع می شود. ولی، برای حالتی که λ بزرگ است، کامپیوتر مقدار $e^{-\lambda}$ را برابر 0 به دست می آورد، و برنامه با $P\{X = j\}$ شروع می شود که در آن

$$j = \begin{cases} i & i \leq \lambda \\ \text{Int}(\lambda) & i > \lambda \end{cases}$$

و $\text{Int}(\lambda)$ بزرگترین عدد صحیح کمتر یا مساوی λ است. دلیل این انتخاب این است که از تمام مقادیر $\{P\{X = k\} | k = 0, 1, \dots, i\}$ که باید محاسبه شود بزرگترین آنها $\{P\{X = j\}$ است (تمرین نظری ۱۱ را ملاحظه کنید). این برنامه مقدار $\{P\{X = j\}$ را به کمک محاسبه

$$\log P\{X = j\} = -\lambda + j \log(\lambda) - \sum_{k=1}^j \log k$$

و سپس نوشتن $P\{X = j\} = \exp[\log\{X = j\}]$ به دست می آورد.

پس از محاسبه $\{P\{X = j\}$ ، برنامه با استفاده از (۵-۶) بطور بازگشتی مقادیر $\{P\{X = j-1\}, P\{X = j-2\}, \dots, P\{X = 0\}$ را محاسبه کند. اگر $i < j$ ، برنامه مجدداً (۵-۶) را به کار می برد تا بطور بازگشتی مقادیر $\{P\{X = j+1\}, \dots, P\{X = i\}$ را محاسبه کند. از جمع تمام این مقادیر بازگشتی $P\{X \leq i\}$ به دست می آید.

مثال ۵ ت.

(الف) مقدار $\{P\{X \leq 100\}$ را وقتی X دارای توزیع پواسن با میانگین ۹۰ است محاسبه کنید.

(ب) مقدار $P\{X < 1075\}$ را وقتی X دارای توزیع پواسن با میانگین ۱۰۰۰ است حساب کنید.

حل: برنامه توزیع پواسن را اجرا می کنیم

```

RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE PROBABILITY THAT A POISSON RANDOM VARIABLE
IS LESS THAN OR EQUAL TO i
ENTER THE MEAN OF THE RANDOM VARIABLE
? 100
ENTER THE DESIRED VALUE OF i
? 90
THE PROBABILITY THAT A POISSON RANDOM VARIABLE WITH MEAN 100
IS LESS THAN OR EQUAL TO 90 IS .1713914
OK
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE PROBABILITY THAT A POISSON RANDOM VARIABLE
IS LESS THAN OR EQUAL TO i
ENTER THE MEAN OF THE RANDOM VARIABLE
? 1000
ENTER THE DESIRED VALUE OF i
? 1075
THE PROBABILITY THAT A POISSON RANDOM VARIABLE WITH MEAN 1000
IS LESS THAN OR EQUAL TO 1075 IS .989354
OK

```

۶- سایر توزیهای احتمال گسسته

۶-۱ متغیر تصادفی هندسی

فرض کنید آزمایشهای مستقلی با احتمال موفقیت p ، $0 < p < 1$ ، آن قدر تکرار می شود تا یک موفقیت به دست آید. اگر X تعداد آزمایشهای لازم باشد، آن گاه

$$P\{X = n\} = (1 - p)^{n-1} p \quad n = 1, 2, \dots \quad (1-6)$$

برای به دست آوردن معادله (۱-۶) می دانیم شرط لازم و کافی برای $X = n$ آن است که ابتدا، $n-1$ آزمایش شکست و n امین آزمایش موفقیت باشد. معادله (۱-۶) به این شکل به دست می آید زیرا برآمدهای متوالی آزمایشها بنا به فرض مستقل هستند.

چون

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{X = n\} = p \sum_{n=1}^{\infty} (1 - p)^{n-1} = \frac{p}{1 - (1 - p)} = 1$$

در نتیجه با احتمال ۱ یک موفقیت بالاخره اتفاق می افتد. هر متغیر تصادفی X که تابع جرم احتمال آن از معادله (۱-۶) به دست می آید یک متغیر تصادفی هندسی (پاسکال) با پارامتر p نامیده می شود.

مثال ۶ الف. جعبه ای دارای N مهره سفید و M مهره سیاه است. مهره های یکی بعد از

دیگری بطور تصادفی انتخاب می شود تا یک مهره سیاه خارج شود. اگر فرض کنیم که هر انتخاب قبل از انتخاب بعدی جایگذاری می شود، مطلوب است احتمال آن که (۱) دقیقاً n استخراج لازم باشد و (۲) حداقل k استخراج لازم باشد؟

حل: اگر X تعداد مهره های خارج شده لازم برای به دست آوردن یک مهره سیاه باشد، در این صورت X در معادله (۶-۱) با پارامتر $p = \frac{M}{M+N}$ صدق می کند. بنابراین

$$1. \quad P\{X = n\} = \left(\frac{N}{M+N}\right)^{n-1} \frac{M}{M+N} = \frac{MN^{n-1}}{(M+N)^n}$$

$$2. \quad P\{X \geq k\} = \frac{M}{M+N} \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{N}{M+N}\right)^{n-1}$$

$$= \left(\frac{M}{M+N}\right) \left(\frac{N}{M+N}\right)^{k-1} / \left[1 - \frac{N}{M+N}\right]$$

$$= \left(\frac{N}{M+N}\right)^{k-1}$$

البته (۲) را می توانیم مستقیماً به دست آوریم، زیرا احتمال این که حداقل k آزمایش برای به دست آوردن یک موفقیت لازم باشد برابر است با احتمال این که اولین $k-1$ آزمایش همه شکست باشند. یعنی برای یک متغیر تصادفی هندسی

$$P\{X \geq k\} = (1-p)^{k-1}$$

۶-۲ متغیر تصادفی دو جمله ای منفی

فرض کنید آزمایشهای مستقل با احتمال موفقیت p ، $0 < p < 1$ آن قدر تکرار می شود تا r موفقیت به دست آید. اگر X تعداد آزمایشهای لازم باشد، آن گاه

$$P\{X = n\} = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} \quad n = r, r+1, \dots \quad (۶-۲)$$

معادله (۶-۲) این طور حاصل می شود که برای به دست آوردن r موفقیت در n امین آزمایش باید $r-1$ موفقیت در $n-1$ آزمایش اولیه به دست آید، و n امین آزمایش باید یک موفقیت باشد. احتمال اولین پیشامد برابر است با

$$\binom{n-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{n-r}$$

و احتمال پیشامد دوم برابر p است، پس با توجه به استقلال، معادله (۶-۲) به دست می‌آید. برای تحقیق این که بالاخره r موفقیت باید رخ دهد می‌توان بطور تحلیلی ثابت کرد که

$$\sum_{n=r}^{\infty} P\{X = n\} = \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} = 1 \quad (۶-۳)$$

یا بطور احتمالی استدلال کرد: تعداد آزمایشهای لازم برای به دست آوردن r موفقیت را می‌توان به صورت $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_3$ نوشت که در آن Y_1 تعداد آزمایشهای لازم برای اولین موفقیت، Y_2 تعداد آزمایشهای دیگر لازم برای به دست آوردن دومین موفقیت و Y_3 تعداد آزمایشهای دیگر لازم تا به دست آوردن سومین موفقیت، و الی آخر می‌باشد. چون آزمایشها مستقل و همه دارای احتمال موفقیت یکسان هستند نتیجه می‌شود که Y_1, Y_2, \dots, Y_r ، همه متغیرهای تصادفی هندسی و بنابراین هر یک با احتمال ۱ متناهی هستند و در نتیجه $\sum_{i=1}^r Y_i$ نیز باید متناهی باشد، و به این ترتیب معادله (۶-۳) ثابت می‌شود.

متغیر تصادفی X که تابع جرم احتمال آن با معادله (۶-۲) داده می‌شود یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی با پارامترهای (r, p) نامیده می‌شود. توجه کنید که متغیر تصادفی هندسی یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی با پارامتر $(1, p)$ است.

در مثال بعد با استفاده از دو جمله‌ای منفی یک حل دیگر برای مسأله نقاط پیدا می‌کنیم.

مثال ۶ ب. اگر آزمایشهای مستقل با احتمال موفقیت p انجام شود، احتمال این که r موفقیت قبل از m شکست به دست آید چقدر است؟

حل: توجه کنید که r موفقیت قبل از m شکست رخ می‌دهد اگر و فقط اگر موفقیت r ام قبل از $r + m - 1$ آزمایش به دست آید. زیرا اگر r موفقیت قبل از یا در آزمایش $r + m - 1$ رخ دهد، در آن صورت باید قبل از شکست m ام رخ دهد و به عکس. بنابراین از معادله (۶-۲) نتیجه می‌شود که احتمال مطلوب برابر است با

$$\sum_{n=r}^{r+m-1} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

مثال ۶ پ. مسأله قوطی کبریت با ناخ. یک ریاضیدان که پیپ می‌کشد همیشه دو قوطی کبریت دارد، یکی در جیب چپ و یکی در جیب راست. هر بار که به کبریت نیاز داشته باشد با

احتمال مساوی هریک از آنها را اختیار می کند؛ فرض کنید ریاضیدان می داند که یکی از جعبه ها خالی است. اگر فرض کنیم که در ابتدا هر دو جعبه کبریت شامل N سیخ کبریت است، احتمال آن که در جعبه دیگر k کبریت $k = 0, 1, \dots, N$ وجود داشته باشد چقدر است؟

حل: فرض کنید E پیشامدی باشد که ریاضیدان متوجه شده است که قوطی کبریت جیب راست خالی است و k سیخ کبریت در قوطی جیب چپ وجود دارد. حال این پیشامد رخ می دهد اگر و فقط اگر انتخاب $(N+1)$ ام از قوطی سمت راست در آزمایش $N+1+N-k$ صورت گیرد. پس از معادله (۶-۲) دیده می شود (با $r = N+1$ ، $p = 1/2$ ، $n = 2N - K + 1$)،

$$P(E) = \binom{2N-k}{N} \left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k+1}$$

چون احتمال این که ابتدا کبریت راست یا چپ خالی شود برابر است و k کبریت در جعبه سمت راست وجود دارد مقدار مطلوب عبارت است از

$$2P(E) = \binom{2N-k}{N} \left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k}$$

۴-۶ متغیر تصادفی فوق هندسی

فرض کنید نمونه ای به حجم n از جعبه ای که دارای N مهره است که Np مهره آن سفید و $N - Np$ مهره آن سیاه است بتصادف (و بدون جایگذاری) خارج می کنیم. اگر X تعداد مهره های سفید انتخاب شده باشد آن گاه

$$P\{X = k\} = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N-Np}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad k = 0, 1, \dots, \min(n, Np) \quad (۴-۶)$$

هر متغیر تصادفی X با تابع جرم احتمال (۴-۶) را متغیر تصادفی هندسی گویند.

مثال ۶. تعداد نامعینی از حیوانات مثلاً N تا در ناحیه ای زندگی می کنند. برای به دست آوردن اطلاعاتی در باره حجم جامعه، دانشمندان محیط زیست اغلب آزمایش زیر را انجام می دهند: ابتدا تعدادی از آنها مثلاً r تا را می گیرند، آنها را علامت گذاری کرده و رها می کنند. پس از مدتی که حیوانات علامت دار در کل ناحیه پخش شدند، یک نمونه جدید

به حجم n از آنها گرفته می شود. فرض کنید X تعداد حیوانات علامت دار در نمونه دوم باشد. اگر فرض کنید که جمعیت حیوانات در این ناحیه در زمان بین دو نمونه گیری ثابت بماند و احتمال گرفتن هریک از حیوانات یکسان باشد، نتیجه می شود که X دارای یک توزیع فوق هندسی است به قسمی که

$$P\{X = i\} = \frac{\binom{r}{i} \binom{N-r}{n-i}}{\binom{N}{n}} = P_i(N)$$

فرض کنید X برابر i باشد. در این صورت چون $P_i(N)$ احتمال این پیشامد است اگر در ناحیه N حیوان باشد، معلوم می شود که یک برآورد معقول برای N مقداری از N است که تابع $P_i(N)$ را ماکزیمم کند. این برآورد را برآورد دست نمایی ماکزیمم گویند. (تمرینهای نظری ۸ و ۱۲ را برای مثالهای مشابه ملاحظه کنید.)

ماکزیمم $P_i(N)$ را می توان با توجه به عبارت زیر به دست آورد

$$\frac{P_i(N)}{P_i(N-1)} = \frac{(N-r)(N-n)}{N(N-r-n+i)}$$

که این نسبت بزرگتر از ۱ است اگر و فقط اگر

$$(N-r)(N-n) \geq N(N-r-n+i)$$

یا به عبارت دیگر، اگر و فقط اگر

$$N \leq \frac{rn}{i}$$

پس $P_i(N)$ ابتدا صعود می کند و سپس نزول می کند و در بزرگترین عدد صحیحی که از $\frac{rn}{i}$ بیشتر نباشد به ماکزیمم خود می رسد. این مقدار همان برآورد دست نمایی ماکزیمم N خواهد بود. برای مثال فرض کنید در نمونه اول $r = 50$ حیوان علامت گذرای شده است، اگر در نمونه دوم $n = 40$ حیوان گرفته شده باشد و بین آنها $i = 4$ حیوان علامت داشته باشد، مقدار برآورد N برابر 500 حیوان خواهد بود. (باید توجه داشت که برآورد فوق را با فرض این که نسبت حیوانات علامت دار در جمعیت، یعنی $\frac{r}{N}$ ، تقریباً برابر است با نسبت حیوانات علامت دار نمونه، یعنی $\frac{i}{n}$ ، می توان به دست آورد).

مثال ۶ ت. یک مشتری قطعات الکتریکی را به صورت بسته های ۱۰ تایی خریداری

می‌کند. شیوه کار او این است که ۳ قطعه از هر بسته را بتصادف انتخاب می‌کند و آن را می‌پذیرد فقط اگر هر سه سالم باشند. اگر ۳۰ درصد بسته‌ها دارای ۴ معیوب و ۷ درصد آنها دارای یک معیوب باشد، خریدار چه نسبتی از بسته‌ها را رد می‌کند.

حل: فرض کنید A پیشامد پذیرفتن یک بسته باشد. در این صورت

$$P(A) = P(A \mid \text{بسته دارای ۱ معیوب است}) \frac{7}{10} + P(A \mid \text{بسته دارای ۴ معیوب است}) \frac{3}{10}$$

$$= \frac{\binom{4}{0} \binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} \left(\frac{3}{10} \right) + \frac{\binom{1}{0} \binom{9}{3}}{\binom{10}{3}} \left(\frac{7}{10} \right) = \frac{54}{100}$$

بنابراین ۴۶ درصد بسته‌ها رد می‌شوند.

۶-۲ توزیع زتا (زیپ)

یک متغیر تصادفی را دارای توزیع زتا گوئیم اگر تابع جرم احتمال آن به صورت زیر باشد

$$P\{X = k\} = \frac{C}{k^{\alpha+1}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

چون مجموع احتمالات فوق باید برابر ۱ باشد، داریم

$$C = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \right)^{\alpha+1} \right]^{-1}$$

توزیع زتا با توجه به تابع زیر نام گذاری شده است

$$\zeta(s) = 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^s + \left(\frac{1}{3} \right)^s + \dots + \left(\frac{1}{k} \right)^s + \dots$$

که آن را در ریاضیات، تابع زتای ریمنان گویند.

توزیع زتا توسط اقتصاد دان ایتالیایی پارتو برای توصیف توزیع درآمد خانواده‌ها در یک کشور به کار برده شده است. ولی، زیپ این توزیع را در زمینه‌های وسیعی از علوم به کار برد و استفاده از آن را عام ساخت.

تمرینهای نظری

- ۱- مقدار N کوپن متمایز وجود دارد، و هربار که یکی از آنها مستقلاً انتخاب می شود با احتمال $P_i, i = \dots, N$ از نوع i خواهد بود. فرض کنید T تعداد انتخابهای لازم برای انتخاب حداقل یکی از هر نوع باشد. مطلوب است محاسبه $P\{T = n\}$.
- ۲- خاصیت ۳ را برای تابع توزیع ثابت کنید.
- ۳- مقدار $P\{X \geq a\}$ را بر حسب تابع توزیع X بنویسید.
- ۴- تساوی زیر را ثابت کنید یا یک مثال نقض برای آن پیدا کنید

$$P\{X < b\} = \lim_{b_n \rightarrow b} P\{X < b_n\}$$

- ۵- اگر X دارای تابع توزیع F باشد تابع توزیع متغیر تصادفی $\alpha X + \beta$ که در آن α و β مقادیر ثابت و $\alpha \neq 0$ چیست؟
- ۶- n قطعه به صورت خطی به هم وصل شده اند. فرض کنید هر قطعه بطور مستقل با احتمال p عمل می کند. احتمال این که هیچ یک از دو قطعه مجاور خراب نباشد چقدر است؟
- ۷- تعداد n آزمایش متوالی مستقل را در نظر بگیرید، احتمال موفقیت در هر یک از آنها برابر p است. اگر روی هم k موفقیت داشته باشیم، ثابت کنید هر یک از $n! / k! (n - k)!$ ترکیب ممکن k موفقیت و $n - k$ شکست همشانس هستند.
- ۸- فرض کنید X یک متغیر تصادفی دو جمله ای با پارامترهای (n, p) باشد. به ازای چه مقدار p احتمال $P\{X = k\}, k = 0, 1, \dots, n$ ماکزیمم می شود؟ این یک روش آماری برای برآورد p است وقتی مقدار یک متغیر تصادفی دو جمله ای (n, p) برابر k است. اگر n را معلوم فرض کنیم برآورد p مقداری است که $P\{X = k\}$ را ماکزیمم کند. این مقدار را برآورد درست نمایی ماکزیمم گویند.
- ۹- خانواده ای با احتمال $\alpha p^n, \alpha \geq 1, n$ دارای n بچه است، که در آن $\alpha \leq \frac{1-p}{p}$.
- (الف) چه نسبتی از خانواده ها فاقد بچه هستند؟
- (ب) اگر هر بچه با احتمال مساوی پسر یا دختر باشد (مستقل از یکدیگر) چه نسبتی از خانواده ها دارای k پسر (و هر تعداد دختر) خواهند بود؟
- ۱۰- فرض کنید سکه ای را بطور مستقل n بار می اندازیم، در صورتی که می دانیم احتمال آمدن شیر p است. ثابت کنید احتمال این که تعداد شیرها زوج باشد برابر است با

که در آن $q = 1 - p$. این تساوی را با اثبات رابطه زیر و استفاده از آن به دست آورید

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} p^{2i} q^{n-2i} = \frac{1}{2} [(p+q)^n + (q-p)^n]$$

که در آن $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ بزرگترین عدد صحیح کمتر یا مساوی $\frac{n}{2}$ است . این تمرین را با تمرین نظری ۱۳ در فصل ۳ مقایسه کنید .

۱۱- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λ باشد . ثابت کنید $P\{X=i\}$ با i بطور یکنوا صعود می کند و سپس بطور یکنوا نزول خواهد کرد و ماکزیم آن وقتی است که i برابر بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی λ باشد .

[راهنمایی : عبارت زیر را در نظر بگیرید $P\{X=i\} / P\{X=i-1\}$.

۱۲- فرض کنید X دارای توزیع پواسن با پارامتر λ باشد . ثابت کنید که

$$P\{X \text{ زوج}\} = \frac{1}{2}[1 + e^{-2\lambda}]$$

(الف) با استفاده از مسأله ۱۰ و رابطه بین متغیرهای تصادفی دو جمله ای و پواسن .

(ب) مستقیماً با استفاده از بسط $e^{-\lambda} + e^{\lambda}$.

۱۳- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λ باشد . به ازای چه مقدار λ عبارت $k \geq 0, P\{X = k\}$ ماکزیم می شود؟

۱۴- در مجموعه ای از n نفر که بتصادف انتخاب شده اند فرض کنید E_{ij} این پیشامد باشد که دو فرد i و j دارای یک تاریخ تولد باشند . فرض کنید احتمال این که تولد هر فرد در یکی از ۳۶۵ روز سال باشد یکسان است . مطلوب است محاسبه

$$P(E_{3,4} | E_{1,2}) \quad (\text{الف})$$

$$P(E_{1,3} | E_{1,2}) \quad (\text{ب})$$

$$P(E_{2,3} | E_{1,2} \cap E_{1,3}) \quad (\text{پ})$$

از مطالب فوق در مورد استقلال $\binom{n}{2}$ پیشامد E_{ij} چه نتیجه ای می توان گرفت؟

۱۵- جعبه ای دارای $2n$ مهره است به قسمی که ۲ مهره با شماره ۱ و ۲ مهره با شماره ۲، ۲، ...، ۲ و ۲ مهره با شماره n است . مهره ها بتوالی و دو به دو خارج می شوند (بدون جایگذاری) فرض کنید T اولین انتخابی باشد که در آن دو مهره خارج شده دارای شماره i

باشد. (و آن را برابری نهایت بگیرید اگر هیچ کدام از زوجها برابر نباشند). برای $0 < \alpha < 1$ ثابت کنید

$$\lim_n P\{T > \alpha n\} = e^{-\alpha/2}$$

برای اثبات تساوی فوق فرض کنید M_k تعداد زوجهای خارج شده در k انتخاب اولیه باشد،
 $k = 1, \dots, n$

(الف) نشان دهید وقتی n بزرگ است M_k را می توان به عنوان تعداد موفقیتها در k آزمایش (تقریباً) مستقل در نظر گرفت.

(ب) وقتی n بزرگ است مقدار تقریبی $P\{M_k = 0\}$ را محاسبه کنید.

(پ) پیشامد $\{T > \alpha n\}$ را بر حسب مقدار یکی از متغیرهای M_k بنویسید.

(ت) احتمال حدی فوق را ثابت کنید.

۱۶- فرض کنید مقدار پیشامدهای رخ داده در زمان معینی یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λ است. اگر هر پیشامد با احتمال p و مستقل از سایر پیشامدها شمرده شود، ثابت کنید تعداد پیشامدهای شمرده شده یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λp است. همچنین بطور شهودی نشان دهید که این مطلب صحیح است.

به عنوان یک کاربرد مطلب فوق، فرض کنید تعداد ذرات او را نیوم در ناحیه ای یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر $\lambda = 10$ باشد. اگر در یک فاصله زمانی ثابت، هر ذره با احتمال $\frac{1}{50}$ کشف شود، مطلوب است احتمال آن که (الف) دقیقاً ۱ (ب) حداقل ۱ و (پ) حداکثر ۱ ذره در آن زمان کشف شود.

۱۷- ثابت کنید

$$\sum_{i=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-x} x^n dx$$

[راهنمایی: از انتگرال جزء به جزء استفاده کنید].

۱۸- اگر X یک متغیر تصادفی هندسی باشد، بطور تحلیلی ثابت کنید

$$P\{X = n + k \mid X > n\} = P\{X = k\}$$

یک استدلال شهودی برای اثبات فوق با تغییر متغیر تصادفی هندسی پیدا کنید.

۱۹- برای یک متغیر تصادفی فوق هندسی با تابع جرم احتمال (۶-۴) مقدار

$$P\{X = k + 1\}/P\{X = k\}.$$

را به دست آورید.

۲۰- مهره‌هایی با شماره‌های ۱ تا N در جعبه‌ای قرار دارند. n مهره، $n \leq N$ ، بتصادف از این جعبه بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. اگر Y بزرگترین شماره انتخاب شده باشد تابع جرم احتمال Y را پیدا کنید.

۲۱- در جعبه‌ای $n + m$ مهره به شماره‌های ۱، ۲، ...، $n + m$ موجود است. تعداد n مهره بتصادف از این جعبه خارج می‌کنیم. اگر X تعداد مهره‌های خارج شده باشد که شماره‌های آنها از شماره‌های همه مهره‌های باقیمانده در جعبه بزرگترند، تابع جرم احتمال X را پیدا کنید.

۲۲- جعبه‌ای دارای n مهره است. فرض کنید متوالیاً یک مهره خارج کرده و پس از جایگذاری مهره دیگر را خارج می‌کنیم. این عمل را ادامه می‌دهیم تا مهره‌ای به دست آید که قبلاً خارج شده است. اگر X تعداد مهره‌های خارج شده باشد، تابع جرم احتمال X را محاسبه کنید.

۲۳- ثابت کنید اگر $N \rightarrow \alpha$

$$\frac{\binom{Np}{k} \binom{N-Np}{n-k}}{\binom{N}{n}} \rightarrow \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

این رابطه تقریب دو جمله‌ای را با توزیع هندسی نشان می‌دهد. علاوه بر این، یک تعبیر شهودی برای درستی معادله ارائه دهید.

مسائل

۱- دو مهره بتصادف از جعبه‌ای دارای ۸ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۲ مهره نارنجی انتخاب می‌شود. فرض کنید برای هر مهره سیاه ۲۰۰۰ ریال برنده و برای هر مهره سفید انتخاب شده ۱۰۰۰ ریال بازنده می‌شویم. اگر X مقدار برد باشد مقادیر ممکن X چیست و احتمال هر یک از مقادیر آن چقدر است؟

۲- دو تاس سالم را می‌ریزیم. اگر X حاصل ضرب دو تاس باشد، مطلوب است محاسبه

$$P\{X = i\}, i = 1, 2, \dots$$

۳- سه تاس را می‌ریزیم، با فرض این که $216 = 6^3$ برآمد ممکن هم احتمال باشد، اگر X مجموع سه تاس باشد، احتمال هر یک از مقادیر X را پیدا کنید.

۴- به پنج مرد و ۵ زن بر حسب نمره امتحانی رتبه داده شده است. فرض کنید هیچ دو نمره‌ای برابر نباشد، و تمام ۱۰ ترتیب ممکن هم احتمال است. اگر X بزرگترین رتبه یک زن باشد (مثلاً، $X = 2$ است اگر بزرگترین رتبه مربوط به یک مرد و نفر بعدی زن باشد)، مطلوب است محاسبه $P\{X = i\}$ ، $i = 1, 2, 3, \dots, 8, 9, 10$.

۵- فرض کنید X تفاوت بین تعداد شیرها و خطها در پرتاب n باریک سکه باشد، مقادیر ممکن X را محاسبه کنید.

۶- در مسأله ۵ اگر سکه سالم باشد به ازای $n = 3$ احتمال مقادیر ممکن X را محاسبه کنید.

۷- تاسی را دو بار می‌ریزیم. مقادیر ممکن متغیرهای تصادفی زیر را تعیین کنید:

(الف) ماکزیمم مقدار حاصل در دو پرتاب

(ب) مینیمم مقدار حاصل در دو پرتاب.

(پ) مجموع دو پرتاب.

(ت) مقدار پرتاب اول منهای مقدار پرتاب دوم.

۸- اگر تاس مسأله ۷ سالم باشد احتمال متغیرهای قسمت (الف) تا (ت) را محاسبه کنید.

۹- مثال (۱ب) را تکرار کنید وقتی مهره‌های انتخاب شده جانشین شوند.

۱۰- در مثال (۱ت) مطلوب است احتمال شرطی بردن i ریال در صورتی که مقداری برنده شده ایم. مقدار آن را به ازای $i = 1, 2, 3$ محاسبه کنید.

۱۱- (الف) یک عدد صحیح مانند N بتصادف از مجموعه $\{1, 2, \dots, 10^3\}$ که همه اعضا هم

احتمال هستند انتخاب می شود. احتمال آن که عدد انتخاب شده بر ۳ بخش پذیر باشد چقدر است؟ بر ۵ بخش پذیر باشد چقدر است؟ بر ۷؟ بر ۱۵؟ بر ۱۰۵؟ چه تغییری در جوابها داده می شود اگر به جای 10^k عدد 10^2 قرار گیرد و k رفته رفته بزرگتر شود؟

(ب) یک تابع مهم در تئوری اعداد - که خواص آن با مسائل لاینحل ریاضیات در ارتباط است، فرض ریمان - تابع مویوس $\mu(n)$ ، است که برای تمام اعداد صحیح مثبت به صورت زیر تعریف می شود: ابتدا n را به عوامل اول تجزیه می کنیم. اگر یکی از عوامل اول تکرار شد مانند $3 \times 2 \times 2 \times 12 = 7 \times 7 = 49$ در آن صورت $\mu(n)$ برابر صفر است. از طرف دیگر اگر تمام عوامل اول متمایز باشند، $\mu(n)$ برابر ۱ است اگر تعداد عوامل اول فرد باشد، و برابر -۱ است اگر تعداد عوامل اول زوج باشد. مثلاً چون $6 = 2 \times 3$ داریم $\mu(6) = -1$ و چون $30 = 2 \times 3 \times 5$ داریم $\mu(30) = 1$. حال فرض کنید عدد N بتصادف از مجموعه $\{1, 2, \dots, 10^k\}$ انتخاب شود که در آن k یک عدد بزرگ است. مطلوب است توزیع $\mu(N)$ وقتی $(k \rightarrow \infty)$.
[راهنمایی: برای محاسبه $P\{\mu(N) \neq 0\}$ از اتحاد زیر استفاده می کنیم.

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{P_i^2 - 1}{P_i^2} = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{24}{25}\right)\left(\frac{48}{49}\right) \dots = \frac{6}{\pi^2}$$

که در آن P_i کوچکترین عدد اول i ام است. (عدد ۱ را به عنوان عدد اول در نظر نمی گیریم).

۱۲- در بازی «دو انگشتی مورا» دو بازیکن یک یا دو انگشت خود را نشان می دهند و در همان حال تعداد انگشتان طرف مقابل را نیز حدس می زنند. اگر فقط یکی از بازیکنها درست حدس بزند مبلغی معادل مجموع انگشتهای نشان داده شلحه دریافت می کند. اگر هر دو بازیکن درست حدس زده باشند یا هیچ کدام درست حدس نزده باشند در آن صورت هیچ پولی رد و بدل نخواهد شد. در یک بازی معینی فرض کنید X میزان برد بازیکن معینی در یک بازی دو انگشتی باشد.

(الف) اگر هر بازیکن مستقل عمل کند و فرض شود چهار حالت ممکن هم احتمال باشند، مقادیر ممکن X و احتمالهای متناظر را محاسبه کنید.

(ب) فرض کنید هر بازیکن مستقلاً عمل می کند. اگر هر دو تصمیم بگیرند انگشتان

مساوی با آنچه حدس می زنند نشان دهند و احتمال نشان دادن ۱ یا ۲ انگشت یکسان باشد، مقادیر ممکن X و احتمالهای متناظر آنها را محاسبه کنید.

۱۳- فرض کنید تابع توزیع X به صورت زیر باشد.

$$F(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \frac{b}{4} & 0 \leq b < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{b-1}{4} & 1 \leq b < 2 \\ \frac{11}{12} & 2 \leq b < 3 \\ 1 & 3 \leq b \end{cases}$$

مطلوب است محاسبه $P\{X=i\}$ ، مقدار $P\left\{\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right\}$ را به دست آورید.

۱۴- سکه ای را ۴ بار می اندازیم. فرض کنید X تعداد شیرهای به دست آمده باشد. تابع جرم احتمال متغیر تصادفی $X-2$ را رسم کنید.

۱۵- اگر تابع توزیع X به صورت زیر باشد

$$F(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq b < 1 \\ \frac{3}{5} & 1 \leq b < 2 \\ \frac{4}{5} & 2 \leq b < 3 \\ \frac{9}{10} & 3 \leq b < 3.5 \\ 1 & b \geq 3.5 \end{cases}$$

تابع جرم احتمال X را محاسبه کنید.

۱۶- مهره ای از یک جعبه که دارای ۳ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است خارج می شود. پس از جایگذاری مهره دیگری خارج می شود و این عمل را تا بی نهایت ادامه می دهیم. احتمال

این که در چهار مهره اول دقیقاً ۲ مهره سفید باشد چقدر است؟

۱۷- در امتحانی ۵ سؤال ۳ جوابی داده شده است، احتمال این که محصلی به چهار سؤال یا

بیشتر بطور حدسی جواب درست بدهد چقدر است؟

۱۸- مردی ادعا می کند که قدرت پیش بینی دارد. برای امتحان او یک سکه سالم ۱۰ بار انداخته می شود و از او سؤال می شود که برآمد آزمایش را قبلاً پیش بینی کند. این مرد ۷ بار از ۱۰ بار را صحیح جواب داد. احتمال این که حداقل به این خوبی پیش بینی کند اگر ادعایش درست نباشد چقدر است؟

۱۹- فرض کنید موتورهای هواپیمای در حال پرواز با احتمال $1-p$ مستقل از یکدیگر خراب می شوند. اگر برای پرواز موفقیت آمیز هواپیما لازم باشد اکثریت موتورها درست عمل کنند، برای چه مقادیر p هواپیمای ۵ موتور بر ۳ موتور ترجیح دارد؟

۲۰- یک کانال مخابراتی ارقام ۰ و ۱ را منتقل می کند. ولی به علت استاتیک ارقام منتقل شده با احتمال 0.2 نادرست دریافت می شوند. فرض کنید که می خواهیم یک پیغام مهم شامل یک رقم دو دویی را مخابره کنیم. برای کاهش خطا به جای ۰ عدد ۰۰۰۰ و به جای ۱ عدد ۱۱۱۱ مخابره می شود. اگر دریافت کننده پیغام از «کثرت» تبدیل کند استفاده کند، احتمال این که برگردان پیغام برگردانده شده غلط باشد چقدر است؟ چه فرضهایی برای استقلال در نظر می گیرید.

۲۱- یک سیستم ماهواره ای از n مؤلفه تشکیل می شود و وقتی درست عمل می کند که حداقل k مؤلفه آن درست عمل کنند. در یک روز بارانی هر یک از مؤلفه ها مستقل از یکدیگر با احتمال p_1 عمل می کنند در صورتی که در یک روز غیر بارانی هر یک با احتمال p_2 عمل می کنند. اگر احتمال فردا باران بیاید α باشد، احتمال این که سیستم ماهواره ای درست عمل کند چقدر است؟

۲۲- دانشجویی برای یک امتحان شفاهی مهم آماده می شود و در مورد یک روز «کاری» یا «تعطیلی» فکر می کند. او حساب می کند که اگر یک روز کاری باشد هر یک از متحان او را با احتمال 0.8 مستقل از یکدیگر قبول می کنند، ولی اگر یک روز تعطیلی داشته باشد این احتمال به 0.4 کاهش پیدا می کند. فرض کنید اگر اکثریت متحان او را قبول کند این دانشجو در امتحان قبول می شود. اگر دانشجو احساس کند که احتمال روز کاری دو برابر روز تعطیلی است، آیا باید تقاضای امتحانی با ۳ متحن باشد یا ۵ متحن؟

۲۳- فرض کنید حداقل ۹ نفر از ۱۲ نفر هیأت منصفه برای مجرم شناختن یک مدافع ضروری است. فرض کنید احتمال اینکه یکی از قضات گناهکاری را بیگناه تشخیص دهد 0.2 ، ولی احتمال این که یک قاضی بی گناهی را مجرم تشخیص دهد 0.1 است. اگر قاضیها

- بطور مستقل عمل کنند و اگر ۶۵ درصد مدافعان گناهکار باشند، مطلوبست احتمال این که هیأت منصفه تصمیم درست بگیرند. چند درصد مدافعان مجرم شناخته می شوند؟
- ۲۴- می دانیم دیسکت های ساخت یک کمپانی با احتمال 0.1 و مستقل از یکدیگر معیوب است. این کمپانی دیسکتها را در بسته های ۱۰ تایی می فروشد و تضمین می کند که پول خریدار را پس دهد اگر بیشتر از یک دیسکت در هر بسته معیوب باشد. اگر کسی ۳ بسته خریداری کند، احتمال این که یکی از آنها را برگرداند چقدر است؟
- ۲۵- فرض کنید ۱۰ درصد تراشه های ساخت یک کارخانه سخت افزار کامپیوتر معیوب است. اگر از آنها ۱۰۰ عدد سفارش دهیم آیا تعداد معیوبهای خریداری شده یک متغیر تصادفی دو جمله ای است؟
- ۲۶- فرض کنید تعداد تصادفات یک بزرگراه در روز یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر $\lambda = 3$ است.

(الف) احتمال این که امروز ۳ تصادف یا بیشتر رخ دهد چقدر است؟

(ب) قسمت الف را تکرار کنید با این فرض که حداقل امروز یک تصادف رخ می دهد.

۲۷- تقریب پواسن را با احتمال دو جمله ای برای موارد زیر مقایسه کنید

- | | | | |
|--------------|--------------------|---------|-------|
| $P\{X = 2\}$ | $n = 8, p = .1;$ | به ازای | (الف) |
| $P\{X = 9\}$ | $n = 10, p = .95;$ | به ازای | (ب) |
| $P\{X = 0\}$ | $n = 10, p = .1;$ | به ازای | (پ) |
| $P\{X = 4\}$ | $n = 9, p = .2.$ | به ازای | (ت) |

۲۸- اگر ۵۰ بلیت بخت آزمایی با احتمال برد $\frac{1}{1000}$ خریداری کنیم مطلوب است احتمال (تقریبی) برد (الف) حداقل یک جایزه (ب) دقیقاً یک جایزه (ج) حداقل دو جایزه .

۲۹- تعداد سرماخوردگیهای یک فرد در سال یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر $\lambda = 5$ است. فرض کنید یک داروی جدید «محتوی مقدار زیادی ویتامین C» به بازار آمده است که پارامتر توزیع پواسن را برای ۷۵ درصد جمعیت به $\lambda = 3$ کاهش می دهد. برای ۲۵ درصد بقیه دارو اثر قابل ملاحظه ای ندارد. اگر فردی دارد را به مدت یک سال مصرف کند و ۲ بار سرماخوردده باشد آیا دارو برای او مفید بوده است.

۳۰- احتمال توزیع یک فول هموس در یک دست ورق پوکر تقریباً 0.0014 است. احتمال

تقریبی این که در ۱۰۰۰ بازی حداقل ۲ فول هوس بار به دست آید چقدر است؟

۳۱- تعداد n زوج متاهل بتصادف دور میز گردی می نشینند احتمال آن که هیچ مردی کنار همسرش قرار نگیرد چقدر است؟ به ازای $n = ۱۰$ مقدار تقریبی حاصل را با جواب دقیق حاصل در مثال ۵ د در فصل ۲ مقایسه کنید.

۳۲- افراد به میزان یک نفر در ۲ دقیقه وارد فروشگاه می شوند.

(الف) احتمال این که در فاصله زمانی ۰ : ۱۲ تا ۱۲/۰۵ هیچ کس داخل نشود

چقدر است؟

(ب) احتمال این که حداقل ۴ نفر در آن زمان داخل شوند چقدر است؟

۳۳- میزان خودکشی در ایالتی یک در ۱۰۰۰۰۰ ساکنان در ماه است.

(الف) احتمال آن که در شهری با جمعیت ۴۰۰۰۰۰ نفر در این ایالت ۸ نفر یا بیشتر در یک

ماه خودکشی کنند چقدر است؟

(ب) احتمال آن که حداقل ۲ ماه در سال ۸ خودکشی یا بیشتر داشته باشد چقدر است؟

(پ) اگر این ماه را شماره ۱ بنامیم احتمال این که اولین ماه با ۸ خودکشی یا بیشتر ماه i ام،

$i \geq 1$ ، باشد چقدر است؟

۳۴- می دانیم ۱۰ درصد بیماران که علائم خاصی را دارند به یک بیماری معین مبتلا

هستند تشخیص نهایی این بیماری با آزمایش خون بیمار است. ولی چون آزمونهای

خون خیلی گران است خون شناس صبر می کند تا n بیمار با آن علامت به او مراجعه

کنند. در این صورت او خون n بیمار را مخلوط کرده و روی آن یک آزمایش انجام

می دهد. اگر هیچ کدام از n نفر بیماری را نداشته باشند در آن صورت آزمون خون

مخلوط شده منفی خواهد بود. ولی اگر حداقل یک نفر از بیماران آن مرض را داشته

باشد آزمون خون مثبت خواهد بود، و پزشک ناگزیر است که خون هر فرد را آزمایش

کند تا معلوم شود از میان n بیمار کدامها مبتلا هستند.

(الف) احتمال این که خون مخلوط شده منفی باشد چقدر است اگر $i = ۲$ $n =$

$n = ۴$ (i) $n = ۶$ (iii) و $n = ۱۰$ (iv) ؟

(ب) فرض کنید X تعداد آزمایشهایی باشد که خون شناس باید در مورد n بیمار انجام دهد،

تابع جرم احتمال X را پیدا کنید اگر $i = ۲$ $n = ۴$ (ii) ، $n = ۶$ (iii) و (۱۷)

$n = ۱۰$.

۳۵- هریک از ۵۰۰ نفری که در یک مؤسسه نظامی کار می کنند مستقل از یکدیگر با احتمال $\frac{1}{3}$ مبتلا به یک بیماری هستند. این بیماری با آزمایش خون مشخص می شود، و برای سادگی کار نمونه های خون تمام ۵۰۰ نفر مخلوط شده و سپس آزمایش می شود. (الف) احتمال (تقریبی) این که نتیجه آزمایش مثبت باشد (یعنی حداقل یکی از آنها مبتلا باشد) چقدر است؟

حال فرض کنید نتیجه آزمایش مثبت شده است

(ب) با شرایط فوق احتمال این که بیش از یک نفر مبتلا باشد چقدر است؟

حامد یکی از ۵۰۰ نفر است که می داند مبتلاست

(پ) از نظر حامد احتمال این که بیش از یک نفر مبتلا باشد چقدر است؟

چون آزمون خون مخلوط مثبت است، مسؤولان تصمیم می گیرند هر فرد را جداگانه آزمایش کنند. تعداد ۱-۱ آزمایش اول منفی بودند، نفر i ام که حامد بود مثبت شد.

(ت) اگر مطلب فوق را به صورت تابعی از i در نظر بگیریم، احتمال این که هریک از افراد باقیمانده مبتلا باشند چقدر است؟

۳۶- یک چرخ رولت را که شامل ۳۸ عدد، از ۱ تا ۳۶ و ۰ و ۰۰ است در نظر می گیریم. اگر اسمیت همیشه روی شماره ۱ تا ۱۲ شرط بندی کند، احتمال این که ۵ بازی اول را ببازد چقدر است؟ احتمال این که اولین برد او در شرط بندی چهارم باشد چقدر است؟

۳۷- دو تیم ورزشی یک سری بازی را ترتیب می دهند، برنده تیمی است که ۴ بازی را ببرد. فرض کنید که یکی از تیمها از دیگران قویتر است و هر بازی را با احتمال $\frac{2}{3}$ مستقل از برآمد بازیهای دیگر می برد. احتمال این که تیم قویتر پس از i بازی برنده شود چقدر است؟ مسأله را برای $i = 4, 5, 6, 7$ حل کنید، احتمال برد تیم قویتر را با حالت قبل مقایسه کنید، اگر بدانیم از هر ۳ بازی ۲ بازی را می برد.

۳۸- به مصاحبه گر فهرستی شامل افراد مورد نظر برای مصاحبه داده می شود. اگر لازم باشد که با ۵ نفر مصاحبه کند و هر فرد (مستقلاً) با احتمال $\frac{2}{3}$ برای مصاحبه حاضر شود، احتمال این که فهرست او برای مصاحبه کافی باشد چقدر است در صورتی که این فهرست: (الف) شامل ۵ نفر باشد و (ب) شامل ۸ نفر باشد در قسمت (ب) احتمال این که مصاحبه گر دقیقاً: (پ) با ۶ نفر صحبت کند و (ت) با ۷ نفر از افراد مورد نظر صحبت کند چقدر است؟

۳۹- یک سکه سالم را مرتباً می اندازیم تا ده شیر به دست آید. اگر X تعداد خطها باشد تابع جرم احتمال X را محاسبه کنید.

۴۰- مسأله کبریت باناخ (مثال ۶ پ) را در صورتی حل کنید که جعبه جیب چپ در اول N_1 کبریت و جعبه جیب راست N_2 کبریت داشته باشد.

۴۱- در مسأله کبریت باناخ در لحظه ای که اولین قوطی کبریت خالی است احتمال این که جعبه دیگر دارای k کبریت باشد چقدر است؟

۴۲- جعبه ای دارای ۴ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است. چهار مهره بتصادف انتخاب می کنیم. اگر دو مهره سفید و ۲ مهره سیاه باشد عمل متوقف می شود. در غیر این صورت مهره ها را به جعبه بر می گردانیم و دوباره بتصادف ۴ مهره خارج می کنیم. این عمل را ادامه می دهیم تا دقیقاً ۲ مهره از ۴ مهره انتخاب شده سفید باشد. احتمال این که دقیقاً n انتخاب داشته باشیم چقدر است؟

۴۳- یک بازی معمول در قمارخانه نوادا، کینو است که به صورت زیر بازی می شود: ۲۰ عدد بتصادف به وسیله قمارخانه از بین اعداد ۱ تا ۸۰ انتخاب می شود. یک بازیکن می تواند اعدادی از ۱ تا ۱۵ انتخاب کند. اگر این کسری از اعداد انتخاب شده توسط بازیکن با هریک از ۲۰ عدد انتخاب شده توسط قمارخانه برابر باشد برنده می شود. مقدار پرداخت تابعی از تعداد اعداد انتخاب شده به وسیله بازیکن و تعداد شماره های برابر است. مثلاً، اگر بازیکن فقط یک عدد انتخاب کند وقتی برنده می شود که این عدد در میان ۲۰ عدد فوق باشد، و مقدار برد برابر $\frac{2}{2}$ هر دلار شرط بندی شده است. (چون احتمال برد در این حالت برابر $\frac{1}{4}$ است، واضح است که مبلغ پرداخت عادلانه باید ۳ دلار به ازای هر دلار شرط بندی باشد.) وقتی بازیکن ۲ شماره انتخاب کند مبلغ پرداخت ۱۲ دلار به ازای هر دلار شرط بندی شده است اگر هر دو عدد در میان ۲۰ عدد باشند،

(الف) مبلغ پرداخت عادلانه در این حالت چقدر است؟

فرض کنید P_{nk} این احتمال باشد که دقیقاً k شماره از n شماره انتخاب شده توسط بازیکن در میان ۲۰ عدد انتخاب شده توسط قمارخانه باشد.

(ب) مقدار P_{nk} را محاسبه کنید.

(پ) بیشتر قماربازان در کینو ۱۰ شماره انتخاب می کنند. در این شرط بندی پرداخت قمارخانه طبق جدول زیر است.

ستون آخر این جدول را کامل کنید.

جدول پرداخت کینو برای شرطهای ۱۰ عددی

تعداد ماشینها	دلارهایی که برای هر \$ 1 شرط بندی شده برنده می شود	مقداری که باید پرداخت نماید
0-4	-1	
5	1	
6	17	
7	179	
8	1,299	
9	2,599	
10	24,999	

۴۴- در مثال (۶ ث) چند درصد از i بسته معیوب را خریدار پس می دهد؟ مسأله را برای $i = 1, 4$ حل کنید. اگر یک بسته پس داده شود، احتمال آن که دارای ۴ مؤلفه معیوب باشد چقدر است؟

۴۵- یک خریدار ترانزیستور آنها را در بسته های ۲۰ تایی خریداری می کند. از هر بسته ۴ مؤلفه را بتصادف انتخاب کرده فقط وقتی پذیرفته می شود که تمام ۴ مؤلفه سالم باشند. اگر هر مؤلفه در یک بسته مستقلاً با احتمال $1/10$ معیوب باشد چه نسبتی از بسته ها رد می شوند؟

محاسبه تابع توزیع دو جمله‌ای

```

10 PRINT"THE DISTRIBUTION FUNCTION OF A BINOMIAL(n,p) RANDOM VARIABLE"
20 PRINT "ENTER n"
30 INPUT N
40 PRINT "ENTER p"
50 INPUT P
60 PRINT "ENTER i"
70 INPUT I
80 S=(1-P)^N
90 IF S=0 GOTO 180
100 A=P/(1-P)
110 T=S
120 IF I=0 GOTO 390
130 FOR K=0 TO I-1
140 S=S*A*(N-K)/(K+1)
150 T=T+S
160 NEXT K
170 GOTO 390
180 J=I
190 IF J>N*P THEN J=INT(N*P)
200 FOR K=1 TO J
210 L=L+LOG(N+1-K)-LOG(J+1-K)
220 NEXT K
230 L=L+J*LOG(P)+(N-J)*LOG(1-P)
240 L=EXP(L)
250 B=(1-P)/P
260 F=1
270 FOR K=1 TO J
280 F=F*B*(J+1-K)/(N-J+K)
290 T=T+F
300 NEXT K
310 IF J=I GOTO 380
320 C=1/B
330 F=1
340 FOR K=1 TO I-J
350 F=F*C*(N+1-J-K)/(J+K)
360 T=T+F
370 NEXT K
380 T=(T+1)*L
390 PRINT "THE PROBABILITY IS";T
400 END

```

محاسبه تابع توزیع پواسن

```
10 PRINT "THE PROBABILITY THAT A POISSON VARIABLE IS LESS THAN OR EQUAL TO i"
20 PRINT "ENTER THE MEAN OF THE RANDOM VARIABLE"
30 INPUT C
40 PRINT "ENTER THE DESIRED VALUE OF i"
50 INPUT I
60 S=EXP(-C)
70 IF S=0 GOTO 150
80 T=S
90 IF I=0 GOTO 340
100 FOR K=0 TO I-1
110 S=S*C/(K+1)
120 T=T+S
130 NEXT K
140 GOTO 340
150 J=I
160 IF J>C THEN J=INT(C)
170 FOR K=1 TO J
180 FAC=FAC+LOG(K)
190 NEXT K
200 L=-C-FAC+J*LOG(C)
210 L=EXP(L)
220 F=1
230 FOR K=1 TO J
240 F=F*(J+1-K)/C
250 T=T+F
260 NEXT K
270 IF J=I GOTO 330
280 F=1
290 FOR K=1 TO I-J
300 F=F*C/(K+J)
310 T=T+F
320 NEXT K
330 T=(T+1)*L
340 PRINT "THE PROBABILITY IS";T
350 END
```

متغیرهای تصادفی پیوسته

۱ - مقدمه

در فصل پیش متغیرهای تصادفی گسسته، یعنی متغیرهای تصادفی که مقادیر ممکن آنها متناهی یا شمارای متناهی بود، را در نظر گرفتیم. با وجود این، متغیرهای تصادفی ای نیز وجود دارد که مجموعه مقادیر ممکن آنها نامتناهی است. دو مثال از آن، زمان ورود یک قطار به ایستگاهی مشخص و عمر یک ترانزیستور است. فرض کنید X چنین متغیر تصادفی ای باشد. می‌گوییم X یک متغیر تصادفی پیوسته^۱ است، اگر تابع نامنفی f ، که برای تمام اعداد حقیقی x در $(-\infty, \infty)$ تعریف شده است، وجود داشته باشد با این ویژگی که برای هر مجموعه B از اعداد حقیقی داشته باشیم

$$P\{X \in B\} = \int_B f(x) dx \quad (1-1)$$

تابع f ، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X نامیده می‌شود.

معادله (۱-۱) بیانگر آن است که احتمال بودن X در B را با انتگرال گیری تابع چگالی احتمال بر مجموعه B می‌توان به دست آورد. چون X باید مقداری انتخاب کند، f

۱- گاهی آن را مطلقاً پیوسته می‌نامند.

باید در

$$1 = P\{X \in (-\infty, \infty)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

صدق کند. همه گزاره های مربوط به X را می توان بر حسب f پاسخ داد. برای مثال، اگر قرار دهیم $B = [a, b]$ از معادله (۱-۱) حاصل می شود

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x) dx \quad (۲-۱)$$

اگر در معادله (۲-۱)، قرار دهیم $a = b$ ، داریم

$$P\{X = a\} = \int_a^a f(x) dx = 0$$

این معادله بیان می کند که احتمال این که متغیر تصادفی پیوسته مقدار ثابتی را اختیار کند برابر صفر است. بنابراین برای یک متغیر تصادفی پیوسته، داریم

$$P\{X < a\} = P\{X \leq a\} = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

مثال ۱ الف. فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته است که تابع چگالی احتمال آن به

صورت زیر است

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۱- مقدار C را تعیین کنید

۲- $P\{X > 1\}$ را بیابید.

حل: چون f تابع چگالی احتمال است، باید داشته باشیم $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ ، از آن جا

نتیجه می شود

$$C \int_0^2 (4x - 2x^2) dx = 1$$

$$C \left[2x^2 - \frac{2x^3}{3} \right] \Big|_{x=0}^{x=2} = 1$$

یا

یا

$$C = \frac{3}{8}$$

بنابر این

$$P\{X > 1\} = \int_1^{\infty} f(x) dx = \frac{3}{8} \int_1^2 (4x - 2x^2) dx = \frac{1}{2}$$

مثال ۱ ب. مدت زمانی که یک کامپیوتر (به ساعت) قبل از خراب شدن کار می کند، یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر است

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x/100} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

احتمال این که کامپیوتری قبل از خراب شدن بین ۵۰ و ۱۵۰ ساعت کار کند چقدر است؟
احتمالی که این کامپیوتر کمتر از ۱۰۰ ساعت کار کند چقدر است؟

حل: چون

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-x/100} dx$$

داریم

$$1 = -\lambda(100)e^{-x/100} \Big|_0^{\infty} = 100\lambda$$

یا

$$\lambda = \frac{1}{100}$$

پس احتمالی که یک کامپیوتر، قبل از خراب شدن بین ۵۰ و ۱۵۰ ساعت کار کند برابر است با

$$\begin{aligned} P\{50 < X < 150\} &= \int_{50}^{150} \frac{1}{100} e^{-x/100} dx = -e^{-x/100} \Big|_{50}^{150} \\ &= e^{-1/2} - e^{-3/2} \approx .384 \end{aligned}$$

بطور مشابه

$$P\{X < 100\} = \int_0^{100} \frac{1}{100} e^{-x/100} dx = -e^{-x/100} \Big|_0^{100} = 1 - e^{-1} \approx .633$$

به بیان دیگر در ۶۳/۳ درصد موارد، یک کامپیوتر قبل از رسیدن به ۱۰۰ ساعت کار خراب خواهد شد.

مثال ۱ ب. عمر یک نوع لامپ رادیویی (به ساعت) یک متغیر تصادفی با تابع چگالی

احتمال زیر است

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 100 \\ \frac{100}{x^2} & x > 100 \end{cases}$$

احتمالی که ۲ لامپ از ۵ لامپ از این نوع در یک دستگاه رادیو باید در ظرف ۱۵۰ ساعت اول شروع به کار تعویض شود چقدر است؟ فرض کنید پیشامدهای E_i ، $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ، یعنی این که لامپ i ام در ظرف این مدت تعویض شود، مستقلند

حل: اکنون

$$\begin{aligned} P(E_i) &= \int_0^{150} f(x) dx \\ &= 100 \int_{100}^{150} x^{-2} dx \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

بنابراین، از استقلال پیشامدهای E_i ، نتیجه می شود که احتمال مطلوب برابر است با

$$\left(\frac{5}{2}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$$

رابطه بین توزیع تراکمی F و چگالی احتمال f با عبارت زیر بیان می شود

$$F(a) = P\{X \in (-\infty, a)\} = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

با مشتق گیری از دو طرف رابطه فوق داریم

$$\frac{d}{da} F(a) = f(a)$$

یعنی، تابع چگالی برابر مشتق تابع توزیع تراکمی است. تعبیری را که تا حد زیادی مشهودی تر از تابع چگالی باشد می توان از معادله (۱-۲) (هرگاه ε کوچک و $f(x)$ در $x = a$ پیوسته باشد) به صورت زیر به دست آورد:

$$P\left\{a - \frac{\varepsilon}{2} \leq X \leq a + \frac{\varepsilon}{2}\right\} = \int_{a-\varepsilon/2}^{a+\varepsilon/2} f(x) dx \approx \varepsilon f(a)$$

به بیان دیگر، احتمالی که X در فاصله ای به طول ε به مرکز a قرار گیرد تقریباً برابر با $\varepsilon f(a)$ است. از این جا در می یابیم که $f(a)$ اندازه ای از احتمال نزدیکی متغیر تصادفی به a است.

چندین دسته مهم از متغیرهای تصادفی وجود دارد که عموماً در نظریه احتمال با آنها برخورد می کنیم، در چند بخش بعدی بعضی از آنها را مورد مطالعه قرار می دهیم.

۲- متغیر تصادفی یکنواخت

گوییم یک متغیر تصادفی بر فاصله $(0, 1)$ بطور یکنواخت توزیع شده است اگر تابع چگالی احتمال آن به شکل زیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (1-2)$$

توجه داشته باشید که $f(x)$ یک تابع چگالی است زیرا $f(x) \geq 0$ و $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 dx = 1$. چون تنها وقتی که $x \in (0, 1)$ مثبت است، نتیجه می شود که X باید مقداری در $(0, 1)$ اختیار نماید. به علاوه، چون برای $x \in (0, 1)$ ثابت است، X با احتمال یکسان به هر مقداری در $(0, 1)$ نزدیک خواهد بود. برای تحقیق آن توجه داشته باشید که برای هر $0 < a < b < 1$ ،

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x) dx = b - a$$

به بیان دیگر، احتمالی که X در یک زیر فاصله خاصی از $(0, 1)$ باشد با طول این فاصله برابر است.

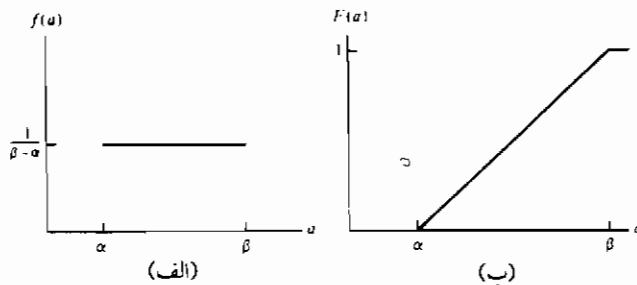
بطور کلی، گوییم X یک متغیر تصادفی یکنواخت بر فاصله (α, β) است اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \alpha < x < \beta \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۲-۲)$$

چون $F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$ ، از معادله (۲-۲) نتیجه می گیریم که تابع توزیع یک متغیر تصادفی یکنواخت بر فاصله (α, β) با رابطه زیر داده می شود:

$$F(a) = \begin{cases} 0 & a \leq \alpha \\ \frac{a - \alpha}{\beta - \alpha} & \alpha < a < \beta \\ 1 & a \geq \beta \end{cases}$$

شکل ۱-۵ نمودار $f(a)$ و $F(a)$ را نمایش می دهد.



شکل ۱-۵ نمودار (الف) $f(a)$ و (ب) $F(a)$ برای متغیر تصادفی یکنواخت بر (α, β)

مثال ۴ الف. اگر X بطور یکنواخت بر $(0, 10)$ توزیع شده باشد، احتمالی را که
(۱) $X < 3$ ، (۲) $X > 6$ و (۳) $3 < X < 8$ باشد محاسبه کنید.

حل:

$$P\{X < 3\} = \int_0^3 \frac{1}{10} dx = \frac{3}{10} \quad -۱$$

$$P\{X > 6\} = \int_6^{10} \frac{1}{10} dx = \frac{4}{10} \quad -۲$$

$$P\{3 < X < 8\} = \int_3^8 \frac{1}{10} dx = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad -۳$$

مثال ۲ ب. اتوبوسها به فاصله هر ۱۵ دقیقه که از ساعت ۷ صبح آغاز می شود به ایستگاه مشخصی وارد می شوند. یعنی اتوبوسها در ۷:۱۵، ۷:۳۰، ۷:۴۵، و به همین ترتیب الی آخر وارد می شوند. اگر مسافری در زمانی که بین ۷:۳۰ و ۷:۴۵ بظور یکنواخت توزیع شده است وارد این ایستگاه شود، مطلوب است احتمالی که او: (۱) کمتر از ۵ دقیقه و (۲) بیشتر از ۱۰ دقیقه منتظر اتوبوس بماند.

حل: فرض کنید X دقایقی را نشان دهد که این مسافر پس از ساعت ۷ وارد ایستگاه می شود. چون X یک متغیر تصادفی یکنواخت بر فاصله (۰، ۳۰) است، بنابراین نتیجه می شود که این مسافر در صورتی (و تنها در صورتی) کمتر از ۵ دقیقه باید منتظر بماند که بین ساعت ۷:۱۵ و ۷:۲۵ یا بین ۷:۳۰ و ۷:۳۵ به ایستگاه برسد. پس احتمال مطلوب برای (۱) عبارت است از

$$P\{10 < X < 15\} + P\{25 < X < 30\} = \int_{10}^{15} \frac{1}{30} dx + \int_{25}^{30} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{3}$$

بطور مشابه، او باید بیش از ۱۰ دقیقه منتظر بماند اگر در فاصله ساعت ۷ و ۷:۰۵ یا ۷:۱۵ و ۷:۲۰ به ایستگاه برسد و از این رو احتمال (۲) عبارت است از

$$P\{0 < X < 5\} + P\{15 < X < 20\} = \frac{1}{3}$$

مثال بعدی ابتدا به وسیله ریاضی دان فرانسوی ال. اف. برتراند در سال ۱۸۸۹ بررسی شد و غالباً به آن «پارادوکس برتراند» اطلاق می شود. این مسأله اولین آشنایی ما با موضوعی است که به آن احتمال هندسی اطلاق می شود.

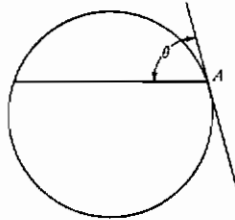
مثال ۲ پ. «وتر تصادفی» از دایره ای را در نظر بگیرید. احتمالی که طول این وتر از طول ضلع مثلث متساوی الاضلاع محاط شده در این دایره بزرگتر باشد چقدر است؟
حل: این مسأله به صورت بیان شده قابل حل نیست، زیرا این که منظور از وتر تصادفی چیست روشن نیست. به منظور روشن کردن مفهوم این جمله، این مسأله را به دو طریق متمایز فرمول بندی می کنیم.

فرمول بندی اول عبارت است از: مکان این وتر را می توان با فاصله اش از مرکز دایره تعیین نمود، این فاصله بین ۰ و r شعاع دایره تغییر می کند. اکنون، طول این وتر از ضلع مثلث متساوی الاضلاع محاط شده در این دایره بزرگتر است اگر فاصله اش از مرکز کمتر از $\frac{r}{2}$ باشد. بنابراین، با فرض این که یک وتر تصادفی وتری است که D فاصله اش از مرکز بین ۰

و r بطور یکنواخت توزیع شده است، احتمالی که طول این وتر از ضلع مثلث متساوی الاضلاع محاطی بزرگتر باشد برابر است با

$$P\left\{D < \frac{r}{2}\right\} = \frac{r/2}{r} = \frac{1}{2}$$

به منظور فرمول بندی دومی از این مسأله، وتر دلخواهی از دایره را در نظر گرفته و از یک انتهای آن خط مماسی بر دایره رسم کنید. زاویه θ بین وتر و مماس که از 0 تا 180° درجه تغییر می کند مکان وتر را تعیین می کند (شکل ۲-۵). به علاوه طول وتر از ضلع مثلث متساوی الاضلاع محاطی بزرگتر است اگر



شکل ۲-۵

زاویه θ بین 60° و 120° باشد، سپس با این فرض که وتر تصادفی و تری است که زاویه θ آن بین 0° و 180° درجه بطور یکنواخت توزیع شده باشد، پاسخ مطلوب با این فرمول بندی عبارت است از

$$P\{60 < \theta < 120\} = \frac{120 - 60}{180} = \frac{1}{3}$$

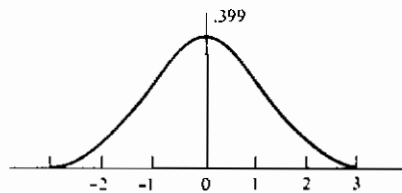
باید توجه داشت که این آزمایشهای تصادفی باید طوری انجام شوند که $\frac{1}{3}$ یا $\frac{1}{3}$ احتمال صحیح باشند. برای مثال، اگر صفحه مدوری به شعاع r بر روی میزی که با خطوط موازی به فاصله $2r$ خط کشی شده اند پرتاب شود، آن گاه یک و تنها یکی از این خطها صفحه را قطع و تشکیل یک وتر خواهد داد. کلیه فاصله ها از این وتر تا مرکز صفحه هم احتمالند و از این رو احتمال مطلوب که طول وتر از ضلع مثلث متساوی الاضلاع محاطی بزرگتر باشد، برابر $\frac{1}{3}$ است. از سوی دیگر، اگر این آزمایش عبارت از چرخش آزاد یک سوزن حول نقطه A بر روی دایره باشد (شکل ۲-۵) پاسخ مطلوب $\frac{1}{3}$ است.

۳- متغیرهای تصادفی نرمال

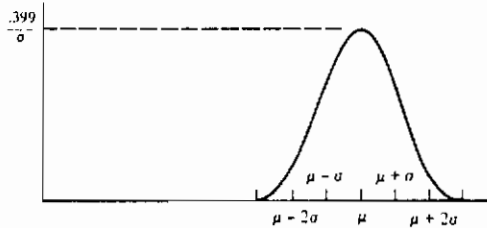
گوییم X یک متغیر تصادفی نرمال است، یا X بطور نرمال با پارامترهای μ و σ^2 توزیع شده است اگر چگالی X به صورت زیر باشد

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad -\infty < x < \infty$$

این تابع چگالی یک منحنی زنگدیس است که نسبت به μ متقارن است. (شکل ۳-۵ را ببینید). مقادیر μ و σ^2 ، به مفهومی مقدار میانگین و تغییرات X را نمایش می دهند (این مفاهیم در فصل ۷ روشن خواهد شد).



(الف)



(ب)

شکل ۳-۵ تابع چگالی نرمال: (الف) با $\mu = 0$ ، $\sigma = 1$ و (ب) با μ و σ^2 دلخواه

توزیع نرمال توسط ریاضیدان فرانسوی آبراهام دموار در سال ۱۷۳۳ معرفی شد و توسط خود او در تقریب احتمالهای مربوط به متغیرهای تصادفی دو جمله ای وقتی n بزرگ است مورد استفاده قرار گرفت. این نتیجه بعداً توسط لاپلاس و دیگران گسترش یافت و اکنون در یک قضیه احتمال که به قضیه حد مرکزی مشهور است گنجانده شده است، (این قضیه در فصل ۸ مورد بحث قرار خواهد گرفت). قضیه حد مرکزی، یکی از دو مهمترین نتیجه

در نظریه احتمال^۱، پایه تئوری برای این مطلب است که غالباً مشاهدات تجربی مهم و در عمل بسیاری پدیده‌های تصادفی، لااقل بطور تقریبی، از توزیع نرمال پیروی می‌کنند. مثالهایی که چنین رفتاری دارند عبارتند از، اندازه قد یک انسان، سرعت یک ملکول در گاز در جهت دلخواه، و خطاهای حاصل در اندازه‌گیری یک کمیت فیزیکی.

برای اثبات این که $f(x)$ در واقع یک تابع چگالی احتمال است، باید نشان دهیم که

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = 1$$

با تغییر متغیر $y = \frac{x - \mu}{\sigma}$ ، داریم

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy$$

و بنابراین باید نشان دهیم که

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi}$$

برای این منظور قرار می‌دهیم $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy$. بنابراین

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y^2+x^2)/2} dy dx \end{aligned}$$

اکنون این انتگرال دو گانه را با تغییر متغیرها به مختصات قطبی محاسبه می‌کنیم.

(یعنی قرار می‌دهیم $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$, $dy dx = r dr d\theta$). بنابراین

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2/2} r d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2/2} dr \\ &= -2\pi e^{-r^2/2} \Big|_0^{\infty} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

پس $I = \sqrt{2\pi}$ و نتیجه حاصل شده است.

۱ - دیگری قانون قوی اعداد بزرگ است.

یک ویژگی مهم متغیرهای تصادفی نرمال این است که اگر X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 باشد، آن گاه $Y = \alpha X + \beta$ بطور نرمال با پارامترهای $\alpha\mu + \beta$ و $\alpha^2\sigma^2$ توزیع شده است. این مطلب واضح است، زیرا F_Y^{-1} تابع توزیع تراکمی متغیر تصادفی Y ، وقتی $\alpha > 0$ از رابطه زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} F_Y(a) &= P\{Y \leq a\} \\ &= P\{\alpha X + \beta \leq a\} \\ &= P\left\{X \leq \frac{a - \beta}{\alpha}\right\} \\ &= F_X\left(\frac{a - \beta}{\alpha}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{[(a - \beta)/\alpha]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x - \mu)^2/2\sigma^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha\sigma} \exp\left\{-\frac{[y - (\alpha\mu + \beta)]^2}{2\alpha^2\sigma^2}\right\} dy \end{aligned} \quad (1-3)$$

که در آن معادله (۱-۳) با تغییر متغیر $y = \alpha x + \beta$ به دست آمده است. با وجود این، چون $F_Y(a) = \int_{-\infty}^a f_Y(y) dy$ ، از معادله (۱-۳) نتیجه می شود که تابع چگالی احتمال Y ، $f_Y(y)$ عبارت است از

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha\sigma} \exp\left\{-\frac{[y - (\alpha\mu + \beta)]^2}{2(\alpha\sigma)^2}\right\}$$

بنابراین Y دارای توزیع نرمال با پارامترهای $\alpha\mu + \beta$ و $(\alpha\sigma)^2$ است.

یک پیامد مهم از نتیجه قبل این است که اگر X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 باشد، آن گاه $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ دارای توزیع نرمال با پارامترهای ۰ و ۱ است. می گوییم متغیر تصادفی Z دارای توزیع نرمال استاندارد یا واحد است.

مرسوم است که تابع توزیع تراکمی یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد را با $\Phi(x)$ نشان دهند. یعنی

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy$$

۱ - وقتی بیش از یک متغیر تصادفی مورد مطالعه است، تابع توزیع تراکمی متغیر تصادفی Z را با F_Z و تابع چگالی آن را با f_Z نشان می دهیم.

مقادیر $\Phi(x)$ برای مقادیر نامنفی x در جدول ۱-۵ داده شده است. به ازای مقادیر منفی x ، $\Phi(x)$ را می‌توان از معادله (۲-۳) به دست آورد:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \quad -\infty < x < \infty \quad (2-3)$$

اثبات معادله (۲-۳) را که از تقارن چگالی نرمال استاندارد نتیجه می‌شود، به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم. این معادله بیانگر این است که اگر Z متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد، آن گاه

$$P\{Z \leq -x\} = P\{Z > x\} \quad -\infty < x < \infty$$

هرگاه X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 باشد، $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ متغیر تصادفی

نرمال استاندارد است، نتیجه می‌شود که تابع توزیع X را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\begin{aligned} F_X(a) &= P\{X \leq a\} \\ &= P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{a - \mu}{\sigma}\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

مثال ۳ الف. اگر X یک متغیر تصادفی نرمال با پارامترهای $\mu = 3$ و $\sigma^2 = 9$ باشد،

(۱) $P\{2 < X < 5\}$ ، (۲) $P\{X > 0\}$ و (۳) $P\{|X - 3| > 6\}$ را بیابید.

حل:

$$P\{2 < X < 5\} = P\left\{\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3}\right\} = P\left\{-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}\right\} \quad -1$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{3}\right)\right] = .3779$$

$$P\{X > 0\} = P\left\{\frac{X-3}{3} > \frac{0-3}{3}\right\} = P\{Z > -1\} \quad -2$$

$$= 1 - \Phi(-1)$$

$$= \Phi(1)$$

$$= .8413$$

$$\begin{aligned}
 P\{|X - 3| > 6\} &= P\{X > 9\} + P\{X < -3\} \\
 &= P\left\{\frac{X-3}{3} > \frac{9-3}{3}\right\} + P\left\{\frac{X-3}{3} < \frac{-3-3}{3}\right\} \\
 &= P\{Z > 2\} + P\{Z < -2\} \\
 &= 1 - \Phi(2) + \Phi(-2) \\
 &= 2[1 - \Phi(2)] \\
 &= .0456
 \end{aligned}$$

مثال ۳ ب. غالباً امتحانی را خوب ارزیابی می‌کنیم (به مفهوم تعیین پراکندگی معتبر برای نمرات شرکت کنندگان) اگر نمرات آزمون شرکت کنندگان در آن را بتوان با تابع چگالی نرمال تقریب کرد. (به بیان دیگر، نمودار فراوانی نمرات باید تقریباً به شکل زنگدیس چگالی نرمال باشد). غالباً ممتحن با استفاده از نمرات، پارامترهای μ و σ^2 توزیع نرمال را برآورد کرده و سپس نمره حرفی A را به کسانی که نمره آزمون آنها بزرگتر از $\mu + \sigma$ ، و نمره حرفی B را به آنهایی که نمره شان بین $\mu + \sigma$ و μ و C را به کسانی که نمره شان بین $\mu - \sigma$ و μ و D را به کسانی که نمره شان بین $\mu - 2\sigma$ و $\mu - \sigma$ و F را به کسانی که نمره ای پایین تر از $\mu - 2\sigma$ است نسبت می‌دهد. (که آن را گاهی رتبه بندی «بر روی منحنی» می‌نامند).

$$\begin{aligned}
 P\{X > \mu + \sigma\} &= P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} > 1\right\} = 1 - \Phi(1) = .1587 \\
 P\{\mu < X < \mu + \sigma\} &= P\left\{0 < \frac{X - \mu}{\sigma} < 1\right\} = \Phi(1) - \Phi(0) = .3413 \\
 P\{\mu - \sigma < X < \mu\} &= P\left\{-1 < \frac{X - \mu}{\sigma} < 0\right\} \\
 &= \Phi(0) - \Phi(-1) = .3413 \\
 P\{\mu - 2\sigma < X < \mu - \sigma\} &= P\left\{-2 < \frac{X - \mu}{\sigma} < -1\right\} \\
 &= \Phi(-1) - \Phi(-2) = .1359 \\
 P\{X < \mu - 2\sigma\} &= P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} < -2\right\} = \Phi(-2) = .0228
 \end{aligned}$$

از این جا نتیجه می شود که تقریباً ۱۶ درصد کلاس نمره A ، ۳۴ درصد نمره B ، ۳۴ درصد نمره C و ۱۴ درصد نمره D کسب می کنند و ۲ درصد رد می شوند.

مثال ۳ پ. نظر کارشناسی در یک دادخواست پدری گواه بر آن است که طول دوره بارداری (به روز) (یعنی از زمان تلقیح تا تولد کودک) تقریباً دارای توزیع نرمال با پارامترهای $\mu = 270$ و $\sigma^2 = 100$ می باشد. خواننده در این دادخواست قادر است ثابت کند که در طی دوره ای که ۲۹۰ روز قبل از تولد کودک شروع شده است و ۲۴۰ روز قبل از این تولد پایان پذیرفته است در مسافرت بوده است. اگر خواننده، در حقیقت پدر این کودک باشد، احتمالی که این مادر دوره بارداری بسیار طولانی یا کوتاهی، بنا بر آنچه در گواهی نامه آمده است، داشته باشد چقدر است؟

حل: فرض کنید X طول دوره بارداری را نشان می دهد و خواننده پدر کودک است. بنابراین احتمالی که این تولد در فاصله زمانی خاطر نشان شده رخ دهد برابر است با

$$\begin{aligned} P\{X > 290 \text{ or } X < 240\} &= P\{X > 290\} + P\{X < 240\} \\ &= P\left\{\frac{X - 270}{10} > 2\right\} + P\left\{\frac{X - 270}{10} < -3\right\} \\ &= 1 - \Phi(2) + 1 - \Phi(3) \\ &= .0241 \end{aligned}$$

مثال ۳ ت. فرض کنید پیامی دوتائی را باید از مکان A به وسیله سیم به مکان B انتقال دهیم. با وجود این، داده هایی که به سیم منتقل می شوند در معرض اختلال و آشفستگی کانال است و بنابراین به منظور امکان کاهش خطا وقتی پیام ۱ است مقدار ۲ و وقتی 0 است مقدار ۲- به سیم منتقل می شود. اگر x ، $x = \pm 2$ ، مقدار ارسالی از مکان A باشد R مقداری که در مکان B دریافت می شود با $R = x + N$ داده می شود که در آن N اختلال و آشفستگی کانال است. وقتی پیام در مکان B دریافت می شود، گیرنده آن را بنا بر دستور زیر کشف رمز می کند.

اگر $R \geq 0.5$ ، آن گاه ۱ را نتیجه می گیریم

اگر $R < 0.5$ ، آن گاه 0 را نتیجه می گیریم

چون معمولاً آشفستگی کانال بطور نرمال توزیع شده است، احتمالهای خطا را وقتی N

یک متغیر تصادفی نرمال واحد باشد تعیین می کنیم.

دو نوع خطا وجود دارد که ممکن است رخ دهد: یکی این که از پیام ۱ ممکن است به نادرستی ۰ را نتیجه بگیریم و دیگری که ۰ را به جای ۱ بگیریم. نوع اول خطا وقتی رخ می دهد اگر پیام ۱، $2 + N < 0.5$ ، در صورتی که دومی اگر پیام ۰ و $2 + N > 0.5$ رخ می دهد. بنابراین

$$\begin{aligned} P\{\text{پیام ۱ است} \mid \text{خطا}\} &= P\{N < -1.5\} \\ &= 1 - \Phi(1.5) = .0668 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} P\{\text{پیام ۰ است} \mid \text{خطا}\} &= P\{N \geq 2.5\} \\ &= 1 - \Phi(2.5) = .0062 \end{aligned}$$

نامساوی زیر برای $\Phi(x)$ از لحاظ نظری مهم است

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) e^{-x^2/2} < 1 - \Phi(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-x^2/2} \quad x > 0 \text{ برای هر } x \quad (3-3)$$

برای اثبات نامساوی (۳-۳)، ابتدا نامساوی واضح زیر را در نظر می گیریم

$$(1 - 3y^{-4})e^{-y^2/2} < e^{-y^2/2} < (1 + y^{-2})e^{-y^2/2}$$

که از آن نتیجه می شود

$$\int_x^\infty (1 - 3y^{-4})e^{-y^2/2} dy < \int_x^\infty e^{-y^2/2} dy < \int_x^\infty (1 + y^{-2})e^{-y^2/2} dy \quad (4-3)$$

با وجود این

$$\frac{d}{dy} [(y^{-1} - y^{-3})e^{-y^2/2}] = -(1 - 3y^{-4})e^{-y^2/2}$$

$$\frac{d}{dy} [y^{-1}e^{-y^2/2}] = -(1 + y^{-2})e^{-y^2/2}$$

و از این رو، برای $x > 0$

$$-(y^{-1} - y^{-3})e^{-y^2/2} \Big|_x^{\infty} < \int_x^{\infty} e^{-y^2/2} dy < -y^{-1} e^{-y^2/2} \Big|_x^{\infty}$$

یا

$$(x^{-1} - x^{-3})e^{-x^2/2} < \int_x^{\infty} e^{-y^2/2} dy < x^{-1} e^{-x^2/2}$$

که معادله (۳-۳) را برقرار می کند.

همچنین از معادله (۳-۳) نتیجه می شود که برای x بزرگ

$$1 - \Phi(x) \sim \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

[نماد $a(x) \sim b(x)$ برای x بزرگ بدین معناست که $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x)/b(x) = 1$]

۳-۱ تقریب نرمال برای توزیع دو جمله ای

قضیه زیر به قضیه حدی دو مواری - لاپلاس مشهور است. این قضیه ابتدا در حالت خاص $p = \frac{1}{4}$ توسط دو مواری در سال ۱۷۳۳ ثابت شد و سپس در سال ۱۸۱۲ توسط لاپلاس برای هر p تعمیم داده شد.

قضیه حدی دو مواری - لاپلاس

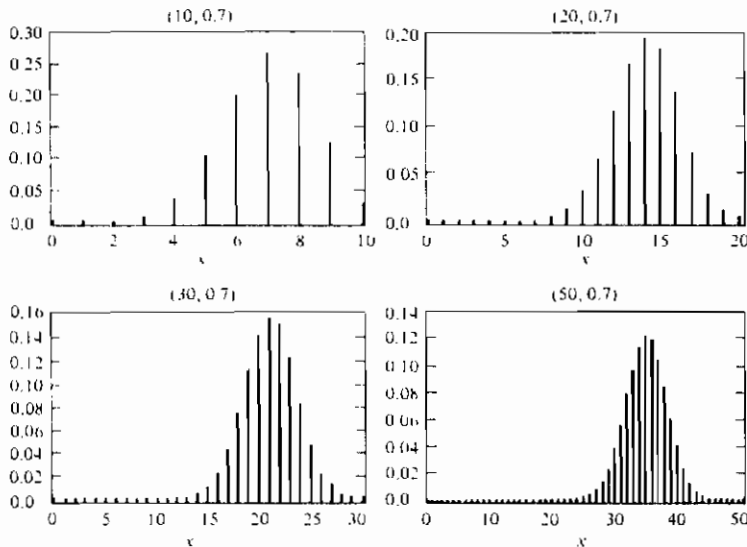
اگر S_n تعداد موفقیتها را که در n آزمایش مستقل هریک با احتمال موفقیت p انجام می شوند نمایش دهد، آن گاه برای هر $a < b$ ، وقتی $n \rightarrow \infty$

$$P \left\{ a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b \right\} \rightarrow \Phi(b) - \Phi(a)$$

چون قضیه بالا تنها حالت خاصی از قضیه حد مرکزی است که در فصل ۸ ارائه خواهد شد، از اثبات آن خودداری می کنیم.

باید توجه داشت که اکنون ما دو تقریب برای احتمالهای دو جمله ای داریم: تقریب پواسن، که اگر n بزرگ و np مقدار متوسطی باشد تقریب خوبی می دهد و دیگری تقریب نرمال

است که می توان نشان داد هرگاه $np(1-p)$ بزرگ باشد کاملاً رضایت بخش است [عموماً، تقریب نرمال، برای مقادیر n که در $np(1-p) \geq 10$ صدق کنند کاملاً رضایت بخش است].



شکل ۴-۵ نشان می دهد که چگونه تابع جرم احتمال يك متغیر تصادفی دوجمله‌ای (n, p) ، وقتی n بزرگ و p بزرگ می شود، بیش از پیش نرمال می شود

مثال ۳ ت. فرض کنید X تعداد دفعاتی باشد که یک سکه منظم در 40 پرتاب، خط می آید. احتمالی را که X برابر 20 شود پیدا کنید. از تقریب نرمال استفاده کرده و آن را با جواب دقیق مقایسه کنید.

حل: چون دو جمله ای یک متغیر تصادفی گسسته و نرمال متغیر تصادفی پیوسته است، بهترین تقریب با نوشتن احتمال مطلوب به صورت زیر حاصل می شود.

$$\begin{aligned}
 P\{X = 20\} &= P\{19.5 < X < 20.5\} \\
 &= P\left\{\frac{19.5 - 20}{\sqrt{10}} < \frac{X - 20}{\sqrt{10}} < \frac{20.5 - 20}{\sqrt{10}}\right\} \\
 &= P\left\{-.16 < \frac{X - 20}{\sqrt{10}} < .16\right\} \\
 &\approx \Phi(.16) - \Phi(-.16) = .1272
 \end{aligned}$$

نتیجه دقیق عبارت است از

$$P\{X = 20\} = \binom{40}{20} \left(\frac{1}{2}\right)^{40}$$

که می توان نشان داد برابر است با $۰٫۱۲۶۸$.

مثال ۳ ج. تعداد مطلوب یک کلاس سال اول در یک آموزشگاه بخصوص برابر ۱۵۰ دانشجو است. مدیریت آموزشگاه بنا بر تجارب قبلی می داند که بطور متوسط تنها ۳۰ درصد از آنهایی که تقاضایشان، پذیرفته شده است در کلاس شرکت می کنند، خط مشی پذیرفتن ۴۵۰ تقاضا است. این احتمال را که بیش از ۱۵۰ دانشجوی سال اول در کلاس شرکت کنند محاسبه کنید.

حل: فرض کنید X تعداد دانشجویانی باشد که در کلاس شرکت می کنند، در این صورت X یک متغیر تصادفی دو جمله ای با پارامتر $n = 450$ و $p = 0.3$ است. با استفاده از تقریب نرمال حاصل می شود.

$$P\{X \geq 150.5\} = P\left\{\frac{X - (450)(.3)}{\sqrt{450(.3)(.7)}} \geq \frac{150.5 - (450)(.3)}{\sqrt{450(.3)(.7)}}\right\} \approx 1 - \Phi(1.59) = .0559$$

بنابراین کمتر از ۶ درصد موارد بیش از ۱۵۰ دانشجو از ۴۵۰ نفر پذیرفته شده واقعاً شرکت می کنند (چه فرضهای استقلالی را در نظر گرفته ایم)؟

مثال ۳ ج. به منظور تعیین تأثیر یک رژیم غذایی معین در کاهش مقدار کلسترول خون، ۱۰۰ نفر را تحت این رژیم غذایی قرار می دهند. پس از این که این افراد به مدت کافی تحت این رژیم بودند مقدار کلسترول آنها اندازه گیری می شود. کارشناسان تغذیه که این آزمایش را انجام می دهند تصمیم دارند که اگر حداقل ۶۵ درصد از افراد تحت این رژیم غذایی کاهش کلسترول داشته باشند آن را تأیید کنند. احتمالی که کارشناسان تغذیه این رژیم غذایی جدید را مورد تأکید قرار دهند، در حالی که واقعاً اثری بر سطح کلسترول ندارد، چقدر است؟

حل: فرض کنید اگر این رژیم هیچ اثری بر مقدار کلسترول نداشته باشد، در این صورت، دقیقاً بتصادف، مقدار کلسترول هر فرد با احتمال $\frac{1}{4}$ کمتر از مقداری خواهد

بود که قبل از رژیم غذایی داشته است. بنابراین، اگر X تعداد افرادی باشد که کلسترول آنها کاهش یافته است، آن گاه احتمالی که کارشناسان تغذیه این رژیم غذایی را مورد تأیید قرار دهند در حالی که واقعاً اثری در کاهش کلسترول ندارد عبارت است از

$$\begin{aligned} \sum_{i=65}^{100} \binom{100}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} &= P\{X \geq 64.5\} \\ &= P\left\{\frac{X - (100)(\frac{1}{2})}{\sqrt{100(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}} \geq 2.9\right\} \\ &\approx 1 - \Phi(2.9) \\ &= .0019 \end{aligned}$$

۴- متغیرهای تصادفی نمایی

یک متغیر تصادفی پیوسته که تابع چگالی احتمال آن، برای $\lambda > 0$ معینی، به صورت زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{و } x \geq 0 \\ 0 & \text{و } x < 0 \end{cases}$$

متغیر تصادفی نمایی، با پارامتر λ (یا به اختصار توزیع نمایی) نامیده می شود. تابع توزیع تراکمی یک متغیر تصادفی نمایی، $F(a)$ ، به صورت زیر است

$$\begin{aligned} F(a) &= P\{X \leq a\} \\ &= \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= -e^{-\lambda x} \Big|_0^a \\ &= 1 - e^{-\lambda a} \quad a \geq 0 \end{aligned}$$

توجه داشته باشید $\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$ همان طور که باید باشد. در فصل ۷ نشان خواهیم داد که این پارامتر λ برابر با عکس «مقدار متوسط» این متغیر تصادفی است.

توزیع نمایی غالباً در عمل پیش می آید زیرا توزیع مدت زمان برای رخ دادن پیشامد ویژه معینی است. برای مثال مدت زمان لازم (شروع از همین لحظه) تا رخ دادن یک زمین لرزه یا تا آغاز یک جنگ یا تا یک تلفن که به شما زده می شود و معلوم می شود که شماره اشتباه بوده است، همه متغیرهای تصادفی هستند که در عمل گرایش به توزیعهای نمایی دارند (برای توضیح نظری آن خواننده را به بخش ۵ از فصل ۴ و به ویژه مثال ۵ ب از این بخش ارجاع می دهیم).

مثال ۴ الف. فرض کنید طول مدت زمان یک مکالمه تلفنی به دقیقه متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\lambda = \frac{1}{10}$ است. اگر شخصی بلافاصله قبل از شما وارد بانه تلفن عمومی شود، احتمالی را که شما (۱) بیش از ۱۰ دقیقه و (۲) بین ۱۰ و ۲۰ دقیقه باید منتظر باشید بیابید.

حل: فرض کنید X طول مدت زمان مکالمه تلفنی فرد داخل بانه تلفن باشد، احتمالهای مطلوب عبارتند از:

$$P\{X > 10\} = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = -e^{-x/10} \Big|_{10}^{\infty} = e^{-1} \approx .368$$

$$P\{10 < X < 20\} = \int_{10}^{20} \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = -e^{-x/10} \Big|_{10}^{20} \\ = e^{-1} - e^{-2} \approx .233$$

می‌گوییم متغیر تصادفی نامنفی X بدون حافظه است اگر برای هر $s, t \geq 0$

$$P\{X > s + t | X > t\} = P\{X > s\} \quad s, t \geq 0 \quad (1-4)$$

اگر X را عمر یک دستگاه بپنداریم، معادله (۱-۴) بیانگر آن است که احتمال خراب نشدن این دستگاه به مدت لااقل $s + t$ ساعت، در صورتی که قبلاً ساعت کار کرده است، با احتمال اولیه‌ای که این دستگاه لااقل به مدت s ساعت کار کند یکسان است. به بیان دیگر، اگر این دستگاه در سن t درست باشد، توزیع بقیه مدت زمان که درست خواهد بود با توزیع عمر اصلی یکسان است (یعنی درست مثل این است که این دستگاه فراموش کرده است که قبلاً به مدت t ساعت مورد استفاده قرار گرفته است).

شرط (۱-۴) با

$$\frac{P\{X > s + t, X > t\}}{P\{X > t\}} = P\{X > s\}$$

یا

$$P\{X > s + t\} = P\{X > s\}P\{X > t\} \quad (2-4)$$

هم ارز است. چون معادله (۲-۴) وقتی X دارای توزیع نمایی است برقرار است (زیرا $e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s} e^{-\lambda t}$) نتیجه می‌شود که متغیرهای تصادفی نمایی بدون حافظه اند.

مثال ۴ ب. باجه پستی را در نظر بگیرید که دو کارمند دارد. فرض کنید وقتی آقای اسمیت وارد باجه می شود متوجه می شود که خانم جونز را یکی از کارمندان و آقای براون را کارمند دیگری در حال پاسخ گویی است. همچنین فرض کنید به آقای اسمیت گفته شده است که پاسخ گویی به او به محض این که جونز یا براون باجه را ترک کنند آغاز خواهد شد. اگر مدت زمانی که یک کارمند برای یک متقاضی صرف می کند دارای توزیع نمایی با پارامتر λ باشد، احتمال این که از این سه متقاضی، آقای اسمیت آخرین نفری باشد که باجه را ترک می کند، چقدر است؟

حل: پاسخ با استدلال زیر به دست می آید: زمانی را در نظر بگیرید که آقای اسمیت ابتدا یک کارمند بیکار پیدا می کند، درست در این لحظه خانم جونز یا آقای براون باجه را ترک کرده و دیگری هنوز در باجه است. با وجود این، به سبب فقدان حافظه توزیع نمایی، نتیجه می شود مدت زمان اضافی که این فرد دیگر (جونز یا براون) بایستی هنوز در اداره پست بگذراند دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است. یعنی، درست مثل این است که پاسخ گویی به این فرد در همین لحظه شروع شده باشد. بنابراین، طبق تقارن، احتمالی که فرد باقیمانده قبل از اسمیت باجه را ترک کند، باید برابر $\frac{1}{2}$ باشد.

معلوم می شود که نه تنها توزیع نمایی بدون حافظه است، بلکه تنها توزیعی نیز می باشد که دارای این خاصیت است. برای درک این مطلب، فرض کنید X بدون حافظه است و بگذارید $\bar{F}(x) = P\{X > x\}$. در این صورت، بنابر معادله (۴-۳)، نتیجه می شود.

$$\bar{F}(s+t) = \bar{F}(s)\bar{F}(t)$$

یعنی، $\bar{F}(\cdot)$ در معادله تابعی^۱

۱- معادله (۴-۳) به صورت زیر نتیجه می شود: اگر $g(s+t) = g(s)g(t)$ ، آن گاه

$$g\left(\frac{2}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) = g^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

و از تکرار آن نتیجه می شود $g(m/n) = g^m(1/n)$. همچنین

$$g(1) = g\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = g^n\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{or} \quad g\left(\frac{1}{n}\right) = (g(1))^{1/n}$$

بنابراین، $g\left(\frac{m}{n}\right) = (g(1))^{m/n}$ که چون g پیوسته از راست است، نتیجه می دهد

$$g(x) = (g(1))^x \quad \text{چون} \quad g(1) = (g(1/2))^2 \quad \text{داریم} \quad g(x) = e^{-\lambda x} \quad \text{که در آن} \quad \lambda = -\log(g(1)).$$

$$g(s+t) = g(s)g(t)$$

صدق می‌کند. با این وجود، معلوم است که تنها جواب پیوسته از راست این معادله تابعی عبارت است از

$$g(x) = e^{-\lambda x} \quad (۳-۴)$$

و چون یک تابع توزیع همواره پیوسته از راست است، باید داشته باشیم

$$\bar{F}(x) = e^{-\lambda x} \quad \text{یا} \quad F(x) = P\{X \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x}$$

که نشان می‌دهد X بطور نمایی توزیع شده است.

مثال ۴ پ. فرض کنید مسافتی که یک خودرو قبل از فرسوده شدن باتری می‌تواند پیماید، دارای توزیع نمایی با مقدار متوسط ۱۰۰۰۰ مایل است. اگر شخصی بخواهد به یک سفر ۵۰۰۰ مایلی برود، احتمالی که سفرش را بدون تعویض باتری خودرو به پایان برساند چقدر است؟ اگر توزیع نمایی نباشد چه می‌توان گفت؟

حل: بنابر ویژگی بدون حافظه بودن توزیع نمایی نتیجه می‌شود که عمر باقیمانده باتری (به هزار مایل) نمایی با پارامتر $\lambda = \frac{1}{10}$ است. بنابراین احتمال مطلوب برابر است با

$$P\{ \text{عمر باقیمانده} > 5 \} = 1 - F(5) = e^{-5\lambda} = e^{-1/2} \approx .604$$

با وجود این، اگر F توزیع عمر باتری نمایی نباشد، آن گاه احتمال مناسب عبارت است از

$$P\{ \text{عمر باقیمانده} > t+5 \mid \text{عمر باقیمانده} > t \} = \frac{1 - F(t+5)}{1 - F(t)}$$

که در آن t تعداد مایلهایی است که باتری قبل از آغاز مسافرت مورد استفاده بوده است. بنابراین، اگر توزیع نمایی نباشد، قبل از آن که احتمال مطلوب را بتوان محاسبه کرد به اطلاعات اضافی (مثلاً t) نیاز است.

گونه‌ای از توزیع نمایی، توزیع یک متغیر تصادفی است که مثبت یا منفی بودن آن هم احتمال است و مقدار قدر مطلق آن دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda \geq 0$ است. گوییم این متغیر تصادفی دارای توزیع **دوگانه نمایی**^۱ است و چگالی آن با رابطه زیر بیان می‌شود

۱- گاهی نیز متغیر تصادفی نمایی دوگانه نامیده می‌شود.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda x}, & x < 0 \\ = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}, & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

تابع توزیع آن با رابطه زیر داده شده است.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x \lambda e^{\lambda x} dx, & x < 0 \\ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \lambda e^{\lambda x} dx + \frac{1}{2} \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx, & x > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda x}, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

مثال ۲ ت. مثال ۳ را که فرض می‌کنند قرار است پیام دوتایی از A به B ارسال شود، (که وقتی پیام ۱ است ۲ وقتی ۰ است -۲ ارسال می‌شود)، دوباره در نظر می‌گیریم. با این وجود، اکنون فرض کنید به جای متغیر تصادفی نرمال استاندارد N اختلال و آشفتگی کانال، متغیر تصادفی لاپلاسی با پارامتر $\lambda = 1$ است. باز هم فرض کنید اگر R مقدار دریافت شده در مکان B باشد، آن گاه این پیام به صورت زیر کشف رمز می‌شود:

اگر $R \geq 0.5$ ، آن گاه ۱ را نتیجه می‌گیریم

اگر $R < 0.5$ ، آن گاه ۰ را نتیجه می‌گیریم

در این حالت (یعنی وقتی آشفتگی لاپلاسی با پارامتر $\lambda = 1$ است) ۲ نوع خطا دارای احتمالهای زیرند:

$$P \{ \text{پیام ۱ فرستاده شده است} \mid \text{خطا} \} = P\{N < -1.5\}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-1.5}$$

$$= .1116$$

$$P \{ \text{پیام ۰ فرستاده شده است} \mid \text{خطا} \} = P\{N \geq 2.5\}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-2.5}$$

$$= .041$$

بنابراین، با مقایسه این مقادیر با جوابهای مثال ۳ ت، در می‌یابیم که احتمالهای خطای وقتی آشفتگی لاپلاسی با پارامتر $\lambda = 1$ است از زمانی که آشفتگی یک متغیر تصادفی نرمال واحد است بزرگتراند (چنان که در فصل ۷ نشان خواهیم داد، هر دوی این متغیرهای تصادفی دارای

مقدار متوسط 0 و میانگین مربعات انحراف از 0 تا 1 می باشند).

۴-۱ تابع نرخ خرابی

متغیر تصادفی مثبت و پیوسته X را به عنوان طول عمر قطعه معینی با تابع توزیع F و چگالی f در نظر می گیریم $\lambda(t)$ تابع نرخ خرابی F با

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}, \quad \bar{F} = 1 - F$$

تعریف می شود. به منظور تعبیر و تفسیر $\lambda(t)$ ، فرض کنید که قطعه ای به مدت t ساعت کار کرده است و ما احتمالی را که این قطعه مدت زمان اضافی dt به کار ادامه ندهد را می خواهیم. یعنی $P\{X \in (t, t + dt) | X > t\}$ را در نظر می گیریم. اکنون

$$\begin{aligned} P\{X \in (t, t + dt) | X > t\} &= \frac{P\{X \in (t, t + dt), X > t\}}{P\{X > t\}} \\ &= \frac{P\{X \in (t, t + dt)\}}{P\{X > t\}} \\ &\approx \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} dt \end{aligned}$$

یعنی $\lambda(t)$ نرخ احتمال شرطی قطعه ای را که t واحد زمان از عمر آن گذشته، نشان می دهد. اکنون فرض کنید توزیع طول عمر نمایی باشد. در این صورت بنابر ویژگی بدون حافظه بودن نتیجه می شود که توزیع عمر باقیمانده برای یک قطعه t ساله با عمر یک قطعه جدید یکسان است. بنابراین $\lambda(t)$ باید ثابت باشد که می توان آن را تحقیق کرد، زیرا

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

بنابراین تابع نرخ خرابی توزیع نمایی ثابت است. پارامتر λ را غالباً نرخ این توزیع می نامند. معلوم می شود که تابع نرخ خرابی $\lambda(t)$ ، توزیع F را بطور یکتا تعیین می کند. برای اثبات آن توجه داشته باشید که بنا به تعریف

$$\lambda(t) = \frac{\frac{d}{dt} F(t)}{1 - F(t)}$$

با انتگرال گیری از طرفین حاصل می شود

$$\log(1 - F(t)) = - \int_0^t \lambda(t) dt + k$$

یا

$$1 - F(t) = e^k \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(t) dt \right\}$$

با قرار دادن $t = 0$ ، نتیجه می شود $k = 0$ و بنابراین

$$F(t) = 1 - \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(t) dt \right\} \quad (4-4)$$

بنابراین می توان تابع توزیع متغیر تصادفی پیوسته مثبتی را با داشتن تابع نرخ خرابی آن مشخص کرد. برای مثال، اگر متغیری تصادفی دارای تابع نرخ خرابی خطی باشد. یعنی اگر

$$\lambda(t) = a + bt$$

آن گاه تابع توزیع آن با رابطه زیر داده می شود

$$F(t) = 1 - e^{-at - bt^2/2}$$

و با مشتق گیری از آن معلوم می شود که چگالی آن عبارت است از

$$f(t) = (a + bt)e^{-(at + bt^2/2)}, \quad t \geq 0$$

هرگاه $a = 0$ ، تابع فوق به تابع چگالی رایبله مشهور است.

مثال ۴ ت: غالباً شنیده می شود که نرخ مرگ افراد معتاد به سیگار، در هر سنی، دو برابر نرخ مرگ افراد غیرمعتاد به سیگار است. معنی این عبارت چیست؟ آیا به این معناست که احتمال زنده ماندن یک فرد غیرسیگاری به تعداد سالهای معینی دو برابر یک فرد سیگاری هم سن اوست؟

حل: اگر $\lambda_1(t)$ نرخ مرگ یک فرد سیگاری ۱ ساله و $\lambda_2(t)$ نرخ مرگ یک غیر سیگاری

t ساله باشد، آن گاه مطلب فوق هم ارز با گزاره زیر است

$$\lambda_r(t) = 2\lambda_n(t).$$

احتمالی که یک فرد غیر سیگاری A ساله تا سن B زنده بماند، $A < B$ ، عبارت است از

$$P\{A > \text{طول عمر غیر سیگاریها} \mid \text{طول عمر غیر سیگاریها} > B\} = P\{\text{فرد غیر سیگاری } A \text{ ساله به سن } B \text{ سالگی برسد}\}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - F_{\text{non}}(B)}{1 - F_{\text{non}}(A)} \\ &= \frac{\exp\left\{-\int_0^B \lambda_n(t) dt\right\}}{\exp\left\{-\int_0^A \lambda_n(t) dt\right\}} \quad \text{از (۴-۴)} \\ &= \exp\left\{-\int_A^B \lambda_n(t) dt\right\} \end{aligned}$$

در حالی که احتمال متناظر برای یک فرد سیگاری، با استدلالی نظیر آن، برابر است با

$$\begin{aligned} P\{\text{یک فرد سیگاری } A \text{ ساله به سن } B \text{ سالگی برسد}\} &= \exp\left\{-\int_A^B \lambda_r(t) dt\right\} \\ &= \exp\left\{-2 \int_A^B \lambda_n(t) dt\right\} \\ &= \left[\exp\left\{-\int_A^B \lambda_n(t) dt\right\}\right]^2 \end{aligned}$$

به بیان دیگر، از دو فرد هم سن که یکی از آنها سیگاری و دیگری غیر سیگاری است، احتمالی که این فرد سیگاری تا سن معینی زنده بماند برابر با **توان دوم** (و نه نصف) احتمال متناظر برای یک فرد غیر سیگاری است. برای مثال، اگر $\lambda_n(t) = \frac{1}{30}$ ، $t \leq 60$ ، آن گاه احتمالی که یک فرد غیر سیگاری ۵۰ ساله به سن ۶۰ سالگی برسد برابر با $e^{-\frac{1}{3}} = 0.7165$ است، در حالی که احتمال متناظر برای فرد سیگاری برابر $e^{-\frac{2}{3}} = 0.5134$ است.

۵- توزیعهای پیوسته دیگر

۵-۱ توزیع گاما

می‌گوییم یک متغیر تصادفی دارای توزیع گاما با پارامترهای (λ, t) ، $\lambda > 0$ و $t > 0$ می‌باشد، اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{t-1}}{\Gamma(t)} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

که در آن

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{t-1} dy$$

با انتگرال گیری با روش جزء به جزء از $\Gamma(t)$ داریم

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= -e^{-y} y^{t-1} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-y} (t-1) y^{t-2} dy \\ &= (t-1) \int_0^{\infty} e^{-y} y^{t-2} dy \\ &= (t-1) \Gamma(t-1) \end{aligned} \quad (1-5)$$

مقدار انتگرال برای t ، مثلاً $t = n$ ، با اعمال (1-5) بطور مکرر داریم

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1) \Gamma(n-1) \\ &= (n-1)(n-2) \Gamma(n-2) \\ &= \dots \\ &= (n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \Gamma(1) \end{aligned}$$

چون $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$ ، نتیجه می شود که مقادیر انتگرال برای n عبارت است از

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

وقتی t عدد صحیح مثبتی مثلاً $t = n$ است، توزیع گاما با پارامترهای (t, λ) غالباً در عمل به عنوان توزیع مدت زمانی که فردی باید منتظر بماند تا کلاً n پیشامد رخ دهد، پیش می آید. بطور دقیقتر، اگر پیشامدها قرار باشد در طول زمان و بر طبق سه اصل موضوعی بخش ۵، فصل ۴ رخ دهند، آن گاه معلوم می شود مدت زمانی که فردی باید انتظار بکشد تا کلاً n پیشامد رخ دهد، یک توزیع گاما با پارامترهای (n, λ) می باشد. برای اثبات، فرض کنید T_n زمانی را که پیشامد n ام رخ می دهد نشان دهد و توجه داشته باشید که T_n کوچکتر یا برابر t است اگر و تنها اگر تعداد پیشامدهایی که تا زمان t رخ داده است، حداقل برابر n باشد. یعنی، اگر $N(t)$ برابر تعداد پیشامدها در $[0, t]$ باشد، داشته باشیم

$$\begin{aligned} P\{T_n \leq t\} &= P\{N(t) \geq n\} \\ &= \sum_{j=n}^{\infty} P\{N(t) = j\} \\ &= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^j}{j!} \end{aligned}$$

که در آن تساوی اخیر، باتوجه به این که تعداد پیشامدها در $[0, t]$ دارای توزیع پواسن با پارامتر λt است، نتیجه شده است. بامشتق گیری از رابطه فوق، تابع چگالی T_n به صورت زیر حاصل می شود

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} j (\lambda t)^{j-1} \lambda}{j!} - \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^j}{j!} \\ &= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} - \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^j}{j!} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

بنابراین T_n دارای توزیع گاما با پارامترهای (n, λ) است. (به این توزیع در کتب آماری توزیع n -ارلانگ نیز اطلاق می شود) توجه داشته باشید که برای $n=1$ ، این توزیع به نمائی تبدیل می شود.

توزیع گاما با $\lambda = \frac{1}{2}$ و $t = \frac{n}{2}$ (n عدد صحیح و مثبت است) توزیع χ_n^2 (بخوانید خی دو یا کی دو) با n درجه آزادی خوانده می شود. توزیع χ^2 در عمل غالباً به عنوان توزیع خطا، وقتی سعی می شود که در فضای n بعدی به هدفی اصابت شود و هر مؤلفه خطا دارای توزیع نرمال است، پیش می آید. این توزیع را در فصل (۶) مورد مطالعه قرار می دهیم و در آن جا به جزئیات رابطه آن با توزیع نرمال خواهیم پرداخت.

۲-۵ توزیع وایبل

توزیع وایبل به علت انعطاف پذیریش در حرفه مهندسی بطور گسترده ای به کار می رود. در اصل، این توزیع برای تعبیر داده های فرسودگی پیشنهاد شد، ولی اکنون استفاده از آن به بسیاری از دیگر مسائل مهندسی، گسترش یافته است. بویژه، این توزیع در زمینه پدیده های طول عمر، نظیر توزیع طول عمر دستگاه معینی، بخصوص وقتی الگوی «ضعیفترین حلقه» برای این دستگاه مناسب باشد، کاربرد دارد. یعنی، دستگاهی را که مرکب از بسیاری قطعات است در نظر بگیرید و فرض کنید که این دستگاه وقتی هریک از قطعاتش خراب شود،

از کار باز می ماند و تحت این شرایط (هم بطور نظری و هم بطور عملی) نشان داده شده است که توزیع وایبل تقریب خوبی برای توزیع طول عمر این قطعه فراهم می کند.

تابع توزیع وایبل به شکل زیر است

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq v \\ 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x-v}{\alpha}\right)^\beta\right\} & x > v \end{cases} \quad (۲-۵)$$

یک متغیر تصادفی که تابع توزیع تراکمی آن با معادله (۲-۵) داده شده باشد، متغیر تصادفی وایبل با پارامتر v , α و β نامیده می شود. با مشتق گیری چگالی آن به دست می آید.

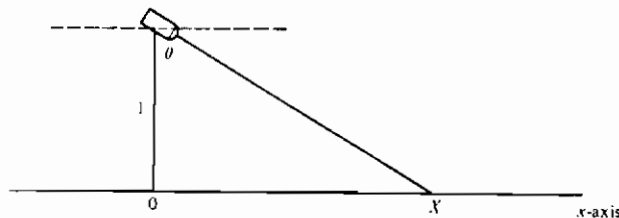
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq v \\ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{x-v}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{x-v}{\alpha}\right)^\beta\right\} & x > v \end{cases}$$

۳-۵ توزیع کوشی

گوییم یک متغیر تصادفی دارای توزیع کوشی با پارامتر θ ، $-\infty < \theta < \infty$ ، است، اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{[1 + (x - \theta)^2]} \quad -\infty < x < \infty$$

مثال ۵ الف. فرض کنید پرتو باریک چراغ قوه ای حول مرکز خودش می چرخد که به فاصله یک واحد از محور x ها قرار دارد (شکل ۴-۵). وقتی چراغ قوه از چرخش باز می ایستد، نقطه X را که پرتو آن محور x ها را قطع می کند در نظر بگیرید. (اگر پرتو متوجه محور x ها نبود، آزمایش را تکرار کنید).



شکل ۴-۵

چنان که در شکل ۵-۵ نشان داده شده است، نقطه X با زاویه بین چراغ قوه و محور y ها θ تعیین می شود که از نظر فیزیکی روشن است بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ دارای توزیع یکنواخت است. بنابراین تابع توزیع X با رابطه زیر داده می شود.

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{X \leq x\} \\ &= P\{\tan \theta \leq x\} \\ &= P\{\theta \leq \tan^{-1} x\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} x \end{aligned}$$

که در آن تساوی اخیر از

$$P\{\theta \leq a\} = \frac{a - (-\pi/2)}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{a}{\pi}, \quad -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$$

به دلیل یکنواخت بودن θ بر $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ، نتیجه می شود.
بنابراین تابع چگالی X با رابطه

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad -\infty < x < \infty$$

داده می شود و می بینیم که X دارای توزیع کوشی است.^۱

۱- برای $\frac{d}{dx} \operatorname{tg}^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$ را می توان به صورت زیر نشان داد: اگر $y = \operatorname{tg}^{-1} x$ ،

آن گاه $y = x$ و بنابراین

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{d}{dx} (\tan y) = \frac{d}{dy} (\tan y) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy} \left(\frac{\sin y}{\cos y} \right) \frac{dy}{dx} \\ &= \left(\frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} \right) \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

۴-۵ توزیع بتا

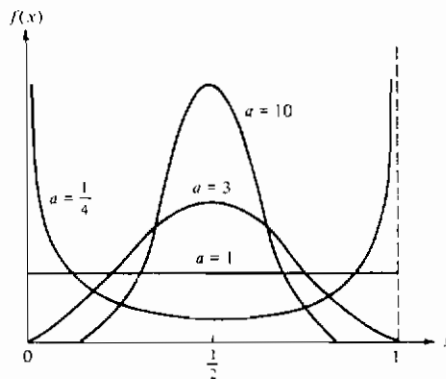
گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع بتاست اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن

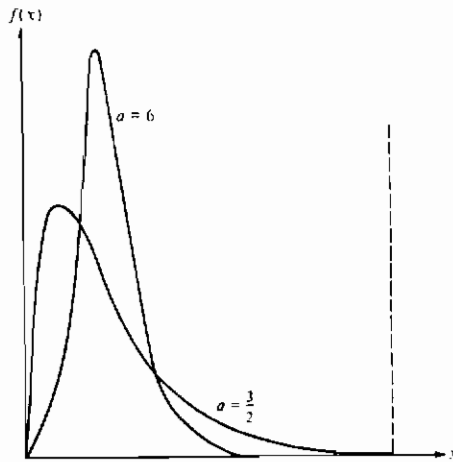
$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

توزیع بتا را می توان برای پدیده ای تصادفی که مجموعه مقادیر آن در فاصله معین $[c, d]$ است الگو قرار داد که این فاصله، اگر c مبدأ را نشان دهد و $d - c$ را واحد اندازه گیری بگیریم به فاصله $[0, 1]$ تبدیل می شود.



شکل ۴-۵ چگالیهای بتا با پارامترهای (a, b) وقتی $a = b$

وقتی $a = b$ ، چگالی بتا نسبت به $\frac{1}{2}$ متقارن است و وقتی مقدار مشترك a صعود می کند، وزنه بیشتر و بیشتری به نواحی اطراف $\frac{1}{2}$ می دهد (شکل ۴-۵). وقتی $b > a$ چگالی آن به سمت چپ چاوله است (با این مفهوم که مقادیر کوچک احتمال بیشتری دارند) و وقتی $a > b$ ، به سمت راست چاوله است (شکل ۴-۵).



شکل ۷-۵ چگالیهای بتا با پارامترهای (a, b) وقتی $\frac{a}{a+b} = \frac{1}{20}$

۶- توزیع تابعی از یک متغیر تصادفی

غالباً پیش می‌آید که توزیع احتمال یک متغیر تصادفی معلوم است و ما به تعیین توزیع تابعی معین از آن توجه داریم. برای مثال، فرض کنید که توزیع X معلوم است و می‌خواهیم توزیع $g(X)$ را پیدا کنیم. برای انجام این کار، لازم است پیشامد $g(X) \leq y$ را بر حسب این که X در مجموعه معینی باشد بیان کنیم. مطلب را با مثالهای زیر شرح می‌دهیم.

مثال ۶ الف. فرض کنید X دارای توزیع یکنواخت بر $(0,1)$ باشد. توزیع متغیر تصادفی

Y را که با $Y = X^n$ تعریف شده است، به صورت زیر به دست می‌آوریم: برای $0 \leq y \leq 1$.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} \\ &= P\{X^n \leq y\} \\ &= P\{X \leq y^{1/n}\} \\ &= F_X(y^{1/n}) \\ &= y^{1/n} \end{aligned}$$

پس تابع چگالی Y با رابطه زیر داده می‌شود

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{n} y^{-((n-1)/n)} & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مثال ۶ پ. اگر X متغیر تصادفی پیوسته با چگالی احتمال f_X باشد، توزیع $Y = X^2$ به صورت زیر حاصل می‌شود: برای $y \geq 0$ ،

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} \\ &= P\{X^2 \leq y\} \\ &= P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

که با مشتق‌گیری حاصل می‌شود

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})]$$

مثال ۶ پ. اگر X دارای چگالی احتمال f_X باشد ، آن گاه $Y = |X|$ دارای یک تابع چگالی است که به صورت زیر حاصل می‌شود : برای $y \geq 0$ ،

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} \\ &= P\{|X| \leq y\} \\ &= P\{-y \leq X \leq y\} \\ &= F_X(y) - F_X(-y) \end{aligned}$$

بنابراین ، با مشتق‌گیری حاصل می‌شود

$$f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y) \quad y \geq 0$$

روشهای به کاررفته در مثالهای ۶ الف تا ۶ پ رامی توان برای اثبات قضیه ۶-۱ به کار برد .

قضیه ۶-۱

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال f_X است . فرض کنید $g(x)$ تابعی اکیداً یکنوا (صعودی یا نزولی) مشتق‌پذیر (وینابراین پیوسته) از x است . دراین صورت متغیر تصادفی Y که با $Y = g(X)$ تعریف شده است دارای یک تابع چگالی به صورت زیر است .

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[g^{-1}(y)] \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \\ 0 \end{cases}$$

اگر برای x معینی $y = g(x)$

اگر برای هر x ، $y \neq g(x)$

که در آن $g^{-1}(y)$ برابر با آن مقداری از x تعریف می شود که در $g(x) = y$ صدق می کند. اثبات قضیه ۶-۱ را به عنوان تمرین رها می کنیم.

تمرینات نظری

۱- برای حکم زیر مثال نقضی ارائه دهید: اگر برای هر $0 < a < 1$ ، $P(E_a) = 1$ ، آن گاه $P(\bigcap_a E_a) = 1$ ، که در آن اشتراك بر روی کلیه $a \in (0, 1)$ است.

راهنمایی: فرض کنید X بر $(0, 1)$ بطور یکنواخت توزیع شده است. E_a را بر حسب X تعریف کنید.

۲- سرعت یک ملکول در یک گاز یکنواخت در حال تعادل متغیری تصادفی است که تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر است

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 e^{-bx^2} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

که در آن $b = m/2kT$ ، m ، T ، k و b بترتیب ثابت بالتزمن، درجه حرارت مطلق و جرم ملکول را نمایش می دهند. a را بر حسب b محاسبه کنید.

۳- معادله (۲-۳) را ثابت کنید.

۴- اگر Z یک متغیر تصادفی نرمال واحد باشد، نشان دهید برای هر $a > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P\{Z \geq x + a/x\}}{P\{Z \geq x\}} = e^{-a}$$

۵- میانه یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع F مقداری مانند m است که در

$$F(m) = \frac{1}{2}$$

با احتمالی که از آن کوچکتر باشد برابر است. مطلوب است میانه X اگر X

(الف) بر (a, b) بطور یکنواخت توزیع شده باشد.

(ب) نرمال با پارامترهای μ و σ^2 باشد.

(پ) نمایی با نرخ λ باشد.

۶- نمای یک متغیر تصادفی پیوسته X مقداری از x است که برای آن $f(x)$ به ماگزیمم خود

برسد. نمای x را در حالت‌های (الف) (ب) و (پ) تمرین نظری ۵، محاسبه کنید.

۷- اگر X یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ و $c > 0$ باشد، نشان دهید که cX نمایی با پارامتر $\frac{\lambda}{c}$ است.

۸- اگر X دارای توزیع یکنواخت بر $(0, a)$ باشد تابع نرخ خرابی X را محاسبه کنید.

۹- اگر X دارای تابع نرخ خرابی (t) λ_x باشد، تابع نرخ خرابی aX را محاسبه کنید، a عددی ثابت و مثبت است.

۱۰- تحقیق کنید که انتگرال تابع چگالی احتمال گاما برابر ۱ می شود

$$11 - \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \text{ را برای } n = 1, 2, \dots \text{ محاسبه کنید.}$$

۱۲- تابع نرخ خرابی یک متغیر تصادفی گاما با پارامترهای (λ, t) را محاسبه کرده و نشان دهید که این تابع برای $t > 1$ صعودی و برای $t \leq 1$ نزولی است.

۱۳- تابع نرخ خرابی یک متغیر تصادفی وایبل را محاسبه کرده و نشان دهید که برای $\beta \geq 1$ صعودی و برای $\beta \leq 1$ نزولی است.

۱۴- نشان دهید نمودار $(\log(1 - F(x)))^{-1}$ در مقابل $\log x$ یک خط راست با ضریب زاویه β است هرگاه $F(\cdot)$ تابع توزیع وایبل باشد. همچنین نشان دهید که تقریباً $63/2$ درصد تمام مشاهدات از این توزیع کمتر از α است. v را برابر صفر فرض کنید.

۱۵- قرار می دهیم

$$Y = \left(\frac{X - v}{\alpha}\right)^\beta$$

نشان دهید که اگر X متغیر تصادفی وایبل با پارامترهای v, α, β باشد، آن گاه Y یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\lambda = 1$ است و بالعکس

۱۶- نشان دهید

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

۱۷- اگر X دارای توزیع یکنواخت بر (a, b) باشد، کدام متغیر تصادفی، که دارای رابطه ای خطی با X است، بطور یکنواخت بر $(0, 1)$ توزیع شده است؟

۱۸- توزیع بتا با پارامترهای (a, b) را در نظر بگیرید. نشان دهید:

(الف) هرگاه $a > 1, b > 1$ ، چگالی یک نمایی است (یعنی دارای نمای یکتاست) که برابر

$$\cdot \frac{a-1}{a+b-2}$$

(ب) هرگاه $a \leq 1$ ، $b \leq 1$ ، $a + b < 2$ ، چگالی یا یک نمای است که نما در 0 یا 1 است یا

U شکل است با نمایی هم در 0 و هم در 1.

(پ) هرگاه $a = b = 1$ ، کلیه نقاط در $[0, 1]$ نما هستند.

۱۹- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع تراکمی F است. متغیر تصادفی

Y را با $Y = F(X)$ تعریف کنید. نشان دهید که Y بر $(0, 1)$ بطور یکنواخت توزیع

شده است.

۲۰- فرض کنید X دارای چگالی احتمال f_x است. تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی Y را که

با $Y = aX + b$ تعریف شده است بیابید.

۲۱- تابع چگالی احتمال $Y = e^X$ را، هرگاه X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 باشد،

بیابید. می گوئیم متغیر تصادفی Y دارای توزیع لگ نرمال با پارامترهای μ و σ^2 است (زیرا

$\log Y$ دارای توزیع نرمال است).

۲۲- قضیه ۶-۱ را ثابت کنید.

۲۳- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقلند که احتمال برابری بودن آنها با 1، 2، ...، $(10)^N$

یکسان است، که در آن N بسیار بزرگ است. فرض کنید D بزرگترین مقسوم علیه مشترک

X و Y را نمایش می دهد و $Q_k = P\{D = k\}$.

(الف) دلیل ساده ای برای این که $Q_k = \frac{1}{2} Q_1$ ، بیابید.

راهنمایی: توجه داشته باشید برای این که D برابر K شود، k باید X و Y را بشمارد و

همچنین X/k و Y/k باید نسبت به هم اول باشند. (یعنی باید آنها دارای بزرگترین مقسوم

علیه مشترك ۱ باشند).

(ب) با استفاده از (الف) نشان دهید که

$$Q_1 = P\{X \text{ و } Y \text{ نسبت به هم اول باشند}\} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2}$$

می دانیم که $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ و از این رو $Q_1 = \frac{6}{\pi^2}$ (در نظریه اعداد آن را قضیه لژاندر

می نامند).

(پ) اکنون استدلال کنید

$$Q_1 = \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{P_i^2 - 1}{P_i^2} \right),$$

که در آن P_i ، کوچکترین عدد اول i ام بزرگتر از ۱ است .

راهنمایی : X و Y نسبت به هم اولند اگر دارای هیچ عاملهای اول مشترك نباشند .
 بنابراین ، از (ب) ، دیده می شود که $\prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{P_i^2 - 1}{P_i^2} \right) = \frac{6}{\pi^2}$ ، که در مسأله ۱۱ فصل ۴ بدون توضیح مورد توجه قرار دادیم . (رابطه بین این مسأله و مسأله ۱۱ در فصل ۴ عبارت است از این که X و Y نسبت به هم اولند اگر XY دارای هیچ مضربی از عاملهای اول نباشد) .

مسائل

۱- فرض کنید X متغیری تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر است

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(الف) مقدار c کدام است؟

(ب) تابع توزیع تراکمی X کدام است؟

۲- سیستمی مرکب از یک واحد اصلی و یک واحد فرعی می تواند تا مدت زمان تصادفی X کار کند . اگر چگالی X (به ماه) به صورت زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} Cxe^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

احتمالی که این دستگاه حداقل به مدت ۵ ماه کار کند چقدر است؟

۳- تابع

$$f(x) = \begin{cases} C(2x-x^3) & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. آیا f می‌تواند تابع چگالی احتمال باشد؟ در صورت مثبت بودن پاسخ، c را تعیین کنید. اگر $f(x)$ به صورت زیر باشد مسأله را تکرار کنید

$$f(x) = \begin{cases} C(2x - x^2) & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۴- تابع چگالی احتمال X عمر وسیله الکترونیکی از نوع معین (به ساعت) با تابع زیر داده شده است

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^2} & x > 10 \\ 0 & x \leq 10 \end{cases}$$

(الف) $P\{X > 20\}$ را بیابید.

(ب) تابع توزیع تراکمی X چیست؟

(ج) احتمالی که از ۶ وسیله از این نوع حداقل سه وسیله به مدت حداقل ۱۵ ساعت کار کند چقدر است؟ چه فرضهایی را در نظر می‌گیرید.

۵- به یک جایگاه بنزین هفته‌ای یک بار بنزین تحویل داده می‌شود. اگر حجم فروش هفتگی آن برحسب هزار گالن متغیری تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

گنجایش مخزن بنزین چقدر باید باشد تا احتمالی که ذخیره بنزین در هفته‌ای مفروض تمام شود برابر 0.01 باشد.

۶- قطارهای عازم مقصد A ، به فاصله‌های زمانی ۱۵ دقیقه، با شروع از ساعت ۷ صبح، و قطارهای عازم مقصد B به فاصله‌های زمانی ۱۵ دقیقه با شروع از ساعت ۵:۰۷ صبح وارد ایستگاه می‌شوند. اگر یک مسافر معینی در زمانی که بین ۷ و ۸ صبح یکنواخت توزیع شده است وارد ایستگاه شده و سوار اولین قطاری شود که از راه می‌رسد، چه نسبتی از موارد او به مقصد A می‌رود؟ اگر این مسافر در زمانی که بین ۷:۱۰ و ۸:۱۰ صبح یکنواخت توزیع شده است وارد ایستگاه شود این نسبت چقدر است؟

۷- نقطه‌ای بتصادف بر روی پاره خطی به طول L انتخاب می‌شود. این گزاره را تعبیر کرده و احتمالی را که نسبت پاره خط کوتاهتر به پاره خط طولیتر کمتر از $\frac{1}{4}$ باشد پیدا کنید.

۸- اتوبوسی بین دو شهر A و B به فاصله ۱۰۰ مایل تردد می کند. اگر این اتوبوس در بین راه خراب شود، فاصله از این نقطه تا شهر A دارای توزیع یکنواخت بر (۰ و ۱۰۰) است. تعمیرگاه اتوبوس در شهر A، شهر B و در مرکز راه بین A و B وجود دارد. پیشنهاد می شود که داشتن سه تعمیرگاه به ترتیب به فاصله های ۲۵، ۵۰، ۷۵ مایل از شهر A کارا تر می باشد. آیا با این امر موافقت می کنید؟ چرا؟

۹- شما در ساعت ۱۰ به یک ایستگاه اتوبوس وارد می شوید با آگاهی به این که اتوبوس در زمانی که بین ۱۰ و ۳۰ : ۱۰ بطور یکنواخت توزیع شده است می رسد. احتمال این که بیش از ۱۰ دقیقه منتظر شوید چقدر است؟ اگر در ساعت ۱۵ : ۱۰ اتوبوس هنوز نیامده باشد، احتمال این که حداقل ۱۰ دقیقه دیگر منتظر شوید چقدر است؟

۱۰- اگر X دارای توزیع نرمال با پارامترهای $\mu = 10$ و $\sigma^2 = 36$ باشد. مطلوب است محاسبه

$$P\{X > 5\} \quad \text{(الف)}$$

$$P\{4 < X < 16\} \quad \text{(ب)}$$

$$P\{X < 8\} \quad \text{(پ)}$$

$$P\{X < 20\} \quad \text{(ت)}$$

$$P\{X > 16\} \quad \text{(ث)}$$

۱۱- مقدار باران سالیانه (به اینچ) در منطقه معینی دارای توزیع نرمال با $\mu = 40$ ، $\sigma = 4$ می باشد. احتمال این که، با آغاز از امسال، قبل از آن که سالی بیاید که نزولات جوی آن ۵۰ اینچ باشد بیش از ۱۰ سال طول بکشد، چقدر است؟ چه فرضهایی را در نظر گرفته اید؟

۱۲- فرض کنید که اندازه قد یک مرد ۲۵ ساله بر حسب اینچ متغیر تصادفی نرمال با پارامتر $\mu = 71$ ، $\sigma^2 = 6.25$ می باشد. چه درصدی از مردان ۲۵ ساله دارای قدی بیش از ۶ فوت و ۲ اینچ می باشند؟ چه درصدی از مردان در باشگاه ۶ فوتیها دارای قدی بیش از ۶ فوت و ۵ اینچ هستند؟

۱۳- عرض شکاف یک قطعه آلومینیومی (بر حسب اینچ) دارای توزیع نرمال با $\mu = 0.9000$ و $\sigma = 0.0030$ می باشند حدود فنی برابر با 0.0050 ± 0.9000 داده شده است. چند درصد از قطعات معیوب خواهد بود؟

وقتی عرض شکافها دارای توزیع نرمال با میانگین 9000. μ و σ می باشد. مقدار ماگزیمم مجاز σ که اجازه نخواهد داد بیش از یکی در بین ۱۰۰ قطعه معیوب باشد چقدر است؟

۱۴- تاسی متعادل را هزار بار مستقلاً پرتاب می کنیم. احتمالی را که عدد ۶ بین ۱۵۰ و ۲۰۰ بار ظاهر شود با تقریب محاسبه کنید. اگر این عدد دقیقاً ۲۰۰ بار ظاهر شود، احتمالی را که عدد ۵ کمتر از ۱۵۰ بار ظاهر شود پیدا کنید.

۱۵- عمر تراشه های داخلی کامپیوتر که به وسیله تولیدکننده نیمه هادیها تولید می شود دارای توزیع نرمال با پارامترهای $\mu = 1.4 \times 10^3$ ساعت و $\sigma = 3 \times 10^5$ ساعت است. احتمال تقریبی که توده ای مرکب از ۱۰۰ تراشه شامل حداقل ۲۰ تراشه با عمر کمتر از 1.8×10^9 ساعت است، باشد، چقدر است؟

۱۶- با استفاده از برنامه کامپیوتری که در پایان فصل ۴ ارائه شده است، هرگاه X متغیر تصادفی دو جمله ای با پارامتر $n = 300$ و $p = 0.1$ ، $p\{X \leq 25\}$ را محاسبه کنید. این مقدار را با (الف) تقریب پواسن آن (ب) با تقریب نرمال آن مقایسه کنید. در استفاده از تقریب نرمال، احتمال مطلوب را به صورت $P\{X < 25.5\}$ بنویسید تا این که از تصحیح پیوستگی استفاده کرده باشید. (برای محاسبه تقریب پواسن به برنامه پایان فصل ۴ نیاز دارید).

۱۷- در کارخانه ای دو نوع سکه تولید می شود: سکه سالم و سکه اریب که ۵۵ درصد موارد شیر می آید. یکی از این سکه ها را بدون این که بدانیم از کدام نوع است در اختیار داریم. به منظور پی بردن به این که چه نوع سکه ای داریم، آزمون آساری زیر را انجام می دهیم: سکه را ۱۰۰۰ بار پرتاب می کنیم. اگر این سکه ۵۲۵ بار یا بیشتر شیر بیاید، نتیجه می گیریم که این سکه اریب است، در صورتی که، اگر کمتر از ۵۲۵ بار شیر بیاید، آن گاه نتیجه می گیریم که این سکه سالم است. اگر این سکه واقعاً سالم باشد، احتمالی که به نتیجه نادرست برسیم چقدر است؟ این احتمال چقدر است اگر سکه اریب باشد.

۱۸- در ۱۰۰۰۰ پرتاب مستقل سکه ای، ۵۸۰۰ بار شیر آمده است. آیا منطقی است فرض کنیم که این سکه سالم نیست؟ شرح دهید.

۱۹- تصویری به دو بخش تقسیم شده است - یکی بخش سفید و دیگری سیاه - اندازه حاصل از نقطه ای که بتصادف از بخش سفید انتخاب شده است، دارای توزیع نرمال با پارامترهای (۴ و ۴) است، در حالی که اندازه حاصل از نقطه ای که بتصادف از بخش سیاه انتخاب شده

است دارای توزیع نرمال با پارامترهای (۹ و ۶) است. نقطه ای از تصویر بتصادف انتخاب می شود که دارای اندازه ۵ است. اگر کسری از تصویر که سیاه است α باشد، به ازای چه مقدار α ، احتمال ارتکاب خطا یکسان است اگر نتیجه بگیریم که نقطه در بخش سیاه یا سفید بوده است؟

۲۰- زمان لازم برای تعمیر یک ماشین (به ساعت)، متغیری تصادفی با توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = \frac{1}{2}$ است.

(الف) احتمال این که زمان تعمیری از ۲ ساعت تجاوز کند چقدر است؟

(ب) احتمال شرطی که تعمیری لااقل ۱۰ ساعت طول بکشد، در صورتی که می دانیم مدت آن از ۹ ساعت بیشتر است چقدر است؟

۲۱- سالهایی که رادیویی کار می کند دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = \frac{1}{8}$ است. اگر جونز رادیوی مستعملی بخرد احتمال این که این رادیو پس از آن ۸ سال کار کند چقدر است؟

۲۲- جونز حساب می کند که تعداد کل هزاران مایلی که یک خودرو می تواند قبل از قراضه شدن به پیماید یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\frac{1}{4}$ است. اسمیت خود رودست دومی دارد که ادعا می کند تنها ۱۰۰۰۰ مایل پیموده است. اگر جونز این خودرو را بخرد، احتمال این که وی حداقل ۲۰۰۰۰ مایل دیگر از آن کار بکشد چقدر است؟ مسأله را تحت فرضی که عمر این اتومبیل به جای توزیع نمایی دارای توزیع یکنواخت بر (۰ و ۴۰)، (بر حسب هزار مایل)، باشد تکرار کنید.

۲۳- $\lambda(t)$ نرخ مخاطره یک مرد سیگاری t ساله چنان است که

$$\lambda(t) = .027 + .00025(t - 40)^2, \quad t \geq 40$$

اگر فرض کنیم یک مرد سیگاری ۴۰ ساله کلیه مخاطرات را پشت سر بگذارد، احتمال این که بدون ابتلا به سرطان ریه (الف) تا سن ۵۰ سالگی (ب) تا سن ۶۰ سالگی زنده بماند چقدر است؟

۲۴- فرض کنید توزیع عمر یک قلم کالا دارای تابع نرخ مخاطره زیر است:

$$\lambda(t) = t^3, \quad t > 0.$$

(الف) احتمال این که این قلم کالا دو سال عمر کند چقدر است؟

(ب) احتمال این که زمان عمر این قلم کالا بین $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4}$ باشد چقدر است؟

(پ) احتمال این که یک قلم کالای یک ساله تا دو سال دوام بیاورد چقدر است؟

۲۵- اگر X بر $(-1, 1)$ دارای توزیع یکنواخت باشد، مطلوب است .

(الف) $P\{|X| > \frac{1}{2}\}$

(ب) $P\{\sin(\pi X/2) > \frac{1}{3}\}$

(پ) تابع چگالی متغیر تصادفی $|X|$.

۲۶- اگر Y بر $(0, 5)$ دارای توزیع یکنواخت باشد، احتمال این که هر دو ریشه معادله

$$4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$$

حقیقی باشند چقدر است؟

۲۷- اگر X یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\lambda = 1$ باشد، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی

$$Y = \log X$$

را که با $Y = \log X$ تعریف شده است محاسبه کنید .

۲۸- اگر X بر $(0, 1)$ بطور یکنواخت توزیع شده باشد، تابع چگالی $Y = e^X$ را بیابید .

۲۹- مطلوب است توزیع $R = A \sin \theta$ ، که در آن A یک ثابت مشخص و θ

بر $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ دارای توزیع یکنواخت است .

متغیر تصادفی R در نظریه بالیستیک مطرح می شود . اگر گلوله ای از مبدأ با زاویه α نسبت

به زمین و با سرعت v شلیک شود، آن گاه نقطه R که گلوله به زمین اصابت می کند

به صورت $R = (v^2 / g) (\sin 2\alpha)$ بیان می شود که در آن g ثابت گرانشی و برابر

۹۸۰ سانتی متر بر مربع ثانیه است .

توزیع توأم متغیرهای تصادفی

۱ - تابع توزیع توأم

در بارهٔ توزیمهای احتمال متغیرهای تصادفی یک متغیری بحث شد. ولی اغلب با احتمال مربوط به دو متغیر یا بیشتر سروکار داریم. برای بحث در بارهٔ این نوع احتمالات برای هر دو متغیر تصادفی X و Y تابع توزیع احتمال تجمعی توأم X و Y به صورت زیر تعریف می شود.

$$F(a, b) = P\{X \leq a, Y \leq b\} \quad -\infty < a, b < \infty$$

حال توزیع X را می توان از توزیع توأم X و Y به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} F_X(a) &= P\{X \leq a\} \\ &= P\{X \leq a, Y < \infty\} \\ &= P\left(\lim_{b \rightarrow \infty} \{X \leq a, Y \leq b\}\right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} P\{X \leq a, Y \leq b\} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} F(a, b) \\ &= F(a, \infty) \end{aligned}$$

خواننده توجه دارد که در معادلات قبل از پیوستگی تابع مجموعه ای احتمال (یعنی پیشامدها) استفاده کرده ایم. همین طور تابع توزیع تجمعی Y عبارت است از:

$$\begin{aligned} F_Y(b) &= P\{Y \leq b\} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} F(a, b) \\ &= F(\infty, b) \end{aligned}$$

توابع توزیع F_X و F_Y را اغلب توزیعهای کناری (حاشیه‌ای) X و Y نامند.

تمام گزاره‌های مربوط به احتمال توأم X و Y را بطور نظری می‌توان بر حسب تابع توزیع توأم آنها به دست آورد. مثلاً، فرض کنید بخواهیم احتمال توأم X بزرگتر از a و Y بزرگتر از b را محاسبه کنیم، این کار به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\begin{aligned} P\{X > a, Y > b\} &= 1 - P\{X > a, Y > b\}^c \\ &= 1 - P\{X > a\}^c \cup \{Y > b\}^c \\ &= 1 - P\{X \leq a\} \cup \{Y \leq b\} \\ &= 1 - [P\{X \leq a\} + P\{Y \leq b\} - P\{X \leq a, Y \leq b\}] \quad (1-1) \\ &= 1 - F_X(a) - F_Y(b) + F(a, b) \end{aligned}$$

معادله (1-1) حالت خاصی از معادله (2-1) است که بررسی درستی آن به عنوان تمرین واگذار می‌شود:

$$\begin{aligned} P\{a_1 < X \leq a_2, b_1 < Y \leq b_2\} \\ = F(a_2, b_2) + F(a_1, b_1) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1) \end{aligned} \quad (2-1)$$

که در آن $b_1 < b_2, a_1 < a_2$.

در حالتی که X و Y هر دو متغیرهای تصادفی گسسته‌اند، بهتر است تابع جرم احتمال توأم X و Y را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$p(x, y) = P\{X = x, Y = y\}$$

تابع جرم احتمال X را می‌توان از روی $p(x, y)$ به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\begin{aligned} p_X(x) &= P\{X = x\} \\ &= \sum_{y: p(x, y) > 0} p(x, y) \end{aligned}$$

همین‌طور

$$p_Y(y) = \sum_{x: p(x, y) > 0} p(x, y)$$

مثال ۱ الف. فرض کنید سه مهره بتصادف از جعبه‌ای دارای ۳ مهره قرمز و ۴ مهره سفید و ۵ مهره آبی خارج می‌شود. اگر X و Y به ترتیب تعداد مهره‌های قرمز و سفید انتخاب شده باشد، در آن صورت تابع جرم احتمال توأم X و Y یعنی $p(i, j) = P(X = i, Y = j)$ عبارت است از:

$$p(0, 0) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{10}{220}$$

$$p(0, 1) = \frac{\binom{4}{1} \binom{5}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{40}{220}$$

$$p(0, 2) = \frac{\binom{4}{2} \binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{30}{220}$$

$$p(0, 3) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{4}{220}$$

$$p(1, 0) = \frac{\binom{3}{1} \binom{5}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{30}{220}$$

$$p(1, 1) = \frac{\binom{3}{1} \binom{4}{1} \binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{60}{220}$$

$$p(1, 2) = \frac{\binom{3}{1} \binom{4}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{18}{220}$$

$$p(2, 0) = \frac{\binom{3}{2} \binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{15}{220}$$

$$p(2, 1) = \frac{\binom{3}{2} \binom{4}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{12}{220}$$

$$p(3, 0) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{220}$$

این احتمالها را می‌توان باسانی به صورت جدول ۶-۱ نوشت:

خواننده باید توجه داشته باشد که تابع جرم احتمال X از جمع سطرها و تابع جرم احتمال Y از جمع ستونها به دست می‌آید. چون این توابع در کنار جدول ظاهر می‌شوند آنها را تابع جرم احتمال کناری X و Y گویند.

مثال ۱ ب. فرض کنید ۱۵ درصد خانواده‌های یک مجتمع فاقد بچه، ۲۰ درصد دارای ۱، ۳۵ درصد دارای ۲ بچه و ۳۰ درصد دارای ۳ بچه هستند. علاوه بر این فرض کنید که در هر خانواده، هر بچه با احتمال یکسان بطور مستقل پسریا

دختر است. اگر یک خانواده بتصادف از این مجتمع انتخاب شود آن گاه B تعداد پسران و G تعداد دختران این خانواده دارای تابع جرم احتمال توأم به صورت جدول ۶-۲ می باشد.

جدول ۶-۱ $P(X = i, Y = j)$

$i \backslash j$	0	1	2	3	مجموع سطری $= P\{X = i\}$
0	$\frac{10}{220}$	$\frac{40}{220}$	$\frac{30}{220}$	$\frac{4}{220}$	$\frac{84}{220}$
1	$\frac{30}{220}$	$\frac{60}{220}$	$\frac{18}{220}$	0	$\frac{108}{220}$
2	$\frac{15}{220}$	$\frac{12}{220}$	0	0	$\frac{27}{220}$
3	$\frac{1}{220}$	0	0	0	$\frac{1}{220}$
مجموع ستونی $= P\{Y = j\}$	$\frac{56}{220}$	$\frac{112}{220}$	$\frac{48}{220}$	$\frac{4}{220}$	

جدول ۶-۲ $P(B = i, G = j)$

$i \backslash j$	0	1	2	3	مجموع سطری $= P\{B = i\}$
0	.15	.10	.0875	.0375	.3750
1	.10	.175	.1125	0	.3875
2	.0875	.1125	0	0	.2000
3	.0375	0	0	0	.0375
مجموع ستونی $= P\{G = j\}$.375	.3875	.2000	.0375	

حل : این احتمالات به صورت زیر محاسبه می شوند :

$$P\{B = 0, G = 0\} = P\{\text{هیچ کودک}\} = .15$$

$$P\{B = 0, G = 1\} = P\{\text{۱ دختر و جمعاً یک کودک}\} \\ = P\{\text{۱ کودک} \mid \text{۱ دختر}\} P\{\text{۱ کودک}\} = (.20)$$

$$P\{B = 0, G = 2\} = P\{\text{۲ دختر و جمعاً ۲ کودک}\} \\ = P\{\text{۲ کودک} \mid \text{دو دختر}\} P\{\text{۲ کودک}\} = (.35)\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

تحقیق درستی بقیه احتمالاتها به خواننده واگذار می شود.

متغیرهای X و Y را **توأماً پیوسته** گوئیم اگر تابعی مانند $f(x, y)$ وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر x و y و هر مجموعه C از زوجهای حقیقی (یعنی C یک مجموعه در صفحه مختصات است) داشته باشیم

$$P\{(X, Y) \in C\} = \iint_{(x, y) \in C} f(x, y) dx dy \quad (۳-۱)$$

تابع $f(x, y)$ را **تابع چگالی احتمال توأم** X و Y نامند. اگر A و B دو مجموعه دلخواهی از اعداد حقیقی باشند در آن صورت با تعریف $C = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$ از معادله (۳-۱) نتیجه می شود:

$$P\{X \in A, Y \in B\} = \int_B \int_A f(x, y) dx dy \quad (۴-۱)$$

چون

$$F(a, b) = P\{X \in (-\infty, a], Y \in (-\infty, b]\} \\ = \int_{-\infty}^b \int_{-\infty}^a f(x, y) dx dy$$

با مشتق گیری داریم

$$f(a, b) = \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} F(a, b)$$

به شرط آن که مشتقات نسبی تعریف شده باشد و یک تعبیر دیگر تابع چگالی توأم از معادله (۴-۱) به دست می آید:

$$P\{a < X < a + da, b < Y < b + db\} = \int_b^{b+db} \int_a^{a+da} f(x, y) dx dy \\ \approx f(a, b) da db$$

به شرط آن که da و db کوچک و $f(x, y)$ در a و b پیوسته باشد. بنابراین $F(a, b)$ اندازه‌ای از احتمال نزدیکی بردار تصادفی (X, Y) را به (a, b) نشان می‌دهد.

اگر X و Y توأمآ پیوسته باشند، هریک از آنها به تنهایی نیز پیوسته است و توابع چگالی احتمال آنها به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} P\{X \in A\} &= P\{X \in A, Y \in (-\infty, \infty)\} \\ &= \int_A \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx \\ &= \int_A f_X(x) dx \end{aligned}$$

که در آن

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

تابع چگالی احتمال X است. همین طور تابع چگالی احتمال Y برابر است با:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

مثال ۱ پ. تابع چگالی احتمال X و Y به صورت زیر است.

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مطلوب است محاسبه: (۱)

$$\begin{aligned} P\{X > 1, Y < 1\} &= \int_0^1 \int_1^{\infty} 2e^{-x}e^{-2y} dx dy && \text{حل:} \\ &= \int_0^1 2e^{-2y} \left(-e^{-x} \Big|_1^{\infty} \right) dy && -1 \\ &= e^{-1} \int_0^1 2e^{-2y} dy \\ &= e^{-1}(1 - e^{-2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P\{X < Y\} &= \iint_{(x,y), x < y} 2e^{-x}e^{-2y} dx dy & -۲ \\
 &= \int_0^{\infty} \int_0^y 2e^{-x}e^{-2y} dx dy \\
 &= \int_0^{\infty} 2e^{-2y}(1 - e^{-y}) dy \\
 &= \int_0^{\infty} 2e^{-2y} dy - \int_0^{\infty} 2e^{-3y} dy \\
 &= 1 - \frac{2}{3} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P\{X < a\} &= \int_0^a \int_0^{\infty} 2e^{-2y}e^{-x} dy dx & -۳ \\
 &= \int_0^a e^{-x} dx \\
 &= 1 - e^{-a}
 \end{aligned}$$

مثال ۱ ت. دایره ای به شعاع R در نظر بگیرید و فرض کنید نقطه ای بتصادف در داخل دایره انتخاب می شود به قسمی که تمام نواحی با مساحت مساوی در داخل دایره با احتمال مساوی شامل این نقطه اند. (به عبارت دیگر، این نقطه در داخل دایره بطور یکنواخت توزیع شده است.) اگر مرکز دایره را مبدأ مختصات اختیار کنیم و X و Y را مختصات نقطه انتخاب شده در نظر بگیریم (شکل ۶-۱) نتیجه می شود که برای مقدار ثابت تابع چگالی توأم X و Y به صورت زیر است:

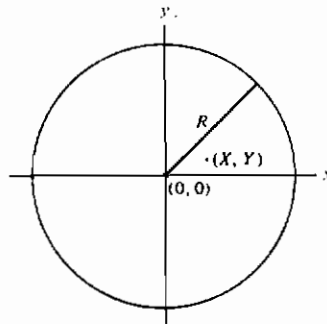
$$f(x, y) = \begin{cases} c & x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0 & x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$

زیرا (X, Y) با احتمال مساوی نزدیک هر نقطه در دایره است.

۱- مقدار c را معین کنید.

۲- توابع چگالی حاشیه ای X و Y را پیدا کنید.

۳- احتمال این که فاصله نقطه انتخاب شده از مبدأ بیشتر از a نباشد چقدر است؟



شکل ۶-۱ توزیع احتمال توأم

حل:

۱- چون

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx = 1$$

نتیجه می شود.

$$c \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} dy dx = 1$$

مقدار $\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} dy dx$ را می توان با استفاده از مختصات قطبی محاسبه کرد یا بطور

ساده تری با توجه به این که این انتگرال مساحت دایره را نشان می دهد برابر با πR^2 گرفت. بنابراین

$$c = \frac{1}{\pi R^2}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

-۲

$$= \frac{1}{\pi R^2} \int_{x^2+y^2 \leq R^2} dy$$

$$= \frac{1}{\pi R^2} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} dy \quad x^2 \leq R^2$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \sqrt{R^2-x^2} \quad x^2 \leq R^2$$

مقدار تابع برابر صفر است اگر $x^2 > R^2$. با توجه به تقارن، چگالی کناری Y به صورت زیر به دست می آید:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi R^2} \sqrt{R^2 - y^2} & y^2 \leq R^2 \\ 0 & y^2 > R^2 \end{cases}$$

۳- تابع توزیع $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ ، فاصله نقطه تا مبدأ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} F_Z(a) &= P\{\sqrt{X^2 + Y^2} \leq a\} \\ &= P\{X^2 + Y^2 \leq a^2\} \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} f(x, y) dy dx \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} dy dx \\ &= \frac{\pi a^2}{\pi R^2} \\ &= \frac{a^2}{R^2} \end{aligned}$$

که در آن مقدار انتگرال $\iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} dy dx$ برابر با مساحت دایره ای به شعاع a یعنی πa^2 است.

مثال ۱ ث. چگالی توأم X و Y به صورت زیر است:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مطلوب است تابع چگالی متغیر تصادفی $\frac{X}{Y}$.

حل: ابتدا تابع توزیع $\frac{X}{Y}$ را محاسبه می کنیم و برای $(a > 0)$ داریم:

$$\begin{aligned}
 F_{X/Y}(a) &= P\left\{\frac{X}{Y} \leq a\right\} \\
 &= \iint_{x/y \leq a} e^{-(x+y)} dx dy \\
 &= \int_0^{\infty} \int_0^{ay} e^{-(x+y)} dx dy \\
 &= \int_0^{\infty} (1 - e^{-ay}) e^{-y} dy \\
 &= \left[-e^{-y} + \frac{e^{-(a+1)y}}{a+1} \right] \Big|_0^{\infty} \\
 &= 1 - \frac{1}{a+1}
 \end{aligned}$$

با مشتق گیری تابع چگالی $\frac{X}{Y}$ به صورت زیر به دست می آید:

$$f_{X/Y}(a) = 1/(a+1)^2, 0 < a < \infty.$$

توزیعهای احتمال توأم n متغیر تصادفی را نیز می توان دقیقاً مانند $n=2$ تعریف کرد.

مثلاً تابع توزیع احتمال تجمعی $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ از متغیرهای X_1, X_2, \dots, X_n به صورت زیر تعریف می شود:

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = P\{X_1 \leq a_1, X_2 \leq a_2, \dots, X_n \leq a_n\}$$

به علاوه، n متغیر را توأماً پیوسته گوئیم اگر تابعی مانند $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ که تابع چگالی احتمال توأم نامیده می شود وجود داشته باشد به قسمی که برای هر مجموعه C در فضای n بعدی داشته باشیم:

$$P\{(X_1, X_2, \dots, X) \in C\} = \int \int \dots \int_{(x_1, \dots, x_n) \in C} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

به خصوص برای هر n مجموعه از اعداد حقیقی مانند A_1, A_2, \dots, A_n داریم:

$$\begin{aligned}
 &P\{X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n\} \\
 &= \int_{A_n} \int_{A_{n-1}} \dots \int_{A_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n
 \end{aligned}$$

مثال ۱ . توزیع چند جمله ای . یکی از مهمترین توزیعهای توأم ، توزیع چندجمله ای است ، که از یک دنباله n آزمایش یکسان و مستقل ناشی می شود ، فرض کنید هر آزمایش به یکی از r برآمد ممکن به ترتیب با احتمالهای p_1, p_2, \dots, p_r ، $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ ، منجر شود . اگر X_i تعداد آزمایشها با برآمد i باشد ، آن گاه

$$P\{X_1 = n_1, X_2 = n_2, \dots, X_r = n_r\} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r} \quad (5-1)$$

$$\sum_{i=1}^r n_i = n \quad \text{که در آن}$$

معادله (۵-۱) با توجه به این که هر دنباله از برآمدها در n آزمایش با فرض این که برآمد i ام n_i بار ، $i = 1, 2, \dots, r$ رخ داده و با فرض استقلال آزمایشها با احتمال $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$ رخ می دهد و چون تعداد این دنباله ها برابر $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$ است به دست آمده است . زیرا

$\frac{n!}{n_1! \dots n_r!}$ جایگشت متمایز از n شی وجود دارد به قسمی که n_1 شی مشابه هم ، n_2 شی مشابه هم ، \dots ، n_r شی مشابه هم باشند ، هر توزیع توأم با تابع جرم احتمال (۵-۱) را **توزیع چندجمله ای** نامند . خواننده توجه دارد که به ازای $r = 2$ ، توزیع چند جمله ای به توزیع دو جمله ای تبدیل می شود .

به عنوان یک کاربرد توزیع چند جمله ای ، فرض کنید تاس سالمی را ۹ بار می ریزیم . احتمال این که ۱ سه بار ، ۲ و ۳ دو بار ، ۴ و ۵ یک بار ظاهر شود و ۶ ظاهر نشود عبارت است از :

$$\frac{9!}{3! 2! 2! 1! 1! 0!} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^0 = \frac{9!}{3! 2! 2!} \left(\frac{1}{6}\right)^9$$

۲ - متغیرهای تصادفی مستقل

متغیرهای تصادفی X و Y را مستقل گوئیم اگر برای هر دو مجموعه از اعداد حقیقی A و B داشته باشیم :

$$P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\}P\{Y \in B\} \quad (1-2)$$

به عبارت دیگر X و Y مستقل هستند اگر برای هر A و B دو پیشامد $E_A = \{X \in A\}$ و

$F_B = \{Y \in B\}$ مستقل باشند.

با استفاده از سه اصل احتمال می توان نشان داد که معادله (۱-۲) فقط و فقط وقتی برقرار است که برای هر a و b

$$P\{X \leq a, Y \leq b\} = P\{X \leq a\}P\{Y \leq b\}$$

بنابراین بر حسب F تابع توزیع توأم X, Y ، متغیرهای X و Y مستقل هستند اگر به ازای هر a و b

$$F(a, b) = F_X(a)F_Y(b) \quad \text{برای تمام } a, b$$

وقتی X و Y متغیرهای تصادفی گسسته هستند، شرط استقلال (۱-۲) معادل است با این که به ازای هر x و y ، (۲-۲)

$$p(x, y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \text{برای تمام } x, y \quad (۲-۲)$$

معادل بودن این دو رابطه به این طریق به دست می آید که اگر (۱-۲) برقرار باشد معادله (۲-۲) با فرض قرار دادن A و B به صورت مجموعه های یک عضوی $A = \{x\}$ و $B = \{y\}$ به دست می آید.

از طرف دیگر اگر معادله (۲-۲) برقرار باشد، در آن صورت برای هر دو مجموعه A و B :

$$\begin{aligned} P\{X \in A, Y \in B\} &= \sum_{y \in B} \sum_{x \in A} p(x, y) \\ &= \sum_{y \in B} \sum_{x \in A} p_X(x)p_Y(y) \\ &= \sum_{y \in B} p_Y(y) \sum_{x \in A} p_X(x) \\ &= P\{Y \in B\}P\{X \in A\} \end{aligned}$$

یعنی معادله (۱-۲) برقرار است.

در حالت پیوستگی توأم شرط استقلال معادل است با این که به ازای هر x و y

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \text{برای تمام } x, y$$

پس بطور ساده می توان گفت X و Y مستقل هستند اگر دانستن مقدار یکی از آنها مقدار دیگری را تغییر ندهد. متغیرهای تصادفی که مستقل نباشند وابسته نامیده می شوند.

مثال ۲ الف. فرض کنید $n + m$ آزمایش مستقل با احتمال موفقیت یکسان p انجام می‌شود. اگر X تعداد موفقیتها در n آزمایش اول و Y تعداد موفقیتها در m آزمایش بعدی باشد در آن صورت X و Y مستقلند، زیرا دانستن تعداد موفقیتها در n آزمایش اول اثری بر توزیع تعداد موفقیتها در m آزمایش بعدی ندارد (بنا بر فرض مستقل بودن آزمایشها). در واقع برای اعداد صحیح x و y داریم:

$$P\{X = x, Y = y\} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \binom{m}{y} p^y (1-p)^{m-y}, \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq n \\ 0 \leq y \leq m \end{matrix}$$

$$= P\{X = x\}P\{Y = y\}$$

از طرف دیگر، X و Z وابسته خواهند بود اگر Z تعداد کل موفقیتها در $n + m$ آزمایش باشد (چرا؟)

مثال ۲ ب. فرض کنید تعداد افرادی که در یک روز معین به اداره پست وارد می‌شوند یک متغیر تصادفی دارای توزیع پواسن با پارامتر λ است. ثابت کنید اگر هر فرد که به اداره پست وارد می‌شود با احتمال p مرد و با احتمال $1-p$ زن باشد، آن گاه تعداد مردان و زنانی که وارد اداره پست می‌شوند متغیرهای تصادفی مستقل پواسن به ترتیب با پارامترهای λp و $\lambda(1-p)$ است.

حل: فرض کنید X و Y به ترتیب تعداد مردان و زنانی باشند که وارد اداره پست می‌شوند. حال استقلال X و Y را با برقراری معادله (۲-۲) ثابت می‌کنیم. برای یافتن عبارتی برای $P(X = i \text{ و } Y = j)$ پیشامد را بر $X + Y$ شرطی می‌کنیم:

$$P\{X = i, Y = j\} = P\{X = i, Y = j | X + Y = i + j\}P\{X + Y = i + j\} \\ + P\{X = i, Y = j | X + Y \neq i + j\}P\{X + Y \neq i + j\}$$

خواننده باید توجه داشته باشد که این معادله فقط حالت خاصی از فرمول زیر است:

$$P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c)$$

بدیهی است که:

$$P\{X = i, Y = j | X + Y \neq i + j\} = 0$$

در نتیجه داریم :

$$P\{X = i, Y = j\} = P\{X = i, Y = j | X + Y = i + j\} P\{X + Y = i + j\} \quad (۲-۳)$$

حال چون $X + Y$ تعداد کل افرادی است که به اداره پست وارد می شوند، بنا به فرض داریم :

$$P\{X + Y = i + j\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} \quad (۴-۲)$$

از طرف دیگر، با فرض این که $i + j$ نفر وارد اداره پست شده اند، چون هر فرد می تواند با احتمال p مرد باشد، پس احتمال این که دقیقاً i نفر از آنها مرد (و در نتیجه j نفر از آنها زن) باشد دارای توزیع دو جمله ای $p^i(1-p)^j$ خواهد بود. یعنی

$$P\{X = i, Y = j | X + Y = i + j\} = \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^j \quad (۵-۲)$$

با جانشین کردن معادلات (۴-۲) و (۵-۲) در معادله (۳-۲) داریم :

$$\begin{aligned} P\{X = i, Y = j\} &= \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^j e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i! j!} [\lambda(1-p)]^j \\ &= \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^i}{i!} e^{-\lambda(1-p)} \frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!} \end{aligned} \quad (۶-۲)$$

بنابراین

$$P\{X = i\} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \sum_j e^{-\lambda(1-p)} \frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \quad (۷-۲)$$

و بطور مشابه

$$P\{Y = j\} = e^{-\lambda(1-p)} \frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!} \quad (۸-۲)$$

از معادلات (۶-۲)، (۷-۲) و (۸-۲) حکم نتیجه می شود.

مثال ۲ پ. زن و مردی تصمیم می گیرند در یک فروشگاه یکدیگر را ملاقات کنند، اگر

هرکدام مستقل از یکدیگر در زمانی با توزیع یکنواخت در فاصلهٔ ساعت ۱۲ تا ساعت ۱ به محل برسند، مطلوب است احتمال این که نفری که اول وارد می شود بیشتر از ۱۰ دقیقه انتظار بکشد.

حل: اگر X و Y به ترتیب زمان رسیدن مرد و زن بعد از ساعت ۱۲ باشد، در این صورت X و Y متغیرهای تصادفی مستقلند که هرکدام دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(0, 60)$ می باشند. پس احتمال مطلوب عبارت است از: $P\{X + 10 < Y\} + P\{Y + 10 < X\}$ که با توجه به تقارن برابر است با $2P\{X + 10 < Y\}$ و به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} 2P\{X + 10 < Y\} &= 2 \cdot \int_{x+10}^y \int_{x+10}^y f(x, y) dx dy \\ &= 2 \int_{10}^{60} \int_0^{x+10} f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= 2 \int_{10}^{60} \int_0^{y-10} \left(\frac{1}{60}\right)^2 dx dy \\ &= \frac{2}{(60)^2} \int_{10}^{60} (y - 10) dy \\ &= \frac{25}{36} \end{aligned}$$

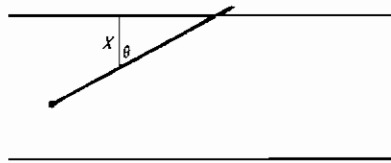
مثال بعدی قدیمی ترین مسأله ای است که در بارهٔ احتمالات هندسی بحث می کند. این مسأله ابتدا توسط بوفن طبیعی دان فرانسوی در قرن هیجدهم طرح و حل شد، و معمولاً به آن مسأله سوزن بوفن اطلاق می شود.

مثال ۴ ت. (مسأله سوزن بوفن) میزی با خطهای موازی هم فاصله به فاصله D خط کشی شده است. سوزنی به طول L ، $L \leq D$ ، بطور تصادفی روی میز انداخته می شود؛ احتمال این که سوزن یکی از خطها را قطع کند چقدر است (حالت ممکن دیگر این است که سوزن بین دو خط موازی قرار گیرد)؟

حل: وضع سوزن را با مشخص کردن X فاصلهٔ وسط سوزن تا نزدیکترین خط موازی و زاویه θ بین سوزن و این خط عمود معین می کنیم. (شکل ۶-۲) سوزن یک خط را قطع می کند

اگر وتر مثلث قائم الزاویه شکل ۶-۲ کمتر از $\frac{L}{2}$ باشد، یعنی اگر:

$$\frac{X}{\cos \theta} < \frac{L}{2} \quad \text{یا} \quad X < \frac{L}{2} \cos \theta$$



شکل ۶-۲

چون X بین 0 و $\frac{D}{2}$ و θ بین 0 و $\frac{\pi}{2}$ تغییر می کند، منطقی است که فرض کنیم آنها متغیرهای تصادفی (یکنواخت) مستقلند که بر فاصله های مربوطه بطور یکنواخت توزیع شده اند. بنابراین

$$\begin{aligned} P\left\{X < \frac{L}{2} \cos \theta\right\} &= \iint_{x < L/2 \cos y} f_X(x) f_\theta(y) dx dy \\ &= \frac{4}{\pi D} \int_0^{\pi/2} \int_0^{L/2 \cos y} dx dy \\ &= \frac{4}{\pi D} \int_0^{\pi/2} \frac{L}{2} \cos y dy \\ &= \frac{2L}{\pi D} \end{aligned}$$

مثال ۲. تخصیص توزیع لرهال. فرض کنید X و Y فاصله های افقی و قائم نقطه برخورد

یک گلوله تا هدف باشد، و فرض می کنیم:

۱- X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توابع چگالی مشتق پذیر باشند.

۲- چگالی توأم X و Y ، فقط از طریق $x^2 + y^2$ به x و y بستگی دارد.

به عبارت ساده فرض (۲) بیان می کند که احتمال این که گلوله به هر نقطه صفحه $x y$

برخورد کند فقط تابع فاصله آن تا هدف است و به زاویه جهت برخورد بستگی ندارد.

یک عبارت معادل (۲) این است که بگوییم تابع چگالی توأم در اثر چرخش پایدار است . این حقیقت جالب از فرضهای (۱) و (۲) نتیجه می شود که X و Y متغیرهای تصادفی نرمال هستند . برای اثبات این مطلب با توجه به فرضها می توان نوشت :

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = g(x^2 + y^2) \quad (۹-۲)$$

که در آن g تابعی مناسب است . اگر از معادله (۹-۲) نسبت به x مشتق بگیریم داریم :

$$f'_X(x)f_Y(y) = 2xg'(x^2 + y^2) \quad (۱۰-۲)$$

از تقسیم معادله (۱۰-۲) بر معادله (۹-۲) داریم :

$$\frac{f'_X(x)}{f_X(x)} = \frac{2xg'(x^2 + y^2)}{g(x^2 + y^2)}$$

یا

$$\frac{f'_X(x)}{2xf_X(x)} = \frac{g'(x^2 + y^2)}{g(x^2 + y^2)} \quad (۱۱-۲)$$

چون سمت چپ معادله (۱۱-۲) فقط به x بستگی دارد و سمت راست معادله به $x^2 + y^2$ ، نتیجه می شود که سمت چپ باید به ازای تمام مقادیر x ثابت باشد . برای روشن شدن موضوع دو مقدار دلخواه x_1 و x_2 را در نظر می گیریم و فرض می کنیم y_1 و y_2 به قسمی باشند که

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$$

در این صورت از معادله (۱۱-۲) نتیجه می شود :

$$\frac{f'_X(x_1)}{2x_1 f_X(x_1)} = \frac{g'(x_1^2 + y_1^2)}{g(x_1^2 + y_1^2)} = \frac{g'(x_2^2 + y_2^2)}{g(x_2^2 + y_2^2)} = \frac{f'_X(x_2)}{2x_2 f_X(x_2)}$$

بنابراین

$$\frac{f'_X(x)}{xf_X(x)} = c \quad \text{یا} \quad \frac{d}{dx}(\log f_X(x)) = cx$$

که پس از انتگرال گیری از دو طرف به صورت زیر در می آید :

$$\log f_X(x) = a + \frac{cx^2}{2} \quad \text{یا} \quad f_X(x) = ke^{cx^2/2}$$

با توجه به $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ مقدار c باید منفی باشد و می توان آن را به صورت

$c = -\frac{1}{\sigma^2}$ نوشت. بنابراین

$$f_X(x) = ke^{-x^2/2\sigma^2}$$

یعنی X متغیر تصادفی نرمال با پارامترهای $\mu = 0$ و σ^2 است. به طریقی مشابه می توان نشان داد:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-y^2/2\sigma^2}$$

علاوه بر این از فرض (۲) نتیجه می شود $\sigma^2 = \bar{\sigma}^2$ ، پس X و Y متغیرهای تصادفی نرمال هم توزیع مستقل با پارامترهای $\mu = 0$ و σ^2 هستند.

البته مفهوم استقلال را می توان برای بیش از دو متغیر نیز تعریف کرد. بطور کلی n متغیر تصادفی X_1, \dots, X_2 را مستقل گوئیم اگر برای تمام مجموعه های A_1, \dots, A_n از اعداد حقیقی

$$P\{X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n\} = \prod_{i=1}^n P\{X_i \in A_i\}$$

مانند قبل، می توان نشان داد که این شرط معادل است با این که به ازای تمام اعداد حقیقی a_1, \dots, a_n

$$P\{X_1 \leq a_1, X_2 \leq a_2, \dots, X_n \leq a_n\} = \prod_{i=1}^n P\{X_i \leq a_i\} \quad \text{تمام } a_1, a_2, \dots, a_n$$

بالاخره، یک مجموعه نامتناهی از متغیرهای تصادفی را مستقل گوئیم اگر هر زیر مجموعه متناهی از آنها مستقل باشند.

مثال ۴ ج: یک کامپیوتر چگونه یک زیر مجموعه تصادفی را انتخاب می کند؟ بیشتر کامپیوترهای توانمند متغیرهای تصادفی با توزیع یکنواخت در فاصله $(0, 1)$ تولید یا شبیه سازی کنند این کار به کمک یک زیرروال انجام می گیرد. در نتیجه برای کامپیوتر خیلی آسان است که یک متغیر تصادفی نشاگر (یعنی برنولی) بسازد. فرض کنید I یک متغیر نشانگر باشد به قسمی که:

$$P\{I = 1\} = p = 1 - P\{I = 0\}$$

کامپیوتر I را با انتخاب یک عدد تصادفی یکنواخت در $(0, 1)$ مانند U شبیه سازی می کند و سپس I را به صورت زیر قرار می دهد:

$$I = \begin{cases} 1 & U < p \\ 0 & U > p \end{cases}$$

فرض کنید می خواهیم به کمک کامپیوتر k عدد، $k \leq n$ ، از میان اعداد $1, 2, \dots, n$ انتخاب کنیم به قسمی که هریک از $\binom{n}{k}$ زیر مجموعه به حجم k برای انتخاب شدن هم احتمال باشد. حال روشی را ارائه می دهیم که کامپیوتر به کمک آن بتواند این مسأله را حل کند. برای تولید این زیرمجموعه به ترتیب n متغیر نشانگر I_1, \dots, I_n ، که از آنها k تا برابر ۱ است را شبیه سازی می کنیم.

برای تولید n متغیر تصادفی I_1, \dots, I_n ، n متغیر تصادفی یکنواخت مستقل U_1, \dots, U_n را در فاصله $(0, 1)$ شبیه سازی می کنیم. سپس تعریف می کنیم

$$I_1 = \begin{cases} 1 & U_1 < \frac{k}{n} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

حال به روش برگشتی پس از تعیین I_1, \dots, I_i ، می نویسیم

$$I_{i+1} = \begin{cases} 1 & U_{i+1} < \frac{k - (I_1 + \dots + I_i)}{n - i} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به عبارت دیگر در مرحله $i+1$ مقدار I_{i+1} را با احتمالی برابر تعداد نقاط باقیمانده زیر مجموعه (یعنی $k - \sum_{j=1}^i I_j$) تقسیم بر تعداد باقیمانده ممکن (یعنی $n - i$) را برابر ۱ قرار می دهیم. سپس $i+1$ را در زیر مجموعه مطلوب قرار می دهیم. در نتیجه توزیع توأم I_1, \dots, I_n به صورت زیر تعیین می شود:

$$P\{I_1 = 1\} = \frac{k}{n}$$

$$P\{I_{i+1} = 1 | I_1, \dots, I_i\} = \frac{k - \sum_{j=1}^i I_j}{n - i} \quad 1 < i < n$$

اثبات این مطلب که نتایج فوق در تمام زیر مجموعه های به حجم k هم احتمال هستند، به کمک استقراء روی $k+n$ خواهد بود. اثبات برای $k+n=2$ (یعنی وقتی $k=1$ و $n=1$) بدیهی است. پس فرض می کنیم حکم برای $k+n \leq 1$ صحیح باشد. حال فرض

می‌کنیم. $k + n = 1 + 1$ و یک زیر مجموعه دلخواه به حجم k مثلاً $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$ را در نظر می‌گیریم و دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم.

حالت ۱ $i_1 = 1$

{ در غیر این صورت $I_1 = I_2 = \dots = I_k = 1, I_j = 0$ }

$$= P\{I_1 = 1\}P\{I_2 = \dots = I_k = 1, I_j = 0 \text{ در غیر این صورت}\}$$

حال با فرض $I_1 = 1$ عناصر باقیمانده زیر مجموعه را به عنوان زیر مجموعه‌ای به حجم $k - 1$ که از $n - 1$ عضو، $۲, ۳, \dots, n$ انتخاب شده در نظر می‌گیریم. بنابراین، با توجه به فرض استقرا، احتمال شرطی این نتیجه در یک زیر مجموعه به حجم $k - 1$ برابر با $\frac{1}{\binom{n-1}{k-1}}$ است؛ در نتیجه:

{ در غیر این صورت $I_1 = I_2 = \dots = I_k = 1, I_j = 0$ }

$$= \frac{k}{n} \frac{1}{\binom{n-1}{k-1}} = \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

حالت ۲ $i_1 \neq 1$

{ در غیر این صورت $I_{i_1} = I_{i_2} = \dots = I_{i_k} = 1, I_j = 0$ }

$$= P\{I_{i_1} = \dots = I_{i_k} = 1, I_j = 0 \text{ در غیر این صورت}\}P\{I_1 = 0\}$$

$$= \frac{1}{\binom{n-1}{k}} \left(1 - \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

در این جا فرض استقرا برای محاسبه احتمال شرطی به کار برده شده است.

بنابراین در تمام حالات احتمال این که یک زیر مجموعه مفروض به حجم k انتخاب شود برابر است با $\frac{1}{\binom{n}{k}}$.

تبصره. در روش قبیل برای تولید یک زیر مجموعه تصادفی به حافظه کمی احتیاج است. یک الگوریتم سریعتر که به حافظه بیشتر نیاز دارد در بخش ۱ از فصل ۱۰ ارائه خواهد شد (این الگوریتم آخرین k عضو یک جایگشت تصادفی: $۱, ۲, \dots, n$ را به کار می‌برد).

مثال ۲ ج. فرض کنید X, Y, Z متغیرهای مستقل با توزیع یکنواخت روی $(۰, ۱)$

باشد. مطلوب است محاسبه $P(X \geq YZ)$.

حل: چون

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = f_X(x)f_Y(y)f_Z(z) = 1 \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$$

داریم

$$\begin{aligned} P\{X \geq YZ\} &= \iiint_{x \geq yz} f_{X,Y,Z}(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_{yz}^1 dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (1 - yz) \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{z}{2}\right) dz \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

مثال ۲ ج. تعبیر احتمالی نیمه عمر. فرض کنید $N(t)$ تعداد ذرات موجود در یک جسم رادیو اکتیو در زمان t باشد. مفهوم نیمه عمر معمولاً به صورت شهودی تعریف می شود و آن مقداری است مانند h به قسمی که

$$N(t) = 2^{-t/h} N(0), \quad t > 0.$$

(توجه کنید که $N(h) = \frac{N(0)}{2}$). چون از رابطه فوق نتیجه می شود که برای هر دو مقدار نامنفی s و t

$$N(t + s) = 2^{-(t+s)/h} N(0) = 2^{-t/h} N(s)$$

پس زمان گذشته s هرچه باشد در زمان اضافی t تعداد ذرات موجود با ضریب $2^{-s/h}$ کاهش می یابند.

چون رابطه شهودی فوق از مشاهده اجسام رادیو اکتیو شامل بی نهایت ذره نتیجه می شود به نظر می رسد که با یک تعبیر احتمالی سازگار باشد. کلید به دست آوردن یک الگوی احتمالی مناسب برای نیمه عمر با توجه به مشاهدات تجربی، که نسبت ذرات متلاشی شده

در هر فاصله زمانی به تعداد کل ذرات در شروع فاصله بستگی دارد نه به عمل این فاصله (زیرا $N(t+s) + N(s)$ به $N(s)$ و s بستگی ندارد)، پس، به نظر می‌رسد، که هر ذره بطور مستقل و با توزیعی فاقد حافظه عمل می‌کند. می‌دانیم توزیع منحصر به فرد عمر که فاقد حافظه باشد توزیع نمایی است و چون دقیقاً نصف مقدار جرم مفروض در هر h واحد زمان متلاشی می‌شود، الگوی احتمالی زیر را برای نابودی اجسام رادیو اکتیو پیشنهاد می‌کنیم.

تعبیر احتمالی نصف عمر h : عمر هر ذره یک متغیر تصادفی مستقل با توزیع عمر نمایی با میانگین h است، یعنی اگر L عمر یک ذره باشد داریم

$$P\{L < t\} = 1 - 2^{-t/h}$$

(چون $P\{L < h\} = \frac{1}{2}$ احتمال فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$P\{L < t\} = 1 - \exp\left\{-t \frac{\log 2}{h}\right\}$$

دیده می‌شود که L دارای توزیع نمایی با میانه h است).

باید توجه کرد که با این تعبیر احتمالی نیمه عمر، اگر با $N(0)$ ذره در زمان صفر شروع کنیم، آن گاه $N(t)$ تعداد ذرات باقیمانده در زمان t دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای $n = N(0)$ و $p = 2^{-t/h}$ خواهد بود. نتایج فصل ۸ نشان می‌دهد که این تعبیر نصف عمر با الگوی تعیینی سازگار است وقتی نسبت زیادی از ذرات در یک زمان معین متلاشی می‌شوند. با وجود این، تفاوت بین تعبیر شهودی و احتمالی وقتی ظاهر می‌شود که تعداد واقعی ذرات متلاشی شده را در نظر بگیریم. این مطلب را با توجه به سؤال مربوط به متلاشی شدن پروتونها نشان خواهیم داد.

در باره متلاشی شدن پروتونها نظرات مختلف است. در واقع یک نظریه پیش بینی می‌کند که پروتونها باید تا نصف عمر در حدود $h = 10^{30}$ سال متلاشی شوند. برای این که این نظریه را بطور تجربی بررسی کنیم پیشنهاد شده است که تعداد زیادی پروتون را مثلاً برای دو سال در نظر بگیریم و امتحان کنیم که آیا پروتونها در این زمان متلاشی شده است یا خیر، (بدیهی است که در نظر گرفتن برخی از پروتونها به مدت 10^{30} سال) که نصف آنها متلاشی شود امکان پذیر نیست). فرض می‌کنیم بتوانیم $N(0) = 10^{30}$ پروتون را برای c سال در نظر بگیریم. تعداد پروتونهای متلاشی شده که از الگوی تعیینی پیش بینی می‌شود به صورت زیر است

$$\begin{aligned}
 N(0) - N(c) &= h(1 - 2^{-c/h}) \\
 &= \frac{1 - 2^{-c/h}}{1/h} \\
 &\approx \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2^{-cx})/x \quad \text{زیرا } 1/h = 10^{-30} \approx 0 \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} (c2^{-cx} \log 2) \quad \text{بنا به قاعده هسپیتال} \\
 &= c \log 2 \approx .6931c
 \end{aligned}$$

مثلاً در دو سال الگوی تعیینی پیش بینی می کند که باید ۱/۳۸۶۳ پرتون متلاشی شود. در نتیجه این فرض که نیمه عمر پرتونها 10^{30} سال است مورد سؤال خواهد بود زیرا در این صورت نباید در ۲ سال هیچگونه تلاشی صورت گیرد.

حال الگوی احتمالی را در نظر گرفته و فرض می کنیم نیمه عمر پرتونها همان $h = 10^{30}$ سال باشد، و h پرتون به مدت c سال مورد مطالعه قرار گیرد. چون تعداد پرتونهای مستقل بسیار زیاد است و هریک از آنها با احتمال خیلی کوچک در این فاصله زمانی متلاشی می شود نتیجه می گیریم که تعداد پرتونهای متلاشی شده (با تقریب بسیار خوب) دارای توزیع پواسن با پارامتر $h(1 - 2^{-c/h}) \approx c \log 2$ است. پس

$$\begin{aligned}
 P(0 \text{ متلاشی شدن}) &= e^{-c \log 2} \\
 &= e^{-\log(2^c)} = 1/2^c
 \end{aligned}$$

و بطور کلی

$$P(n \text{ متلاشی شدن}) = [c \log 2]^n / (2^c n!), \quad n \geq 0$$

همان طور که دیده می شود اگرچه متوسط تعداد پرتونهای متلاشی شده در دو سال (طبق الگوی پیش بینی شده) برابر ۱/۳۸۶۳ است شانس ۱ در ۴ وجود دارد که هیچ تلاشی رخ ندهد، و نشان می دهد که نمی توان فرض اولیه تلاشی پرتونها را بی اعتبار خواند.

۳ - مجموع متغیرهای تصادفی مستقل

اغلب لازم است توزیع $X + Y$ را به کمک توزیعهای X و Y وقتی این دو متغیر مستقل هستند، محاسبه کنیم. فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل پیوسته با توابع چگالی f_X و f_Y باشند. تابع توزیع تجمعی $X + Y$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned}
 F_{X+Y}(a) &= P(X + Y \leq a) \\
 &= \iint_{x+y \leq a} f_X(x) f_Y(y) dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{a-y} f_X(x) f_Y(y) dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{a-y} f_X(x) dx f_Y(y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y) f_Y(y) dy \quad (1-3)
 \end{aligned}$$

تابع توزیع تجمعی F_{X+Y} را پیش از توزیعهای F_X و F_Y (توابع توزیع تجمعی X و Y) نامند.

$$\begin{aligned}
 f_{X+Y}(a) &= \frac{d}{da} \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y) f_Y(y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{da} F_X(a-y) f_Y(y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y) f_Y(y) dy \quad (2-3)
 \end{aligned}$$

مثال ۳ الف . مجموع دو متغیر تصادفی مستقل یکنواخت . اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت در فاصله $(0, 1)$ باشد، مطلوب است تابع چگالی $X + Y$.
حل : از معادله $(2-3)$ با توجه به توابع چگالی زیر نتیجه می شود.

$$f_X(a) = f_Y(a) = \begin{cases} 1 & 0 < a < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به ازای $0 \leq a \leq 1$ داریم

$$f_{X+Y}(a) = \int_0^1 f_X(a-y) dy$$

به ازای $1 < a < 2$ داریم

$$f_{X+Y}(a) = \int_0^a dy = a$$

بنابراین

$$f_{X+Y}(a) = \int_{a-1}^1 dy = 2 - a$$

$$f_{X+Y}(a) = \begin{cases} a & 0 \leq a \leq 1 \\ 2-a & 1 < a < 2 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به خاطر داشته باشید که متغیر تصادفی گاما دارای چگالی زیر است

$$f(y) = \frac{\lambda e^{-\lambda y} (\lambda y)^{t-1}}{\Gamma(t)} \quad 0 < y < \infty$$

بلکه خاصیت مهم این خانواده از توزیعها این است که برای یک مقدار ثابت λ نسبت به عمل پیچش بسته است.

قضیه ۳-۱

اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل گاما به ترتیب با پارامترهای (s, λ) و (t, λ) باشند، آن گاه $X + Y$ نیز یک متغیر تصادفی گاما با پارامترهای $(s+t, \lambda)$ خواهد بود.

اثبات: با استفاده از معادله (۲-۳) داریم

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(a) &= \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(t)} \int_0^a \lambda e^{-\lambda(a-y)} [\lambda(a-y)]^{s-1} \lambda e^{-\lambda y} (\lambda y)^{t-1} dy \\ &= Ke^{-\lambda a} \int_0^a (a-y)^{s-1} y^{t-1} dy \\ &= Ke^{-\lambda a} a^{s+t-1} \int_0^1 (1-x)^{s-1} x^{t-1} dx \quad \text{با فرض } x = \frac{y}{a} \\ &= Ce^{-\lambda a} a^{s+t-1} \end{aligned}$$

که در آن C یک مقدار ثابت است که به a بستگی ندارد. ولی چون تابع فوق یک تابع چگالی است انتگرال آن باید برابر ۱ باشد، پس از تعیین مقدار C داریم

$$f_{X+Y}(a) = \frac{\lambda e^{-\lambda a} (\lambda a)^{s+t-1}}{\Gamma(s+t)}$$

و نتیجه حاصل است.

حال به کمک قضیه ۳-۱ و استقرا باسانی ثابت می شود که اگر $X_i, i = 1, \dots, n$ متغیرهای تصادفی مستقل گاما به ترتیب با پارامترهای (t_i, λ) ، $i = 1, \dots, n$ باشند آن گاه $\sum_{i=1}^n X_i$ یک متغیر تصادفی با توزیع گاما با پارامتر $(\sum_{i=1}^n t_i, \lambda)$ است. اثبات این حکم را

به خواننده واگذار می کنیم.

مثال ۳ ب. فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیر مستقل نمایی با پارامتر λ باشند. در این صورت چون یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ مانند یک متغیر تصادفی گاما با پارامترهای $(1, \lambda)$ است، از قضیه ۱-۳ نتیجه می شود که $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ دارای توزیع گاما با پارامترهای (n, λ) خواهد بود.

اگر Z_1, Z_2, \dots, Z_n متغیرهای تصادفی نرمال مستقل باشند در آن صورت $Y = \sum_{i=1}^n Z_i^2$ را متغیر تصادفی کی دو (χ^2) با n درجه آزادی گویند. برای محاسبه تابع چگالی آن به صورت زیر عمل می کنیم. به ازای $n=1$ و $Y=Z_1^2$ از مثال ۶ ب فصل ۵ دیده می شود که تابع چگالی احتمال به صورت زیر است

$$\begin{aligned} f_{Z^2}(y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_Z(\sqrt{y}) + f_Z(-\sqrt{y})] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \right) \\ &= \frac{\frac{1}{2} e^{-(1/2)y} (\frac{1}{2})^{1/2-1}}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

ولی این تابع را توزیع گاما با پارامترهای $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ می نامند. [یک نتیجه ساده این فرمول $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ است]. ولی چون Z_i^2 دارای توزیع گاما با پارامترهای $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ است از قضیه ۱-۳ نتیجه می شود که توزیع χ^2 با n درجه آزادی همان توزیع گاما با پارامترهای $(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ است و در نتیجه دارای تابع چگالی زیر است.

$$\begin{aligned} f_{\chi^2}(y) &= \frac{\frac{1}{2} e^{-y/2} \left(\frac{y}{2}\right)^{n/2-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad y > 0 \\ &= \frac{e^{-y/2} y^{n/2-1}}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad y > 0 \end{aligned}$$

وقتی n یک عدد زوج است، $\Gamma(n/2) = [(n/2) - 1]!$ ، در صورتی که وقتی n فرد است $\Gamma(n/2) = \Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1)$ را باروش برگشتی به صورت $\Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1)$ محاسبه می کنیم.

در این صورت با استفاده از $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ مقدار $\Gamma(t)$ به دست می‌آید. [برای مثال

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

توزیع کی دو اغلب در عمل از مربع خطای حاصل در برخورد یک تیر به هدف وقتی مختصات خطاها متغیرهای نرمال استاندارد مستقل هستند از فضای n بعدی حاصل می‌شود.

این توزیع در آمار ریاضی نیز اهمیت دارد.

از معادله (۲-۳) می‌توان برای اثبات نتیجه مهم زیر درباره متغیرهای تصادفی نرمال

استفاده کرد.

قضیه ۳-۲

اگر $X_i, i = 1, \dots, n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نرمال با پارامترهای μ_i و

$\sigma_i^2, i = 1, 2, \dots, n$ باشد آن گاه $\sum_{i=1}^n X_i$ دارای توزیع نرمال با پارامترهای $\sum_{i=1}^n \mu_i$ و

$\sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ است. اثبات قضیه را به عنوان تمرین می‌گذاریم.

اگر بخواهید یک عبارت کلی برای توزیع $X + Y$ در حالت گسسته به دست آورید به چند

مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳ ب. مجموع دو متغیر تصادفی مستقل بواسن. اگر X و Y متغیرهای مستقل بواسن با

پارامترهای λ_1 و λ_2 باشند مطلوب است توزیع $X + Y$.

حل: چون پیشامد $\{X + Y = n\}$ را می‌توان به صورت اجتماع پیشامدهای جدای

$\{X = k, Y = n - k\}, 0 \leq k \leq n$ نوشت، داریم.

$$\begin{aligned} P\{X + Y = n\} &= \sum_{k=0}^n P\{X = k, Y = n - k\} \\ &= \sum_{k=0}^n P\{X = k\}P\{Y = n - k\} \\ &= \sum_{k=0}^n e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{n!} (\lambda_1 + \lambda_2)^n \end{aligned}$$

به عبارت دیگر $X_1 + X_2$ نیز دارای توزیع پواسن با پارامتر $\lambda_1 + \lambda_2$ است.

مثال ۳ ت. مجموع متغیرهای تصادفی مستقل دو جمله‌ای، فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی دو جمله‌ای مستقل با پارامترهای (n, p) و (m, p) باشند. توزیع $X + Y$ را محاسبه کنید.

حل: بدون هیچ محاسبه‌ای با آسانی نتیجه می‌شود که $X + Y$ متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای $(n + m, p)$ است. زیرا X تعداد موفقیتها در n آزمایش مستقل است که احتمال موفقیت در هر یک از آنها برابر p است، همین طور Y تعداد موفقیتها در m آزمایش مستقل با احتمال موفقیت p است. بنابراین چون X و Y مستقل هستند، نتیجه می‌شود $X + Y$ تعداد موفقیتها در $n + m$ آزمایش مستقل با احتمال موفقیت p است. بنابراین $X + Y$ یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای $(n + m, p)$ خواهد بود. برای کنترل این نتیجه بطور تحلیلی توجه کنید که:

$$\begin{aligned} P\{X + Y = k\} &= \sum_{i=0}^n P\{X = i, Y = k - i\} \\ &= \sum_{i=0}^n P\{X = i\}P\{Y = k - i\} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} q^{m-k+i} \end{aligned}$$

که در آن $q = 1 - p$ و $\binom{r}{j} = 0$ اگر $r < j$ ، بنابراین

$$P\{X + Y = k\} = p^k q^{n+m-k} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$$

و نتیجه با استفاده از اتحاد زیر به دست می‌آید.

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$$

۴ - توزیعهای شرطی - حالت گسسته

به خاطر داشته باشید که برای هر دو پیشامد E و F احتمال شرطی E با فرض F وقتی

$P(F) > 0$ ، به صورت زیر تعریف می شود

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$$

بنابراین اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشد طبیعی است که تابع جرم احتمال X را با فرض $Y = y$ برای تمام y هایی که $P(Y = y) > 0$ به صورت زیر تعریف کنیم

$$\begin{aligned} p_{X|Y}(x|y) &= P\{X = x | Y = y\} \\ &= \frac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{Y = y\}} \\ &= \frac{p(x, y)}{p_Y(y)} \end{aligned}$$

برای تمام y ها به قسمی که $p_Y(y) > 0$. همین طور تابع توزیع احتمال شرطی با فرض $Y = y$ برای تمام y هایی که $p_Y(y) > 0$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\begin{aligned} F_{X|Y}(x|y) &= P\{X \leq x | Y = y\} \\ &= \sum_{a \leq x} p_{X|Y}(a|y) \end{aligned}$$

به عبارت دیگر، تعاریف عیناً شبیه حالت غیر شرطی است جز این که همه چیز روی پیشامد $Y = y$ شرطی شده است. اگر X از Y مستقل باشد، در این صورت تابع جرم احتمال شرطی و تابع توزیع شرطی دقیقاً مانند حالت‌های غیر شرطی است. زیرا اگر X و Y مستقل باشند، آن گاه

$$\begin{aligned} p_{X|Y}(x|y) &= P\{X = x | Y = y\} \\ &= \frac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{Y = y\}} \\ &= \frac{P\{X = x\}P\{Y = y\}}{P\{Y = y\}} \\ &= P\{X = x\} \end{aligned}$$

مثال ۴ الف. فرض کنید که $p(x, y)$ ، تابع جرم احتمال توأم X و Y به صورت زیر

داده شود.

$$p(0, 0) = .4 \quad p(0, 1) = .2 \quad p(1, 0) = .1 \quad p(1, 1) = .3$$

تابع احتمال جرم شرطی X را با فرض $Y = 1$ محاسبه کنید.

حل : توجه کنید که

$$p_Y(1) = \sum_x p(x, 1) = p(0, 1) + p(1, 1) = .5$$

بنابراین

$$p_{X|Y}(0|1) = \frac{p(0, 1)}{p_Y(1)} = \frac{2}{5}$$

و

$$p_{X|Y}(1|1) = \frac{p(1, 1)}{p_Y(1)} = \frac{3}{5}$$

مثال ۴ ب. اگر X و Y متغیرهای تصادفی پواسن مستقل با پارامترهای λ_1 و λ_2 باشند توزیع شرطی X را با فرض $X + Y = n$ به دست آورید.

حل : تابع جرم احتمال X با فرض $X + Y = n$ به صورت زیر محاسبه می شود :

$$\begin{aligned} P\{X = k | X + Y = n\} &= \frac{P\{X = k, X + Y = n\}}{P\{X + Y = n\}} \\ &= \frac{P\{X = k, Y = n - k\}}{P\{X + Y = n\}} \\ &= \frac{P\{X = k\}P\{Y = n - k\}}{P\{X + Y = n\}} \end{aligned}$$

که در آن تساوی آخر از استقلال X و Y نتیجه می شود. با یادآوری (مثال ۳ ب) که $X + Y$ دارای توزیع پواسن با پارامتر $\lambda_1 + \lambda_2$ است می توان نوشت :

$$\begin{aligned} P\{X = k | X + Y = n\} &= \frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^k}{k!} \frac{e^{-\lambda_2} \lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} \left[\frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} (\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} \right]^{-1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)! k!} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^n} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n-k} \end{aligned}$$

به عبارت دیگر توزیع شرطی X با فرض $X + Y = n$ یک توزیع دو جمله ای با پارامترهای n و $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ است.

۵ - توزیهای شرطی - حالت پیوسته

اگر X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم $f(x, y)$ باشند، آن گاه تابع چگالی احتمال شرطی X با فرض $Y = y$ برای تمام مقادیر y به قسمی که $f_Y(y) > 0$ به صورت زیر تعریف می شود

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

برای این که تعریف فوق روشن شود، سمت چپ را در dx و سمت راست را در $(dx dy) / dy$ ضرب می کنیم، در این صورت داریم

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) dx &= \frac{f(x, y) dx dy}{f_Y(y) dy} \\ &= \frac{P\{x \leq X \leq x + dx, y \leq Y \leq y + dy\}}{P\{y \leq Y \leq y + dy\}} \\ &= P\{x \leq X \leq x + dx | y \leq Y \leq y + dy\} \end{aligned}$$

به عبارت دیگر، برای مقادیر کوچک dx و dy ، $f_{X|Y}(x|y)$ احتمال شرطی X را بین x و $x + dx$ با شرط Y بین y و $y + dy$ می دهد.

استفاده از متغیرهای تصادفی به ما این امکان را می دهد که احتمال شرطی پیشامدها را وقتی مقدار متغیر دوم داده شده باشد در ارتباط با متغیرهای تصادفی بررسی کنیم. یعنی اگر X و Y دارای چگالی توأم پیوسته باشد برای هر پیشامد A داریم

$$P\{X \in A | Y = y\} = \int_A f_{X|Y}(x|y) dx$$

بخصوص با فرض $A = (-\infty, a]$ ، می توانیم تابع توزیع شرطی X را با فرض $Y = y$ تعریف کنیم

$$F_{X|Y}(a|y) \equiv P\{X \leq a | Y = y\} = \int_{-\infty}^a f_{X|Y}(x|y) dx$$

توجه دارید که با استفاده از این ایده می توان عبارات قابل استفاده برای احتمالهای شرطی ارائه داد حتی اگر پیشامد شرطی (یعنی پیشامد $\{Y = y\}$)، دارای احتمال 0 باشد.

مثال ۵ الف. چگالی توأم X و Y به صورت زیر داده شده است.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{12}{5}x(2-x-y) & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

چگالی شرطی X را با فرضی $Y=y$ ، $0 < y < 1$ ، محاسبه کنید .

حل : برای $0 < x < 1$ و $0 < y < 1$ داریم .

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx} \\ &= \frac{x(2-x-y)}{\int_0^1 x(2-x-y) dx} \\ &= \frac{x(2-x-y)}{\frac{2}{3} - y/2} \\ &= \frac{6x(2-x-y)}{4-3y} \end{aligned}$$

مثال ۵ ب . فرض کنید چگالی توأم X و Y به صورت زیر است .

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-x/y} e^{-y}}{y} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مطلوب است محاسبه $P\{X > 1 | Y = y\}$

حل : ابتدا چگالی شرطی X را با فرض $Y=y$ به دست می آوریم

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{e^{-x/y} e^{-y}/y}{e^{-y} \int_0^{\infty} (1/y) e^{-x/y} dx} \\ &= \frac{1}{y} e^{-x/y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P\{X > 1 | Y = y\} &= \int_1^{\infty} \frac{1}{y} e^{-x/y} dx \\
 &= -e^{-x/y} \Big|_1^{\infty} \\
 &= e^{-1/y}
 \end{aligned}$$

اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته مستقل باشند چگالی شرطی X با فرض $Y = y$ دقیقاً برابر است با چگالی X . زیرا در حالت استقلال متغیرها داریم

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$$

توزیعهای شرطی را، وقتی متغیرهای تصادفی توأم گسسته یا پیوسته نباشد، نیز می توان محاسبه کرد. مثلاً فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی f و N متغیر تصادفی گسسته باشد. حال توزیع X را با فرض $N = n$ در نظر می گیریم

$$\begin{aligned}
 &\frac{P\{x < X < x + dx | N = n\}}{dx} \\
 &= \frac{P\{N = n | x < X < x + dx\} P\{x < X < x + dx\}}{P\{N = n\} dx}
 \end{aligned}$$

اگر dx به 0 میل کند داریم

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{P\{x < X < x + dx | N = n\}}{dx} = \frac{P\{N = n | X = x\}}{P\{N = n\}} f(x)$$

که نشان می دهد چگالی شرطی x با فرض $N = n$ به صورت زیر است

$$f_{X|N}(x|n) = \frac{P\{N = n | X = x\}}{P\{N = n\}} f(x)$$

مثال ۵ پ. تعداد $n + m$ آزمایش را در نظر بگیرید که احتمال موفقیت برای آنها یکسان است، حال فرض کنید این احتمال موفقیت از قبل ثابت فرض شده است که ما می دانیم از جمعیت یکنواخت در فاصله (۰ و ۱) انتخاب شده است. توزیع شرطی احتمال موفقیت با فرض این که در $n + m$ آزمایش 0 موفقیت به دست آمده است به چه صورت خواهد بود؟

حل: اگر X احتمال موفقیت آزمایش باشد در آن صورت X دارای توزیع یکنواخت

در فاصله (۱ و ۰) است. همچنین به ازای $X = x$ ، $n + m$ آزمایش مستقل بوده و احتمال موفقیت هر یک برابر x خواهد بود، در نتیجه N ، تعداد موفقیتها، دارای توزیع دوجمله ای با پارامترهای $(n + m, x)$ است. بنابراین چگالی شرطی X با فرض $N = n$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} f_{X|N}(x|n) &= \frac{P\{N = n | X = x\} f_X(x)}{P\{N = n\}} \\ &= \frac{\binom{n+m}{n} x^n (1-x)^m}{P\{N = n\}} \quad 0 < x < 1 \\ &= cx^n (1-x)^m \end{aligned}$$

که در آن c به n بستگی ندارد. پس چگالی شرطی یک متغیر تصادفی بتا با پارامتر $n + 1$ و $m + 1$ است.

نتیجه فوق خیلی جالب است، زیرا بیان می کند که اگر توزیع اولیه یا پیشین (قبل از جمع آوری داده ها) احتمال موفقیت یک آزمایش یکنواخت در فاصله (۱ و ۰) باشد [یا بطور معادل دارای توزیع بتا با پارامترهای (۱ و ۱) باشد] ، آن گاه توزیع پسین (یا شرطی) با فرض n موفقیت در $n + m$ آزمایش دارای توزیع بتا با پارامترهای $(1 + m)$ و $(1 + n)$ خواهد بود. این نتیجه گیری با ارزش است زیرا درک شهودی ما را نسبت به یک متغیر تصادفی با توزیع بتا زیاده تر می کند.

۶- آماره های ترتیبی

فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n ، n متغیر تصادفی پیوسته مستقل و هم توزیع با چگالی مشترک f و تابع توزیع F می باشند. تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} X_{(1)} &= \text{کمترین } X_1, X_2, \dots, X_n \\ X_{(2)} &= \text{دومین مقدار کمتر } X_1, X_2, \dots, X_n \\ &\vdots \\ X_{(j)} &= \text{امین مقدار کمتر } j \text{ } X_1, X_2, \dots, X_n \\ &\vdots \\ X_{(n)} &= \text{بزرگترین } X_1, X_2, \dots, X_n \end{aligned}$$

مقادیر مرتب شده $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ را آماره‌های ترتیبی متناظر با متغیرهای تصادفی X_1, X_2, \dots, X_n می‌نامند. به عبارت دیگر $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ مقادیر مرتب شده X_1, X_2, \dots, X_n هستند.

تابع چگالی توأم آماره‌های ترتیبی با توجه به این که آماره‌های ترتیبی $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ مقادیر $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ را فقط وقتی اختیار می‌کنند که برای جایگشتی مانند (i_1, i_2, \dots, i_n) از $(1, 2, \dots, n)$ داشته باشیم

$$X_1 = x_{i_1}, X_2 = x_{i_2}, \dots, X_n = x_{i_n}$$

چون برای هر جایگشت (i_1, \dots, i_n) از $(1, 2, \dots, n)$ داریم

$$\begin{aligned} P \left\{ x_{i_1} - \frac{\varepsilon}{2} < X_1 < x_{i_1} + \frac{\varepsilon}{2}, \dots, x_{i_n} - \frac{\varepsilon}{2} < X_n < x_{i_n} + \frac{\varepsilon}{2} \right\} \\ &\approx \varepsilon^n f_{X_1, \dots, X_n}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \\ &= \varepsilon^n f(x_{i_1}) \cdots f(x_{i_n}) \\ &= \varepsilon^n f(x_1) \cdots f(x_n) \end{aligned}$$

دیده می‌شود که برای $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

$$\begin{aligned} P \left\{ x_1 - \frac{\varepsilon}{2} < X_{(1)} < x_1 + \frac{\varepsilon}{2}, \dots, x_n - \frac{\varepsilon}{2} < X_{(n)} < x_n + \frac{\varepsilon}{2} \right\} \\ &\approx n! \varepsilon^n f(x_1) \cdots f(x_n) \end{aligned}$$

اگر طرفین را بر ε^n تقسیم کنیم و $\varepsilon \rightarrow 0$ ، آن‌گاه

$$f_{X_{(1)}, \dots, X_{(n)}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = n! f(x_1) \cdots f(x_n) \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n \quad (1-6)$$

معادله (۱-۶) را می‌توان بطور ساده‌تر نیز به دست آورد. به این ترتیب که شرط لازم و کافی برای آن که بردار $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ با بردار (x_1, \dots, x_n) برابر شود آن است که بردار (X_1, \dots, X_n) با یکی از $n!$ جایگشت (x_1, \dots, x_n) برابر شود و چون احتمال (چگالی) این که (X_1, \dots, X_n) با هر یک از جایگشتهای (x_1, \dots, x_n) برابر شود برابر $f(x_1) \cdots f(x_n)$ است، معادله (۱-۶) نتیجه می‌شود.

مثال ۶ الف. در امتداد جاده‌ای به طول ۱ مایل سه نفر «به تصادف» قرار می‌گیرند. احتمال این که دو نفر به فاصله کمتر از d مایل از یکدیگر قرار نگیرند چقدر است در صورتی که $d \leq \frac{1}{2}$.

حل: فرض می‌کنیم «توزیع تصادفی» افراد روی جاده به این معناست که قرار گرفتن سه نفر روی جاده مستقل از یکدیگر و دارای توزیع یکنواخت است. اگر X_i موفقیت نفر i ام باشد احتمال مطلوب برابر است با $P\{X_{(i)} > X_{(i-1)} + d, i = 1, 2, 3\}$. چون

$$f_{X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}}(x_1, x_2, x_3) = 3! \quad 0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} P\{X_{(i)} > X_{(i-1)} + d, i = 2, 3\} &= \int \int \int_{\substack{x_i > x_{i-1} + d \\ i=2,3}} f_{X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= 3! \int_0^{1-2d} \int_{x_1+d}^{1-d} \int_{x_2+d}^1 dx_3 dx_2 dx_1 \\ &= 6 \int_0^{1-2d} \int_{x_1+d}^{1-d} (1-d-x_2) dx_2 dx_1 \\ &= 6 \int_0^{1-2d} \int_0^{1-2d-x_1} y_2 dy_2 dx_1 \end{aligned}$$

که در آن از تغییر متغیر $y_2 = 1 - d - x_2$ استفاده شده است. بنابراین پس از محاسبه داریم

$$\begin{aligned} &= 6 \int_0^{1-2d} \frac{(1-2d-x_1)^2}{2} dx_1 \\ &= 6 \int_0^{1-2d} \frac{y_1^2}{2} dy_1 \\ &= (1-2d)^3 \end{aligned}$$

پس احتمال مطلوب که دو نفر از سه نفر در فاصله کمتر از d از یکدیگر قرار نگیرند برابر $(1-2d)^3$ است. در واقع با همین روش می‌توان ثابت کرد که در حالت n شیء این احتمال برابر است با (تمرین)

$$[1 - (n-1)d]^n \quad d \leq \frac{1}{n-1}$$

تابع چگالی آماره ترتیبی Z ام، $X_{(j)}$ را می‌توان با انتگرال گیری از تابع چگالی توأم

(۶-۱) یا مستقیماً با روش زیر به دست آورد: برای آن که $X_{(j)}$ برابر x شود لازم است $1 - j$ مقدار از n مقدار X_1, \dots, X_n کمتر از x و $j - n$ تا بزرگتر از x و یکی از آنها برابر x باشد. حال چگالی احتمال این پیشامدها برابر است با

$$[F(x)]^{j-1} [1 - F(x)]^{n-j} f(x)$$

بنابراین چون تعداد

$$\binom{n}{j-1, n-j, 1} = \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!}$$

افراز متفاوت n متغیر تصادفی X_1, \dots, X_n به سه گروه وجود دارد، تابع چگالی $X_{(j)}$ به صورت زیر خواهد بود.

$$f_{X_{(j)}}(x) = \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} [F(x)]^{j-1} [1 - F(x)]^{n-j} f(x) \quad (۶-۲)$$

مثال ۶ ب. وقتی نمونه‌ای از $2n + 1$ متغیر تصادفی (یعنی $2n + 1$ متغیر تصادفی مستقل هم‌توزیع) را در نظر می‌گیریم، متغیر مرتب $n + 1$ ام میانه نمونه نامیده می‌شود. اگر نمونه‌ای به حجم ۳ از توزیع یکنواخت در فاصله $(0, 1)$ انتخاب کنیم، احتمال این که میانه نمونه بین $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{4}$ قرار گیرد چقدر است.

حل: از معادله (۶-۲) تابع چگالی $X_{(2)}$ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$f_{X_{(2)}}(x) = \frac{3!}{1!1!} x(1-x) \quad 0 < x < 1$$

بنابراین این

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{1}{4} < X_{(2)} < \frac{3}{4}\right\} &= 6 \int_{1/4}^{3/4} x(1-x) dx \\ &= 6 \left\{ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right\} \Big|_{x=1/4}^{x=3/4} = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

توزیع تجمعی تابع $X_{(j)}$ را می‌توان با انتگرال گیری (۶-۲) به دست آورد.

یعنی

$$F_{X_{(j)}}(y) = \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} \int_{-\infty}^y [F(x)]^{j-1} [1-F(x)]^{n-j} f(x) dx \quad (3-6)$$

با وجود این $F_{X_{(j)}}(y)$ را مستقیماً نیز می‌توان به دست آورد، به این ترتیب که آماره ترتیبی Z کم‌تر یا مساوی y است اگر و فقط اگر Z متغیر یا بیشتر یا کمتر یا مساوی y باشد. بنابراین چون تعداد X_i های کمتر یا مساوی y یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای $[n, p = F(y)]$ است، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} F_{X_{(j)}}(y) &= P\{X_{(j)} \leq y\} = P\{X \text{ ها یا بیشتر } j \leq y\} \\ &= \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} [F(y)]^k [1-F(y)]^{n-k} \end{aligned} \quad (4-6)$$

اگر در معادلات (3-6) و (4-6) تابع یکنواخت در فاصله (۰ و ۱) باشد یعنی $[F(x) = x, 0 < x < 1]$ ، آن‌گاه اتحاد مهم زیر به دست می‌آید

$$\sum_{k=j}^n \binom{n}{k} y^k (1-y)^{n-k} = \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} \int_0^y x^{j-1} (1-x)^{n-j} dx \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (5-6)$$

همان‌طور که معادله (6-6) اثبات شد می‌توان نشان داد که تابع چگالی توأم آماره‌های ترتیبی $X_{(j)}$ و $X_{(i)}$ ، $i < j$ عبارت است از

$$\begin{aligned} f_{X_{(i)}, X_{(j)}}(x_i, x_j) &= \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} \\ &\times [F(x_i)]^{i-1} [F(x_j) - F(x_i)]^{j-i-1} [1-F(x_j)]^{n-j} f(x_i) f(x_j) \end{aligned} \quad (6-6)$$

در صورتی که $x_i < x_j$.

مثال ۶ ب. توزیع دامنه یک نمونه تصادفی n متغیر تصادفی مستقل هم‌توزیع X_1, \dots, X_n را در نظر بگیرید. متغیر تصادفی R را که به صورت $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ تعریف می‌شود دامنه متغیرهای تصادفی نامند. اگر متغیرهای تصادفی X_i دارای توزیع F و چگالی f باشد، توزیع R را می‌توان از معادله (6-6) به صورت زیر محاسبه کرد، برای $a > 0$ داریم

$$\begin{aligned}
 P\{R \leq a\} &= P\{X_{(n)} - X_{(1)} \leq a\} \\
 &= \int \int_{x_n - x_1 \leq a} f_{X_{(1)}, X_{(n)}}(x_1, x_n) dx_1 dx_n \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_1}^{x_1+a} \frac{n!}{(n-2)!} [F(x_n) - F(x_1)]^{n-2} f(x_1) f(x_n) dx_n dx_1
 \end{aligned}$$

با استفاده از تغییر متغیر $y = F(x_n) - F(x_1)$ ، $dy = f(x_n) dx_n$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 \int_{x_1}^{x_1+a} [F(x_n) - F(x_1)]^{n-2} f(x_n) dx_n &= \int_0^{F(x_1+a) - F(x_1)} y^{n-2} dy \\
 &= \frac{1}{n-1} [F(x_1+a) - F(x_1)]^{n-1}
 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$P\{R \leq a\} = n \int_{-\infty}^{\infty} [F(x_1+a) - F(x_1)]^{n-1} f(x_1) dx_1 \quad (۷-۶)$$

معادله (۷-۶) را می‌توان مستقیماً در چند حالت خاص به دست آورد. یکی از این حالتها وقتی است که X_1 ها دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(0, 1)$ است.

در این حالت معادله (۷-۶) به صورت زیر در می‌آید، به ازای $0 < a < 1$ ،

$$\begin{aligned}
 P\{R < a\} &= n \int_0^1 [F(x_1+a) - F(x_1)]^{n-1} f(x_1) dx_1 \\
 &= n \int_0^{1-a} a^{n-1} dx_1 + n \int_{1-a}^1 (1-x_1)^{n-1} dx_1 \\
 &= n(1-a)a^{n-1} + a^n
 \end{aligned}$$

اگر از طرفین مشتق بگیریم تابع چگالی دامنه به دست می‌آید:

$$f_R(a) = \begin{cases} n(n-1)a^{n-2}(1-a) & 0 \leq a \leq 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۷- توزیع احتمال توأم توابعی از متغیرهای تصادفی

فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی پیوسته باتابع چگالی احتمال توأم f_{X_1, X_2} باشد، اغلب لازم است که توزیع توأم متغیرهای Y_1 و Y_2 را (که بر حسب) توابعی از X_1 و X_2 هستند محاسبه کنیم. بخصوص فرض کنید $Y_1 = g_1(X_1, X_2)$ ، $Y_2 = g_2(X_1, X_2)$.

فرض کنید توابع g_1 و g_2 در شرایط زیر صدق می کنند:

۱- از معادلات $y_1 = g_1(x_1, x_2)$ و $y_2 = g_2(x_1, x_2)$ می توان به صورت منحصر به فرد x_1, x_2 را بر حسب y_1, y_2 محاسبه کرد: $x_1 = h_1(y_1, y_2)$ ، $x_2 = h_2(y_1, y_2)$.

۲- توابع g_1 و g_2 در هر نقطه (x_1, x_2) دارای مشتقات نسبی پیوسته است به قسمی که درمیان 2×2 زیر در تمام نقاط (x_1, x_2) مخالف صفر باشد،

$$J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \frac{\partial g_2}{\partial x_2} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \neq 0$$

با این دو شرط می توان نشان داد که متغیرهای تصادفی Y_1 و Y_2 پیوسته دارای چگالی توأم زیر است

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) |J(x_1, x_2)|^{-1} \quad (1-7)$$

که در آن $x_1 = h_1(y_1, y_2)$ ، $x_2 = h_2(y_1, y_2)$.

یک روش اثبات معادله (۱-۷) به قرار زیر است:

$$P\{Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2\} = \iiint_{\substack{(x_1, x_2): \\ R_1(x_1, x_2) \leq y_1 \\ R_2(x_1, x_2) \leq y_2}} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (2-7)$$

حال تابع چگالی توأم را می توان با مشتق گیری از معادله (۲-۷) نسبت به y_1 و y_2 به دست آورد. اثبات این که مشتق حاصله برابر سمت راست معادله (۱-۷) است تمرینی در ریاضیات پیشرفته است که در این جا از آن هرف نظر می کنیم.

مثال ۷ الف. فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال

f_{X_1, X_2} باشد. همچنین فرض کنید $Y_1 = X_1 + X_2$ و $Y_2 = X_1 - X_2$. تابع چگالی توأم Y_1 و Y_2 را بر حسب f_{X_1, X_2} به دست آورید.

حل: فرض کنید $g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ و $g_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ در این صورت

$$J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

همچنین چون معادلات $y_2 = x_1 - x_2$ و $y_1 = x_1 + x_2$ دارای جوابیهای $x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}$ و

$x_2 = \frac{y_1 - y_2}{2}$ است. از معادله (۷-۱) نتیجه می شود که چگالی مطلوب برابر است با

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{2} f_{X_1, X_2}\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right)$$

مثلاً اگر X_1 و X_2 مستقل با توزیع یکنواخت بر $(0, 1)$ باشند آن گاه

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \leq y_1 + y_2 \leq 2, 0 \leq y_1 - y_2 \leq 2 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

یا اگر X_1 ، X_2 متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نمایی با پارامترهای λ_1 و λ_2 باشد آن گاه

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2} \exp\left\{-\lambda_1\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) - \lambda_2\left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)\right\} & y_1 + y_2 \geq 0, y_1 - y_2 \geq 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بالاخره اگر X_1 و X_2 مستقل با توزیع نرمال استاندارد باشند آن گاه

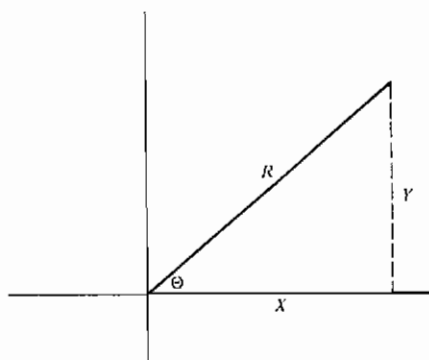
$$\begin{aligned} f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) &= \frac{1}{4\pi} e^{-[(y_1 + y_2)^2/8 + (y_1 - y_2)^2/8]} \\ &= \frac{1}{4\pi} e^{-(y_1^2 + y_2^2)/4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-y_1^2/4} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-y_2^2/4} \end{aligned}$$

یعنی در این حالت $X_1 + X_2$ و $X_1 - X_2$ مستقل هستند (در واقع می توان نشان داد که اگر X_1 و X_2 مستقل با تابع توزیع مشترک F باشند آن گاه $X_1 + X_2$ و $X_1 - X_2$ مستقل هستند اگر و فقط اگر F تابع توزیع نرمال باشد.

مثال ۷ ب. فرض کنید (X, Y) مختصات یک نقطه تصادفی باشد که در آن X و Y مستقل

و دارای توزیع نرمال استاندارد هستند. می خواهیم توزیع توأم R و Θ مختصات قطبی این نقطه

را پیدا کنیم (شکل ۳-۶)

شکل ۳-۶ $x =$ نقطه تصادفی و θ و $R = (X, Y)$

با فرض $r = g_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\theta = g_2(x, y) = \tan^{-1} y / x$ دیده می‌شود که

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \left(\frac{-y}{x^2} \right) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial g_2}{\partial y} = \frac{1}{x[1 + (y/x)^2]} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

بنابراین

$$J(x, y) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r}$$

چون تابع چگالی توأم X و Y برابر است با

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2 + y^2)/2}$$

تابع چگالی توأم R و θ به صورت زیر خواهد بود

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} r e^{-r^2/2} \quad 0 < \theta < 2\pi \quad 0 < r < \infty$$

چون این تابع چگالی به چگالیهای R و θ تجزیه می‌شود نتیجه می‌گیریم که R و θ متغیرهای تصادفی مستقل هستند، که در آن θ دارای توزیع یکنواخت بر فاصله $(0, 2\pi)$ و R دارای

توزیع ریلی با چگالی زیر است

$$f(r) = re^{-r^2/2} \quad 0 < r < \infty$$

پس وقتی به سمت هدفی در یک صفحه شلیک می شود اگر فاصله افقی و قائم نقطه برخورد متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نرمال استاندارد باشند، آن گاه قدر مطلق خطا دارای توزیع ریلی فوق است.

نتیجه فوق بسیار جالب است زیرا از قبل معلوم نیست که یک بردار تصادفی که مختصات آن مستقل با توزیع نرمال استاندارد باشد با محورها زاویه ای می سازد که نه تنها دارای توزیع یکنواخت است بلکه از فاصله آن تا مبدأ نیز مستقل است.

اگر توزیع توأم R^2 و Θ لازم باشد. با توجه به تبدیل $d = g_1(x, y) = x^2 + y^2$ و $\theta = g_2(x, y) = \tan^{-1} y / x$ زاکوبی زیر به دست می آید

$$J = \left| \begin{array}{cc} 2x & 2y \\ -y & x \end{array} \right| \frac{1}{x^2 + y^2} = 2$$

می بینیم که

$$f_{R^2, \Theta}(d, \theta) = \frac{1}{2} e^{-d/2} \frac{1}{2\pi} \quad 0 < d < \infty, 0 < \theta < 2\pi$$

بنابراین R^2 و Θ نیز مستقل هستند، و R^2 دارای توزیع نمایی با پارامتر $\frac{1}{2}$ است چون $R^2 = X^2 + Y^2$ بنا به تعریف R^2 دارای توزیع کی دو با ۲ درجه آزادی است. در نتیجه ثابت می شود که توزیع نمایی با پارامتر $\frac{1}{2}$ همان توزیع کی دو با ۲ درجه آزادی است.

نتیجه فوق را می توان برای شبیه سازی (تولید) متغیرهای تصادفی نرمال با یک تغییر متغیر مناسب روی متغیرهای تصادفی نرمال مورد استفاده قرار داد. فرض کنید U_1 و U_2 متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت روی $(0, 1)$ باشد. متغیرهای U_1 و U_2 را به دو متغیر تصادفی نرمال استاندارد X_1 و X_2 تبدیل می کنیم به این طریق که ابتدا مختصات قطبی (R, Θ) متناظر با بردار تصادفی (X_1, X_2) را در نظر می گیریم. با توجه به مطالب فوق R^2 و Θ مستقل خواهند بود، و علاوه بر این $R^2 = X_1^2 + X_2^2$ دارای توزیع نمایی با پارامتر $\frac{1}{2}$ $\lambda = \frac{1}{2}$ است. ولی $U_1 \log 2 - 2$ نیز دارای همین توزیع است. زیرا برای $n > 0$

$$\begin{aligned} P\{-2 \log U_1 < x\} &= P\left\{\log U_1 > -\frac{x}{2}\right\} \\ &= P\{U_1 > e^{-x/2}\} \\ &= 1 - e^{-x/2} \end{aligned}$$

چون U_2 در فاصله $(0, 2\pi)$ دارای توزیع یکنواخت است می توانیم آن را برای تولید Θ به کار بریم. یعنی اگر بنویسیم

$$\begin{aligned} R^2 &= -2 \log U_1 \\ \Theta &= 2\pi U_2 \end{aligned}$$

آن گاه R^2 برابر است با مجذور فاصله تا مبدأ و Θ زاویه (X_1, X_2) را مشخص می سازد. چون $X_1 = R \cos \Theta$ و $X_2 = R \sin \Theta$ داریم

$$\begin{aligned} X_1 &= \sqrt{-2 \log U_1} \cos(2\pi U_2) \\ X_2 &= \sqrt{-2 \log U_1} \sin(2\pi U_2) \end{aligned}$$

که متغیرهای مستقل نرمال استاندارد هستند.

مثال ۷ پ. اگر X و Y متغیرهای مستقل با توزیع گاما با پارامترهای (α, λ) و (β, λ) باشد مطلوب است چگالی توأم $U = X + Y$ و $V = \frac{X}{X+Y}$.

حل: چگالی توأم X و Y به صورت زیر داده می شود

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\lambda e^{-\lambda y} (\lambda y)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \\ &= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} e^{-\lambda(x+y)} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \end{aligned}$$

حال با فرض $g_1(x,y) = x+y$ و $g_2(x,y) = \frac{x}{x+y}$ ، آن گاه

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = \frac{\partial g_1}{\partial y} = 1 \quad \frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{y}{(x+y)^2} \quad \frac{\partial g_2}{\partial y} = -\frac{x}{(x+y)^2}$$

در نتیجه

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{y}{(x+y)^2} & -\frac{x}{(x+y)^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x+y}$$

بالاخره ، چون معادلات $u = x = y$ ، $v = \frac{x}{x+y}$ دارای جوابهای $x = uv$ و $y = u(1-v)$ هستند دیده می شود که

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= f_{X,Y}[uv, u(1-v)]u \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda u} (\lambda u)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{v^{\alpha-1} (1-v)^{\beta-1} \Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \end{aligned}$$

بنابراین $X+Y$ و $\frac{X}{X+Y}$ مستقل هستند و $X+Y$ دارای توزیع گاما با پارامتر $(\alpha+\beta, \lambda)$ و $\frac{X}{X+Y}$ دارای توزیع بتا با پارامترهای (α, β) است . مطالب فوق نشان می دهند که $B(\alpha, \beta)$ ضریب چگالی به قسمی است که در شرط زیر صدق می کند

$$\begin{aligned} B(\alpha, \beta) &= \int_0^1 v^{\alpha-1} (1-v)^{\beta-1} dv \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

نتیجه فوق کاملاً جالب توجه است . زیرا فرض کنید $m+n$ آزمایش باید انجام شود که هر یک از زمانی با توزیع نمایی و پارامتر λ پیروی می کند و فرض کنید دو نفر باید این آزمایشها را انجام دهند . نفر اول آزمایشهای ۱ ، ۲ ، ... ، n و نفر دوم m آزمایش باقیمانده را انجام می دهد . اگر X و Y زمان کل صرف شده به وسیله نفر اول و دوم باشد آن گاه (از نتیجه فوق یا از مثال ۳ ب) X و Y متغیرهای تصادفی مستقل گاما با پارامترهای (n, λ) و (m, λ) هستند . در این صورت نسبتی از این کار که به وسیله نفر اول انجام می شود دارای توزیع بتا با پارامترهای (n, m) است . وقتی تابع چگالی توأم n متغیر تصادفی X_1, X_2, \dots, X_n معلوم باشد می توانیم تابع چگالی توأم متغیرهای Y_1, Y_2, \dots, Y_n را مانند قبل محاسبه کنیم .

$$\begin{aligned} Y_1 &= g_1(X_1, \dots, X_n) & Y_2 &= g_2(X_1, \dots, X_n), \dots \\ Y_n &= g_n(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

در این حالت نیز فرض می کنیم توابع g_i دارای مشتقات نسبی پیوسته و ژاکوبی متناظر به ازای تمام نقاط (x_1, \dots, x_n) مخالف صفر باشد ، یعنی

$$J(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

علاوه بر این ، فرض می کنیم معادلات

$$y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n), y_2 = g_2(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n = g_n(x_1, \dots, x_n)$$

دارای جواب منحصر به فرد زیر باشد

$$x_1 = h_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n = h_n(y_1, \dots, y_n).$$

با این فرضها تابع چگالی متغیرهای تصادفی Y_i عبارتند از

$$f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) = f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) |J(x_1, \dots, x_n)|^{-1} \quad (3-7)$$

که در آن $i = 1, 2, \dots, n$ ، $x_i = h_i(y_1, \dots, y_n)$

مثال ۲. فرض کنید X_1 ، X_2 و X_3 متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد باشند . اگر

$$Y_1 = X_1 + X_2 + X_3, Y_2 = X_1 - X_2, Y_3 = X_1 - X_3,$$

مطلوب محاسبه تابع چگالی توأم Y_1 ، Y_2 ، Y_3 .

حل: ژاکوبی تبدیل فوق برابر است با

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

حال با توجه به تبدیلات فوق داریم

$$X_1 = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3} \quad X_2 = \frac{Y_1 - 2Y_2 + Y_3}{3} \quad X_3 = \frac{Y_1 + Y_2 - 2Y_3}{3}$$

و از معادله (۳-۷) معلوم می شود که

$$\begin{aligned} f_{Y_1, Y_2, Y_3}(y_1, y_2, y_3) \\ = \frac{1}{3} f_{X_1, X_2, X_3} \left(\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 - 2y_3}{3} \right) \end{aligned}$$

بنابراین ، چون

$$f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\sum_{i=1}^3 x_i^2/2}$$

دیده می شود که

$$f_{Y_1, Y_2, Y_3}(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{3(2\pi)^{3/2}} e^{-Q(y_1, y_2, y_3)/2}$$

که در آن

$$\begin{aligned} Q(y_1, y_2, y_3) &= \left(\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2 - 2y_3}{3}\right)^2 \\ &= \frac{y_1^2}{3} + \frac{2}{3}y_2^2 + \frac{2}{3}y_3^2 - \frac{2}{3}y_2y_3. \end{aligned}$$

تمرینات نظری

- ۱- معادله (۲-۱) را ثابت کنید .
- ۲- فرض کنید که تعداد پیشامدهای رخ داده در یک فاصله زمانی معینی یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λ است . اگر هر پیشامد را با احتمال p_i از نوع i بدانیم به قسمی که $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ ، ثابت کنید تعداد پیشامدهای نوع i ، $i = 1, \dots, n$ متغیرهای تصادفی مستقل پواسن با پارامترهای λp_i ، $i = 1, \dots, n$ است .
- ۳- روشی را پیشنهاد کنید که با استفاده از مسأله سوزن بوفن مقدار Π را برآورد کنیم . تعجب نکنید که روزگاری این روش معمولی ترین روش محاسبه Π بوده است .
- ۴- مسأله سوزن بوفن را در حالت $L > D$ حل کنید .

جواب : $\frac{2L}{\pi D}(1 - \sin \theta) + \frac{2\theta}{\pi}$ که در آن θ به قسمی است که $\cos \theta = \frac{D}{L}$.

- ۵- اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل مثبت و پیوسته باشد مطلوب است تابع چگالی (الف) $Z = X/Y$ و (ب) $Z = XY$ برحسب تابع چگالی X و Y . این عبارات را در حالت خاصی که X و Y هر دو متغیرهای نمایی هستند محاسبه کنید .

- ۶- به صورت تحلیلی (به استقرا) ثابت کنید که $X_1 + \dots + X_n$ دارای توزیع دو جمله ای منفی است اگر X_i ، $i = 1, \dots, n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع هندسی باشند . همچنین یک روش استدلال دیگری را ارائه دهید که احتیاج به هیچ محاسبه ای نداشته باشد .
- ۷- (الف) اگر X دارای توزیع گاما با پارامترهای (t, λ) باشد ، تابع توزیع cX ، $c > 0$ را پیدا کنید .

$$\frac{1}{2\lambda} x^{2n}$$

- (ب) ثابت کنید اگر n یک عدد صحیح مثبت و χ^2_{2n} یک متغیر تصادفی کی دو با $2n$ درجه آزادی باشد آن گاه $\frac{1}{2\lambda} \chi^2_{2n}$ دارای توزیع گاما با پارامترهای n و λ است .
- ۸- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل پیوسته با توابع نرخ $\lambda_X(t)$ و $\lambda_Y(t)$ باشند ، و فرض کنید $W = \text{Min}(X, Y)$.
- (الف) تابع توزیع W را بر حسب توابع X و Y معین کنید .
- (ب) ثابت کنید $\lambda_W(t)$ تابع نرخ W به صورت زیر است

$$\lambda_W(t) = \lambda_X(t) + \lambda_Y(t)$$

- ۹- فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی نمایی مستقل با پارامتر مشترک λ باشند . توزیع $\text{Min}(X_1, \dots, X_n)$ را معین کنید .
- ۱۰- عمر باطریها متغیرهای تصادفی نمایی مستقل با پارامتر مشترک λ است . یک نورافکن از دو باطری استفاده می کند . اگر کسی یک نورافکن و n باطری داشته باشد توزیع زمانی که نورافکن می تواند کار کند چگونه است ؟
- ۱۱- فرض کنید X_1, \dots, X_5 متغیرهای تصادفی پیوسته مستقل با توزیع مشترک f باشد ، قرار می دهیم

$$I = P\{X_1 < X_2 > X_3 < X_4 > X_5\}$$

- (الف) ثابت کنید I به F بستگی ندارد . راهنمایی : I را به صورت یک انتگرال 5 بُعدی بنویسید و از تغییر متغیر $u_i = F(x_i)$ ، $i = 1, \dots, 5$ استفاده کنید .
- (ب) مقدار I را محاسبه کنید .
- ۱۲- قضیه ۳-۲ را ثابت کنید .

راهنمایی : ابتدا آن را برای $n = 2$ ثابت کنید سپس از استقرا استفاده کنید .

- ۱۳- در مثال ۵ پ چگالی شرطی احتمال موفقیت دنباله ای از آزمایشها را وقتی در $n + m$ آزمایش موفقیت وجود داشته باشد محاسبه کردیم . آیا این چگالی شرطی تغییر خواهد کرد اگر مشخص کنیم نتیجه کدام یک از n آزمایش موفقیت بوده است ؟
- ۱۴- تابع جرم احتمال شرطی X را به شرط $X + Y = n$ محاسبه کنید ، وقتی X و Y متغیرهای

تصادفی هندسی مستقل و هم توزیع هستند .

۱۵- اگر X و Y متغیرهای تصادفی دو جمله ای مستقل با پارامترهای مشترک n و p باشند ، نشان دهید توزیع شرطی X به شرط $X + Y = m$ توزیع فوق هندسی است . همچنین با استدلالی دیگر مسأله را حل کنید به قسمی که نیازی به هیچ محاسبه نداشته باشد .

راهتمایی : تعداد $2n$ سکه را می اندازیم فرض کنید X تعداد شیرها در n پرتاب اول و Y تعداد شیرها در n پرتاب بعدی باشد . حال استدلال کنید که اگر m شیر مفروض باشد ، تعداد شیرها در n پرتاب اول دارای همان توزیع است که تعداد مهره های سفید انتخاب شده در انتخاب نمونه ای به حجم m از n مهره سفید و n مهره سیاه است .

۱۶- آزمایشی را در نظر بگیرید که دارای سه برآمد باشد به قسمی که برآمد i با احتمال p_i ، $i = 1, 2, 3$ رخ می دهد . فرض کنید این آزمایش مستقلاً n بار تکرار می شود و X_i ، $i = 1, 2, 3$ تعداد دفعاتی باشد که برآمد i رخ می دهد . مطلوب است تابع جرم احتمال شرطی X_1 با فرض $X_2 = m$.

۱۷- فرض کنید X_1 ، X_2 ، X_3 متغیرهای تصادفی مستقل پیوسته و هم توزیع باشند . مطلوب است محاسبه

$$P\{X_1 > X_2 | X_1 > X_3\}; \quad (\text{الف})$$

$$P\{X_1 > X_2 | X_1 < X_3\}; \quad (\text{ب})$$

$$P\{X_1 > X_2 | X_2 > X_3\}; \quad (\text{پ})$$

$$P\{X_1 > X_2 | X_2 < X_3\}. \quad (\text{ت})$$

۱۸- فرض کنید U متغیری با توزیع یکنواخت بر $(0, 1)$ باشد . مطلوب است توزیع شرطی U با فرض

$$U > a; \quad (\text{الف})$$

$$U < a; \quad (\text{ب})$$

که در آن $0 < a < 1$

۱۹- فرض کنید W ، مقدار رطوبت هوا در یک روز معین یک متغیر تصادفی گاما با پارامترهای

(t, β) باشد. یعنی چگالی آن به صورت زیر باشد

$$f(w) = \beta e^{-\beta w} (\beta w)^{t-1} / \Gamma(t), \quad w > 0.$$

همچنین فرض کنید اگر $W = w$ ، تعداد حوادث در طول روز (N) دارای توزیع پواسن بامیانگین W است. ثابت کنید توزیع شرطی W با فرض $N = n$ یک توزیع گاما با پارامترهای $(t + n, \beta + 1)$ است.

۲۰- فرض کنید W یک متغیر تصادفی گاما با پارامترهای (t, β) ، و با شرطی کردن روی $W = w$ ، متغیرهای تصادفی X_1, \dots, X_n مستقل و دارای توزیع نمایی با نرخ w هستند. ثابت کنید توزیع شرطی W با فرض $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$ گاما با پارامترهای $(t + n, \beta + \sum_{i=1}^n x_i)$ است.

۲۱- یک آرایه مستطیلی شامل mn عدد در n سطر و m ستون را دارای یک نقطه زینی گوئیم اگر عددی وجود داشته باشد که برای می نیمم سطر و ماکزیمم ستون متناظرش باشد. مثلاً، در آرایه زیر

1	3	2
0	-2	6
.5	12	3

عدد ۱ در سطر اول و ستون اول یک نقطه زینی است. وجود یک نقطه زینی در نظریه بازیها از اهمیت خاصی برخوردار است. حال یک آرایه مستطیلی از اعداد را در نظر بگیرید و فرض کنید که دو بازیکن A و B به صورت زیر بازی را شروع می کنند: A یکی از اعداد ۱، ۲، ...، n و B یکی از اعداد ۱، ۲، ...، m را انتخاب می کند. این انتخابها با هم اعلام می شوند و اگر A عدد i و B عدد r را انتخاب کرده باشد بازیکن A مبلغی برابر عدد واقع در سطر i ام و ستون r ام را از B می برد. حال فرض کنید این آرایه دارای یک نقطه زینی باشد - مثلاً عدد واقع در سطر r ام و ستون k ام - این عدد را x_{rk} می نامیم. حال اگر بازیکن A سطر r را انتخاب کند مطمئن خواهد بود که کمتر از x_{rk} برنده نخواهد شد (زیرا x_{rk} عدد می نیمم سطر r ام است). از طرف دیگر اگر بازیکن B ستون k ام را انتخاب کند می تواند مطمئن باشد که بیشتر از x_{rk} نخواهد باخت (زیرا x_{rk} عدد ماکزیمم ستون k است). بنابراین منطقی به نظر می رسد که این دو استراتژی را بهینه بنامیم و نشان دهیم که مقدار بازی برای بازیکن A برابر x_{rk} خواهد بود.

اگر nm عدد آرایه مستطیلی فوق از یک توزیع پیوسته دلخواه مستقلاً انتخاب شده باشد، احتمال این که آرایه انتخاب شده دارای یک نقطه زینی باشد چقدر است؟

۲۲- متغیرهای تصادفی X و Y دارای توزیع نرمال دو متغیره است اگر تابع چگالی توأم آنها به صورت زیر باشد

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right)^2 - 2\rho \frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} \right] \right\}$$

(الف) نشان دهید که چگالی شرطی X با فرض $Y=y$ نرمال با پارامترهای زیر است

$$\mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \mu_y) \quad \text{و} \quad \sigma_x^2 (1 - \rho^2)$$

(ب) نشان دهید که X و Y هر دو دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ_x و σ_x^2 و μ_y و σ_y^2 است .
 (پ) نشان دهید اگر $\rho = 0$ ، متغیرهای X و Y مستقل می شوند .

۲۳- فرض کنید که $F(x)$ تابع توزیع تجمعی باشد . ثابت کنید (الف) تابع $F^n(x)$ و (ب) تابع $[1 - F(x)]^n$ نیز تابع توزیع هستند ، که در آنها n عدد صحیح مثبت است .

راهنمایی : فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع توأم F باشد . متغیرهای تصادفی Y و Z را بر حسب X_i به قسمی تعریف می کنیم که

۲۴- ثابت کنید اگر n فرد بطور تصادفی روی جاده ای به طول L مایل قرار گیرند احتمال آن که هیچ دوفتری به فاصله کمتر از D مایل قرار نگیرد برابر است با $[1 - (n-1)D/L]^n$ در صورتی که $D \leq L/(n-1)$. در حالت $D > L/(n-1)$ به چه صورت خواهد بود؟

۲۵- معادله (۶-۲) را از مشتق گیری معادله (۶-۴) به دست آورید .

۲۶- ثابت کنید که میانه نمونه ای به حجم $2n+1$ از توزیع یکنواخت بر $(1, 0)$ دارای توزیع بتا با پارامترهای $(n+1, n+1)$ است .

۲۷- معادله (۶-۶) که چگالی توأم $X_{(0)}$ و $X_{(n)}$ را می دهد ثابت کنید .

۲۸- چگالی دامنه تغییرات نمونه ای به حجم n از یک توزیع پیوسته با تابع چگالی f را پیدا کنید .

۲۹- فرض کنید $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ مقادیر مرتب شده n متغیر تصادفی مستقل یکنواخت بر $(0, 1)$ باشد. ثابت کنید به ازای $1 \leq k \leq n+1$

$$P\{X_{(k)} - X_{(k-1)} > t\} = (1-t)^n$$

$$X_{(n+1)} \equiv 1, X_{(0)} = 0 \text{ آن که در آن}$$

۳۰- فرض کنید X_1, \dots, X_n مجموعه ای از متغیرهای تصادفی پیوسته هم توزیع مستقل با تابع توزیع F باشند. فرض کنید X مستقل از $X_{(i)}$ ، $i = 1, \dots, n$ نیز دارای توزیع F باشد. مطلوب است محاسبه

$$P\{X > X_{(n)}\} \quad (\text{الف})$$

$$P\{X > X_{(1)}\} \quad (\text{ب})$$

$$P\{X_{(i)} < X < X_{(j)}\}, 1 \leq i < j \leq n. \quad (\text{پ})$$

۳۱- فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی هم توزیع مستقل با تابع توزیع F و چگالی f باشند. کمیت $M = [X_{(1)} + X_{(n)}]/2$ را میان دامنه گویند. ثابت کنید که تابع توزیع آن به صورت زیر است

$$F_M(m) = n \int_{-\infty}^m [F(2m-x) - F(x)]^{n-1} f(x) dx$$

۳۲- فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل یکنواخت بر $(0, 1)$ باشند. اگر $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ دامنه و $M = \frac{X_{(n)} + X_{(1)}}{2}$ میان دامنه باشد تابع چگالی توأم M و R را محاسبه کنید.

مسائل

۱- دو تاس را می اندازیم. تابع جرم احتمال X و Y را در حالات زیر به دست آورید.

(الف) X مقدار بزرگتر حاصل و Y مجموع مقادیر به دست آمده است،

(ب) X عدد روی تاس اول و Y عدد بزرگتر حاصل است،

(پ) X کوچکترین عدد حاصل و Y بزرگترین مقدار حاصل است.

۲- جعبه ای دارای ۵ ترانزیستور است که دو تای آنها خراب است. ترانزیستورها متوالیاً امتحان می شوند تا خرابها مشخص شوند. اگر N_1 تعداد آزمایشهای لازم برای تشخیص اولین ترانزیستور خراب و N_2 تعداد آزمایشهای اضافی برای تشخیص دومین ترانزیستور خراب باشد. تابع جرم احتمال توأم N_1 و N_2 را حساب کنید.

۳- دنباله ای از آزمایشهای برنولی را در نظر بگیرید که هر یک با احتمال p رخ می دهد. فرض کنید X_1 تعداد شکستها قبل از اولین موفقیت و X_2 تعداد شکستهای بعدی تا دومین موفقیت باشد. تابع جرم احتمال X_1 و X_2 را پیدا کنید.

۴- تابع چگالی احتمال X و Y به صورت زیر داده می شود

$$f(x, y) = c(y^2 - x^2)e^{-y} \quad -y \leq x \leq y, 0 < y < \infty$$

(الف) مقدار c را محاسبه کنید.

(ب) چگالیهای X و Y را پیدا کنید.

۵- تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت زیر داده شده است

$$f(x, y) = \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) \quad 0 < x < 1, 0 < y < 2$$

(الف) ثابت کنید این یک تابع چگالی توأم است.

(ب) تابع چگالی X را محاسبه کنید.

(پ) مقدار $P\{X > Y\}$ را به دست آورید.

(ت) $P\left(Y > \frac{1}{2} \mid X < \frac{1}{2}\right)$ را پیدا کنید.

۶- تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت زیر داده شده است

$$f(x, y) = e^{-(x+y)} \quad 0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty$$

مطلوب است (الف) $P(X < Y)$ و (ب) $P(X < a)$.

۷- صاحب مغازه ای می داند ۴۵ درصد مشتریهای او یک تلویزیون معمولی ۱۵ درصد تلویزیون رنگی می خرند و ۴۰ درصد فقط تماشاگرند. اگر ۵ مشتری به مغازه وارد شوند احتمال این که دقیقاً ۲ تلویزیون معمولی و یک رنگی بفروشد چقدر است؟

۸- تعداد افرادی که به یک داروخانه در ساعت معین وارد می شوند یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر $\lambda = 10$ است. احتمال شرطی این که حداکثر سه مرد وارد داروخانه شوند چقدر است به شرط آن که ۱۰ زن در آن ساعت وارد داروخانه شده باشند، چه فرضهایی را باید

در نظر گرفت .

۹- یک مرد و زن قرار می‌گذارند در ساعت $30 : 12$ بعد از ظهر در محل معینی یکدیگر را ملاقات کنند . اگر زمان رسیدن مرد دارای توزیع یکنواخت در فاصله $15 : 12$ و $45 : 12$ و زمان رسیدن زن مستقل از مرد دارای توزیع یکنواخت در فاصله 12 تا 1 بعد از ظهر باشد ، احتمال این که نفر اول بیشتر از 5 دقیقه منتظر نماند چقدر است ؟ احتمال این که مرد زودتر برسد چقدر است ؟

۱۰- یک آمبولانس در جاده‌ای به طول L با سرعت ثابت در رفت و آمد است . در لحظه معینی یک حادثه رخ می‌دهد محل وقوع حادثه دارای توزیع یکنواخت در طول جاده است . [یعنی ، فاصله اش از یکی از دو انتها دارای توزیع یکنواخت بر $(0, L)$ است] . با فرض این که محل آمبولانس در لحظه حادثه نیز دارای توزیع یکنواخت باشد با توجه به استقلال ، توزیع فاصله آن را از حادثه محاسبه کنید . اگر حرکت آمبولانس با سرعت ثابت نباشد جواب مسأله چگونه خواهد بود ؟

۱۱- فرض کنید نقطه‌ای بطور یکنواخت روی مربعی به مساحت 1 به رؤوس $(0, 0)$ و $(0, 1)$ و $(1, 0)$ و $(1, 1)$ انتخاب می‌شود و X و Y مختصات این نقطه است .
(الف) توزیعهای حاشیه‌ای X و Y را پیدا کنید .

(ب) آیا X و Y مستقل هستند ؟

(پ) احتمال این که فاصله (X, Y) تا مرکز مربع بزرگتر از $\frac{1}{4}$ باشد چقدر است ؟

۱۲- سه نقطه X_1, X_2, X_3 بتصادف روی خط L انتخاب می‌شوند . مطلوب است احتمال این که X_2 بین X_1 و X_3 قرار گیرد ؟

۱۳- دو نقطه بتصادف روی خطی به طول L به قسمی انتخاب می‌شوند که در طرفین نقطه میانی واقع شوند . [به عبارت دیگر دو نقطه X و Y متغیرهای تصادفی مستقل هستند به معنی که X بطور یکنواخت بر $(0, \frac{L}{2})$ و Y بطور یکنواخت روی $(\frac{L}{2}, L)$ توزیع شده است . مطلوب است احتمال این که فاصله بین دو نقطه ، بزرگتر از $\frac{L}{3}$ باشد .

۱۴- در مسأله ۱۳ احتمال این که ۳ پاره خط از 0 تا X و از X تا Y و از Y تا L بتواند یک مثلث بسازند چقدر است ؟ (توجه کنید که سه پاره خط وقتی می‌توانند یک مثلث بسازند که طول هر یک از آنها کمتر از مجموع دو ضلع دیگر باشد) .

۱۵- چگالی توأم X و Y به صورت زیر داده شده است .

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-(1+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

آیا X و Y مستقل هستند؟ اگر $f(x, y)$ به صورت زیر باشد آیا X و Y مستقل خواهند بود؟

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & 0 < x < y, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۱۶- فرض کنید 10^6 نفر به یک ایستگاه در زمانهایی که متغیرهای تصادفی مستقل اند می‌رسند هر یک با توزیع یکنواخت روی $(0, 10^6)$ است. فرض کنید N تعداد افرادی باشد که در ساعت اول می‌رسند. مقدار تقریبی $P\{N=i\}$ را محاسبه کنید.

۱۷- فرض کنید A, B و C متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت روی $(0, 1)$ هستند. (الف) تابع توزیع توأم A, B و C را پیدا کنید.

(ب) احتمال این که تمام ریشه‌های معادله $Ax^2 + Bx + C = 0$ حقیقی باشند چقدر است؟

۱۸- اگر X بر $(0, 1)$ دارای توزیع یکنواخت و Y دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = 1$ باشد مطلوب است توزیع (الف) $Z = X + Y$ و (ب) $Z = \frac{X}{Y}$ ، فرض کنید متغیرها مستقل هستند.

۱۹- اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با پارامترهای λ_1 و λ_2 باشند، توزیع $Z = \frac{X_1}{X_2}$ را پیدا کنید. همچنین احتمال $P\{X_1 < X_2\}$ را محاسبه کنید.

۲۰- وقتی جریانی به شدت I (بر حسب آمپر) از مقاومت R (بر حسب اهم) عبور می‌کند توان حاصل برابر $W = I^2 R$ است (که بر حسب وات محاسبه می‌شود). فرض کنید I و R متغیرهای تصادفی مستقل با چگالی‌های زیر باشند

$$\begin{aligned} f_I(x) &= 6x(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ f_R(x) &= 2x & 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

تابع چگالی W را معین کنید.

۲۱- عدد X را از بین اعداد $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ بتصادف انتخاب می‌کنیم. حال عددی را بتصادف از بین زیرمجموعه $\{1, \dots, X\}$ اختیار می‌کنیم. عدد دوم را Y می‌نامیم.

(الف) تابع جرم توأم X و Y را پیدا کنید.

(ب) تابع جرم احتمال شرطی X را با فرض $Y = i$ پیدا کنید. و آن را برای $i = 1, 2, 3, 4, 5$ محاسبه کنید.

(ب) آیا X و Y مستقل هستند چرا؟

۲۲- دو تاس ریخته می شوند. فرض کنید X و Y به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقدار

حاصل باشد. تابع جرم شرطی Y را با فرض $X = i$ ، $i = 1, 2, \dots, 6$ محاسبه کنید. آیا X

و Y مستقل هستند؟ چرا؟

۲۳- تابع جرم احتمال توأم X و Y به صورت زیر داده می شود

$$\begin{aligned} p(1, 1) &= \frac{1}{8} & p(1, 2) &= \frac{1}{4} \\ p(2, 1) &= \frac{1}{8} & p(2, 2) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(الف) تابع جرم شرطی X را با فرض $Y = i$ ، $i = 1, 2$ محاسبه کنید.

(ب) آیا X و Y مستقل هستند؟

(پ) مقادیر $P(XY \leq 3)$ ، $P(X + Y > 2)$ ، $P(\frac{X}{Y} > 1)$ را محاسبه کنید.

۲۴- تابع چگالی توأم X و Y به صورت زیر داده شده است.

$$f(x, y) = xe^{-(y+1)} \quad x > 0, y > 0$$

(الف) چگالی شرطی X را با فرض $Y = y$ پیدا کنید، همچنین تابع چگالی شرطی Y را با

فرض $X = x$ پیدا کنید.

(ب) تابع چگالی $Z = XY$ را پیدا کنید.

۲۵- چگالی توأم X و Y به صورت زیر است

$$f(x, y) = c(x^2 - y^2)e^{-x} \quad 0 \leq x < \infty, -x \leq y \leq x$$

توزیع شرطی Y را با فرض $X = x$ پیدا کنید.

۲۶- اگر X_1 ، X_2 و X_3 متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت بر (a, b) باشد. مطلوب

است محاسبه احتمال این که بزرگترین مشاهده بزرگتر از مجموع دو مشاهده دیگر باشد.

۲۷- یک ماشین مرکب می تواند بطور کامل عمل کند اگر حداقل ۳ موتور از ۵ موتور آن درست

کار کنند. اگر موتورها بطور مستقل با تابع چگالی $f(x) = xe^{-x}$ ، $x > 0$ ، کار کنند،

مطلوب است تابع چگالی طول زمان کارکرد ماشین.

۲۸- اگر ۳ ماشین در سه نقطه تصادفی بر جاده ای به طول L خراب شده باشد. احتمال این که

هیچ دو ماشینی در فاصله ای برابر d از یکدیگر قرار نگیرند چقدر است در صورتی که

$$d \leq \frac{L}{2}$$

۲۹- نمونه‌ای به حجم ۵ از یک توزیع یکنواخت بر $(0, 1)$ اختیار کنید. احتمال این که میانه در فاصله $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ باشد چقدر است؟

۳۰- اگر X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 متغیرهای هم‌توزیع‌نمایی با پارامتر λ باشد مطلوب است محاسبه

$$P\{\min(X_1, \dots, X_5) \leq a\} \quad (\text{الف})$$

$$P\{\max(X_1, \dots, X_5) \leq a\}. \quad (\text{ب})$$

۳۱- توزیع دامنه نمونه‌ای به حجم ۴ از توزیعی با تابع چگالی زیر را پیدا کنید

$$f(x) = 2x, 0 < x < 1.$$

۳۲- فرض کنید X و Y مختصات نقطه‌ای با توزیع یکنواخت بر دایره‌ای به شعاع ۱ و مرکز مبدا باشد. یعنی چگالی توأم آنها به صورت زیر است

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

تابع چگالی توأم مختصات قطبی $R = (X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}}$ و $\Theta = \tan^{-1} \frac{Y}{X}$ را پیدا کنید.

۳۳- اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت بر $(0, 1)$ باشند مطلوب است

$$\text{تابع چگالی توأم } R = \sqrt{X^2 + Y^2} \text{ و } \Theta = \tan^{-1} \frac{Y}{X}.$$

۳۴- اگر U در فاصله $(0, 2\pi)$ دارای توزیع یکنواخت و Z مستقل از U دارای توزیع نمایی با نرخ ۱ باشد، مستقیماً ثابت کنید (بدون استفاده از مثال ۷ ب) که X و Y به صورت زیر

$$X = \sqrt{2Z} \cos U$$

$$Y = \sqrt{2Z} \sin U$$

متغیرهای مستقل نرمال استاندارد هستند.

۳۵- اگر X و Y دارای تابع چگالی توأم زیر باشند

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2} \quad x \geq 1, y \geq 1$$

(الف) تابع چگالی توأم $U = XY$ و $V = \frac{X}{Y}$ را محاسبه کنید.

(ب) چگالی‌های حاشیه‌ای را به دست آورید.

۳۶- اگر X و Y متغیرهای تصادفی با توزیع یکنواخت روی $(0, 1)$ باشد مطلوب است

چگالی توأم

$$U = X + Y, V = X/Y;$$

(الف)

$$U = X, V = X/Y;$$

(ب)

$$U = X + Y, V = X/(X + Y).$$

(پ)

۳۷- مسأله ۳۶ را وقتی X و Y متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با پارامتر $\lambda = 1$ هستند حل کنید.

۳۸- اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با پارامتر λ باشد مطلوب است تابع چگالی توأم $Y_1 = X_1 + X_2$ و $Y_2 = e^{X_1}$.

۳۹- اگر X, Y, Z متغیرهای تصادفی مستقل با تابع چگالی $f(x) = e^{-x}$ ، $0 < x < \infty$ باشد مطلوب است چگالی توأم $U = X + Y$ ، $V = X + Z$ ، $W = Y + Z$.

۴۰- در مثال ۷ ثابت کنید Y_2 و Y_3 دارای توزیع نرمال دو متغیره هستند.

۴۱- سن والدین در یک بیمارستان تقریباً دارای توزیع نرمال دو متغیره با پارامترهای $\mu_x = ۲۸٫۴$ ، $\sigma_x = ۶٫۸$ ، $\mu_y = ۳۱٫۶$ ، $\sigma_y = ۷٫۴$ و $\rho = ۰٫۸۲$ است (پارامترهای با اندیس n مربوط به سن زن حامله و با اندیس y مربوط به سن پدر است) با استفاده از نتایج تمرین نظری ۲۲ مطلوب است محاسبه،

(الف) نسبت زنان حامله ای که سن آنها بیشتر از ۳۰ سال است.

(ب) نسبت پدران با سن بیش از ۳۵ که زنانی مسن تر از ۳۰ سال دارند.

فصل دهم

میانگین

۱ - مقدمه و تعاریف

یکی از مفاهیم بسیار مهم در نظریه احتمال، میانگین یک متغیر تصادفی است. میانگین یا امید ریاضی X را اگر X متغیر تصادفی گسسته با تابع جرم احتمال $p(x)$ باشد با $E[X]$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$E[X] = \sum_{x, p(x) > 0} xp(x)$$

به عبارتی امید ریاضی X متوسط موزون مقادیر ممکن است که X می تواند اختیار کند، وزن هر مقدار برابر احتمال X در آن نقطه است. مثلاً اگر تابع جرم احتمال X به صورت زیر باشد.

$$p(0) = \frac{1}{2} = p(1)$$

در این صورت

$$E[X] = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

که همان میانگین معمولی دو مقدار ممکن 0، 1 است که X می تواند بگیرد. از طرف دیگر، اگر

$$p(0) = \frac{1}{3} \quad p(1) = \frac{2}{3}$$

در این صورت

$$E[X] = 0\left(\frac{1}{3}\right) + 1\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

میانگین موزون دو مقدار ممکن 0، 1 می باشد که در آن وزن داده شده به 1 دو برابر مقدار وزنی است که به 0 نسبت داده شده است، زیرا $p(0) = 2p(1)$.

تعبیر فراوانی احتمالات انگیزه دیگری برای تعریف میانگین می باشد. در این تعبیر (که تا اندازه ای از قانون قوی اعداد بزرگ که در فصل بعد ارائه می شود پیروی می کند) فرض می کنیم که اگر یک آزمایش تصادفی به صورت دنباله ای بی نهایت از تکرارهای مستقل انجام شود، آن گاه برای هر پیشامد E نسبت دفعاتی که E رخ می دهد برابر $P(E)$ خواهد بود. اکنون متغیر تصادفی X را که باید یکی از مقادیر x_1, x_2, \dots, x_n را به ترتیب با احتمالات $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)$ اختیار کند در نظر می گیریم و فرض می کنیم X نمایش برنده شدن در یک بازی ساده شانسی باشد. یعنی با احتمال $p(x_i)$ مبلغ x_i واحد، $i = 1, 2, \dots, n$ ، می بریم. اینک با تعبیر فراوانی نتیجه می شود که اگر این بازی ساده را متوالیاً انجام دهیم در این صورت نسبت دفعاتی که x_i واحد برنده می شویم برابر $p(x_i)$ می باشد. چون این مطلب برای تمام i ها، $i = 1, 2, \dots, n$ درست است نتیجه می شود که متوسط برد ما در هر بازی برابر است با

$$\sum_{i=1}^n x_i p(x_i) = E[X]$$

مثال ۱ الف. $E[X]$ را وقتی X برآمد پرتاب یک تاس سالم است بیابید.

حل: چون $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$ داریم

$$E[X] = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{2}$$

مثال ۱ ب. میانگین یک متغیر تصادفی برنولی . X یک متغیر تصادفی برنولی با پارامتر p

است، $E[X]$ را حساب کنید.

حل: چون $p(0) = 1 - p$ ، $p(1) = p$ ، داریم

$$E[X] = 0(1 - p) + 1(p) = p$$

به عبارت دیگر، مثال ۱ ب، بیان می کند که میانگین تعداد موفقیتها در یک آزمایش ساده درست برابر احتمال آن است که نتیجه آزمایش یک موفقیت باشد. لذا، وقتی n آزمایش مستقل هریک با احتمال موفقیت p انجام دهیم طبیعی به نظر می رسد که میانگین تعداد موفقیتها برابر np باشد. اینک این پیش بینی را در مثال ۱ ب ثابت می کنیم.

مثال ۱ ب. میانگین متغیر تصادفی دو جمله ای: وقتی X یک متغیر تصادفی دو جمله ای با پارامترهای n و p است $E[X]$ را پیدا کنید.

حل:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=0}^n ip(i) \\ &= \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{in!}{(n-i)!i!} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= np \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-i)!(i-1)!} p^{i-1} (1-p)^{n-i} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \\ &= np [p + (1-p)]^{n-1} \\ &= np \end{aligned}$$

که در آن تساوی دوم از آخر با فرض $k = i - 1$ نتیجه می گردد.

وقتی n بزرگ و $\lambda = np$ مناسب باشد متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λ تقریب مناسبی برای متغیر تصادفی دو جمله ای با پارامترهای n و p می باشد. لذا، طبیعی به نظر می رسد که با توجه به نتیجه مثال ۱ ب فرض کنیم که میانگین متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λ برابر λ است. اکنون این مطلب را ثابت می کنیم.

مثال ۱ ت. میانگین متغیر تصادفی پواسن. X یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λ است. $E[X]$ را محاسبه کنید.

حل :

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} ip(i) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} ie^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} ie^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} \\
 &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\
 &= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \\
 &= \lambda
 \end{aligned}$$

که در آن از تساوی زیر استفاده شده است .

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$$

مثال ۱ ث . میانگین متغیر تصادفی هندسی . میانگین یک متغیر تصادفی هندسی با پارامتر p را حساب کنید .

حل : برای متغیر تصادفی هندسی داریم

$$P\{X = n\} = p(1-p)^{n-1} \quad n \geq 1$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \sum_{n=1}^{\infty} np(1-p)^{n-1} \\
 &= p \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}
 \end{aligned}$$

که در آن $q = 1 - p$ می باشد . بنابراین

$$\begin{aligned}
 E[X] &= p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dq} (q^n) \\
 &= p \frac{d}{dq} \left(\sum_{n=1}^{\infty} q^n \right) \\
 &= p \frac{d}{dq} \left(\frac{q}{1-q} \right) \\
 &= \frac{p}{(1-q)^2} \\
 &= \frac{1}{p}
 \end{aligned}$$

به عبارت دیگر، اگر آزمایشی با احتمال موفقیت p را تا رخ دادن اولین موفقیت تکرار کنیم، در این صورت میانگین تعداد آزمایشهای لازم برابر $\frac{1}{p}$ است.

مثال ۱ ج. به یک شرکت کننده در یک نمایش تفریحی دو سؤال ارائه می شود. سؤال ۱ و ۲، که وی با ترتیب انتخاب اقدام به پاسخ دادن می کند. اگر مایل باشد که ابتدا سؤال i ام داده می شود که سؤال i ام، $i = 1, 2$ را پاسخ دهد در این صورت تنها در صورتی که پاسخ i ام درست باشد به او اجازه داده می شود که سؤال i ام، $i \neq j$ را بکند. اگر پاسخ اولیه اش نادرست باشد به وی اجازه داده نمی شود که سؤال دیگر را پاسخ دهد. اگر شرکت کننده سؤال i ام، $i = 1, 2$ را درست پاسخ دهد V_i تومان و اگر هر دو سؤال را درست پاسخ دهد $V_1 + V_2$ تومان دریافت می کند. اگر احتمال این که پاسخ سؤال i ام را بداند برابر p_i باشد، $i = 1, 2$ و اگر E_i پیشامد این باشد که پاسخ سؤال i ام را می داند به فرض این که E_i ها، $i = 1, 2$ ، مستقل باشند برای این که میانگین برد خود را ماکزیمم کند باید با کدام سؤال شروع کند.

حل: اگر نخست با سؤال یک شروع کند در این صورت

0	(تومان)	$1 - P_1$	با احتمال
V_1	(تومان)	$P_1(1 - P_2)$	با احتمال
$V_1 + V_2$	(تومان)	$P_1 P_2$	با احتمال

خواهد برد. بنابراین میانگین برد او در این حالت برابر است با

$$V_1 P_1 (1 - P_2) + (V_1 + V_2) P_1 P_2$$

از طرف دیگر، اگر ابتدا با سؤال ۲ شروع کند میانگین بردش برابر است با

$$V_2 P_2 (1 - P_1) + (V_1 + V_2) P_1 P_2$$

بنابراین، بهتر است که نخست با سؤال ۱ شروع کند اگر

$$V_1 P_1 (1 - P_2) \geq V_2 P_2 (1 - P_1)$$

یا بطور معادل اگر

$$\frac{V_1 P_1}{1 - P_1} \geq \frac{V_2 P_2}{1 - P_2}$$

مثلاً اگر ۶۰ درصد مطمئن باشد که سؤال ۱ با ارزش ۲۰۰ تومان را درست پاسخ می دهد و ۸۰ درصد مطمئن باشد که سؤال ۲ با ارزش ۱۰۰ تومان را درست پاسخ می دهد، در این صورت نخست با سؤال ۲ شروع می کند، زیرا

$$400 = \frac{(100)(.8)}{(.2)} > \frac{(200)(.6)}{(.4)} = 300$$

گرچه تا کنون تنها میانگین را برای متغیرهای تصادفی گسته تعریف کردیم، می توان امید ریاضی یک متغیر تصادفی پیوسته را نیز تعریف نمود. اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد، در این صورت چون

$$f(x) dx \approx P\{x \leq X \leq x + dx\}$$

مناسب است امید ریاضی X را به صورت زیر تعریف کنیم

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

مثال ۱ میانگین متغیر تصادفی یکنواخت. میانگین یک متغیر تصادفی را که دارای توزیع یکنواخت روی (a, b) می باشد حساب کنید.

حل: چگالی یک متغیر تصادفی یکنواخت روی (a, b) عبارت است از

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \int_a^b \frac{x}{b-a} dx \\
 &= \left(\frac{1}{b-a}\right) \left(\frac{b^2 - a^2}{2}\right) \\
 &= \frac{(b-a)(b+a)}{(b-a)2} \\
 &= \frac{b+a}{2}
 \end{aligned}$$

یعنی، میانگین یک متغیر تصادفی که بطور یکنواخت روی فاصله ای توزیع شده باشد برابر نقطه میانی فاصله است.

مثال ۱ ح. میانگین متغیر تصادفی نمایی. میانگین یک متغیر تصادفی دارای توزیع نمایی با پارامتر λ را به دست آورید.

حل: چون تابع چگالی به صورت زیر است

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

داریم

$$E[X] = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

با انتگرال گیری جزء به جزء ($u = x, \lambda e^{-\lambda x} dx = dv$) حاصل می شود

$$\begin{aligned}
 E[X] &= -x e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \\
 &= 0 - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{\lambda}
 \end{aligned}$$

مثال ۱ غ. میانگین متغیر تصادفی نرمال. X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 می باشد. $E[X]$ را حساب کنید.

حل:

$$E[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

x را به صورت $\mu + (x - \mu)$ می نویسیم، داریم

$$E[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx + \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

با قرار دادن $y = x - \mu$ در انتگرال اول داریم

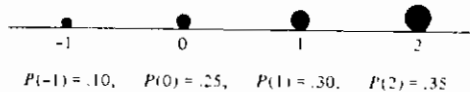
$$E[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2/2\sigma^2} dy + \mu \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

که در آن $f(x)$ تابع چگالی نرمال است. بنا بر خاصیت تقارن انتگرال اول برابر صفر می شود و بنابراین

$$E[X] = \mu \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \mu$$

تصوره: مفهوم میانگین شبیه مفهوم **مركز ثقل** توزیع یک جرم در فیزیک می باشد.

یک متغیر تصادفی گسسته X را با تابع جرم احتمال $p(x_i)$ ، $i \geq 1$ ، در نظر می گیریم. اکنون اگر تصور کنیم که اوزانی با جرم $p(x_i)$ ، $i \geq 1$ ، در نقاط x_i ، $i \geq 1$ ، روی یک میله بدون وزن قرار داده شده اند، (شکل ۷-۱ را ببینید) در این صورت نقطه ای را که در آن میله در حال تعادل خواهد بود مرکز ثقل می نامیم. اکنون برای آن دسته از خوانندگان که با استاتیک مقدماتی آشنایی دارند بسادگی می توان نشان داد که این نقطه در $E[X]$ است.



شکل ۷-۱

تصوره: میانگین یک متغیر تصادفی را در حالت گسسته بر حسب یک مجموع و در حالت

۱- برای اثبات آن باید نشان دهیم که مجموع نیروهای پیچشی که مایلند نقطه را حول $E(X)$ بچرخانند برابر صفر است یعنی باید نشان دهیم $0 = \sum_i (x_i - E[X])p(x_i)$ و این فوراً نتیجه می شود.

پیوسته به صورت یک انتگرال تعریف کردیم. بنابراین میانگین فقط وقتی تعریف شده است که مجموع یا انتگرال نظیرش تعریف شده باشد. اینک با توجه به نظریه انتگرال عمومی نخست $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$ را برای تابع نامنفی g و سپس برای تابع دلخواه g به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = \int_{x:g(x) \geq 0} g(x) dx - \int_{x:g(x) < 0} [-g(x)] dx$$

یعنی $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$ را برابر با تفاضل $\int_{-\infty}^{+\infty} g^+(x) dx$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} g^-(x) dx$ تعریف می کنیم، که در آن g^+ و g^- توابع نامنفی اند و به صورت زیر تعریف می شوند.

$$g^+(x) = \begin{cases} g(x) & g(x) \geq 0 \\ 0 & g(x) < 0 \end{cases} \quad g^-(x) = \begin{cases} 0 & g(x) \geq 0 \\ -g(x) & g(x) < 0 \end{cases}$$

[توجه کنید که $g(x) = g^+(x) - g^-(x)$]. بنابراین به شرط آن که $\int_{-\infty}^{+\infty} g^+(x) dx$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} g^-(x) dx$ هر دو $+\infty$ نباشند $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$ تعریف می شود. اگر یکی از انتگرالها $+\infty$ باشد و دیگری مقدار معینی داشته باشد در این صورت $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$ برابر $+\infty$ یا $-\infty$ می شود بر حسب این که کدام یک از انتگرالها مساوی $+\infty$ باشد. بنابراین، در حالت پیوسته

$$E[X] = \int_{x>0} xf(x) dx - \int_{x<0} (-x)f(x) dx$$

و بنابراین $E[X]$ به شرط آن که هر دو انتگرال $+\infty$ نباشند تعریف می گردد. متغیر تصادفی کوشی تنها مثالی در این کتاب است که میانگین ندارد. تابع چگالی کوشی با ساده ترین شکل آن به صورت زیر می باشد.

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad -\infty < x < \infty$$

می توان نشان داد که

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{(-x)}{1+x^2} dx = \infty \quad (1-1)$$

و لذا $E[X]$ برای متغیر تصادفی کوشی تعریف نشده است.
 بطور مشابه، در حالت گسسته

$$E[X] = \sum_{x \geq 0} xp(x) - \sum_{x < 0} (-x)p(x)$$

و $E[X]$ به شرط آن که هر دو مجموع ∞ نباشند تعریف می گردد.

۲- میانگین تابعی از يك متغیر تصادفی

فرض کنید متغیر تصادفی X و توزیع احتمال آن را داریم و به جای امید ریاضی X هدف ما محاسبه امید ریاضی تابعی از X مثلاً $g(X)$ است. (مثلاً، ممکن است $E[X^2]$ یا $E[e^X]$ مورد نظر باشد). چگونه می توانیم این کار را انجام دهیم؟ یک روش به صورت زیر است: چون $g(X)$ یک متغیر تصادفی است پس باید دارای تابع توزیع احتمال باشد که با استفاده از شناخت توزیع X قابل محاسبه است. پس از محاسبه توزیع $g(X)$ می توانیم $E[g(X)]$ را با استفاده از تعریف میانگین حساب کنیم.

مثال ۲ الف. فرض کنید X نمایش تعداد شیرهای حاصل از دو پرتاب مستقل از یک سکه سالم باشد. $E[X^2]$ را بیابید.

حل: تابع جرم احتمال X به صورت زیر است

$$P\{X = 0\} = \frac{1}{4} \quad P\{X = 1\} = \frac{1}{2} \quad P\{X = 2\} = \frac{1}{4}$$

بنابراین با قرار دادن $Y = X^2$ ، جرم احتمال Y به صورت زیر نتیجه می شود.

$$\begin{aligned} P\{Y = 0\} &= P\{X = 0\} = \frac{1}{4} \\ P\{Y = 1\} &= P\{X = 1\} = \frac{1}{2} \\ P\{Y = 4\} &= P\{X = 2\} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

بنابراین

$$E[X^2] = E[Y] = 0\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

توجه کنید که

$$\frac{3}{2} = E(X^2) \neq (E[X])^2 = 1$$

مثال ۲ ب. اگر X دارای توزیع یکنواخت روی $(0, 1)$ باشد، $E[e^X]$ را حساب کنید.

حل: فرض کنید $Y = e^X$ ، تابع توزیع Y را به صورت زیر حساب می‌کنیم: برای

$$1 \leq a \leq e$$

$$\begin{aligned} F_Y(a) &= P\{Y \leq a\} \\ &= P\{e^X \leq a\} \\ &= P\{X \leq \log a\} \\ &= \log a \end{aligned}$$

تساوی آخر با توجه به این که X دارای توزیع یکنواخت روی $(0, 1)$ است به دست می‌آید. چگالی Y را می‌توان با مشتق‌گیری از $F_Y(a)$ به دست آورد.

$$f_Y(a) = \frac{1}{a} \quad 1 \leq a \leq e$$

بنابراین

$$\begin{aligned} E[e^X] &= E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} af_Y(a) da \\ &= \int_1^e da \\ &= e - 1 \end{aligned}$$

گرچه از نظر تئوری همواره می‌توان روش فوق را برای محاسبه میانگین هر تابعی از X با معلوم بودن توزیع X به کار برد، اما خوشبختانه روش ساده‌تری برای این کار وجود دارد حکم زیر که گاهی آن را «قانون ناآگاهی» می‌نامند چگونگی محاسبه میانگین $g(X)$ را بدون محاسبه توزیع آن نشان می‌دهد.

حکم ۱-۲ قانون ناآگاهی

(الف) اگر X متغیر تصادفی گسسته با تابع جرم احتمال $p(x)$ باشد، در این صورت

برای هر تابع حقیقی g

$$E[g(X)] = \sum_{x: p(x) > 0} g(x)p(x)$$

(ب) اگر X متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد در این صورت برای هر تابع حقیقی g

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx$$

قبل از اقدام به اثبات این حکم نخست بررسی می کنیم که حکم فوق با مثالهای ۲ الف و ۲ ب مطابقت دارد. حکم را برای مثال ۲ الف به کار می بریم، داریم

$$E[X^2] = 0^2\left(\frac{1}{4}\right) + 1^2\left(\frac{1}{2}\right) + 2^2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{2}$$

در حالی که با به کار بردن آن برای مثال ۲ ب نتیجه می شود

$$\begin{aligned} E[e^X] &= \int_0^1 e^x dx & f(x) &= 1, 0 < x < 1 \\ &= e - 1 \end{aligned}$$

بنابراین نتایج قبلی را تأیید می کند.

اثبات حکم ۱-۲ در حالت گسسته تا حدی ساده تر است و آن را به عنوان تمرین برای خواننده می گذاریم. برای اثبات آن در حال پیوسته به لم زیر که به نوبه خود جالب است نیاز داریم.

لم ۱

برای هر متغیر تصادفی Y

$$E[Y] = \int_0^{\infty} P\{Y > y\} dy - \int_0^{\infty} P\{Y < -y\} dy$$

پروهان: اثبات را برای یک متغیر تصادفی پیوسته Y با تابع چگالی احتمال f_Y ارائه

می دهیم. با توجه با تساوی $P\{Y > y\} = \int_y^{\infty} f_Y(x) dx$ داریم

$$\int_0^{\infty} P\{Y > y\} dy = \int_0^{\infty} \int_y^{\infty} f_Y(x) dx dy \quad (1-2)$$

با تعویض ترتیب انتگرال گیری در معادله (۱-۲) داریم

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} P\{Y > y\} dy &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^x dy \right) f_Y(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x f_Y(x) dx \end{aligned} \quad (۲-۲)$$

بطور مشابه

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} P\{Y < -y\} dy &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{-y} f_Y(x) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^{-x} dy \right) f_Y(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^0 x f_Y(x) dx \end{aligned} \quad (۳-۲)$$

اینک از معادلات (۲-۲) و (۳-۲) نتیجه می شود

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} P\{Y > y\} dy - \int_0^{\infty} P\{Y < -y\} dy &= \int_0^{x_1} x f_Y(x) dx + \int_{-\infty}^0 x f_Y(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_Y(x) dx \\ &= E[Y] \end{aligned}$$

در اکثر اوقات این لم که در حد خود قابل توجه است، در متون درسی برای متغیر تصادفی نامنفی Y بیان می شود.

$$E[Y] = \int_0^{\infty} P\{Y > y\} dy \quad \text{هرگاه } P\{Y \geq 0\} = 1$$

اکنون زمان آن است که حکم ، ۱-۲ (ب) را ثابت کنیم.

پرهان حکم ۱-۲ (ب): برای هر تابع g بنا بر لم ۱-۲ داریم

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \int_0^{\infty} P\{g(X) > y\} dy - \int_0^{\infty} P\{g(X) < -y\} dy \\ &= \int_0^{\infty} \int_{x: g(x) > y} f(x) dx dy - \int_0^{\infty} \int_{x: g(x) < -y} f(x) dx dy \\ &= \int_{x: g(x) > 0} \int_0^{g(x)} dy f(x) dx - \int_{x: g(x) < 0} \int_0^{-g(x)} dy f(x) dx \\ &= \int_{x: g(x) > 0} g(x) f(x) dx + \int_{x: g(x) < 0} g(x) f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \end{aligned}$$

و اثبات کامل می گردد.

مثال ۲ پ: کالایی که بطور فصلی فروخته می شود، سود خالص b تومان برای هر واحد فروخته شده و زیان خالص ℓ تومان برای هر واحد فروش نشده در پایان فصل خواهد داشت. تعداد اقلام کالا که فروشگاه خاصی در طول هر فصل سفارش می دهد، متغیر تصادفی با تابع جرم احتمال $p(i)$ ، $i \geq 0$ می باشد. اگر لازم باشد این فروشگاه کالا را از قبل ذخیره کند تعیین کنید فروشگاه چند واحد کالا باید ذخیره نماید تا میانگین سودش ماکزیمم شود.

حل: فرض کنید X نمایش تعداد کالای سفارش شده باشد. اگر s کالا ذخیره شده باشد در این صورت سود آن را که با $P(s)$ نشان می دهیم به صورت زیر محاسبه می شود

$$P(s) = \begin{cases} bX - (s - X)\ell & X \leq s \\ sb & X > s \end{cases}$$

بنابراین میانگین سود برابر است با

$$\begin{aligned} E[P(s)] &= \sum_{i=0}^s [bi - (s - i)\ell]p(i) + \sum_{i=s+1}^{\infty} sbp(i) \\ &= (b + \ell) \sum_{i=0}^s ip(i) - s\ell \sum_{i=0}^s p(i) + sb \left[1 - \sum_{i=0}^s p(i) \right] \\ &= (b + \ell) \sum_{i=0}^s ip(i) - (b + \ell)s \sum_{i=0}^s p(i) + sb \\ &= sb + (b + \ell) \sum_{i=0}^s (i - s)p(i) \end{aligned}$$

برای تعیین مقدار بهینه s ، مقدار s را به اندازه ۱ واحد افزایش داده و تغییرات سود را بررسی می کنیم. با این تغییر دیده می شود که میانگین سود در این حالت به صورت زیر در می آید.

$$\begin{aligned} E[P(s+1)] &= b(s+1) + (b + \ell) \sum_{i=0}^{s+1} (i - s - 1)p(i) \\ &= b(s+1) + (b + \ell) \sum_{i=0}^s (i - s - 1)p(i) \end{aligned}$$

بنابراین

$$E[P(s+1)] - E[P(s)] = b - (b + \ell) \sum_{i=0}^s p(i)$$

از این رو ذخیره $s+1$ کالا بهتر از ذخیره s کالا خواهد بود در صورتی که داشته باشیم

$$\sum_{i=0}^s p(i) < \frac{b}{b+\ell} \quad (۴-۲)$$

چون سمت چپ نا معادله (۴-۲) با افزایش s اضافه می شود در حالی که سمت راست ثابت است، لذا نتیجه می شود که نا معادله برای تمام مقادیر $s \leq s^*$ برقرار می باشد وقتی s^* بزرگترین مقدار s است که نا معادله (۴-۲) درست باشد، زیرا

$$E[P(0)] < \dots < E[P(s^*)] < E[P(s^*+1)] > E[P(s^*+2)] > \dots$$

نتیجه می شود که ذخیره s^*+1 کالا میانگین سود ماکزیمم خواهد داشت.

حالت پیوسته مثال ۲ پ حل مشابهی دارد.

مثال ۴ ت. در مثال ۲ پ فرض کنید که حجم تقاضا یک متغیر تصادفی پیوسته با چگالی $f(x)$ می باشد. تعداد بهینه اقلای را که باید ذخیره نمود تا میانگین سود ماکزیمم شود تعیین کنید.

حل: مانند قبل اگر s کالا ذخیره شود و تقاضا X باشد در این صورت سود، $P(s)$ ، به صورت زیر است.

$$P(s) = \begin{cases} bX - (s - X)\ell & X \leq s \\ sb & X > s \end{cases}$$

بنابر این

$$\begin{aligned} E[P(s)] &= \int_0^s (bx - (s-x)\ell)f(x) dx + \int_s^\infty sbf(x) dx \\ &= (b+\ell) \int_0^s xf(x) dx - s\ell \int_0^s f(x) dx + sb \left[1 - \int_0^s f(x) dx \right] \\ &= sb + (b+\ell) \int_0^s (x-s)f(x) dx \end{aligned} \quad (۵-۲)$$

اکنون می توان با حساب جامعه مقداری از s را که معادله (۵-۲) را ماکزیمم می کند به دست آورد. با مشتق گیری نتیجه می شود

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E[P(s)] &= b + (b + \ell) \frac{d}{ds} \left[\int_0^s xf(x) dx - s \int_0^s f(x) dx \right] \\ &= b + (b + \ell) \left[sf(s) - sf(s) - \int_0^s f(x) dx \right] \\ &= b - (b + \ell) \int_0^s f(x) dx \end{aligned}$$

میانگین سود ماکزیمم با مساوی صفر قرار دادن عبارت فوق به دست می آید، اگر S در معادله زیر صدق کند

$$F(s) = \frac{b}{b + \ell}$$

در این معادله $F(s) = \int_0^s f(x) dx$ تابع توزیع تقاضاست.
نتیجه حکم ۱-۲ به قرار زیر است.

نتیجه ۱-۲

اگر a و b ثابت باشند در این صورت

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

بوهان: در حالت گسسته، داریم

$$\begin{aligned} E[aX + b] &= \sum_{x: p(x) > 0} (ax + b)p(x) \\ &= a \sum_{x: p(x) > 0} xp(x) + b \sum_{x: p(x) > 0} p(x) \\ &= aE[X] + b \end{aligned}$$

در حالت پیوسته، داریم

$$\begin{aligned} E[aX + b] &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)f(x) dx \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\ &= aE[X] + b \end{aligned}$$

امید ریاضی متغیر تصادفی X را میانگین یا گشتاور مرتبه اول X نیز می نامیم، کمیت $E[X^n]$ ،

$n \geq 1$ ، را گشتاور مرتبه n ام X می نامیم. طبق حکم ۲ - ۱ داریم

$$E[X^n] = \begin{cases} \sum_{x:p(x)>0} x^n p(x) & \text{اگر } X \text{ گسسته باشد} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx & \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد} \end{cases}$$

۳ - میانگین مجموع متغیرهای تصادفی

حالت دوبعدی قانون ناآگاهی (حکم ۲-۱) بیان می کند که اگر X ، Y متغیرهای تصادفی و g یک تابع دومتغیره باشد، در این صورت اگر تابع جرم احتمال مشترك X و Y برابر $p(x, y)$ باشد، داریم

$$E[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y) p(x, y)$$

و اگر تابع جرم احتمال مشترك X و Y برابر $f(x, y)$ باشد، داریم

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$$

به عنوان کاربرد معادلات قبل فرض کنید که $E[X]$ و $E[Y]$ هر دو متناهی باشند و فرض کنید که $g(X, Y) = X + Y$. در این صورت در حالت پیوسته داریم

$$\begin{aligned} E[X + Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + y) f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dy dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \\ &= E[X] + E[Y] \end{aligned}$$

این نتیجه در حالت کلی برقرار می باشد؛ از این رو وقتی $E[X]$ و $E[Y]$ متناهی اند

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

اکنون بایک استقراء ساده نتیجه می شود که اگر برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ ، $E[X_i]$ متناهی باشد، در این صورت

$$E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n] \quad (1-3)$$

معادله (۱-۳) یک فرمول بسیار مفید است که سودمندی آن را با چند مثال بیان می کنیم.

مثال ۳ الف. یک تاس سالم را ۱۰ بار مستقلاً پرتاب می کنیم، امید ریاضی مجموع را تعیین کنید.

حل: فرض کنید X نمایش مجموع حاصل باشد. اگر برای محاسبه $E[X]$ نخست توزیع X را تعیین کنیم در این صورت برای حل مسأله زمان نسبتاً زیادی لازم است. لیکن با توجه به این که

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$$

وقتی X_i برابر مقدار پرتاب i ام می باشد، بلافاصله دیده می شود که

$$E[X] = E[X_1] + \dots + E[X_{10}] = 10\left(\frac{7}{2}\right) = 35$$

مثال ۳ ب. میانگین متغیر تصادفی دو جمله ای، به عنوان مثال دیگری از کارایی معادله (۱-۳)، با استفاده از آن میانگین متغیر تصادفی دو جمله ای با پارامترهای n و p را به دست می آوریم. یادآور می شویم که متغیر تصادفی X نمایش تعداد موفقیتها در n آزمایش مستقل است وقتی احتمال موفقیت در هر آزمایش p باشد، در این صورت

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

که در آن

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر آزمایش } i \text{ ام موفقیت باشد} \\ 0 & \text{اگر آزمایش } i \text{ ام شکست بخورد} \end{cases}$$

بنابراین X_i یک متغیر تصادفی برنولی با میانگین $E[X_i] = 1(p) + 0(1-p)$ است، لذا

$$E[X] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n] = np$$

این نتیجه را با نتیجه حاصل در مثال ۱ ب مقایسه نمایید.

مثال ۳ پ. میانگین تعداد جوربودنها. یک گروه N تایی از مردان کلاههای خود را در وسط اتاق می گذارند. کلاهها باهم مخلوط می شوند و هر مرد یکی از آنها را به تصادف انتخاب

می کند. میانگین تعداد مردانی را که کلاه خودشان را انتخاب می کنند بیابید.

حل: فرض کنید X نمایش تعداد جور بودن ها باشد، $E[X]$ را بسادگی می توان حساب کرد وقتی

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

که در آن

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر مرد } i \text{ ام کلاه خود را انتخاب کند} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

چون برای هر i ، مرد i ام با احتمال مساوی هریک از N کلاه را انتخاب می کند

$$E[X_i] = P\{X_i = 1\} = \frac{1}{N}$$

دیده می شود که

$$E[X] = E[X_1] + \dots + E[X_N] = \left(\frac{1}{N}\right)N = 1$$

بنابر این بطور متوسط دقیقاً یکی از مردان کلاه خود را انتخاب می کند.

مثال ۳ ت. میانگین متغیر تصادفی دو جمله ای منفی. اگر آزمایشهای مستقل با احتمال ثابت موفقیت p انجام شوند، میانگین تعداد آزمایشهای لازم برای گردآوری r موفقیت را بیابید.

حل: اگر X نمایش تعداد آزمایشهای لازم برای به دست آوردن r موفقیت باشد، در این صورت X یک متغیر تصادفی دو جمله ای منفی است که تابع جرم آن عبارت است از

$$P\{X = n\} = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}, \quad n = r, r+1, \dots$$

بنابراین نتیجه می شود که

$$E[X] = \sum_{n=r}^{\infty} n \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} \quad (2-3)$$

لیکن با توجه به مجموع زیر عبارت ساده تری برای $E[X]$ به دست می آید.

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_r$$

وقتی X_1 تعداد آزمایشهای لازم برای کسب اولین موفقیت باشد، X_2 تعداد آزمایشهای اضافی تا زمان حصول موفقیت دوم باشد، X_3 تعداد آزمایشهای اضافی باشد تا این که موفقیت سوم حاصل شود و الی آخر. یعنی نمایش شماره آزمایشهای اضافی لازم پس از موفقیت $(i-1)$ ام است تا مجموعاً i موفقیت کسب نماییم. با بررسی کوتاهی روشن می شود که هر یک از متغیرهای تصادفی X_i متغیر تصادفی هندسی با پارامتر p است، بنابراین از نتیجه مثال ۱ ث داریم $E[X_i] = \frac{1}{p}$ ، و لذا

$$E[X] = E[X_1] + \dots + E[X_r] = \frac{r}{p} \quad (3-3)$$

مثال ۳ ث. میانگین متغیر تصادفی لوق هندسی. از ظرفی که شامل N توپ سفید و M توپ سیاه است بطور تصادفی n توپ انتخاب می کنیم. میانگین تعداد توپهای سفید انتخاب شده را بیابید.

حل: فرض کنید X نمایش تعداد توپهای سفید انتخاب شده باشد. نتیجه می شود

که

$$P\{X = k\} = \frac{\binom{N}{k} \binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}$$

از این رو

$$E[X] = \frac{\sum_{k=0}^n k \binom{N}{k} \binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}$$

ولی می توان عبارت ساده تری برای $E[X]$ با توجه به مجموع زیر نوشت

$$X = X_1 + \dots + X_N$$

که در آن

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر توپ سفید } i\text{ام انتخاب شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اکنون

$$\begin{aligned}
 E[X_i] &= P\{X_i = 1\} \\
 &= P\{\text{توپ سفید } i \text{ ام انتخاب شود}\} \\
 &= \frac{\binom{1}{1} \binom{M+N-1}{n-1}}{\binom{M+N}{n}} \\
 &= \frac{n}{M+N}
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$E[X] = E[X_1] + \cdots + E[X_n] = \frac{Nn}{M+N}$$

البته، می توان این نتیجه را با نمایش X به صورت زیر نیز به دست آورد

$$X = Y_1 + \cdots + Y_n$$

که در آن

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر توپ } i \text{ ام انتخاب شده سفید باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

چون توپ i ام انتخاب شده با شانس مساوی یک از $M+N$ توپ است، داریم

$$E[Y_i] = \frac{N}{M+N}$$

و از این رو

$$E[X] = E[Y_1] + \cdots + E[Y_n] = \frac{nN}{M+N}$$

مثال ۳ ج. مسأله زیر در قرن هیجدهم توسط دانیل برنولی مطرح و حل شد. فرض کنید که جعبه ای شامل $2N$ کارت باشد. بطوری که دو تا از آنها با ۱، دو تا با ۲ و دو تا با ۳ و الی آخر نشان داده شده اند، بطور تصادفی m کارت بیرون می آوریم. میانگین تعداد زوجهایی که هنوز در ظرف باقی مانده است چقدر است؟ (جالب توجه این که، برنولی مسأله فوق را به عنوان مدل احتمالی ممکن برای تعیین تعداد زوجهای باقی مانده وقتی از N زوج متأهل m نفر فوت کنند در نظر گرفت).

حل: برای $i = 1, 2, \dots, N$ تعریف می‌کنیم

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر زوج } i \text{ ام در ظرف باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اکنون،

$$\begin{aligned} E[X_i] &= P\{X_i = 1\} \\ &= \frac{\binom{2N-2}{m}}{\binom{2N}{m}} \\ &= \frac{(2N-2)!}{m!(2N-2-m)!} \\ &= \frac{(2N)!}{m!(2N-m)!} \\ &= \frac{(2N-m)(2N-m-1)}{(2N)(2N-1)} \end{aligned}$$

بنابراین نتیجه مطلوب برابر است با

$$\begin{aligned} E[X_1 + X_2 + \dots + X_N] &= E[X_1] + \dots + E[X_N] \\ &= \frac{(2N-m)(2N-m-1)}{2(2N-1)} \end{aligned}$$

مثال ۳ ج . مسأله جمع آوری کوپن . فرض کنید N نوع مختلف کوپن وجود دارد و هر زمان

که کوپنی به دست می‌آوریم با شانس مساوی یکی از این N نوع می‌باشد.

۱- میانگین تعداد انواع مختلف کوپنهایی را که در مجموعه n کوپن وجود دارد پیدا کنید.

۲- میانگین تعداد کوپنهایی را که یک فرد نیاز دارد جمع آوری کند - قبل از این که

مجموعه کاملی شامل حداقل یکی از هر نوع داشته باشد - حساب کنید.

حل: ۱- فرض کنید X نمایش تعداد انواع مختلف کوپنها در مجموعه n کوپن باشد.

$E[X]$ را با استفاده رابطه زیر حساب می‌کنیم

$$X = X_1 + \dots + X_N$$

که در آن

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر حداقل یک کوپن از نوع } n \text{ در مجموعه } n \text{ کوپن باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اکنون

$$\begin{aligned} E[X_i] &= P\{X_i = 1\} \\ &= 1 - P\{\text{کوپنی از نوع } i \text{ در مجموعه } n \text{ تایی نیست}\} \\ &= 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n \end{aligned}$$

بنابراین

$$E[X] = E[X_1] + \dots + E[X_n] = N \left[1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n \right]$$

۲- فرض کنید Y نمایش تعداد کوپنهای جمع آوری شده باشد قبل از این که مجموعه کامل داشته باشیم. با استفاده از همان روشی که برای محاسبه میانگین متغیر تصادفی دو جمله ای منفی (مثال ۳ ت) به کار بردیم، $E\{Y\}$ را حساب می کنیم. یعنی فرض کنید پس از آن که i نوع کوپن متمایز جمع آوری کردیم Y_i ، $i = 0, 1, \dots, N-1$ ، تعداد کوپنهای اضافی لازم برای به دست آوردن یک نوع متمایز دیگر باشد. توجه کنید که

$$Y = Y_0 + Y_1 + \dots + Y_{N-1}$$

لذا نتیجه می شود که کوپن جدید به دست آمده با احتمال $\left(\frac{N-i}{N}\right)$ از نوع متمایز است وقتی i نوع کوپن متمایز قبلاً جمع آوری کرده باشیم. بنابراین،

$$P\{Y_i = k\} = \frac{N-i}{N} \left(\frac{i}{N}\right)^{k-1} \quad k \geq 1$$

یا به عبارت دیگر Y_i یک متغیر تصادفی هندسی با پارامتر $\frac{N-i}{N}$ می باشد. از مثال ۱ ت داریم

$$E\{Y_i\} = \frac{N}{N-i}$$

لذا نتیجه می شود که

$$E\{Y\} = 1 + \frac{N}{N-1} + \frac{N}{N-2} + \dots + \frac{N}{1} = N \left[1 + \dots + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N} \right]$$

مثال ۳ ح. ده شکارچی منتظر پرواز مرغابیها هستند. وقتی یک دسته از مرغابیها در بالای سر آنها پرواز می کنند شکارچیان در یک زمان شلیک می کنند ولی هر یک هدف خود را بطور تصادفی مستقل از دیگران انتخاب می کند. اگر هر شکارچی هدف خود را مستقلاً با احتمال p بزند، در صورتی که یک دسته ده تایی در حال پرواز باشند میانگین تعداد مرغابیهایی را که صدمه ندیده فرار می کنند پیدا کنید.

حل: فرض کنید X_i , $i = 1, 2, \dots, 10$ برابر ۱ باشد اگر مرغابی i ام صدمه ندیده فرار کند و در غیر این صورت صفر باشد. میانگین مرغابیهایی را که صدمه ندیده فرار می کنند می توان به صورت زیر بیان کرد

$$E[X_1 + \dots + X_{10}] = E[X_1] + \dots + E[X_{10}]$$

برای محاسبه $E[X_i | P\{X_i = 1\}]$ توجه کنید که هر شکارچی مستقلاً مرغابی i ام را با احتمال $\frac{p}{10}$ می زند و بنابراین

$$P\{X_i = 1\} = \left(1 - \frac{p}{10}\right)^{10}$$

بنابراین

$$E[X] = 10 \left(1 - \frac{p}{10}\right)^{10}$$

مثال ۳ غ. میانگین تعداد گشتهها. فرض کنید که یک دنباله از n تا ۱ و m تا 0 بطور تصادفی جابه جا می شوند به قسمی که هر یک از $(n+m)! / (n!m!)$ ترتیب ممکن شانس مساوی دارند. هر رشته متوالی از ۱ها را یک گشت از ۱ها می نامیم. مثلاً، اگر $n = 6$ و $m = 4$ و ترتیب به صورت 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1 باشد در این صورت سه گشت از ۱ها وجود دارد. می خواهیم میانگین تعداد این گشتهها را محاسبه کنیم. برای محاسبه این کمیت فرض کنید

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر یک گشت از ۱ها از مکان } i \text{ام شروع شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین $R(1)$ ، تعداد گشتههای ۱ را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$R(1) = \sum_{i=1}^{n+m} I_i$$

و لذا

$$E[R(1)] = \sum_{i=1}^{n+m} E[I_i]$$

اکنون

$$\begin{aligned} E[I_1] &= P\{\text{"1" در مکان 1 باشد}\} \\ &= \frac{n}{n+m} \end{aligned}$$

و برای $1 < i \leq n+m$

$$\begin{aligned} E[I_i] &= P\{\text{"0" در مکان } i-1 \text{ و "1" در مکان } i \text{ باشد}\} \\ &= \frac{m}{n+m} \frac{n}{n+m-1} \end{aligned}$$

بنابراین

$$E[R(1)] = \frac{n}{n+m} + (n+m-1) \frac{nm}{(n+m)(n+m-1)}$$

بطور مشابه، میانگین گشت 0 ها یعنی $E[R(0)]$ برابر است با

$$E[R(0)] = \frac{m}{n+m} + \frac{nm}{n+m}$$

و میانگین گشت هر دو ی آنها برابر است با

$$E[R(1) + R(0)] = 1 + \frac{2nm}{n+m}$$

مثال ۵۳. یک دست کارت معمولی را در نظر گرفته و هر بار یک کارت رو می کنیم. میانگین کارتهای روشده برای اینکه (۱) یک آس و (۲) یک پیک داشته باشیم چقدر است؟

حل: هر دو قسمت (۱) و (۲) حالت خاصی از مسأله زیر است: فرض کنید از کیسه ای که شامل n توپ سفید و m توپ سیاه است توپها را یک به یک از کیسه خارج کنیم تا اولین توپ سفید به دست آید. اگر X نمایش تعداد توپهای خارج شده باشد، $E[X]$ را بیابید. برای حل این مسأله فرض کنید توپهای سیاه در کیسه با b_1, b_2, \dots, b_m نامگذاری شده اند. اگر برای $i = 1, 2, \dots, m$ فرض کنیم

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر } b \text{ قبل از هر توپ سفیدی بیرون آید} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین بسادگی دیده می شود

$$X = 1 + \sum_{i=1}^m X_i$$

بنابراین

$$E[X] = 1 + \sum_{i=1}^m P\{X_i = 1\}$$

در هر صورت اگر توپ b قبل از هر یک از n توپ سفید بیرون آید X_i برابر ۱ می باشد. ولی چون هر یک از $n+1$ توپ (n توپ سفید و توپ b) با احتمال مساوی می توانند اولین توپ به دست آمده از این مجموعه باشند، بنابراین داریم

$$E[X_i] = P\{X_i = 1\} = \frac{1}{n+1}$$

بنابراین

$$E[X] = 1 + \frac{m}{n+1}$$

مثال ۳ ذ. گام برداری تصادفی در صفحه. جسمی را که نخست در نقطه معلومی از

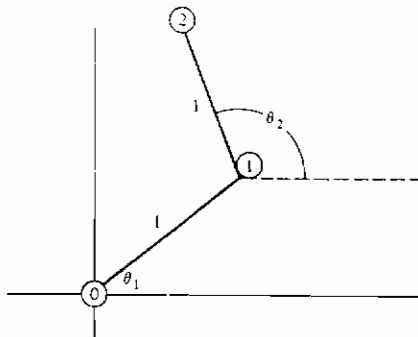
صفحه قرار دارد در نظر بگیرید و فرض کنید که دنباله ای از گامها با طول ثابت واحد ولی در جهت کاملاً تصادفی برداشته می شود. بخصوص، فرض کنید که مکان جدید بعد از هر گام به فاصله یک واحد از مکان قبلی بوده و زاویه تعیین موقعیت آن با مکان قبلی دارای توزیع یکنواخت روی $(0, 2\pi)$ است (شکل ۷-۲). مربع فاصله را از مبدأ پس از n گام بیابید.

حل: فرض کنید (X_i, Y_i) نمایش تغییر وضعیت در گام i ام، $i = 1, 2, \dots, n$ ،

در مختصات دکارتی باشد. داریم

$$X_i = \cos \theta_i$$

$$Y_i = \sin \theta_i$$



- ① = مکان نخست
 ① = مکان پس از گام اول
 ② = مکان پس از گام دوم

شکل ۲-۷

وقتی بنا به فرض θ_i ها، $i = 1, 2, \dots, n$ متغیرهای تصادفی مستقل یکنواخت روی $(0, 2\pi)$ باشند، چون مکان پس از n گام دارای مختصات دکارتی $(\sum X_i, \sum Y_i)$ است، دیده می شود که D^2 ، مربع فاصله در مبدأ، به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} D^2 &= \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2) + \sum_{i \neq j} (X_i X_j + Y_i Y_j) \\ &= n + \sum_{i \neq j} (\cos \theta_i \cos \theta_j + \sin \theta_i \sin \theta_j) \end{aligned}$$

که در آن از رابطه $\cos^2 \theta_i + \sin^2 \theta_i = 1$ استفاده می شود. با گرفتن میانگین و به کار بردن استقلال θ_j, θ_i وقتی $i \neq j$ و این حقیقت که

$$E[\cos \theta_i] = \int_0^{2\pi} \cos u \, du = \sin 2\pi - \sin 0 = 0$$

$$E[\sin \theta_i] = \int_0^{2\pi} \sin u \, du = \cos 0 - \cos 2\pi = 0$$

نتیجه می شود که

$$E[D^2] = n$$

وقتی بایک دسته بی نهایت از متغیرهای تصادفی X_i ، $i \geq 1$ ، که هر یک دارای میانگین متناهی اند مواجهیم، لزومی ندارد که داشته باشیم

$$E\left[\sum_{i=1}^x X_i\right] = \sum_{i=1}^x E[X_i] \quad (۴-۳)$$

برای تعیین این که رابطه (۴-۳) چه وقت درست است، توجه کنید که

$$\sum_{i=1}^{\infty} X_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^x X_i\right] &= E\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n X_i\right] \\ &\stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] \quad (۵-۳) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n E[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^x E[X_i] \end{aligned}$$

بنابراین وقتی تعویض عمل میانگین و حد در معادله (۵-۳) درست باشد معادله (۴-۳) برقرار است. گرچه بطور کلی این تعویض درست نیست، ولی می توان نشان داد که در دو حالت مهم زیر درست است:

۱- X_i ها همگی متغیرهای تصادفی نامنفی باشند (یعنی $P\{X_i \geq 0\} = 1$ برای تمام i ها).

$$\sum_{i=1}^{\infty} E[X_i] < \infty. \quad -۲$$

مثال ۳. متغیر تصادفی نامنفی X با مقادیر صحیح را در نظر می گیریم، اگر برای هر $i \geq 1$ ،

تعریف کنیم

$$X_i = \begin{cases} 1 & X \geq i \\ 0 & X < i \end{cases}$$

در این صورت

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^x X_i &= \sum_{i=1}^x X_i + \sum_{i=x+1}^{\infty} X_i \\ &= \sum_{i=1}^x 1 + \sum_{i=x+1}^{\infty} 0 \\ &= x \end{aligned}$$

بنابراین چون تمام X_i ها تا منفی اند، داریم

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=1}^{\infty} E(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P\{X \geq i\} \end{aligned} \quad (۶-۳)$$

که یک تساوی مفید است.

مثال ۳ ز- فرض کنید n شیئی که آنها را $۱, ۲, \dots, n$ می نامیم باید در یک کامپیوتر به صورت یک لیست مرتب ذخیره شوند. در هر واحد زمان یکی از این اشیاء فراخوانده می شود، شیئی i ام را مستقل از گذشته با احتمال $P(i)$ ، $i \geq 1$ ، $\sum_i P(i) = 1$ فرامی خوانیم. فرض کنید این احتمالات معلومند، به چه ترتیبی اشیاء را فراخوانیم تا میانگین مکان اشیاء فراخوانده شده مینیمم گردد.

حل: فرض کنید اشیاء چنان شماره گذاری شده اند که $P(1) \geq P(2) \geq \dots \geq P(n)$. برای این که نشان دهیم $۱, ۲, \dots, n$ ترتیب بهینه است، فرض کنید X نمایش مکان شیئی فراخوانده شده باشد. اکنون تحت هر ترتیبی، به عنوان مثال $O = i_1, i_2, \dots, i_n$ داریم

$$\begin{aligned} P_O\{X \geq k\} &= \sum_{j=k}^n P(i_j) \\ &\geq \sum_{j=k}^n P(j) \\ &= P_{1,2,\dots,n}\{X \geq k\} \end{aligned}$$

با جمع بندی روی k و بنا بر معادله (۶-۳)، داریم

$$E_O[X] \geq E_{1,2,\dots,n}[X]$$

این نشان می دهد که با مرتب کردن اشیاء به ترتیب نزولی برحسب احتمالات فراخوانی آنها میانگین مکان اشیاء فراخوانده شده را مینیمم می کند.

مثال ۳ ز. احتمال اجتماع پیشامدها. فرض کنید A_1, \dots, A_n نمایش پیشامدها باشند و متغیرهای نشانگر X_i ، $i = 1, \dots, n$ ، را به صورت زیر تعریف کنید

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{در رخ دهد } A_i \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

حال، توجه کنید که

$$1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i) = \begin{cases} 1 & \text{رخ دهد } \cup A_i \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین

$$E \left[1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i) \right] = P \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)$$

با بسط سمت چپ رابطه فوق نتیجه می شود

$$P \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = E \left[\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i < j} \sum X_i X_j + \sum_{i < j < k} \sum X_i X_j X_k - \dots + (-1)^{n+1} X_1 \dots X_n \right] \quad (7-3)$$

در حالی که

$$X_i X_j \dots X_k = \begin{cases} 1 & \text{رخ دهد } A_i A_j \dots A_k \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

دیده می شود

$$E[X_i \dots X_k] = P(A_i \dots A_k)$$

و بنابراین (7-3) دقیقاً فرمول مشهور مربوط به اجتماع پیشامدها را بیان می کند.

$$P(\cup A_i) = \sum P(A_i) - \sum_{i < j} \sum P(A_i A_j) + \sum_{i < j < k} \sum P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n)$$

۴ - واریانس

متغیر تصادفی X و تابع توزیع آن، F ، را در نظر می گیریم، اگر بتوان خواص لازم F را با بعضی اندازه های تعریف شده مناسب خلاصه کرد بسیار مفید خواهد بود. یکی از این اندازه ها $E[X]$ ، امید ریاضی X ، است. با این که $E[X]$ متوسط موزون مقادیر ممکن X را می دهد ولی چیزی در باره تغییرات یا پراکندگی این مقادیر بیان نمی کند. مثلاً با این که

متغیرهای تصادفی W ، Y و Z با توابع جرم احتمال به صورت زیر

$$\begin{array}{ll}
 W = 0 & \text{با احتمال } 1 \\
 Y = \begin{cases} -1 \\ +1 \end{cases} & \begin{array}{l} \text{با احتمال } \frac{1}{2} \\ \text{با احتمال } \frac{1}{2} \end{array} \\
 Z = \begin{cases} -100 \\ +100 \end{cases} & \begin{array}{l} \text{با احتمال } \frac{1}{2} \\ \text{با احتمال } \frac{1}{2} \end{array}
 \end{array}$$

همگی دارای میانگین مساوی، یعنی 0، هستند پراکندگی بیشتری در مقادیر ممکن Y نسبت به مقادیر W (که ثابت است) و پراکندگی بیشتری در مقادیر ممکن Z نسبت به مقادیر Y وجود دارد. اگر چنان که انتظار داریم X مقادیری حول میانگین خود $E[X]$ اختیار کند، به نظر می‌رسد که روش مناسب اندازه‌گیری واریانس X این باشد که بدانیم پراکندگی X نسبت به میانگین خودش بطور متوسط چقدر است. یک روش ممکن برای اندازه‌گیری این است که کمیت $E[|X - \mu|]$ را که در آن $\mu = E[X]$ حساب کنیم، ولی نتیجه می‌شود که کاربرد این کمیت از نظر ریاضی مناسب به نظر نمی‌رسد و بنابراین کمیت مناسبتری، یعنی میانگین مربع تفاصل بین X و میانگین آن، را معمولاً در نظر می‌گیرند. بنابراین تعریف زیر را داریم.

تعریف

اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین μ باشد در این صورت واریانس X که با نماد $\text{Var}(X)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2]$$

مثال ۲ الف . واریانس یک متغیر نرمال. X یک متغیر تصادفی نرمال با پارامترهای μ و σ^2 است، $\text{Var}(X)$ را بیابید.

حل : خاطر نشان می‌سازیم (مثال ۱ خ را ببینید) که $E[X] = \mu$ ، پس

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= E[(X - \mu)^2] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 e^{-(x - \mu)^2 / 2\sigma^2} dx \quad (1-4)
 \end{aligned}$$

از معادله (۴-۱) با فرض $y = (x-\mu) / \sigma$ ، نتیجه می شود

$$\text{Var}(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2/2} dy$$

با انتگرال گیری جزء به جزء

$$\begin{aligned} &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[-ye^{-y^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \right] \\ &= \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

می توان فرمول دیگری برای $\text{Var}(X)$ به صورت زیر به دست آورد .

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\ &= E[X^2] - E[2\mu X] + E[\mu^2] \\ &= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 \\ &= E[X^2] - \mu^2 \end{aligned}$$

یعنی

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 \quad (۴-۲)$$

به عبارت دیگر ، واریانس X برابر امید ریاضی X^2 منهای مربع امید ریاضی X است . معمولاً در عمل این ساده ترین روش محاسبه $\text{Var}(X)$ است .

مثال ۴ ب . اگر X نمایش پرآمد پرتاب یک تاس سالم باشد ، $\text{Var}(X)$ را حساب کنید .

حل : در مثال ۱ الف نشان داده شد که $E[X] = \frac{7}{2}$ ، همچنین

$$\begin{aligned} E[X^2] &= 1^2\left(\frac{1}{6}\right) + 2^2\left(\frac{1}{6}\right) + 3^2\left(\frac{1}{6}\right) + 4^2\left(\frac{1}{6}\right) + 5^2\left(\frac{1}{6}\right) + 6^2\left(\frac{1}{6}\right) \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)(91) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\text{Var}(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

مثال ۴ پ: واریانس متغیر تصادفی دو جمله‌ای X با پارامترهای n و p را حساب کنید.
حل: نخست $E[X^2]$ را به صورت زیر حساب می‌کنیم.

$$E[X^2] = \sum_{i=0}^n i^2 \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

برای محاسبه مقدار فوق با استفاده از تساوی $i^2 = i(i-1) + i$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sum_{i=0}^n i(i-1) \frac{n!}{(n-i)!i!} p^i (1-p)^{n-i} + \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= \sum_{i=2}^n \frac{n!}{(n-i)!(i-2)!} p^i (1-p)^{n-i} + E[X] \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{i=2}^n \binom{n-2}{i-2} p^{i-2} (1-p)^{n-i} + E[X] \\ &= n(n-1)p^2 [p + (1-p)]^{n-2} + E[X] \\ &= n(n-1)p^2 + E[X] \end{aligned}$$

چون $E[X] = np$ (از مثال (ب))، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 \\ &= np(1-p) \end{aligned}$$

برای هر ثابت a, b یک تساوی مفید عبارت است از

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X) \quad (۳-۴)$$

برای اثبات معادله (۳-۴) با توجه به نتیجه ۱-۲ داریم $E[aX + b] = aE[X] + b$
 بنابراین

$$\begin{aligned} \text{Var}(aX + b) &= E[(aX + b - (aE[X] + b))^2] \\ &= E[(aX - aE[X])^2] \\ &= E[a^2(X - E[X])^2] \\ &= a^2 E[(X - E[X])^2] \\ &= a^2 \text{Var}(X) \end{aligned}$$

نکته - مشابه آنچه که میانگین مرکز ثقل یک توزیع جرم است. در اصطلاح مکانیک،
 گشتاور ایستا (مانان اینرسی) را نشان می‌دهد

۵- کوواریانس، واریانس مجموع و همبستگی

با حکم زیر که نشان می دهد میانگین حاصلضرب متغیرهای مستقل برابر حاصلضرب میانگینهاست، شروع می کنیم.

حکم ۵-۱

اگر X و Y مستقل باشند در این صورت برای هر تابع f و g داریم

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$$

برهان: فرض کنید که X, Y با چگالی مشترك $f(x, y)$ توأمآ پیوسته اند، در این صورت

$$\begin{aligned} E[g(X)h(Y)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)f_X(x)f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(y)f_Y(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x) dx \\ &= E[h(Y)]E[g(X)] \end{aligned}$$

حالت گسسته اثبات مشابهی دارد.

کوواریانس هر دو متغیر تصادفی X و Y که آن را با $\text{Cov}(X, Y)$ نشان می دهیم به صورت زیر تعریف می شود

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

با بسط سمت راست معادله قبل نتیجه می شود،

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[XY - E[X]Y - XE[Y] + E[Y]E[X]] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] - E[X]E[Y] + E[X]E[Y] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] \end{aligned}$$

توجه کنید اگر X, Y مستقل باشند، بنابر حکم ۵-۱ نتیجه می شود که $\text{Cov}(x, y) = 0$ ؛ ولی عکس آن درست نیست. یک مثال ساده از دو متغیر تصادفی وابسته X و Y که دارای کوواریانس صفرند به طریق زیر به دست می آید: فرض کنید X متغیر تصادفی باشد به قسمی که

$$P\{X = 0\} = P\{X = 1\} = P\{X = -1\} = \frac{1}{3}$$

و تعریف کنید

$$Y = \begin{cases} 0 & X \neq 0 \\ 1 & X = 0 \end{cases}$$

اکنون داریم $XY = 0$ و بنا بر این $E[XY] = 0$. همچنین $E\{X\} = 0$ و بنا بر این

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 0$$

در حالی که X, Y بطور واضح مستقل نیستند.

می توان عبارت مفید زیر را برای واریانس مجموع دو متغیر تصادفی بر حسب کوواریانس به دست آورد

$$\begin{aligned} \text{Var}(X + Y) &= E[(X + Y - E[X + Y])^2] \\ &= E[(X + Y - EX - EY)^2] \\ &= E[((X - EX) + (Y - EY))^2] \\ &= E[(X - EX)^2 + (Y - EY)^2 + 2(X - EX)(Y - EY)] \\ &= E[(X - EX)^2] + E[(Y - EY)^2] \\ &\quad + 2E[(X - EX)(Y - EY)] \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) \end{aligned}$$

در حقیقت، با استفاده از بحث مشابهی می توان ثابت کرد

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j) \quad (۱-۵)$$

اگر X_1, \dots, X_n دو به دو مستقل باشند معادله (۱-۵) به معادله زیر تبدیل می شود

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) \quad (۲-۵)$$

مثال ۵ الف. واریانس متغیر تصادفی دو جمله‌ای. واریانس متغیر تصادفی دو جمله‌ای X با

پارامترهای n و p را بیابید.

حل: چون چنین متغیر تصادفی نمایش تعداد موفقیتها در n آزمایش مستقل است وقتی

هر آزمایش با احتمال مشترک p یک موفقیت باشد، می توان نوشت

$$X = X_1 + \dots + X_n$$

که در آن X_i ها متغیرهای تصادفی برنولی مستقلند، به قسمی که

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{آزمایش } i \text{ ام موفقیت باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین، از معادله (۲-۵) نتیجه می شود

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)$$

ولی

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_i) &= E[X_i^2] - (E[X_i])^2 \\ &= E[X_i] - (E[X_i])^2 & X_i^2 &= X_i \\ &= p - p^2 \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\text{Var}(X) = np(1-p)$$

مثال ۵ ب . واریانس تعداد جوړبوډن . واریانس X ، تعداد مردانی که کلاه خودشان را در مثال

۳ پ انتخاب می کنند، را بیابید

حل: X را همانند مثال ۳ پ در نظر می گیریم، یعنی

$$X = X_1 + \dots + X_N$$

وقتی

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{مرد } i \text{ ام کلاه خودش را انتخاب کند} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

از معادله (۱-۵) نتیجه می شود

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^N \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j) \quad (۳-۵)$$

چون $P\{X_i = 1\} = 1/N$ ، از مثال قبل دیده می شود که

$$\text{Var}(X_i) = \frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{N} \right) = \frac{N-1}{N^2}$$

همچنین

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j]$$

اکنون

$$X_i X_j = \begin{cases} 1 & \text{مرد } i \text{ ام و } j \text{ ام هر دو کلاه خودشان را انتخاب کنند} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} E[X_i X_j] &= P\{X_i = 1, X_j = 1\} \\ &= P\{X_i = 1\}P\{X_j = 1 | X_i = 1\} \\ &= \frac{1}{N} \frac{1}{N-1} \end{aligned}$$

پس

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{N(N-1)} - \left(\frac{1}{N}\right)^2 = \frac{1}{N^2(N-1)}$$

و از معادله (۵-۳)، داریم

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \frac{N-1}{N} + 2 \binom{N}{2} \frac{1}{N^2(N-1)} \\ &= \frac{N-1}{N} + \frac{1}{N} \\ &= 1 \end{aligned}$$

بنابراین میانگین و واریانس تعداد جور بودن‌ها هر دو برابر ۱ است. این نتیجه تا حدی غیرمنتظره نیست، زیرا همچنان که در بخش ۵ فصل ۲ نشان دادیم وقتی N بزرگ است احتمال i جور بودن تقریباً برابر $\frac{e^{-1}}{i!}$ است. یعنی، وقتی N بزرگ باشد تعداد جور بودن‌ها تقریباً دارای توزیع پواسن با میانگین ۱ است. بنابراین چون میانگین و واریانس متغیر تصادفی پواسن برابرند. (تمرین نظری ۱۰ را ببینید)، نتیجه حاصل در این مثال تعجب‌انگیز نیست.

مثال ۵ ب. نمونه‌گیری از یک جمعیت متناهی. مجموعه‌ای از N فرد را در نظر می‌گیریم که هر کدام دارای عقیده‌ای در باره موضوع خاصی هستند که با عدد حقیقی v سنجیده می‌شود. «شدت احساس» فرد را درباره موضوع نشان می‌دهد. شدت احساس فرد i ، $i = 1, 2, \dots, N$ را با v_i نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم این کمیتها، v_1, v_2, \dots, v_N مجهولند و برای جمع‌آوری

اطلاعات « با انتخاب تصادفی » یک گروه n تایی از N فرد را انتخاب می کنیم، بدین معنی که تمام $\binom{N}{n}$ زیر مجموعه با حجم n با احتمال مساوی انتخاب می شوند. اگر S نمایش مجموع n مقدار نمونه گیری شده باشد، میانگین و واریانس آن را بیابید.

کاربرد مهم مطلب فوق در انتخابات است که قبل از انتخابات هر فرد در جامعه موافق یا مخالف کاندیدای معینی یا موضوع خاصی است. اگر فرد i موافق باشد، v_i را مساوی ۱ و اگر مخالف باشد 0 در نظر می گیریم. بنابراین $\bar{v} = \sum_{i=1}^N \frac{v_i}{N}$ نسبتی از جامعه را که موافقند نشان می دهد. برای برآورد \bar{v} ، یک نمونه تصادفی n تایی از کسانی که رأی داده اند انتخاب می کنیم. نسبت آنهایی که موافق رأی داده اند - یعنی $\frac{S}{n}$ - را اغلب به عنوان برآورد \bar{v} به کار می برند.

حل: برای هر فرد i ، $i = 1, 2, \dots, N$ یک متغیر نشانگر I_i برای تشخیص این که شخص در نمونه هست یا خیر، تعریف می کنیم. یعنی

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{فرد } i \text{ در نمونه تصادفی باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اکنون S را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$S = \sum_{i=1}^N v_i I_i$$

و بنابراین

$$E[S] = \sum_{i=1}^N v_i E[I_i]$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(S) &= \sum_{i=1}^N \text{Var}(v_i I_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(v_i I_i, v_j I_j) \\ &= \sum_{i=1}^N v_i^2 \text{Var}(I_i) + 2 \sum_{i < j} v_i v_j \text{Cov}(I_i, I_j) \end{aligned}$$

چون

$$E[I_i] = \frac{n}{N}$$

$$E[I_i I_j] = \frac{n}{N} \frac{n-1}{N-1}$$

دیده می شود که

$$\text{Var}(J_i) = \frac{n}{N} \left(1 - \frac{n}{N} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(J_i, J_j) &= \frac{n(n-1)}{N(N-1)} - \left(\frac{n}{N} \right)^2 \\ &= \frac{-n(N-n)}{N^2(N-1)} \end{aligned}$$

بنابراین

$$E[S] = n \sum_{i=1}^N \frac{v_i}{N} = n\bar{v}$$

$$\text{Var}(S) = \frac{n}{N} \left(\frac{N-n}{N} \right) \sum_{i=1}^N v_i^2 - \frac{2n(N-n)}{N^2(N-1)} \sum_{i < j} v_i v_j$$

عبارت $\text{Var}(S)$ را با استفاده از $\sum_{i=1}^N v_i^2 + 2 \sum_{i < j} v_i v_j = (v_1 + \dots + v_N)^2$ می‌توان تا حدی خلاصه نمود. پس از ساده کردن داریم

$$\text{Var}(S) = \frac{n(N-n)}{N-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^N v_i^2}{N} - \bar{v}^2 \right)$$

اکنون حالت خاصی را که در آن Np تا از v ها برابر ۱ و بقیه برابر ۰ اند در نظر می‌گیریم. آن‌گاه در این حالت S متغیر تصادفی فوق هندسی است و میانگین و واریانس آن عبارت است از

$$E[S] = n\bar{v} = np \quad \bar{v} = \frac{Np}{N} = p$$

$$\text{Var}(S) = \frac{n(N-n)}{(N-1)} \left(\frac{Np}{N} - p^2 \right) = \frac{n(N-n)}{N-1} p(1-p)$$

کمیت $\frac{S}{n}$ ، یعنی نسبت کسانی که نمونه‌گیری شده و دارای مقدار ۱ می‌باشند، به قسمی است که

$$E \left[\frac{S}{n} \right] = p$$

$$\text{Var} \left(\frac{S}{n} \right) = \frac{(N-n)}{n(N-1)} p(1-p)$$

همبستگی دو متغیر X و Y که آن را با $\rho(X, Y)$ نشان می‌دهیم، (با فرض مثبت بودن $\text{Var}(X)$ و $\text{Var}(Y)$) به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}}$$

می‌توان نشان داد

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1 \quad (۴-۵)$$

برای اثبات معادله (۴-۵) فرض کنید X و Y به ترتیب دارای واریانس σ_x^2 و σ_y^2 باشند، در این صورت

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{Var}\left(\frac{X}{\sigma_x} + \frac{Y}{\sigma_y}\right) \\ &= \frac{\text{Var}(X)}{\sigma_x^2} + \frac{\text{Var}(Y)}{\sigma_y^2} + \frac{2 \text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} \\ &= 2[1 + \rho(X, Y)] \end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که

$$-1 \leq \rho(X, Y)$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{Var}\left(\frac{X}{\sigma_x} - \frac{Y}{\sigma_y}\right) \\ &= \frac{\text{Var}(X)}{\sigma_x^2} + \frac{\text{Var} Y}{(-\sigma_y)^2} - \frac{2 \text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} \\ &= 2[1 - \rho(X, Y)] \end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که

$$\rho(X, Y) \leq 1$$

و اثبات معادله (۴-۵) کامل می‌گردد.

در حقیقت، چون $\text{Var}(Z) = 0$ ایجاب می‌کند که Z با احتمال ۱ ثابت باشد (این حقیقت

بدیهی را بطور دقیق در فصل ۸ ثابت خواهیم کرد). از اثبات (۴-۵) دیده می شود که $\rho(X, Y)$ ایجاب می کند $Y = a + bX$ که در آن $b = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} > 0$ و $\rho(X, Y) = -1$ ایجاب می کند: $Y = a + bX$ وقتی $b = \frac{-\sigma_Y}{\sigma_X} < 0$. عکس آن نیز درست است که اگر $Y = a + bX$ باشد در این صورت $\rho(X, Y)$ بر حسب علامت b برابر $+1$ یا -1 می باشد. (به عنوان تمرین آن را ثابت کنید).

ضریب همبستگی اندازه مرتبه حالت خطی بین X و Y است. مقدار $\rho(X, Y)$ نزدیک به $+1$ یا -1 مرتبه بالایی از حالت خطی بین X ، Y را نشان می دهد در صورتی که مقدار $\rho(X, Y)$ نزدیک صفر، عدم چنین حالت خطی را نشان می دهد. مقدار مثبت $\rho(X, Y)$ نشان می دهد که افزایش X باعث افزایش Y می شود، در حالی که مقدار منفی $\rho(X, Y)$ نشانه این است که افزایش X باعث کاهش Y می گردد. اگر $\rho(X, Y) = 0$ ، در این صورت X و Y را ناهمبسته گوئیم.

مثال ۵ ت. فرض کنید I_A و I_B متغیرهای نشانگر برای پشامدهای A و B باشند، یعنی

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{اگر } A \text{ رخ دهد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$I_B = \begin{cases} 1 & \text{اگر } B \text{ رخ دهد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} E[I_A] &= P(A) \\ E[I_B] &= P(B) \\ E[I_A I_B] &= P(AB) \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} \text{Cov}(I_A, I_B) &= P(AB) - P(A)P(B) \\ &= P(B)[P(A|B) - P(A)] \end{aligned}$$

لذا این نتیجه کاملاً بدیهی را به دست می آوریم که متغیرهای نشانگر برای پشامدهای A و B بر حسب این که $P(A|B)$ بزرگتر، مساوی، یا کوچکتر از $P(A)$ باشد به ترتیب وابستگی مثبت دارند، نایسته اند، و یا وابستگی منفی دارند.

با توجه به کوواریانسها یک نتیجه مفید عبارت است:

$$\text{Cov} \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^m Y_i \right) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \text{Cov} (X_i, Y_j) \quad (5-5)$$

عبارت فوق را به عنوان تمرین ثابت کنید. کاربرد آن را با مثال زیر شرح می دهیم.

مثال ۵ ث. m آزمایش مستقل که هریک از آنها دارای r برآمد ممکن با احتمالات P_1, P_2, \dots, P_r ، $\sum_{i=1}^r P_i = 1$ ، P_i, \dots است در نظر می گیریم. اگر فرض کنیم N_i ، $i = 1, 2, \dots, r$ ، نمایش تعداد از m آزمایش باشد که حاصل آن برآمد i است در این صورت N_1, \dots, N_r دارای توزیع چند جمله ای است.

$$P\{N_1 = n_1, N_2 = n_2, \dots, N_r = n_r\} \\ = \frac{m!}{n_1! n_2! \dots n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r} \quad \sum_{i=1}^r n_i = m$$

برای $i \neq j$ وقتی N_i بزرگ باشد مناسب به نظر می رسد که N_j باید کوچک باشد و از این رو بدیهی است که آنها وابستگی منفی داشته باشند. با استفاده از تساوی (۵-۵) و عبارت زیر کوواریانس آنها را حساب می کنیم

$$N_i = \sum_{k=1}^m I_i(k) \quad \text{و} \quad N_j = \sum_{k=1}^m I_j(k)$$

که در آن

$$I_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{آزمایش } k \text{ ام منجر به برآمد } i \text{ شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$I_j(k) = \begin{cases} 1 & \text{آزمایش } k \text{ ام منجر به برآمد } j \text{ شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

از معادله (۵-۵) داریم

$$\text{Cov} (N_i, N_j) = \sum_{\ell=1}^m \sum_{k=1}^m \text{Cov} (I_i(k), I_j(\ell))$$

اکنون وقتی $k \neq \ell$ باشد داریم

$$\text{Cov} (I_i(k), I_j(\ell)) = 0$$

چون نتیجه آزمایش k ام مستقل از نتیجه آزمایش l ام است. از طرف دیگر

$$\begin{aligned} \text{Cov}(I_i(\ell), I_j(\ell)) &= E[I_i(\ell)I_j(\ell)] - E[I_i(\ell)]E[I_j(\ell)] \\ &= 0 - P_i P_j = -P_i P_j \end{aligned}$$

که در آن از تساوی $I_i(l) I_j(l) = 0$ استفاده می شود زیرا آزمایش l نمی تواند به دو برآمد i و j منجر شود، لذا

$$\text{Cov}(N_i, N_j) = -mP_i P_j$$

و این با درك شهودی که N_i و N_j بطور منفی وابسته اند مطابقت دارد.

۶- میانگین شرطی

۶-۱ تعاریف

خاطر نشان می سازیم که اگر X ، Y متغیرهای تصادفی توأمآ گسسته باشند، تابع جرم احتمال شرطی X به شرط آن که $Y = y$ باشد برای تمام y ها به قسمی که $P\{Y = y\} > 0$ به صورت زیر تعریف می شود

$$p_{X|Y}(x|y) = P\{X = x | Y = y\} = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}$$

در این حالت طبیعی است که میانگین شرطی X به شرط آن که $Y = y$ باشد برای تمام مقادیر y به قسمی که $P\{Y = y\} > 0$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\begin{aligned} E[X | Y = y] &= \sum_x x P\{X = x | Y = y\} \\ &= \sum_x x p_{X|Y}(x|y) \end{aligned}$$

مثال ۶ الف. اگر X و Y متغیرهای تصادفی دوجمله ای مستقل با پارامترهای یکسان n ، p باشند امید ریاضی شرطی X را به شرط این که $X + Y = m$ باشد حساب کنید.

حل: نخست تابع جرم احتمال شرطی X را به شرط آن که $X = Y = m$ باشد حساب می کنیم. برای $k \leq \min(n, m)$ داریم

$$P\{X = k | X + Y = m\} = \frac{P\{X = k, X + Y = m\}}{P\{X + Y = m\}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{P\{X = k, Y = m - k\}}{P\{X + Y = m\}} \\
 &= \frac{P\{X = k\}P\{Y = m - k\}}{P\{X + Y = m\}} \\
 &= \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{n}{m-k} p^{m-k} (1-p)^{n-m+k}}{\binom{2n}{m} p^m (1-p)^{2n-m}} \\
 &= \frac{\binom{n}{k} \binom{n}{m-k}}{\binom{2n}{m}}
 \end{aligned}$$

که در آن از این موضوع که $X + Y$ متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای n و p است استفاده نموده ایم (مثال ۳ از فصل ۶ را ملاحظه نمایید). از این رو توزیع شرطی X به شرط آن که $X + Y = m$ باشد یک توزیع فوق هندسی است. بنابراین طبق مثال ۳، داریم

$$E[X|X + Y = m] = \frac{m}{2}$$

بطور مشابه، یادآوری می‌کنیم که اگر X و Y توأم پیوسته با تابع چگالی توأم $f(x, y)$ باشند، چگالی احتمال شرطی X به شرط آن که $Y = y$ برای تمام مقادیر y به قسمی که $f_Y(y) > 0$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

در این حالت طبیعی است که میانگین شرطی X به شرط $Y = y$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$E[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx$$

به شرط آن که $f_Y(y) > 0$.

مثال ۶ ب. فرض کنید چگالی مشترک X و Y به صورت زیر باشد

$$f(x, y) = \frac{e^{-x/y} e^{-y}}{y} \quad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty$$

$E[X|Y = y]$ را حساب کنید.

حل: با محاسبه چگالی شرطی شروع می‌کنیم

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx} \\ &= \frac{(1/y)e^{-x/y}e^{-y}}{\int_0^{\infty} (1/y)e^{-x/y}e^{-y} dx} \\ &= \frac{(1/y)e^{-x/y}}{\int_0^{\infty} (1/y)e^{-x/y} dx} \\ &= \frac{(1/y)e^{-x/y}}{-e^{-x/y} \Big|_{x=0}^{\infty}} \\ &= \left(\frac{1}{y}\right)e^{-x/y} \end{aligned}$$

از این رو توزیع شرطی X به شرط آن که $Y = y$ ، همان توزیع نمایی با میانگین y است. بنابراین

$$E[X|Y = y] = \int_0^{\infty} \frac{x}{y} e^{-x/y} dx = y$$

تبصره: همان طور که احتمالات شرطی در تمام خواص احتمالات معمولی صدق می‌کنند میانگینهای شرطی نیز خواص میانگینهای معمولی را دارا می‌باشند. مثلاً، فرمولهای نظیر

$$E[g(X)|Y = y] = \begin{cases} \sum g(x)p_{X|Y}(x|y) \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{X|Y}(x|y) dx \end{cases}$$

و

$$E\left[\sum_{i=1}^n X_i | Y = y\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i | Y = y]$$

معتبر باقی می‌مانند. حقیقت امر این است که میانگین شرطی با فرض $Y = y$ را می‌توان به صورت میانگین معمولی روی فضای نمونه کاهش یافته در نظر گرفت، وقتی فضا تنها شامل برآمدهای $Y = y$ است که برای آنها $Y = y$ می‌باشد.

۴-۶ محاسبه میانگینها با شرطی کردن

تابعی از متغیر تصادفی Y را که مقدار آن در $Y = y$ برابر $E[X|Y = y]$ است،

به صورت $E[X|Y]$ نشان می دهیم . توجه کنید که $E[X|Y]$ خود یک متغیر تصادفی است .
یک خاصیت بسیار مهم میانگین شرطی را در حکم زیر بیان می کنیم .

حکم ۱-۶

$$E[X] = E[E[X|Y]] \quad (1-6)$$

اگر Y یک متغیر تصادفی گسسته باشد معادله (۱-۶) بیان می کند که

$$E[X] = \sum_y E[X|Y=y]P\{Y=y\} \quad (1-6 \text{ الف})$$

در صورتی که اگر Y پیوسته با چگالی $f_Y(y)$ باشد، معادله (۱-۶) بیان می کند که

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X|Y=y]f_Y(y) dy \quad (1-6 \text{ ب})$$

اکنون اثبات معادله (۱-۶) را در حالتی که X و Y هر دو متغیر تصادفی گسسته اند ارائه می دهیم

برهان معادله (۱-۶) وقتی X و Y هر دو گسسته اند : باید نشان دهیم که

$$E[X] = \sum_y E[X|Y=y]P\{Y=y\} \quad (2-6)$$

اکنون سمت راست معادله (۲-۶) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \sum_y E[X|Y=y]P\{Y=y\} &= \sum_y \sum_x xP\{X=x|Y=y\}P\{Y=y\} \\ &= \sum_y \sum_x x \frac{P\{X=x, Y=y\}}{P\{Y=y\}} P\{Y=y\} \\ &= \sum_y \sum_x xP\{X=x, Y=y\} \\ &= \sum_x x \sum_y P\{X=x, Y=y\} \\ &= \sum_x xP\{X=x\} \\ &= E[X] \end{aligned}$$

و نتیجه حاصل می شود .

یک روش برای فهمیدن معادله (۲-۶) تشریح آن به صورت زیر است: برای محاسبه $E[X]$ می توان متوسط موزون امید ریاضی شرطی X به شرط $Y = y$ را در نظر گرفت، به قسمی که وزنی که به جمله $E[X|Y = y]$ نسبت می دهیم برابر احتمال پیشامدی باشد که این جمله روی آن شرطی شده است. (این مطلب چه چیز را به یاد شما می آورد؟). این موضوع نتیجه بسیار مهمی است که اغلب می توان میانگین را نخست با شرطی کردن آن روی یک متغیر تصادفی مناسب بسادگی حساب نمود.

مثال ۶ پ. یک معدنچی در معدنی که دارای سه راه خروجی است به دام افتاده است. خروجی نخست به تونلی منتهی می شود که پس از سه ساعت راه پیمایی نجات می یابد. خروجی دوم به تونلی منتهی می شود که پس از ۵ ساعت راه پیمایی او را به معدن برمی گرداند. خروجی سوم به تونلی منتهی می شود که پس از ۷ ساعت او را به معدن باز می گرداند. اگر فرض کنیم که معدنچی در تمام حالات با احتمال مساوی یکی از این خروجیها را انتخاب کند، میانگین طول زمان تا وقتی که نجات یابد چقدر است؟

حل: فرض کنید X نمایش مدت زمان (بر حسب ساعت) باشد تا زمانی که معدنچی نجات یابد و فرض کنید Y نمایش راه خروجی باشد که نخست انتخاب می کند؛ اکنون

$$\begin{aligned} E[X] &= E[X|Y = 1]P\{Y = 1\} + E[X|Y = 2]P\{Y = 2\} \\ &\quad + E[X|Y = 3]P\{Y = 3\} \\ &= \frac{1}{3}(E[X|Y = 1] + E[X|Y = 2] + E[X|Y = 3]) \end{aligned}$$

در صورتی که

$$\begin{aligned} E[X|Y = 1] &= 3 \\ E[X|Y = 2] &= 5 + E[X] \\ E[X|Y = 3] &= 7 + E[X] \end{aligned} \quad (۳-۶)$$

برای درک این که چرا معادله (۳-۶) درست است، مثلاً $E[X|Y = 2]$ ، دلایل زیر را در نظر بگیرید: اگر معدنچی خروجی دوم را انتخاب کند پس از گذراندن ۵ ساعت در تونل دوباره به معدن برمی گردد. ولی زمانی که برمی گردد مسأله مانند قبل است؛ از این رو میانگین زمان اضافی تا زمانی که نجات یابد درست همان $E[X]$ است. بنابراین $E[X|Y = 2] = 5 + E[X]$. برای کمتهای دیگر در معادله (۳-۶) استدلال مشابهی وجود دارد، بنابراین

$$E[X] = \frac{1}{3}(3 + 5 + E[X] + 7 + E[X])$$

یا

$$E[X] = 15$$

مثال ۶ ت. میانگین تعداد تصادفی از متغیرهای تصادفی. فرض کنید تعداد افرادی که به یک بخش فروشگاه در روز معینی وارد می شوند یک متغیر تصادفی با میانگین ۵۰ باشد. به علاوه فرض کنید مقدار پولی که توسط این مشتریان هزینه می شود متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین مشترك ۸ تومان باشند. همچنین فرض کنید که مقدار پولی که توسط مشتریان هزینه می شود نیز از تعداد کل مشتریانی که وارد فروشگاه می شوند مستقل باشد. میانگین مقدار پولی که در یک روز معین در فروشگاه هزینه می شود چقدر است؟

حل: اگر فرض کنیم N نمایش تعداد مشتریانی باشد که وارد فروشگاه می شوند و X_i نمایش مبلغی باشد که توسط مشتری i ام هزینه شده، در این صورت مبلغ کل پول هزینه شده را می توان به صورت $\sum_{i=1}^N X_i$ بیان کرد. اکنون

$$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^N X_i \mid N\right]\right]$$

ولی

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^N X_i \mid N = n\right] &= E\left[\sum_{i=1}^n X_i \mid N = n\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] \quad \text{بنابراستقلال } N \text{ و } X_i \\ &= nE[X] \quad \text{وقتی } E[X] = E[X_i] \end{aligned}$$

و این ایجاب می کند که

$$E\left[\sum_{i=1}^N X_i \mid N\right] = NE[X]$$

لذا

$$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[NE[X]] = E[N]E[X]$$

بنابراین در این مثال میانگین مقدار پول هزینه شده در فروشگاه برابر $400 = 8 \times 50$ است.

مثال ۶ ت. یک ظرف شامل a توپ سفید و b توپ سیاه است. هر بار یک توپ بتصادف بیرون می آوریم تا زمانی که اولین توپ سفید به دست آید. میانگین تعداد توپهای سیاه بیرون آمده را بیابید.

حل: این مسأله قبلاً در مثال ۳ د بررسی شده است. در این جا حل آن را با شرطی کردن ارائه می دهیم. فرض می کنیم X نمایش تعداد توپهای سیاه بیرون آمده باشد و برای تأکید بر وابستگی a و b فرض می کنیم $M_{a,b} = E[X]$. با شرطی کردن روی اولین تویی که بیرون آمده عبارتی برای $M_{a,b}$ به دست می آوریم. یعنی، تعریف می کنیم

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{اگر توپ انتخابی سفید باشد} \\ 0 & \text{اگر توپ انتخابی سیاه باشد} \end{cases}$$

با شرطی کردن روی Y ، داریم

$$M_{a,b} = E[X] = E[X|Y=1]P\{Y=1\} + E[X|Y=0]P\{Y=0\}$$

در حالی که

$$E[X|Y=1] = 0 \quad (4-6)$$

$$E[X|Y=0] = 1 + M_{a,b-1} \quad (5-6)$$

برای پی بردن به مفهوم معادلات (۴-۶) و (۵-۶) برای مثال فرض کنید اولین توپ انتخابی سیاه است. در این صورت پس از انتخاب اول وضعیت دقیقاً همانند حالتی است که اگر با a توپ سفید و $a-1$ توپ سیاه شروع می کردیم و این هم معادله (۵-۶) را ثابت می کند.

چون $P\{Y=0\} = b/(a+b)$ ، دیده می شود که

$$M_{a,b} = \frac{b}{a+b} [1 + M_{a,b-1}]$$

اینک بوضوح $M_{a,0}$ برابر 0 است و داریم

$$M_{a,1} = \frac{1}{a+1}[1 + M_{a,0}] = \frac{1}{a+1}$$

$$M_{a,2} = \frac{2}{a+2}[1 + M_{a,1}] = \frac{2}{a+2}\left[1 + \frac{1}{a+1}\right] = \frac{2}{a+1}$$

$$M_{a,3} = \frac{3}{a+3}[1 + M_{a,2}] = \frac{3}{a+3}\left[1 + \frac{2}{a+1}\right] = \frac{3}{a+1}$$

با استفاده از استقراء بسادگی ثابت می شود که

$$M_{a,b} = \frac{b}{a+1}$$

کوواریانس یک متغیر تصادفی را نیز با شرطی کردن می توان به دست آورد. این مطلب را با مثال زیر شرح می دهیم.

مثال ۶ ج. کوواریانس توزیع هندسی. آزمایشهای مستقلی را که هر یک با احتمال p منجر به موفقیت می شود بطور متوالی تکرار می کنیم. فرض کنید N زمان اولین موفقیت باشد. $E[N]$ را بیابید.

حل: فرض کنید اگر نتیجه آزمایش نخست موفقیت باشد $Y = 1$ و در غیر این صورت $Y = 0$. اینک

$$\text{Var}(N) = E[N^2] - (E[N])^2$$

$E(N^2)$ را با شرطی کردن روی Y به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$E[N^2] = E[E[N^2|Y]]$$

ولی

$$\begin{aligned} E[N^2|Y=1] &= 1 \\ E[N^2|Y=0] &= E[(1+N)^2] \end{aligned}$$

این دو معادله نتیجه می شوند، زیرا اگر آزمایش نخست منجر به موفقیت شود در این صورت $N = 1$ و از این رو $N^2 = 1$. از طرف دیگر، اگر نتیجه آزمایش اول شکست باشد. در این صورت توزیع تعداد کل آزمایشهای لازم برای موفقیت نخست همانند توزیع یک (آزمایش اولی که منجر به شکست شد) به علاوه تعداد آزمایشهای اضافی لازم می باشد. چون کمیت اخیر دارای

توزیعی همانند N است، $E[N^2 | Y = 0] = E[(1 + N)^2]$ را به دست می آوریم. لذا دیده می شود

$$\begin{aligned} E[N^2] &= E[N^2 | Y = 1]P\{Y = 1\} + E[N^2 | Y = 0]P\{Y = 0\} \\ &= p + (1 - p)E[(1 + N)^2] \\ &= 1 + (1 - p)E[2N + N^2] \end{aligned}$$

لیکن همان طور که در مثال ۱ نشان دادیم، $E[N] = \frac{1}{p}$ و لذا از این جا نتیجه می شود

$$E[N^2] = 1 + \frac{2(1-p)}{p} + (1-p)E[N^2]$$

یا

$$E[N^2] = \frac{2-p}{p^2}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \text{Var}(N) &= E[N^2] - (E[N])^2 \\ &= \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 \\ &= \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

۳-۶ محاسبه احتمالات با شرطی کردن

نه تنها میانگینها را می توان نخست با شرطی کردن روی یک متغیر تصادفی خاص به دست آورد، بلکه با استفاده از این روش احتمالات را نیز می توان محاسبه نمود. برای نشان دادن این مطلب، فرض می کنیم E یک پیشامد دلخواه باشد و متغیر تصادفی نشانگر X را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$X = \begin{cases} 1 & \text{اگر } E \text{ رخ دهد} \\ 0 & \text{اگر } E \text{ رخ ندهد} \end{cases}$$

از تعریف X نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} E[X] &= P(E) \\ E[X | Y = y] &= P(E | Y = y) \end{aligned}$$

بنابراین، از معادلات (۵-۱ الف) و (۵-۱ ب) نتیجه می شود

$$P(E) = \sum_y P(E|Y=y)P(Y=y) \quad Y \text{ گسسته باشد} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} P(E|Y=y)f_Y(y) dy \quad Y \text{ پیوسته باشد} \quad (۶-۶)$$

توجه کنید اگر Y یک متغیر تصادفی گسسته باشد که یکی از مقادیر y_1, \dots, y_n را اختیار می کند، در این صورت پیشامد $F_i = \{Y=y_i\}$ ، را با $i = 1, \dots, n$ ، را با F_i پیشامد F_i ، $i = 1, \dots, n$ ، را با F_i پیشامدهای متقابلاً ناسازگاری هستند که اجتماع آنها فضای نمونه است.

$$P(E) = \sum_{i=1}^n P(E|F_i)P(F_i)$$

که در آن F_1, \dots, F_n پیشامدهای متقابلاً ناسازگاری هستند که اجتماع آنها فضای نمونه است.

مثال ۶ ج. فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته مستقل باشند و چگالی آنها به ترتیب f_x و f_y باشد. $P\{X < Y\}$ را حساب کنید.

حل: با شرطی کردن روی مقادیر Y داریم

$$P\{X < Y\} = \int_{-\infty}^{\infty} P\{X < Y|Y=y\}f_Y(y) dy \\ = \int_{-\infty}^{\infty} P\{X < y|Y=y\}f_Y(y) dy \\ = \int_{-\infty}^{\infty} P\{X < y\}f_Y(y) dy \quad \text{بنابر استقلال} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y)f_Y(y) dy$$

که در آن

$$F_X(y) = \int_{-\infty}^y f_X(x) dx$$

مثال ۶ ح: فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته مستقل باشند. توزیع $X + Y$

رایباید.

حل : با شرطی کردن روی مقادیر Y ، داریم

$$\begin{aligned} P\{X + Y < a\} &= \int_{-\infty}^{\infty} P\{X + Y < a | Y = y\} f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P\{X + y < a | Y = y\} f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P\{X < a - y\} f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a - y) f_Y(y) dy \end{aligned}$$

۴-۶ واریانس شرطی

همان طور که میانگین شرطی X را با مقادیر معلوم Y تعریف کردیم می توانیم واریانس شرطی X با فرض $Y = y$ را نیز به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\text{Var}(X|Y) = E[(X - E(X|Y))^2 | Y]$$

یعنی ، $\text{Var}(X|Y)$ برابر است با میانگین (شرطی) مربع تفاضل بین X و میانگین (شرطی) آن وقتی مقدار Y مفروض است . به عبارت دیگر ، $\text{Var}(X|Y)$ دقیقاً مشابه تعریف معمولی واریانس است ، لیکن اکنون تمام میانگینها نسبت به این که Y مفروض است شرطی می باشند . رابطه بسیار مفیدی بین $\text{Var}(X)$ ، واریانس غیر شرطی X و $\text{Var}(X|Y)$ ، واریانس شرطی X با فرض Y وجود دارد که اغلب می توان آن را برای محاسبه $\text{Var}(X)$ به کار برد . برای به دست آوردن این رابطه نخست توجه کنید که با همان دلیلی که $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$ نتیجه می شود .

$$\text{Var}(X|Y) = E[X^2|Y] - (E[X|Y])^2$$

و بنا بر این

$$\begin{aligned} E[\text{Var}(X|Y)] &= E[E[X^2|Y]] - E[(E[X|Y])^2] \\ &= E[X^2] - E[(E[X|Y])^2] \end{aligned} \quad (۷-۶)$$

چون $E[E[X|Y]] = E[X]$ ، همچنین داریم

$$\text{Var}(E[X|Y]) = E[(E[X|Y])^2] - (E[X])^2 \quad (۸-۶)$$

بنابراین با جمع کردن معادلات (۶-۷) و (۶-۸) حکم زیر به دست می آید.

حکم ۶-۲ فرمول واریانس شرطی

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X|Y)] + \text{Var}(E[X|Y])$$

مثال ۶ غ. فرض کنید در هر زمان t تعداد افرادی که به ایستگاه قطار وارد می شوند یک متغیر تصادفی پواسن با میانگین λ باشد. اگر اولین قطار در زمانی (مستقل از زمان ورود مسافران) که دارای توزیع یکنواخت روی $(0, T)$ است به ایستگاه وارد شود، میانگین و واریانس تعداد مسافرانی که سوار قطار می شوند چقدر است؟

حل: فرض کنید، برای هر $t, t \geq 0$ نمایش تعداد ورودیها تا t باشد و فرض کنید Y نمایش زمانی که قطار وارد می شود باشد. در این صورت متغیر تصادفی مورد نظر $N(Y)$ است. با شرطی کردن روی Y داریم

$$\begin{aligned} E[N(Y)|Y=t] &= E[N(t)|Y=t] \\ &= E[N(t)] \quad \text{بنابر استقلال } Y \text{ و } N(t) \text{ زیرا } N(t) \\ &= \lambda t \quad \text{پواسن با میانگین } \lambda \end{aligned}$$

بنابراین

$$E[N(Y)|Y] = \lambda Y$$

و لذا با محاسبه میانگین داریم

$$E[N(Y)] = \lambda E[Y] = \frac{\lambda T}{2}$$

برای به دست آوردن $\text{Var}(N(Y))$ از فرمول واریانس شرطی استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} \text{Var}(N(Y)|Y=t) &= \text{Var}(N(t)|Y=t) \\ &= \text{Var}(N(t)) \quad \text{بنابر استقلال} \\ &= \lambda t \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}\text{Var}(N(Y)|Y) &= \lambda Y \\ E[N(Y)|Y] &= \lambda Y\end{aligned}$$

لذا، از فرمول واریانس شرطی نتیجه می شود

$$\begin{aligned}\text{Var}(N(Y)) &= E[\lambda Y] + \text{Var}(\lambda Y) \\ &= \lambda \frac{T}{2} + \lambda^2 \frac{T^2}{12}\end{aligned}$$

که در آن $\text{Var}(Y) = \frac{T^2}{12}$ را به کار می بریم.

مثال ۵.۶ . واریانس تعداد تصادفی از متغیرهای تصادفی. فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_N دنباله ای از متغیرهای تصادفی هم توزیع و مستقل باشد و فرض کنید N یک متغیر تصادفی با مقادیر صحیح نامنفی باشد که از دنباله $X_i, i \geq 1$ ، مستقل است. برای محاسبه $\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)$ ، با شرطی کردن روی N داریم.

$$\begin{aligned}E\left[\sum_{i=1}^N X_i | N\right] &= NE[X] \\ \text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i | N\right) &= N \text{Var}(X)\end{aligned}$$

چون برای N معلوم $\sum_{i=1}^N X_i$ تنها مجموع تعداد ثابتی از متغیرهای تصادفی مستقل است و بنابراین میانگین و واریانس آن همان مجموع میانگینها و واریانسهای تکی است، لذا نتایج فوق حاصل می گردد. بنابراین، با استفاده از فرمول واریانس شرطی داریم

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E[N] \text{Var}(X) + (E[X])^2 \text{Var}(N)$$

۷- میانگین شرطی و پیشگویی

گاهی حالتی به وجود می آید که بر مبنای مقدار مشاهده شده متغیر تصادفی X مبادرت به پیشگویی کردن مقدار متغیر تصادفی دوم، Y ، می کنیم. فرض کنید $g(x)$ نمایش پیشگویی کننده باشد؛ یعنی اگر مقدار مشاهده شده X برابر x باشد در این صورت $g(x)$ پیشگویی مابرای مقدار Y

است. بطور کلی، می‌خواهیم g را چنان انتخاب کنیم که $g(X)$ نزدیک به Y باشد. یک معیار ممکن برای نزدیکی آن است که g را چنان انتخاب کنیم که $E[(Y - g(X))^2]$ را مینیمم کند. اکنون با این معیار نشان می‌دهیم که $g(X) = E[Y|X]$ بهترین پیشگویی کننده ممکن برای Y می‌باشد.

حکم ۷-۱

$$E[(Y - g(X))^2] \geq E[(Y - E[Y|X])^2]$$

برهان :

$$\begin{aligned} E[(Y - g(X))^2|X] &= E[(Y - E[Y|X] + E[Y|X] - g(X))^2|X] \\ &= E[(Y - E[Y|X])^2|X] \\ &\quad + E[(E[Y|X] - g(X))^2|X] \\ &\quad + 2E[(Y - E[Y|X])(E[Y|X] - g(X))|X] \end{aligned} \quad (1-7)$$

ولی با معلوم بودن X ، $E[Y|X] - g(X)$ تابعی از X می‌باشد که می‌توان آن را به عنوان یک ثابت در نظر گرفت، بنابراین

$$\begin{aligned} E[(Y - E[Y|X])(E[Y|X] - g(X))|X] \\ &= (E[Y|X] - g(X))E[Y - E[Y|X]|X] \\ &= (E[Y|X] - g(X))(E[Y|X] - E[Y|X]) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2-7)$$

از این رو از معادله (۱-۷) و (۲-۷)، داریم

$$E[(Y - g(X))^2|X] \geq E[(Y - E[Y|X])^2|X]$$

و با محاسبه میانگین از هر دو طرف نامساوی فوق نتیجه به دست می‌آید.

تفسیر : اثبات دومی هرچند با دقت کمتر و شهودی تر از حکم ۷-۱ به صورت زیر است. براحتی می‌توان ثابت کرد که $E[(X-C)^2]$ در $E[Y] = C$ مینیمم می‌شود. (تمرین نظری ۵ را ملاحظه کنید). از این رو، بهترین پیشگویی ممکن بدین منظور که میانگین مربع خطا را مینیمم کند، آن است که پیشگویی کنیم که Y برابر میانگین خودش باشد. از طرف دیگر

اگر مقدار مشاهده شده متغیر تصادفی X برابر x باشد، در این صورت مساله پیشگویی دقیقاً همانند حالت قبل (بدون داده) باقی می ماند، با این استثناء که اکنون تمام احتمالات و میانگینها نسبت به پیشامد $X = x$ شرطی می باشند. بنابراین نتیجه می شود که بهترین پیشگویی در این حالت عبارت است از این که Y برابر میانگین شرطی خود به شرط $X = x$ باشد، از این رو حکم ۱-۷ ثابت می گردد.

مثال ۷ الف. فرض کنید پسر مردی با طول قد x (برحسب اینچ) به طول قدی نایل می گردد که دارای توزیع نرمال با میانگین $x + 1$ و واریانس ۴ می باشد. بهترین پیشگویی طول قد پسر مردی با قد ۶ پا در زمان رشد کامل چقدر است؟
حل: این الگورارسماً می توان به صورت زیر نوشت.

$$Y = X + 1 + e$$

که در آن e یک متغیر تصادفی نرمال مستقل از X با میانگین 0 و واریانس ۴ می باشد. البته X و Y به ترتیب طول قدمرد و پسرش را نشان می دهند. از این رو بهترین پیشگویی $E[Y|X = 72]$ برابر است با

$$\begin{aligned} E[Y|X = 72] &= E[X + 1 + e|X = 72] \\ &= 73 + E[e|X = 72] \\ &= 73 + E(e) \quad \text{بنابر استقلال} \\ &= 73 \end{aligned}$$

مثال ۷ ب. فرض کنید مقدار علامت s از محل A ارسال شده باشد، در این صورت مقدار علامت دریافت شده در محل B دارای توزیع نرمال با پارامترهای $(s, 1)$ است. اگر S مقدار علامت ارسال شده در A دارای توزیع نرمال با پارامترهای (μ, σ^2) باشد و اگر R مقدار علامت دریافت شده در B برابر r باشد «بهترین» برآورد علامت ارسال شده چقدر است؟

حل: نخست چگالی شرطی S به شرط R را به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$\begin{aligned} f_{S|R}(s|r) &= \frac{f_{S,R}(s,r)}{f_R(r)} \\ &= \frac{f_S(s)f_{R|S}(r|s)}{f_R(r)} \\ &= Ke^{-(s-\mu)^2/2\sigma^2} e^{-(r-s)^2/2} \end{aligned}$$

وقتی K بستگی به s ندارد. اکنون

$$\begin{aligned} \frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2} + \frac{(r-s)^2}{2} &= s^2 \left(\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{\mu}{\sigma^2} + r \right) s + C_1 \\ &= \frac{1+\sigma^2}{2\sigma^2} \left[s^2 - 2 \left(\frac{\mu+r\sigma^2}{1+\sigma^2} \right) s \right] + C_1 \\ &= \frac{1+\sigma^2}{2\sigma^2} \left(s - \frac{(\mu+r\sigma^2)}{1+\sigma^2} \right)^2 + C_2 \end{aligned}$$

که در آن C_1 و C_2 بستگی به s ندارند. لذا

$$f_{S|R}(s|r) = C \exp \left\{ \frac{- \left[s - \frac{(\mu+r\sigma^2)}{1+\sigma^2} \right]^2}{2 \left(\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2} \right)} \right\}$$

که در آن C به s بستگی ندارد. بنابراین می توان نتیجه گرفت که توزیع شرطی علامت ارسال شده S به شرط آن که r دریافت شده باشد نرمال است که میانگین و واریانس آن به صورت زیر می باشد

$$E[S|R=r] = \frac{\mu+r\sigma^2}{1+\sigma^2}$$

$$\text{Var}(S|R=r) = \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}$$

بنابراین، بهترین برآورد به منظور مینیمم کردن میانگین مربع خطا برای علامت ارسال شده به فرض آن که مقدار دریافت شده r باشد، بنا بر حکم ۷-۱ عبارت است از

$$E[S|R=r] = \frac{1}{1+\sigma^2} \mu + \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2} r$$

نوشته شدن میانگین شرطی به صورت فوق بیانگر این است که مقدار آن با متوسط موزون μ میانگین پیشین علامت و r مقدار دریافتی برابر است. نسبت وزنه‌های نسبی منسوب به μ و r^2 به یکدیگر مانند نسبت ۱ (واریانس شرطی علامت دریافتی وقتی s ارسال شده باشد) به σ^2 (واریانس علامتی که باید ارسال شود) می باشد.

مثال ۷ پ. در فرآیند علامت رقمی، داده‌های مشابه پیوسته خام X را برای به دست آوردن نمایش رقمی باید کمیت دار یا گسسته نمود. یک مجموعه صعودی از اعداد a_i ،

$i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ به قسمتی که $\lim_{i \rightarrow -\infty} a_i = -\infty$ و $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \infty$ ثابت باشند را در نظر گرفته و داده‌های خام را بر حسب فاصله‌های (a_i, a_{i+1}) که X در آن تراز دارد. کمیت دار می‌کنیم، فرض کنید وقتی $X \in (a_i, a_{i+1})$ مقدار گسسته آن y_i باشد و فرض کنید Y نمایش مقدار گسسته مشاهده شده باشد. یعنی،

$$Y = y_i \quad \text{if } a_i < X \leq a_{i+1}$$

توزیع Y به صورت زیر است

$$P\{Y = y_i\} = F_X(a_{i+1}) - F_X(a_i)$$

اکنون فرض کنید بخواهیم $E[(X - Y)^2]$ ، میانگین مربع تفاضل بین داده‌های خام و حالت کمیت دار شده آنها را با انتخاب مقادیر y_i ، $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ مینیمم نمایم. (الف) مقادیر بهینه y_i ، $i = 0, \pm 1, \dots$ را بیابید.

برای کمیت سنج بهینه Y نشان دهید که

(ب) $E[Y] = E[X]$ و همچنین میانگین مربع خطای کمیت دار شده میانگین ورودی را

حفظ می‌کند، و

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(X) - E[(X - Y)^2] \quad (\text{ج})$$

حل: (الف) برای هر کمیت سنج Y ، با شرطی کردن روی مقدار Y داریم

$$E[(X - Y)^2] = \sum_i E[(X - y_i)^2 | a_i < X \leq a_{i+1}] P\{a_i < X \leq a_{i+1}\}$$

اکنون اگر فرض کنیم که

$$I = i \quad \text{if } a_i < X \leq a_{i+1}$$

در این صورت

$$E[(X - y_i)^2 | a_i < X \leq a_{i+1}] = E[(X - y_i)^2 | I = i]$$

و این کمیت بنا بر حکم ۷-۱ وقتی مینیمم می‌شود که

$$\begin{aligned} y_i &= E[X | I = i] \\ &= E[X | a_i < X \leq a_{i+1}] \\ &= \frac{\int_{a_i}^{a_{i+1}} x f_X(x) dx}{F_X(a_{i+1}) - F_X(a_i)} \end{aligned}$$

اینکه، چون کمیت سنج بهینه به صورت $Y = E[X|I]$ است، نتیجه می شود که

(ب)

$$E[Y] = E[X]$$

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X|I)] + \text{Var}(E[X|I])$$

(ج)

$$= E[E[(X - Y)^2|I]] + \text{Var}(Y)$$

$$= E[(X - Y)^2] + \text{Var}(Y)$$

گاهی اتفاق می افتد که توزیع احتمال مشترک X و Y کاملاً معلوم نیست؛ یا اگر معلوم است به قسمی است که محاسبه $E[Y|X=x]$ از نظر ریاضی انجام نشدنی است. لیکن اگر میانگین و واریانس X و Y و همبستگی X ، Y معلوم باشند در این صورت حداقل می توان بهترین برآوردگر خطی Y نسبت به X را تعیین کرد.

برای تعیین بهترین برآوردگر خطی Y نسبت به X لازم است a ، b را چنان انتخاب کنیم

تا $E[(Y - (a + bX))^2]$ مینیمم شود. اکنون

$$\begin{aligned} E[(Y - (a + bX))^2] &= E[Y^2 - 2aY - 2bXY + a^2 + 2abX + b^2X^2] \\ &= E[Y^2] - 2aE[Y] - 2bE[XY] + a^2 \\ &\quad + 2abE[X] + b^2E[X^2] \end{aligned}$$

با مشتق گیری جزئی داریم

$$\frac{\partial}{\partial a} E[(Y - a - bX)^2] = -2E[Y] + 2a + 2bE[X]$$

(۳-۷)

$$\frac{\partial}{\partial b} E[(Y - a - bX)^2] = -2E[XY] + 2aE[X] + 2bE[X^2]$$

با مساوی 0 قرار دادن معادلات (۳-۷) و حل آن نسبت به a و b جوابهای زیر به دست می آید

$$b = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{E[X^2] - (E[X])^2} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x^2} = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$a = E[Y] - bE[X] = E[Y] - \frac{\rho\sigma_y E[X]}{\sigma_x} \quad (۴-۷)$$

که در آن ضریب همبستگی $\rho = (X, Y)$ ، $\sigma_y^2 = \text{Var}(Y)$ و $\sigma_x^2 = \text{Var}(X)$. بسادگی ثابت می شود که مقادیر a و b از معادله (۴-۷) مقدار $E[(Y - a - bX)^2]$ را مینیمم می کند، و بنابراین به مفهوم میانگین مربع خطا بهترین برآوردگر خطی Y نسبت به X

عبارت است از

$$\mu_y + \frac{\rho\sigma_y}{\sigma_x}(X - \mu_x)$$

که در آن $\mu_x = E[X]$ و $\mu_y = E[Y]$.

میانگین مربع خطای این پیشگویی کننده عبارت است از

$$\begin{aligned} E\left[\left(Y - \mu_y - \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \mu_x)\right)^2\right] \\ &= E[(Y - \mu_y)^2] + \rho^2\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}E[(X - \mu_x)^2] - 2\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}E[(Y - \mu_y)(X - \mu_x)] \quad (5-7) \\ &= \sigma_y^2 + \rho^2\sigma_x^2 - 2\rho^2\sigma_y^2 \\ &= \sigma_y^2(1 - \rho^2) \end{aligned}$$

توجه کنید که بنابر معادله (5-7) اگر مقدار ρ نزدیک به +1 یا -1 باشد، در این صورت میانگین مربع خطای بهترین پیشگویی کننده خطی نزدیک به 0 است.

مثال ۷ ت. یک مثال که در آن میانگین شرطی Y به شرط X نسبت به X خطی باشد، و از این رو بهترین پیشگویی کننده خطی Y که نسبت به X روی هم رفته بهترین پیشگویی کننده باشد، آن است که X و Y توزیع نرمال دو متغیره داشته باشند. در این حالت چگالی مشترک آنها به صورت زیر است

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\}$$

اثبات این مطلب را که چگالی شرطی Y به شرط $X = x$ به صورت زیر است به خواننده واگذار می کنیم.

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\left(y - \mu_y - \frac{\rho\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x)\right)^2\right\}$$

بنابر این توزیع شرطی Y به شرط $X = x$ توزیع نرمال با میانگین

$$E\{Y|X=x\} = \mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \mu_x)$$

و واریانس $\sigma_y^2(1 - \rho^2)$ می باشد.

۸- تابع مولد گشتاور

$\phi(t)$ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X برای تمام مقادیر حقیقی t به صورت زیر

تعریف می شود

$$\phi(t) = E[e^{tX}]$$

$$= \begin{cases} \sum_1^{\infty} e^{tx} p(x) & X \text{ گسسته یا تابع جرم } p(x) \text{ باشد} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx & X \text{ پیوسته یا چگالی } f(x) \text{ باشد} \end{cases}$$

$\phi(t)$ را تابع مولد گشتاور می نامیم زیرا با مشتق گیری متوالی $\phi(t)$ و محاسبه نتیجه در $t=0$ می توان تمام گشتاورهای X را به دست آورد. برای مثال

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \frac{d}{dt} E[e^{tX}] \\ &= E\left[\frac{d}{dt}(e^{tX})\right] \\ &= E[Xe^{tX}] \end{aligned} \quad (1-8)$$

که در آن فرض کرده ایم تعویض عملگرهای مشتق و میانگین جایز است؛ یعنی در حالت گسسته فرض کرده ایم که

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_1^{\infty} e^{tx} p(x) \right] = \sum_1^{\infty} \frac{d}{dt} [e^{tx} p(x)]$$

و در حالت پیوسته فرض کرده ایم که

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} [e^{tx} f(x)] dx$$

این فرض تقریباً همواره می تواند مورد تأیید باشد و در حقیقت برای تمام توزیعهای مورد مطالعه در این کتاب برقرار است. از این رو، بنابر، معادله (۱-۸)، با محاسبه آن در $t=0$

داریم

$$\phi'(0) = E[X]$$

بطور مشابه

$$\begin{aligned}\phi''(t) &= \frac{d}{dt} \phi'(t) \\ &= \frac{d}{dt} E[Xe^{tX}] \\ &= E\left[\frac{d}{dt}(Xe^{tX})\right] \\ &= E[X^2 e^{tX}]\end{aligned}$$

بنابراین

$$\phi''(0) = E[X^2]$$

بطور کلی مشتق n ام، $\phi(t)$ عبارت است از

$$\phi^n(t) = E[X^n e^{tX}] \quad n \geq 1$$

ایجاب می کند که

$$\phi^n(0) = E[X^n] \quad n \geq 1$$

اینک $\phi(1)$ را برای بعضی توزیعهای معمولی پیدا می کنیم .

مثال ۸ الف . توزیع دو جمله ای با پارامترهای n و p . اگر X متغیر تصادفی دو جمله ای با پارامترهای n و p باشد، در این صورت

$$\begin{aligned}\phi(t) &= E[e^{tX}] \\ &= \sum_{k=0}^n e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (pe^t + 1 - p)^n\end{aligned}$$

که در آن آخرین تساوی از قضیه دو جمله ای حاصل می گردد .

$$\phi'(t) = n(pe^t + 1 - p)^{n-1} pe^t$$

و بنابراین

$$E[X] = \phi'(0) = np$$

که با نتیجه ای که نخست در مثال ۱ دت حاصل شد مطابقت می نماید. با مشتق گیری مرتبه دوم حاصل می شود

$$\phi''(t) = n(n-1)(pe^t + 1 - p)^{n-2}(pe^t)^2 + n(pe^t + 1 - p)^{n-1}pe^t$$

و بنابراین

$$E[X^2] = \phi''(0) = n(n-1)p^2 + np$$

واریانس X به صورت زیر به دست می آید

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 \\ &= np(1-p) \end{aligned}$$

که نتیجه مثال ۵ الف را ثابت می کند.

مثال ۸ ب. توزیع پواسن با میانگین λ . اگر X متغیر تصادفی پواسن با میانگین λ باشد،

آن گاه

$$\begin{aligned} \phi(t) &= E[e^{itX}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in} e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} \\ &= \exp\{\lambda(e^t - 1)\} \end{aligned}$$

با مشتق گیری حاصل می شود

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \lambda e^t \exp\{\lambda(e^t - 1)\} \\ \phi''(t) &= (\lambda e^t)^2 \exp\{\lambda(e^t - 1)\} + \lambda e^t \exp\{\lambda(e^t - 1)\} \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} E[X] &= \phi'(0) = \lambda \\ E[X^2] &= \phi''(0) = \lambda^2 + \lambda \\ \text{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

بنابراین میانگین و واریانس متغیر تصادفی پواسن هر دو برابر λ می باشند.

مثال ۸ پ. توزیع نمایی با پارامتر λ .

$$\begin{aligned} \phi(t) &= E[e^{tX}] \\ &= \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-t)x} dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda-t} \quad \text{for } t < \lambda \end{aligned}$$

از این نتیجه متوجه می شویم که برای توزیع نمایی، $\phi(t)$ تنها برای مقادیر t کوچکتر از λ تعریف می شود. با مشتق گیری از $\phi(t)$ نتیجه می شود

$$\phi'(t) = \frac{\lambda}{(\lambda-t)^2} \quad \phi''(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}$$

بنابراین

$$E[X] = \phi'(0) = \frac{1}{\lambda} \quad E[X^2] = \phi''(0) = \frac{2}{\lambda^2}$$

و واریانس X به صورت زیر محاسبه می شود

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

مثال ۸ ت. توزیع نرمال. ابتدا تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی نرمال واحد با پارامترهای 0 و 1 را حساب می کنیم. فرض کنید Z چنین متغیر تصادفی باشد، داریم

$$\begin{aligned}
\phi_Z(t) &= E[e^{tZ}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-x^2/2} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x^2 - 2tx)}{2}\right\} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-t)^2}{2} + \frac{t^2}{2}\right\} dx \\
&= e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2/2} dx \\
&= e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \quad \text{با جانشین کردن } y = x - t \\
&= e^{t^2/2}
\end{aligned}$$

بنابراین تابع مولد گشتاور Z متغیر تصادفی نرمال واحد برابر است با $e^{t^2/2}$.
 برای محاسبه تابع مولد گشتاور یک متغیر تصادفی نرمال دلخواه خاطر نشان می کنیم (بخش ۳ فصل ۵ را ببینید) که $X = \mu + \sigma Z$ در صورتی که Z متغیر تصادفی نرمال واحد باشد دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ ، σ^2 است. بنابراین تابع مولد گشتاور این متغیر تصادفی عبارت است از

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= E[e^{tX}] \\
&= E[e^{t(\mu + \sigma Z)}] \\
&= E[e^{t\mu} e^{t\sigma Z}] \\
&= e^{t\mu} E[e^{t\sigma Z}] \\
&= e^{t\mu} \phi_Z(t\sigma) \\
&= e^{t\mu} e^{(t\sigma)^2/2} \\
&= \exp\left\{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t\right\}
\end{aligned}$$

با مشتق گیری، داریم

$$\begin{aligned}
\phi'_X(t) &= (\mu + t\sigma^2) \exp\left\{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t\right\} \\
\phi''_X(t) &= (\mu + t\sigma^2)^2 \exp\left\{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t\right\} + \sigma^2 \exp\left\{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t\right\}
\end{aligned}$$

و بنابراین

$$E[X] = \phi'(0) = \mu$$

$$E[X^2] = \phi''(0) = \mu^2 + \sigma^2$$

ولذا داریم

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$= \sigma^2$$

جدولهای ۷-۱ و ۷-۲ تابع مولد گشتاور برای چند توزیع گسسته و پیوسته معمولی را می دهند.

یک خاصیت مهم توابع مولد گشتاور آن است که تابع مولد گشتاور مجموع متغیرهای تصادفی مستقل برابر با حاصل ضرب تابع مولد گشتاور آنها می باشد. برای اثبات این مطلب، فرض کنید X و Y مستقلند و به ترتیب دارای تابع مولد گشتاور $\phi_X(t)$ و $\phi_Y(t)$ می باشند. در این صورت، $\phi_{X+Y}(t)$ تابع مولد گشتاور $X + Y$ عبارت است از

$$\begin{aligned}\phi_{X+Y}(t) &= E[e^{t(X+Y)}] \\ &= E[e^{tX}e^{tY}] \\ &= E[e^{tX}]E[e^{tY}] \\ &= \phi_X(t)\phi_Y(t)\end{aligned}$$

که در آن تساوی ما قبل آخر از حکم ۵-۱ نتیجه می شود، چون X و Y مستقلند.

نتیجه مهم دیگر آن است که تابع مولد گشتاور، توزیع را بطور منحصر به فرد تعیین می کند. یعنی، اگر $\phi(t)$ وجود داشته و در ناحیه ای حول 0 معین باشد در این صورت توزیع X بطور منحصر به فرد تعیین می گردد. مثلاً، اگر $(\frac{1}{2})^{10} (e^t + 1)^{10}$ $\phi_X(t)$ در این صورت از جدول ۷-۱ نتیجه می شود که X متغیر تصادفی دو جمله ای با پارامترهای ۱۰ و $\frac{1}{4}$ می باشد.

مثال ۸ ث. فرض کنید تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X عبارت است از

$$\phi(t) = e^{3(e^t - 1)} \quad P\{X=0\} \text{ چقدر است؟}$$

حل: از جدول ۷-۱ دیده می شود که $\phi(t) = e^{3(e^t - 1)}$ تابع مولد گشتاور متغیر

تصادفی پواسن با میانگین ۳ می باشد. در نتیجه، بنابر تناظر یک به یک بین توابع مولد گشتاور و توابع توزیع، نتیجه می شود که X بایستی متغیر تصادفی پواسن با میانگین ۳ باشد. از این رو $P\{X=0\} = e^{-3}$.

جدول ۷-۱

توزیع احتمال گسسته	تابع چرم احتمال، $P(x)$	تابع مورلد		میانگین	واریانس
		گمنامور، $\phi(t)$	$\theta(t)$		
دوجمله‌ای با پارامترهای n و p $0 \leq p \leq 1$	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ $x = 0, 1, \dots, n$	$(pe^t + 1 - p)^n$	np	$np(1-p)$	
پواسن با پارامتر $\lambda > 0$	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$ $x = 0, 1, 2, \dots$	$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$	λ	λ	
هندسی با پارامتر $0 \leq p \leq 1$	$p(1-p)^{x-1}$ $x = 1, 2, \dots$	$\frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	
دوجمله‌ای منفی با پارامترهای r و p $0 \leq p \leq 1$	$\binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$ $n = r, r+1, \dots$	$\left[\frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t} \right]^r$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	

جدول ۷-۲

توزیع احتمال گسسته	تابع چگالی احتمال $f(x)$	تابع مولد گشتاور $\phi(t)$	میانگین	واریانس
یکتراجنس روی (a, b) تصادفی: پارامتر $\lambda > 0$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
گاما پارامترهای (s, λ) $\lambda > 0$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
نرمال: پارامترهای (μ, σ^2)	$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{s-1}}{\Gamma(s)} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$	$\exp \left[\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right]$	μ	σ^2
	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$			

مثال ۸ ج . مجموع متغیرهای تصادفی دو جمله‌ای مستقل، اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل به ترتیب با پارامترهای (n, p) و (m, p) باشند، توزیع $X + Y$ چیست؟

حل: تابع مولد گشتاور $X + Y$ برابر است با

$$\begin{aligned}\phi_{X+Y}(t) &= \phi_X(t)\phi_Y(t) = (pe^t + 1 - p)^n (pe^t + 1 - p)^m \\ &= (pe^t + 1 - p)^{m+n}\end{aligned}$$

لیکن، $(pe^t + 1 - p)^{m+n}$ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای $m+n$ و p می‌باشد. از این رو $X + Y$ باید دارای این توزیع باشد.

مثال ۸ ج . مجموع متغیرهای تصادفی پواسن مستقل، توزیع $X + Y$ را بیابید وقتی X و Y متغیرهای تصادفی پواسن مستقل به ترتیب با میانگین λ_1 ، λ_2 می‌باشند.

حل:

$$\begin{aligned}\phi_{X+Y}(t) &= \phi_X(t)\phi_Y(t) \\ &= \exp\{\lambda_1(e^t - 1)\} \exp\{\lambda_2(e^t - 1)\} \\ &= \exp\{(\lambda_1 + \lambda_2)(e^t - 1)\}\end{aligned}$$

بنابراین $X + Y$ دارای توزیع پواسن با میانگین $\lambda_1 + \lambda_2$ است، نتیجه حاصل در مثال ۳ پ فصل ۶ را ثابت می‌کند.

مثال ۸ ح . مجموع متغیرهای تصادفی نرمال مستقل، نشان دهید اگر X و Y متغیرهای تصادفی نرمال مستقل و پارامترهای آنها به ترتیب (μ_1, σ_1^2) و (μ_2, σ_2^2) باشند، در این صورت $X + Y$ نرمال با میانگین $\mu_1 + \mu_2$ و واریانس $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ می‌باشد.

حل:

$$\begin{aligned}\phi_{X+Y}(t) &= \phi_X(t)\phi_Y(t) \\ &= \exp\left\{\frac{\sigma_1^2 t^2}{2} + \mu_1 t\right\} \exp\left\{\frac{\sigma_2^2 t^2}{2} + \mu_2 t\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) t^2}{2} + (\mu_1 + \mu_2) t\right\}\end{aligned}$$

که تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی نرمال با میانگین $\mu_1 + \mu_2$ و واریانس $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ می‌باشد. از این رو نتیجه حاصل می‌گردد زیرا تابع مولد گشتاور بطور منحصر به فرد توزیع را

مشخص می کند.

مثال ۸ غ. تابع مولدگشتاور مجموع تعداد تصادلی از متغیرهای تصادلی. فرض کنید X_1, X_2, \dots دنباله ای از متغیرهای تصادفی هم توزیع و مستقل باشد، و فرض کنید N یک متغیر تصادفی با مقادیر صحیح و نامنفی باشد که از دنباله X_1, X_2, \dots ، $i \geq 1$ ، مستقل است. می خواهیم تابع مولد گشتاور مجموع زیر را حساب کنیم

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i$$

(در مثال ۶ ت Y نمایش مبلغ پول هزینه شده در یک فروشگاه در یک روز معین بود، وقتی مبلغ هزینه شده توسط یک مشتری و تعداد این مشتریان هر دو متغیر تصادفی اند).
برای محاسبه تابع مولد گشتاور Y ، ابتدا روی N به صورت زیر شرطی می کنیم

$$\begin{aligned} E[e^{t \sum_{i=1}^N X_i} | N = n] &= E[e^{t \sum_{i=1}^n X_i} | N = n] \\ &= E[e^{t \sum_{i=1}^n X_i}] \\ &= (\phi_X(t))^n \end{aligned}$$

که در آن

$$\phi_X(t) = E[e^{tX_i}]$$

بنابراین

$$E[e^{tY} | N] = (\phi_X(t))^N$$

و از این رو

$$\phi_Y(t) = E[(\phi_X(t))^N]$$

اکنون گشتاورهای Y را با مشتق گیری به صورت زیر می توان به دست آورد:

$$\phi'_Y(t) = E[N(\phi_X(t))^{N-1} \phi'_X(t)]$$

و بنا بر این

$$\begin{aligned}
 E\{Y\} &= \phi'_Y(0) \\
 &= E[N(\phi_X(0))^{N-1} \phi'_X(0)] \\
 &= E[NEX] \\
 &= E[N]E[X]
 \end{aligned} \tag{۲-۸}$$

که نتیجه مثال ۶ را ثابت می‌کند. (در این مجموعه معادلات اخیر از این حقیقت که $\phi_X(0) = E[e^{0X}] = 1$ استفاده نموده ایم.) همچنین،

$$\phi''_Y(t) = E[N(N-1)(\phi_X(t))^{N-2}(\phi'_X(t))^2 + N(\phi_X(t))^{N-1}\phi''_X(t)]$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}
 E\{Y^2\} &= \phi''_Y(0) \\
 &= E[N(N-1)(E[X]^2 + NE[X^2])] \\
 &= (E[X])^2(E[N^2] - E[N]) + E[N]E[X^2] \\
 &= E[N](E[X^2] - (E[X])^2) + (E[X])^2E[N^2] \\
 &= E[N]\text{Var}(X) + (E[X])^2E[N^2]
 \end{aligned} \tag{۳-۸}$$

بنابراین از معادلات (۲-۸) و (۳-۸) دیده می‌شود که

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Y) &= E[N]\text{Var}(X) + (E[X])^2(E[N^2] - (E[N])^2) \\
 &= E[N]\text{Var}(X) + (E[X])^2\text{Var}(N)
 \end{aligned}$$

همچنین ممکن است تابع مولد گشتاور توأم دو متغیر تصادفی یا بیشتر را تعریف نمود. این کار را به صورت زیر انجام می‌دهیم. برای هر n متغیر تصادفی X_1, \dots, X_n تابع مولد گشتاور توأم $\phi(t_1, \dots, t_n)$ را برای تمام مقادیر حقیقی t_1, \dots, t_n ، به صورت

$$\phi(t_1, \dots, t_n) = E[e^{t_1 X_1 + \dots + t_n X_n}]$$

تعریف می‌کنیم. هر تابع مولد گشتاور خاص را می‌توان از $\phi(t_1, \dots, t_n)$ با صفر قرار دادن تمام t_i ها به استثنای یکی از آنها به دست آورد؛ یعنی

$$\phi_{X_i}(t) = E[e^{tX_i}] = \phi(0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$$

که در آن t در محل i ام قرار دارد.

می‌توان ثابت کرد (گرچه اثبات آن از سطح این کتاب بالاتر است) که $\phi(t_1, \dots, t_n)$ بطور منحصر به فرد توزیع توأم X_1, \dots, X_n را تعیین می‌کند. در این صورت با به کار بردن این

نتیجه می توان ثابت کرد که n متغیر تصادفی X_1, \dots, X_n مستقلند اگر و تنها اگر

$$\phi(t_1, \dots, t_n) = \phi_{X_1}(t_1) \cdots \phi_{X_n}(t_n) \quad (۴-۸)$$

اگر n متغیر تصادفی مستقل باشند، آن گاه نتیجه به صورت زیر به دست می آید

$$\begin{aligned} \phi(t_1, \dots, t_n) &= E[e^{(t_1 X_1 + \dots + t_n X_n)}] \\ &= E[e^{t_1 X_1} \cdots e^{t_n X_n}] \\ &= E[e^{t_1 X_1}] \cdots E[e^{t_n X_n}] \quad \text{بنابر استقلال} \\ &= \phi_{X_1}(t_1) \cdots \phi_{X_n}(t_n) \end{aligned}$$

از طرف دیگر، اگر معادله (۴-۸) برقرار باشد. در این صورت تابع مولد گشتاور توأم $\phi(t_1, \dots, t_n)$ مانند تابع مولد گشتاور توأم n متغیر تصادفی مستقل است که i امین آن دارای همان توزیع X_i است. چون تابع مولد گشتاور توأم منحصرأ توزیع توأم را مشخص می کند، این توزیع بایستی توزیع توأم باشد؛ از این رو متغیرهای تصادفی مستقلند.

مثال ۸. د. توزیع نرمال چند متغیره. فرض کنید Z_1, \dots, Z_n یک مجموعه n متغیر تصادفی

نرمال واحد مستقل باشد. اگر برای ثابتهای a_{ij} ، $1 \leq i \leq m$ ، $1 \leq j \leq n$ ، μ_i داشته باشیم

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11}Z_1 + \cdots + a_{1n}Z_n + \mu_1 \\ X_2 &= a_{21}Z_1 + \cdots + a_{2n}Z_n + \mu_2 \\ &\vdots \\ X_i &= a_{i1}Z_1 + \cdots + a_{in}Z_n + \mu_i \\ &\vdots \\ X_m &= a_{m1}Z_1 + \cdots + a_{mn}Z_n + \mu_m \end{aligned}$$

در این صورت گوئیم متغیرهای تصادفی X_1, \dots, X_m دارای توزیع نرمال چند متغیره هستند. از این حقیقت که مجموع متغیرهای تصادفی نرمال مستقل خود یک متغیر تصادفی نرمال (مثال ۸ پ را ببینید) است نتیجه می شود که هر X_i دارای توزیع نرمال با میانگین و واریانس زیر می باشد.

$$\begin{aligned} E[X_i] &= \mu_i \\ \text{Var}(X_i) &= \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \end{aligned}$$

کواریانس X_i و X_j عبارت است از

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_i, X_j) &= \text{Cov}\left(\mu_i + \sum_{k=1}^n a_{ik}Z_k, \mu_j + \sum_{\ell=1}^n a_{j\ell}Z_\ell\right) \\ &= \text{Cov}\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}Z_k, \sum_{\ell=1}^n a_{j\ell}Z_\ell\right) \\ &= \sum_{k,\ell} a_{ik}a_{j\ell} \text{Cov}(Z_k, Z_\ell) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{jk} \end{aligned}$$

چون

$$\text{Cov}(Z_k, Z_\ell) = \begin{cases} 1 & k = \ell \\ 0 & k \neq \ell \end{cases}$$

تابع مواد گشتاور توأم عبارت است از

$$\phi(t_1, \dots, t_m) = E[e^{t_1X_1 + \dots + t_mX_m}]$$

اکنون

$$\begin{aligned} t_1X_1 + \dots + t_mX_m &= (a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \dots + a_{m1}t_m)Z_1 \\ &\quad + (a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{m2}t_m)Z_2 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \dots + a_{mn}t_m)Z_n \\ &\quad + \mu_1t_1 + \mu_2t_2 + \dots + \mu_mt_m \end{aligned}$$

و از این رو

$$\sum_{i=1}^m t_i X_i$$

دارای توزیع نرمال است با میانگین

$$E\left[\sum_{i=1}^m t_i X_i\right] = \sum_{i=1}^m t_i \mu_i$$

و واریانس

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^m t_i X_i\right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ik}t_i\right)^2$$

بنابراین، با استفاده از این مطلب که اگر Y متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آن گاه

$$E[e^Y] = \phi_Y(t)|_{t=1} = e^{\mu + \sigma^2/2}$$

لذا نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} \phi(t_1, \dots, t_m) &= E \left[\exp \left\{ \sum_{i=1}^m t_i X_i \right\} \right] \\ &= \exp \left\{ \sum_{i=1}^m t_i \mu_i + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^m a_{ik} t_i \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

اینک،

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^m a_{ik} t_i \right)^2 &= \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m a_{ik} t_i \sum_{j=1}^m a_{jk} t_j \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m t_i t_j \sum_{k=1}^m a_{ik} a_{jk} \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m t_i t_j \text{Cov}(X_i, X_j) \end{aligned}$$

و از این رو $\phi(t_1, \dots, t_m)$ را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$\phi(t_1, \dots, t_m) = \exp \left\{ \sum_{i=1}^m t_i \mu_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m t_i t_j \text{Cov}(X_i, X_j) \right\}$$

و این نشان می دهد که توزیع توأم X_m, \dots, X_1 با آگاهی از مقادیر $\mu_i = E[X_i]$ و $\text{Cov}(X_i, X_j)$ و $i, j = 1, \dots, m$ کاملاً مشخص می گردد.

۹- تعریف کلی میانگین

تا اینجا میانگین را تنها برای متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته تعریف کرده ایم. لیکن، متغیرهای تصادفی که گسسته و پیوسته نباشند نیز وجود دارند و ممکن است دارای میانگین نیز باشند. برای مثال فرض کنید X متغیر تصادفی برنولی با پارامتر $p = \frac{1}{2}$ باشد و Y متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت روی فاصله $[0, 1]$ باشد، به علاوه فرض کنید که X و Y مستقلند و متغیر تصادفی جدید W را به صورت زیر تعریف کنید.

$$W = \begin{cases} X & X = 1 \\ Y & X \neq 1 \end{cases}$$

بطور واضح، متغیر تصادفی W گسسته نیست (چون مجموعه مقادیر ممکن آن $[0, 1]$ ناشمار است) و پیوسته نیست (زیرا $P(\{X = 1\}) = 1$).

برای این که میانگین یک متغیر تصادفی دلخواه را تعریف کنیم به نظریه انتگرال استیلجس نیاز داریم. قبل از تعریف انتگرال استیلجس، خاطر نشان می‌کنیم که برای هر تابع g ، $\int_a^b g(x) dx$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\int_a^b g(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

که در آن حدود روی تمام $a < x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ و وقتی $n \rightarrow \infty$ و $\max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0$ حساب می‌شود.

برای هر تابع توزیع F انتگرال استیلجس تابعی نامنفی g را روی فاصله $[a, b]$ به صورت

زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_a^b g(x) dF(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(x_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

که در آن مانند قبل حدود روی تمام $a < x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ و وقتی $n \rightarrow \infty$ و $\max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0$ حساب می‌شود. به علاوه، انتگرال استیلجس را روی تمام خط حقیقی به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b g(x) dF(x)$$

بالاخره، اگر g تابع نامنفی نباشد، g^+ و g^- را چنین تعریف می‌کنیم

$$g^+(x) = \begin{cases} g(x) & g(x) \geq 0 \\ 0 & g(x) < 0 \end{cases}$$

$$g^-(x) = \begin{cases} 0 & g(x) \geq 0 \\ -g(x) & g(x) < 0 \end{cases}$$

به قسمی که $g(x) = g^+(x) - g^-(x)$ و g^- و g^+ هر دو نامنفی اند. طبیعی است که تعریف

کنیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g^+(x) dF(x) - \int_{-\infty}^{\infty} g^-(x) dF(x)$$

و گوییم $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x)$ وجود دارد به شرط آن که $\int_{-\infty}^{\infty} g^+(x) dF(x)$ و $\int_{-\infty}^{\infty} g^-(x) dF(x)$ هر دو برابر ∞ نباشند

اگر X متغیر تصادفی دلخواه با توزیع تجمعی F باشد، امید ریاضی X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \quad (1-9)$$

اگر X متغیر تصادفی گسسته با تابع جرم $p(x)$ باشد. در این صورت می‌توان نشان داد

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \sum_{x: p(x) > 0} xp(x)$$

در حالی که X متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی $f(x)$ باشد، داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

توجه کنید که معادله (۹-۱) با در نظر گرفتن مجموع تقریبی

$$\sum_{i=1}^n x_i [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

از $E[X]$ تعریف شهودی $E[X]$ را می‌دهد. چون $F(x_i) - F(x_{i-1})$ احتمال آن است که X در فاصله (x_{i-1}, x_i) باشد، مجموع تقریبی فوق حاصلضرب کران بالای X را وقتی در فاصله (x_{i-1}, x_i) است در احتمال این که X در این فاصله باشد روی تمام فاصله‌ها جمع می‌کند. واضح است، وقتی طول این فاصله‌ها کوچک و کوچکتر می‌شوند، «امید ریاضی» X به دست می‌آید.

انتگرالهای استیلجس اصولاً از نظر تئوری جالب هستند زیرا آنها راه مختصر و مفیدی را برای تعریف و کار کردن با خواص میانگین به دست می‌دهند. مثلاً، با استفاده از انتگرال استیلجس نیازی ندارد قضایا را برای حالت پیوسته و گسسته جدا از هم بیان و اثبات نمود. لیکن، خواص آنها بطور گسترده‌ای مانند انتگرالهای معمولی است و بسادگی می‌توان تمام اثباتهای ارائه شده در این فصل را به اثبات در حالت کلی تبدیل کرد.

تمرینهای نظری

۱- حکم ۲-۱ الف را ثابت کنید.

۲- برخی کتابها $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ «تعریف می کنند». لیکن، چون $g(X)$ خود یک متغیر تصادفی است روشن نیست که «تعریف» فوق منطقاً سازگار باشد. زیرا همچنین از این «تعریف» نتیجه می شود که $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{g(X)}(y) dy$ ، و دلیل قبلی بر این که لازم است این دو عبارت برای $E[g(x)]$ یکی باشند وجود ندارد. البته، این که این دو یکی هستند مفهوم قانون نا آگاهی است. اکنون فرض کنید برای هر متغیر تصادفی پیوسته X و تابعی با مقادیر حقیقی g ، S - میانگین $g(X)$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$S[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)(f_X(x))^2 dx$$

با فرض این که X یک متغیر تصادفی یکنواخت روی $(0, 1)$ باشد با محاسبه $S(X^2)$ به دو طریق مختلف نشان دهید که «تعریف» S - میانگین منطقاً سازگار است (یعنی، به تناقض منجر می شود).

۳- برای یک متغیر تصادفی با مقادیر صحیح نامنفی N نشان دهید که

$$\sum_{i=0}^{\infty} iP\{N > i\} = \frac{1}{2}(E[N^2] - E[N])$$

راهنمایی: $\sum_i iP\{N > i\} = \sum_i \sum_{k=i+1}^{\infty} P\{N = k\}$ ، اینک ترتیب مجموعها را عوض کنید.

۴- برای متغیر تصادفی نامنفی X ثابت کنید

$$E[X^n] = \int_0^{\infty} nx^{n-1}(1 - F(x)) dx$$

۵- نشان دهید $E[(X-a)^2]$ به ازای $a = E[X]$ مینیمم می شود.

۶- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی f می باشد. نشان دهید $E[|X - a|]$ وقتی a برابر میانه F باشد مینیمم می شود.

راهنمایی: بنویسید

$$E[|X - a|] = \int |x - a|f(x) dx$$

اکنون انتگرال را به ناحیه های $x < a$ و $x > a$ تفکیک نموده و مشتق بگیرید.

- ۷- مشابه دو بعدی حکم ۲-۱ را ثابت کنید وقتی (الف) X و Y دارای تابع جرم احتمال مشترکند، و (ب) X, Y دارای تابع چگالی احتمال مشترکند و برای هر x و y ، $g(x, y) \geq 0$ ،
 ۸- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با میانگین μ و واریانس σ^2 معلوم می باشد. و فرض کنید تابع $g(\cdot)$ دو مرتبه مشتق پذیر باشد. نشان دهید

$$E[g(X)] \approx g(\mu) + \frac{g''(\mu)}{2} \sigma^2$$

- (راهنمایی: $g(\cdot)$ را بر حسب سری تیلور حول μ بسط دهید. از سه جمله اول استفاده نموده و از بقیه جملات صرف نظر کنید).
 ۹- یک سکه با احتمال p شیر می آید، آن را n بار پرتاب می کنیم. میانگین تعداد دفعاتی را که ۱ شیر، ۲ شیر، k شیر، $1 \leq k \leq n$ ، می آید پیدا کنید.
 ۱۰- فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی هم توزیع و مستقل باشند؛ برای $k \leq n$.

$$E \left[\frac{\sum_{i=1}^k X_i}{\sum_{i=1}^n X_i} \right]$$

را بیابید.

- ۱۱- n آزمایش تصادفی مستقل را که هر یک دارای r برآمد ممکن با احتمالات p_1, p_2, \dots, p_r می باشد در نظر بگیرید. فرض کنید X نمایش تعداد نتایجی باشد که در هیچ کدام از آزمایشها هرگز رخ نمی دهد. $E[X]$ را بیابید و نشان دهید که در میان تمام بردارهای احتمال p_1, p_2, \dots, p_r وقتی $p_i = \frac{1}{r}$ ، $i = 1, \dots, r$ ، باشد $E[X]$ مینیمم می شود
 ۱۲- بر مبنای آگاهی شما از واریانس متغیر تصادفی دوجمله ای و رابطه بین متغیرهای تصادفی دوجمله ای و پواسن، حدس بزنید واریانس متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λ چه خواهد بود؟ این موضوع را بطور تحلیلی ثابت کنید.
 ۱۳- واریانس متغیر تصادفی هندسی با میانگین $\frac{1}{p}$ را حساب کنید.
 ۱۴- واریانس متغیر تصادفی نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ را پیدا کنید.
 ۱۵- واریانس متغیر تصادفی را که دارای توزیع یکنواخت روی (a, b) است به دست آورید.
 ۱۶- میانگین و واریانس متغیر تصادفی بتا با پارامترهای (a, b) را حساب کنید.

۱۷- میانگین و واریانس متغیر تصادفی گاما با پارامترهای (t, λ) را بیابید.

۱۸- از یک مجموعه n عضوی یک زیر مجموعه غیر تهی بتصادف انتخاب می کنیم با این فرض که تمام زیر مجموعه های غیر تهی با شانس مساوی انتخاب می شوند. فرض کنید X نمایش تعداد اعضای زیر مجموعه انتخابی است. با استفاده از تساوی مفروض در تمرین نظری ۱۳ فصل ۱ نشان دهید که

$$E[X] = \frac{n}{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{n2^{2n-2} - n(n+1)2^{n-2}}{(2^n - 1)^2}$$

همچنین برای n های بزرگ نشان دهید

$$\text{Var}(X) \sim \frac{n}{4}$$

با علم به این که نسبت فوق وقتی $n \rightarrow \infty$ ، به سمت ۱ میل کند. این حالت را با شکل حدی $\text{Var}(Y)$ وقتی $P\{Y = i\} = \frac{1}{n}$ ، $i = 1, \dots, n$ ، مقایسه کنید.

۱۹- آزمایشهای مستقلی انجام می دهیم. اگر i امین آزمایش با احتمال p_i یک موفقیت باشد مطلوب است: (الف) میانگین، و (ب) واریانس، تعداد موفقیتهایی که در n آزمایش نخست رخ می دهد. آیا استقلال در بند (الف) و بند (ب) تأثیری دارد؟

۲۰- فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی هم توزیع و مستقل با میانگین μ ، و واریانس σ^2 باشند، و فرض کنید $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n$ نشان دهید که:

$$(a) E[\bar{X}] = \mu; \quad (b) \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n};$$

$$(c) E \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right] = (n-1)\sigma^2.$$

۲۱- فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی پیوسته، هم توزیع و مستقل باشند. گوئیم یک مقدار رکورد در زمان j ، $1 \leq j \leq n$ رخ می دهد، اگر برای تمام $1 \leq i \leq j$ ، $X_i \geq X_j$ نشان دهید

$$(a) E[\text{تعداد مقادیر حد نصاب}] = \sum_{j=1}^n 1/j.$$

$$(b) \text{Var}(\text{تعداد مقادیر حد نصاب}) = \sum_{j=1}^n (j-1)/j^2$$

۲۲- برای مثال ۳ چ نشان دهید که واریانس تعداد کوبنهای مورد نیاز برای جمع آوری یک مجموعه کامل برابر است با

$$\sum_{i=1}^{N-1} \frac{iN}{(N-i)^2}$$

وقتی N بزرگ است می توان نشان داد که تقریباً برابر با $N^2 \pi^2 / 6$ می باشد (با علم به این که وقتی $n \rightarrow \infty$ ، نسبت آنها به ۱ میل می کند).

۲۳- n آزمایش مستقل که در آن آزمایش i ام با احتمال p_i یک موفقیت است در نظر بگیرید، آن گاه

(الف) میانگین تعداد موفقیتها در n آزمایش را پیدا کنید و آن را μ بنامید.

(ب) برای مقدار ثابت μ ، چه انتخابی از P_1, \dots, P_n واریانس تعداد موفقیتها را ماکزیمم می کند؟

(ج) چه انتخابی واریانس را مینیمم می کند؟

۲۴- معادله (۱-۵) را ثابت کنید.

۲۵- از ظرفی که شامل n توپ سفید و m توپ سیاه است بطور تصادفی توپ بیرون می آوریم. در مثال ۳ د نشان دادیم که وقتی X تعداد انتخابهای لازم برای به دست آوردن یک توپ

$$E[X] = 1 + m / (n+1)$$

سفید باشد $\text{Var}(X)$ را بیابید.

(ب) نشان دهید که میانگین تعداد توپهایی که لازم است برای گردآوری مجموع k توپ سفید بیرون آورده شود برابر است با $k [1 + m / (n + 1)]$.

(راهنمایی: فرض کنید $Y_i, i = 1, \dots, n+1$ ، نمایش تعداد توپهای سیاه انتخابی پس از $(i-1)$ امین توپ سفید و قبل از i امین توپ سفید باشد. ثابت کنید که Y_i ها، $i = 1, \dots, n+1$ هموزیعند

۲۶- واریانس متغیر تصادفی دو جمله ای منفی را بیابید.

۲۷- فرض کنید X_1, X_2 متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین مشترک μ باشند و همچنین فرض کنید که $\text{Var}(X_1) = \sigma_1^2$ و $\text{Var}(X_2) = \sigma_2^2$. مقدار μ معلوم است و در نظر داریم که μ را با متوسط موزون X_1, X_2 برآورد کنیم. یعنی، $\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2$ را به عنوان برآورد μ با مقدار خاصی از λ به کار می بریم. چه مقدار λ برآوردی با کمترین واریانس

ممکن را می دهد؟ شرح دهید چرا استفاده از این مقدار λ مطلوب است.

۲۸- ثابت کنید:

- (a) $\text{Cov}(a + bX, c + dY) = bd \text{Cov}(X, Y)$;
 (b) $\text{Cov}(X + Y, Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z)$;
 (c) $\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^m X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \text{Cov}(X_i, Y_j)$.

۲۹- در مثال ۵ نشان دادیم که واریانس متغیرهای تصادفی چند جمله ای N_i و N_j وقتی N_i و N_j به صورت مجموع متغیرهای نشانگر بیان می شوند، برابر با $m P_i P_j$ است این نتیجه را با استفاده از فرمول زیر نیز می توان به دست آورد.

$$\text{Var}(N_i + N_j) = \text{Var}(N_i) + \text{Var}(N_j) + 2\text{Cov}(N_i, N_j)$$

(الف) توزیع $N_i + N_j$ چیست؟

(ب) با استفاده از تساوی بالا نشان دهید که $\text{Cov}(N_i, N_j) = -m P_i P_j$

۳۰- اگر X, Y هم توزیع ولی لزوماً مستقل نباشند، نشان دهید

$$\text{Cov}(X + Y, X - Y) = 0$$

۳۱- فرمول کوواریانس شرطی. کوواریانس شرطی X و Y با فرض Z عبارت است از

$$\text{Cov}(X, Y|Z) = E[(X - E[X|Z])(Y - E[Y|Z])|Z]$$

(الف) نشان دهید

$$\text{Cov}(X, Y|Z) = E[XY|Z] - E[X|Z]E[Y|Z]$$

(ب) فرمول کوواریانس شرطی زیر را ثابت کنید

$$\text{Cov}(X, Y) = E[\text{Cov}(X, Y|Z)] + \text{Cov}(E[X|Z], E[Y|Z])$$

(پ) در بند (ب) با قرار دادن $X = Y$ فرمول واریانس شرطی را به دست آورید.

۳۲- فرض کنید $X_{(i)}$ ، $i = 1, \dots, n$ ، نمایش آماره ترتیبی از یک مجموعه n متغیر تصادفی یکنواخت روی $(0, 1)$ باشد و توجه کنید که تابع چگالی $X_{(i)}$ عبارت است از

$$f(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1} (1-x)^{n-i}, 0 < x < 1$$

(الف) $\text{Var}(X_{(i)})$ ، $i = 1, \dots, n$ ، را بیابید .

(ب) به ازای چه مقدار i ، $\text{Var}(X_{(i)})$ مینیمم و به ازای چه مقدار i ماکزیمم می گردد .

۳۳- اگر $Y = a + bX$ ، نشان دهید

$$\rho(X, Y) = \begin{cases} +1 & b = 0 \\ -1 & b < 0 \end{cases}$$

۳۴- اگر Z متغیر نرمال استاندارد باشد و $Y = a + bZ + cZ^2$ ، نشان دهید

$$\rho(Y, Z) = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2c^2}}$$

۳۵- نا مساوی کوشی - شوارتز را ثابت کنید ؛ یعنی ثابت کنید

$$(E[XY])^2 \leq E[X^2]E[Y^2]$$

(راهنمایی: بجز $Y = -tX$ ، برای برخی مقدار ثابت در آن حالت نا مساوی به مساوی

تبدیل می شود، نتیجه می شود که برای تمام مقادیر t

$$0 < E[(tX + Y)^2] = E[X^2]t^2 + 2E[XY]t + E[Y^2]$$

بنابر این ریشه های معادله درجه دوم

$$E[X^2]t^2 + 2E[XY]t + E[Y^2] = 0$$

باید موهومی باشند و این موجب می گردد که مبین معادله درجه دوم باید منفی باشد).

۳۶- نشان دهید که اگر X ، Y مستقل باشند، آن گاه

$$E[X|Y = y] = E[X] \quad \text{آن گاه برای هر } y$$

(الف) در حالت گسسته، و (ب) در حالت پیوسته

۳۷- ثابت کنید که

۳۸- ثابت کنید که اگر برای تمام x ها ، $E[Y|X = x] = E[Y]$ ، آنگاه X و Y ناهمبسته اند و با

یک مثال نقص نشان دهید که وارون آن درست نیست .

(راهنمایی: این حقیقت را که $E[XY] = E[XE[Y|X]]$ ثابت نموده و به کار برید)

۳۹- ثابت کنید

$$\text{Cov}(X, E[Y|X]) = \text{Cov}(X, Y).$$

۴۰- با فرض این که X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی هموزیع و مستقل باشند

$$E[X_1 | X_1 + \dots + X_n = x]$$

را بیابید.

۴۱- مثال ۵ را که در ارتباط با توزیع چند جمله‌ای است در نظر بگیرید. با استفاده از میانگین شرطی $E[N_1 N_j | \text{Cov}(N_1, N_j)]$ را حساب کنید و سپس با استفاده از آن فرمول $\text{Cov}(N_1, N_j)$ ارائه شده در مثال ۵ را ثابت کنید.

۴۲- کیسه‌ای شامل b توپ سیاه و w توپ سفید است. در هر مرحله r توپ سیاه اضافه نموده و سپس بتصادف r توپ از $b + w + r$ توپ بیرون می‌آوریم. نشان دهید که

$$E[w | \text{تعداد توپهای سفید پس از مرحله } t] = \left(\frac{b+w}{b+w+r}\right)^t w.$$

۴۳- معادله (۶-۱) را ثابت کنید.

۴۴- یک سکه را که با احتمال p شیر می‌آید بطور متوالی پرتاب می‌کنیم. میانگین تعداد پرتابهایی را حساب کنید که برای به دست آوردن یک رشته از r شیر در یک ردیف انجام می‌دهیم.

(راهنمایی: برحسب زمان اولین رویداد خط، شرطی کنید و معادله زیر را به دست آورید:

$$E[X] = (1-p) \sum_{i=1}^r p^{i-1} (i + E[X]) + (1-p) \sum_{i=r+1}^{\infty} p^{i-1} r$$

و آن را برای $E[X]$ ساده و حل نمایید.

۴۵- از یک کیسه حاوی a توپ سفید و b توپ سیاه هر بار یک توپ بتصادف انتخاب می‌کنیم تا زمانی که تمام توپهای باقیمانده در ظرف از یک رنگ باشند. فرض کنید $M_{a,b}$ نمایش میانگین تعداد توپهای باقیمانده در ظرف پس از پایان آزمایش باشد. یک فرمول بازگشتی برای $M_{a,b}$ حساب کنید و آن را برای $a=3$ و $b=5$ حل کنید.

۴۶- کیسه‌ای شامل a توپ سفید و b توپ سیاه است. پس از انتخاب یک توپ، اگر آن توپ سفید باشد آن را به کیسه برمی‌گردانیم؛ ولی اگر سیاه باشد آن را با یک توپ سفید از ظرف دیگری جایگزین می‌کنیم. فرض کنید M_n نمایش میانگین تعداد توپهای سفید در کیسه پس از تکرار n بار عمل فوق‌الذکر باشد:

(الف) معادله بازگشتی زیر را به دست آورید.

$$M_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{a+b}\right) M_n + 1$$

(ب) با استفاده از بند (الف) ثابت کنید

$$M_n = a + b - b \left(1 - \frac{1}{a+b}\right)^n$$

(پ) احتمال آن که (n + 1) امین توپ انتخابی سفید باشد چقدر است؟

۴۷- بهترین برآوردگر خطی Y نسبت به X_1, X_2 برابر با $a + bX_1 + cX_2$ است، که در آن a, b و c به قسمی انتخاب می شوند که

$$E[(Y - (a + bX_1 + cX_2))^2].$$

مینیمم شود. b + a و c را بیابید

۴۸- بهترین برآوردگر خطی درجه دوم نسبت به X برابر با $a + bX + cX^2$ است، که در آن a, b, c و به قسمی انتخاب می شوند که $E[(Y - (a + bX + cX^2))]$ مینیمم شود. b, a, c و را بیابید.

۴۹- اگر X و Y دارای توزیع نرمال توأم با تابع چگالی توأم زیر باشند

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]\right\}$$

(الف) نشان دهید که توزیع شرطی Y با فرض $X = x$ ، نرمال با میانگین

$$\mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x) \text{ و واریانس } \sigma_y^2(1 - \rho^2) \text{ می باشد.}$$

(ب) نشان دهید که $\text{Corr}(X, Y) = \rho$ ؛

(پ) ثابت کنید که X, Y مستقلند اگر و تنها اگر $\rho = 0$ باشد.

۵۰- فرض کنید X متغیر تصادفی نرمال با پارامترهای $\mu = 0$ و $\sigma^2 = 1$ می باشد و فرض

کنید I، مستقل از X، چنان باشد که $P\{I = 1\} = \frac{1}{2} = P\{I = 0\}$. اکنون Y را به صورت

زیر تعریف می کنیم

$$Y = \begin{cases} X & I = 1 \\ -X & I = 0 \end{cases}$$

یعنی Y با احتمال مساوی برابر X یا $-X$ است .

(الف) آیا X و Y مستقلند؟

(ب) آیا I و Y مستقلند؟

(پ) نشان دهید که Y نرمال با میانگین ۰ و واریانس ۱ است

(ت) نشان دهید که $\text{Cov}(X, Y) = 0$

(ث) آیا (الف)، (ب) و (ت) با نتیجه تمرین نظری ۴۲، که بیان می کند متغیرهای تصادفی

نرمال توأم ناهمبسته مستقلند، تناقض دارد؟

۵۱- از حکم ۷-۱ و این حقیقت که بهترین برآوردگر خطی Y نسبت X عبارت است از

$$\mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X - \mu_x)$$

$$E[Y|X] = a + bX$$

در این صورت

$$a = \mu_y - \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \mu_x \quad b = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

(چرا)؟ این مطلب را مستقیماً ثابت کنید .

۵۲- برای متغیرهای تصادفی X و Z نشان دهید که

$$E[(X - Y)^2] = E[X^2] - E[Y^2]$$

که در آن

$$Y = E[X|Z]$$

۵۳- یک جامعه شامل افرادی را که قادرند نوزادی از همان خانواده تولید کنند در نظر بگیرید

فرض کنید که هر فرد تا پایان عمرش ز نوزاد جدید با احتمال $P_1 \geq 0$ مستقل از تعداد

تولید شده توسط افراد دیگر تولید می کند . تعداد افراد اولیه موجود را با X_0 نشان می دهیم و

آن را حجم نسل ۰ ام می نامیم . تمام نوزادان نسل ۰ ام نسل اول را می سازند که تعدادشان

را با X_1 نشان می‌دهیم. بطور کلی، فرض کنید X_n حجم نسل n ام را نشان می‌دهد. فرض کنید $\mu = \sum_{j=0}^{\infty} jP_j$ و $\sigma^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (j - \mu)^2 P_j$ به ترتیب میانگین و واریانس تعداد نوزادان حاصل یک فرد منفرد باشد.

فرض کنید $X_0 = 1$ - یعنی، مقدماً یک فرد تنها در جامعه وجود دارد.

(الف) نشان دهید

$$E[X_n] = \mu E[X_{n-1}]$$

(ب) با استفاده از قسمت (الف) نتیجه بگیرید که

$$E[X_n] = \mu^n$$

(پ) نشان دهید که

$$\text{Var}(X_n) = \sigma^2 \mu^{n-1} + \mu^2 \text{Var}(X_{n-1})$$

(ت) با استفاده از (پ) نتیجه بگیرید که

$$\text{Var}(X_n) = \begin{cases} \sigma^2 \mu^{n-1} \left(\frac{\mu^n - 1}{\mu - 1} \right) & \mu \neq 1 \\ n\sigma^2 & \mu = 1 \end{cases}$$

موضوع فوق مشهور به «فرآیند شاخه‌ای» است و برای جامعه‌ای که با چنین طرحی توسعه می‌یابد یک سؤال مهم مقدار احتمال این که جامعه سرانجام نابود خواهد شد می‌باشد. فرض کنید وقتی جامعه با یک فرد تنها شروع می‌شود π چنین احتمالی باشد

$$\pi = P\{X_0 = 1 \mid \text{جامعه سرانجام نابود می‌شود}\}$$

(ث) ثابت کنید که π در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\pi = \sum_{j=0}^{\infty} P_j \pi^j$$

(راهنمایی: روی تعداد نوزاد نخستین عضو جامعه شرطی کنید)

۵۴- فرمول تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی یکنواخت داده شده در جدول ۷-۲ را ثابت کنید. همچنین، با مشتق‌گیری فرمولهای میانگین و واریانس را ثابت کنید.

۵۵- اگر برای a و b ثابت، $Y = aX + b$ باشد، تابع مولد گشتاور Y را بر حسب جملات تابع مولد گشتاور X بیان کنید.

۵۶- فرض کنید X دارای تابع مولد گشتاور $\phi(t)$ است با تعریف کردن $\psi(t) = \log \phi(t)$ نشان دهید که

$$\psi''(t)|_{t=0} = \text{Var}(X)$$

۵۷- اگر X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی هموزیع و مستقل، هریک با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ باشند. با استفاده از جدول ۷-۲ توزیع $\sum_{i=1}^n X_i$ را بیابید.

۵۸- نشان دهید چگونه $\text{Cor}(X, Y)$ از تابع مولد گشتاور توأم محاسبه می شود.

۵۹- فرض کنید X_1, \dots, X_n دارای توزیع نرمال چند متغیره باشند. نشان دهید که متغیرهای تصادفی X_1, \dots, X_n مستقلند اگر و تنها اگر

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = 0 \quad i \neq j$$

۶۰- اگر Z متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد $\text{Cov}(Z, Z^2)$ چقدر است؟

مسائل

۱- شخصی به هدفی تیراندازی می کند، اگر تیر او به محدوده یک سانتی متری هدف اصابت کند ۱۰ امتیاز می گیرد، اگر بین ۱ تا ۳ سانتی متری هدف اصابت کند ۱۵ امتیاز می گیرد، و اگر به ۳ تا ۵ سانتی متری هدف بخورد ۱۳ امتیاز می گیرد. میانگین تعداد امتیازهای ثبت شده را بیابید اگر

(الف) تیراندازی شخص در درون دایره ای به شعاع ۸ سانتی متر به مرکز هدف دارای توزیع یکنواخت باشد.

(ب) فاصله افقی و عمودی تیراندازی شخص از هدف (بر حسب سانتی متر) متغیرهای نرمال هموزیع مستقل با پارامترهای $\mu = 0$ و $\sigma^2 = 4$ باشند.

۲- یک بازی متداول با تاس در کلوپهای انگلیس، بازی شرط بندی روی اعداد تاس است که با پرتاب ۳ تاس بازی می شود. یک بازیکن روی هر یک از اعداد ۱ تا ۶ شرط بندی می کند. اگر دقیقاً یکی از ۳ تاس آن عدد را نشان دهد بازیکن ۱ به ۱ می برد؛ اگر ۲ تاس عدد انتخابی را نشان دهند بازیکن ۲ به ۱ دریافت می کند؛ و اگر هر سه تاس انتخاب بازیکن را نشان دهند بازیکن ۳ به ۱ دریافت می کند اگر هیچ یک از سه تاس انتخاب بازیکن را نشان ندهند بازیکن می بازد. اگر در این بازی ۱ واحد شرط بندی کند میانگین برد بازیکن را بیابید.

۳- می دانیم از پنج قطعه تشکیل دهنده یک وسیله الکتریکی دو قطعه آن معیوب است. اگر برای یافتن قطعه های معیوب باید هر بار بتصادف یکی از قطعه ها را آزمود، در این صورت میانگین آزمونهای لازم را بیابید.

۴- دو شخص A و B بازی شرطی زیر را بازی می کنند: A یکی از اعداد ۱ یا ۲ را یاد داشت می کند و B باید حدس بزند کدام یکی است. اگر عددی که A نوشته است i باشد و B درست حدس بزند، B از A مبلغ i واحد پول دریافت می کند. اگر اشتباه حدس بزند B به A مقدار $\frac{3}{4}$ واحد پول می پردازد. اگر B تصمیم خود را تصادفی کند و ۱ را با احتمال p و ۲ را با احتمال ۱-p حدس بزند میانگین سود B را تعیین کنید اگر (الف) A عدد ۱ را یادداشت کند، و (ب) A عدد ۲ را یادداشت کند.

چه مقدار p مینیمم مقدار ممکن میانگین سود B را ماکزیمم می کنند و این مقدار ماکزیمم چیست؟ (توجه کنید که میانگین سود B تنها به P بستگی ندارد. بلکه به آنچه که A انجام می دهد نیز بستگی دارد.)

اکنون بازیکن A را در نظر بگیرید. فرض کنید که او نیز تصمیم خود را تصادفی کند و با احتمال q عدد ۱ را یادداشت کند. میانگین ضرر A چیست اگر (پ) B عدد ۱ را انتخاب کند، و (ت) B عدد ۲ را انتخاب کند.

چه مقدار q ماکزیمم میانگین ضرر A را مینیمم می کند؟ نشان دهید که مینیمم ماکزیمم میانگین ضرر A برابر با ماکزیمم سود B است. این نتیجه که به عنوان قضیه ماکزیمم شناخته می شود، اولین بار کلیت آن توسط جان-ون-نیومن ریاضی دان ثابت شد و در قواعد ریاضی یک نتیجه اساسی است که به عنوان نظریه بازیهای شرطی شناخته می شود. مقدار مشترك را مقدار بازی شرطی برای بازیکن B می نامند.

۵- یک نوع ماشین شکاف دار دارای سه صفحه مدرج هریک با ۲۰ علامت (گیلاس، لیمو، آلو، پرتقال، زنگ، میله) است. صفحات مدرج شاخص به صورت زیر تشکیل می شوند.

	صفحه ۱	صفحه ۲	صفحه ۳
گیلاس	۷	۷	۰
پرتقال	۳	۷	۶
لیمو	۳	۰	۳
آلو	۴	۱	۶
زنگ	۲	۲	۳
میله	۱	۳	۱

طبق این جدول از ۲۰ شکاف روی صفحه ۱، ۷ تا گیلان و ۳ تا پرتقال و الی آخر می باشد. پرداخت شاخص برای یک واحد شرط بندی بر طبق جدول زیر است:

صفحه ۱	صفحه ۲	صفحه ۳	پرداخت
میله	میله	میله	۶۰
زنگ	زنگ	زنگ	۲۰
زنگ	زنگ	میله	۱۸
آلو	آلو	آلو	۱۴
پرتقال	پرتقال	پرتقال	۱۰
پرتقال	پرتقال	میله	۸
گیلاس	گیلاس	هرچه باشد	۴
گیلاس	غیر گیلان	هرچه باشد	۲
هر چیز دیگر			-۱

میانگین برد بازیکن با ماشین شکاف دار را در یک بار بازی بیابید.

۶- یکی از اعداد ۱ تا ۱۰ را بتصادف انتخاب می‌کنم. شما باید سعی کنید با پرسیدن سؤالاتی با جواب «بله یا خیر» عدد انتخابی را حدس بزنید. میانگین تعداد سؤالاتی را که نیاز دارید در هریک از دو حالت زیر بپرسید حساب کنید:

(الف) سؤال i ام شما این باشد که «آیا i است»، $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

(ب) با هر سؤال شما می‌کوشید تا حد ممکن نزدیک نصف اعداد باقیمانده را حذف کنید.

۷- یک شرکت بیمه شیوه‌ای را تدوین کرده که موجب می‌گردد اگر پیشامد E در مدت یک سال رخ دهد مبلغ A ریال باید پرداخت نماید. اگر شرکت برآورد کند که E در یک سال با احتمال p رخ خواهد داد، شرکت برای این که میانگین سودش ده درصد A باشد از مشتریان باید چقدر دریافت کند.

۸- از جعبه‌ای شامل ۲ شیء که ۴ تایی آن معیوبند یک نمونه سه تایی انتخاب می‌کنیم میانگین تعداد معیوبها در نمونه را بیابید.

۹- دو علت ممکن برای خراب شدن یک ماشین وجود دارد. بررسی اولین امکان C_1 تومان هزینه دارد. و اگر علت خراب شدن آن باشد هزینه تعمیر ماشین R_1 تومان می‌باشد. بطور مشابه برای امکان دوم هزینه‌های مشابهی مانند C_2 ، R_2 وجود دارند فرض کنید p ، $1-p$ به ترتیب نمایش احتمال خراب شدن با امکان اول و دوم باشند. تحت چه شرایطی روی به ترتیب نمایش احتمال خراب شدن با امکان اول و دوم را بررسی کنیم، چنان که مانع عکس شدن ترتیب بررسی گردد، به قسمی که میانگین هزینه لازم برای بازگشت به حالت کار مینیمم گردد.

۱۰- شخصی یک سکه سالم را پرتاب می‌کند تا این که برای اولین بار خط بیاید. اگر در پرتاب n ام خط بیاید شخص 2^n تومان می‌برد. فرض کنید X نمایش برد بازیکن باشد. نشان دهید $E[X] = +\infty$. این مسأله به نام پارادوکس پیترز برگ مشهور است.

(الف) آیا مایلید با پرداخت ۱ میلیون تومان این بازی شرطی را یک بار بازی کنید.

(ب) آیا مایلید برای هر بار بازی ۱ میلیون تومان بپردازید اگر بتوانید تا هر زمان که مایلید بازی کنید و تنها وقتی که بازی را متوقف می‌کنید باید تسویه حساب کنید.

۱۱- فرض کنید X_1, X_2, \dots دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی پیوسته مستقل و هموزیع باشند. فرض کنید $N > 2$ چنان باشد که

$$X_1 \geq X_2 \geq \dots \geq X_{N-1} < X_N$$

یعنی، N نقطه ای است که در آن دنباله دیگر کاهش نمی یابد. نشان دهید که $E[N] = e$.

۱۲- اگر X دارای تابع چگالی به صورت زیر باشد $E[X]$ را حساب کنید.

$$(a) f(x) = \begin{cases} \int_1^x e^{-x^2} & x > 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x^2} & x > 5 \\ 0 & x \leq 5 \end{cases}$$

۱۳- تابع چگالی X عبارت است از

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اگر $E[X] = \frac{3}{5}$ ، a و b را بیابید.

۱۴- زمان عمر یک لامپ الکترونیکی بر حسب ساعت یک متغیر تصادفی است با تابع چگالی زیر

$$f(x) = \alpha^2 x e^{-\alpha x} \quad x \geq 0$$

میانگین زمان عمر چنین لامپی را بیابید.

۱۵- اگر X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع یکنواخت روی $(0, 1)$ باشند. مطلوب است:

$$(a) E[\max(X_1, \dots, X_n)]. \quad (b) E[\min(X_1, \dots, X_n)].$$

۱۶- فرض کنید متغیر تصادفی X روی $(0, 1)$ یکنواخت باشد. بابه کاربرد حکم ۲-۱، $E[X^n]$ را بیابید و سپس نتیجه را با استفاده از تعریف میانگین بررسی کنید.

۱۷- هر شب هواشناسان مختلف این «احتمال» را می دهند که روز بعد باران خواهد بارید. برای قضاوت این که این اشخاص به چه خوبی پیش بینی می کنند هر یک از آنها را به صورت زیر امتیاز می دهیم: اگر هواشناسی اعلام کند که با احتمال p باران خواهد بارید در این صورت امتیاز زیر را کسب می کند:

$$\frac{1 - (1 - p)^2}{1 - p^2} \quad \begin{array}{l} \text{اگر باران بیارد} \\ \text{اگر باران نیارد} \end{array}$$

سپس امتیازات را برای مدت زمان معینی پی گیری می کنیم و نتیجه می گیریم که هواشناس با بیشترین متوسط امتیاز بهترین پیشگویی هواست. اکنون فرض کنید که یک هواشناس این موضوع را می داند و لذا می خواهد که میانگین امتیاز خود را ماکزیمم کند، اگر این شخص واقعاً باور داشته باشد که فردا با احتمال p^* باران می بارد، برای آن که میانگین امتیاز او ماکزیمم شود چه مقدار برای P باید اعلام کنند.

۱۸- (الف) باید یک ایستگاه آتش نشانی در امتداد جاده ای به طول A مستقر گردد، $A < \infty$ ، اگر آتش در نقطه ای که بطور یکنواخت روی (0, A) انتخاب می شود رخ دهد، ایستگاه را در کجا باید مستقر کرد تا این که میانگین فاصله از آتش مینیمم گردد. یعنی، a را چنان انتخاب کنید که $E[|X - a|]$ مینیمم گردد وقتی X دارای توزیع یکنواخت روی (0, A) است.

(ب) اکنون فرض کنید که طول جاده بی نهایت است و از نقطه 0 به سمت ∞ امتداد دارد، اگر فاصله آتش از 0 دارای توزیع نمایی با پارامتر λ باشد، در این حال ایستگاه آتش نشانی را در کجا باید قرار دارد؟ یعنی اکنون می خواهیم $E[|X - a|]$ را مینیمم کنیم وقتی X نمایی با پارامتر λ است.

(پ) m را میانه توزیع دلخواه F گوئیم اگر

$$F(m) \geq \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad 1 - F(m) \geq \frac{1}{2}$$

(بنابراین، برای توزیع پیوسته میانه مقدار منحصر به فرد m است به قسمی که $F(m) = \frac{1}{2}$). وقتی X دارای تابع توزیع F است در مورد مقدار a که $E[|X - a|]$ را مینیمم می کند چه می توان گفت؟

۱۹- روزنامه فروشی روزنامه را به ۱۰ ریال خریده و به ۱۵ ریال می فروشد و اجازه بازگرداندن روزنامه های فروش نشده را ندارد. اگر احتیاج روزانه اش متغیر تصادفی دو جمله ای با $n = 300$ و $p = \frac{1}{3}$ باشد. تقریباً چند روزنامه باید بخرد به قسمی که میانگین سودش ماکزیمم گردد.

۲۰- در مثال ۲ پ فرض کنید فروشگاه برای هر واحد تقاضای انجام نشده یک هزینه اضافی با

نرخ c مواجه می شود. (این هزینه اغلب به عنوان هزینه رضایت منظور می گردد. زیرا فروشگاه رضایت مشتریانی که درخواستشان را نمی تواند برآورده سازد از دست می دهد). میانگین سود را وقتی فروشگاه s کالا ذخیره نموده است بیابید و مقدار s ای که میانگین سود را ماکزیمم می کند تعیین کنید.

۲۱- مثال ۲ را وقتی فروشگاه با هزینه اضافی با نرخ c برای هر درخواست انجام نشده روبرو است تکرار کنید.

۲۲- بازی شرط بندی رد-داک یک بازی دو نفره است که با یک دست کارت که تمام مقادیر از ۰ تا ۱ را نشان می دهد بازی می شود. هر بازیکن یک واحد شرط می بندد سپس بازیکن A یک کارت X به فرد مقابلش، بازیکن B ، و یک کارت Y به خودش می دهد. در این صورت به بازیکن B فرصت داده می شود که مبلغی بین ۱ تا M واحد شرط بندی کند یا کنار بکشد. اگر B کنار بکشد A شرط را می برد، اگر B شرط ببندد A باید شرط را جبران کند. هرکس کارت با مقدار بیشتری داشته باشد بانک را می برد. فرض کنید Y, X متغیرهای تصادفی مستقلند و هر یک دارای توزیع یکنواخت روی $(0, 1)$ می باشند. یک استراتژی برای بازیکن B تابع $f(x)$ ، $0 < x < 1$ ، است که در آن برای $x \in (0, 1)$ تابع $f(x)$ صفر است یا بین ۱ و M می باشد. استراتژی $f(x)$ آن است که به بازیکن B می گوید که چه وقت کارت او x است، اگر $f(x) = 0$ بازیکن B باید کنار بکشد و اگر $f(x) \neq 0$ به اندازه $f(x)$ شرط ببندد.

(الف) اگر B استراتژی $f(x)$ را به کار برد میانگین برد او را در یک بار بازی رد-داک پیدا کنید.

(ب) نشان دهید استراتژی بهینه برای بازیکن B ، یعنی، استراتژی که میانگین بردش را ماکزیمم کند به صورت زیر است.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{(کنار بکشد } B) & x < \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ M & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

(پ) اگر B استراتژی بهینه را به کار برد میانگین برد B را پیدا کنید.

۲۳- یک پیام دو تایی - ۰ یا ۱- از محل A به محل B ارسال می گردد. به علت «اغتشاش» انتقال اگر پیام ۱ باشد مقدار ۲ و اگر پیام ۰ باشد مقدار ۲- را ارسال می کنیم. اگر x مقدار

ارسال شده باشد در این صورت $R = x + N$ مقدار دریافتی است وقتی N نمایش خطای انتقال یا صداست و یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد است. قانونی که در محل B برای کشف پیام به کار می رود به صورت زیر است.

اگر $R > C$ نتیجه می گیریم که پیام ۱ است

اگر $R < C$ نتیجه می گیریم که پیام ۰ است

فرض کنید اگر پیام ۰ ارسال شود و به غلط پیام ۱ دریافت گردد هزینه ای برابر ۱۰ واحد متحمل می شویم و اگر پیام ۰ دریافت شود وقتی پیام ارسال شده واقعاً ۱ باشد هزینه ای برابر ۲۰ واحد متحمل می شویم. اگر ۲۵ درصد از زمان پیام ۱ عدد یک ارسال شود، چه مقدار C میانگین هزینه تحمیلی را مینیمم می کند.

۲۴- یک پیام دوتایی از محل A به محل B انتقال می دهیم. به علت خطا در انتقال، پیام ۰ را با x و پیام ۱ را با $x + 1$ کد گذاری می کنیم. اگر مقدار y از محل A ارسال شود، در این صورت مقدار دریافتی در محل B عبارت است از $R = y + N$ که در آن N متغیر نرمال استاندارد است. اگر R در محل B دریافت شود، در این صورت قانون کشف پیام به کار برده شده عبارت است

اگر $R > 0$ نتیجه می گیریم ۱

اگر $R < 0$ نتیجه می گیریم ۲

فرض کنید که هزینه ارسال مقدار x برابر $|x| + 10$ و هزینه نتیجه گیری پیام نادرست ۶۰ باشد. وقتی پیام ارسالی با احتمال مساوی ۰ یا ۱ است چه مقدار x میانگین کل هزینه را مینیمم می کند.

۲۵- ۱۰۰ نفر برای تشخیص این که به بیماری معینی مبتلا هستند یا خیر، خون آنها آزمایش می شود. لیکن به جای آزمون خون هر فرد به تنهایی ابتدا تصمیم می گیریم که افراد را به گروههای ۱۰ تایی دسته بندی کنیم، نمونه های خون ۱۰ فرد در هر گروه را روی هم ریخته و با یکدیگر تجزیه و تحلیل می کنیم؛ اگر آزمون منفی باشد یک آزمون برای ۱۰ نفر کافی است؛ در حالی که اگر آزمون مثبت باشد هر یک از ۱۰ نفر نیز به تنهایی آزمون می شوند و روی هم در این گروه ۱۱ آزمون انجام می شود. فرض کنید احتمال آن که فردی

مبتلا باشد برای تمام افراد مستقل از یکدیگر $0/1$ باشد:

میانگین تعداد آزمونهای لازم برای 100 نفر را حساب کنید. (توجه کنید که فرض می‌کنیم آزمون هر گروه مثبت خواهد بود اگر حداقل یک نفر در گروه بیمار باشد).
 ۲۶- از هریک از پنج کیسه بتصادف یک توپ انتخاب می‌کنیم. کیسه‌ها به ترتیب شامل ۱ سفید و ۵ سیاه، ۳ سفید و ۳ سیاه، ۶ سفید و ۴ سیاه، ۲ سفید و ۶ سیاه، و ۳ سفید و ۷ سیاه می‌باشند. میانگین تعداد توپهای سفید انتخابی را بیابید.

۲۷- فرض کنید Z متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد و برای x ثابت قرار دهید

$$X = \begin{cases} Z & Z > x \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \text{نشان دهید که}$$

۲۸- یک دست از n کارت شماره گذاری شده از ۱ تا n را بطور کامل بر می‌زنیم به قسمی که بتوان فرض کرد که تمام $n!$ ترتیب ممکن احتمال مساوی دارند. فرض کنید که باید پی در پی n حدس بزنید که در آن حدس i ام کارتی است که در محل i است. فرض کنید N نمایش تعداد حدسهای درست باشد.

(الف) اگر شما هیچ اطلاعی در باره حدسهای قبلی خود نداشته باشد نشان دهید که برای هر استراتژی $E[N] = 1$.

(ب) فرض کنید پس از هر حدس کارتی که در موقعیت سؤال بوده به شما نشان دهند. فکر می‌کنید بهترین استراتژی چه باشد؟ با این استراتژی نشان دهید که

$$E[N] = 1/n + 1/(n-1) + \dots + 1 \\ \approx \int_1^n \frac{1}{x} dx = \log n$$

(پ) فرض کنید پس از هر حدس گفته شود که درست یا اشتباه حدس زده‌اید. در این حالت می‌توان نشان داد که شیوه‌ای که $E[N]$ را ماکزیمم می‌کند همان است که حدس زدن روی یک کارت را ادامه دهیم تا زمانی که گفته شود حدس ما درست است و سپس به کارت جدید تغییر دهیم. برای این شیوه نشان دهید که

$$E[N] = 1 + 1/2! + 1/3! + \dots + 1/n! \\ \approx e - 1$$

(راهنمایی: در تمام قسمت‌ها N را به صورت مجموع متغیرهای تصادفی نشانگر (برنولی) بیان کنید).

۲۹- از یک دست کارت معمولی ۵۲ تایی کارتها را هر باری یکی رومی کنیم. اگر کارت اول یک آس یا دومی یک دولو یا سومی یک سه، یا . . . ، یا سیزدهمی یک شاه یا چهاردهمی یک آس و الی آخر باشد می‌گوییم یک تطابق رخ داده است. توجه کنید لزومی ندارد که $(n+1)$ امین کارت آس خاصی باشد تا تطابق رخ دهد بلکه تنها باید یک آس باشد. میانگین تعداد تطابقهایی را که رخ می‌دهد حساب کنید.

۳۰- در ناحیه‌ی معینی r نوع متمایز از انواع مشخص از گونه‌هایی حشرات زندگی می‌کنند و احتمال گرفتن هر حشره از نوع i مستقل از انواع گرفته شده قبلی برابر خواهد بود با

$$P_i, i = 1, \dots, r \quad \sum_1^r P_i = 1$$

(الف) میانگین تعداد حشراتی را که گرفته شده‌اند قبل از این که یکی از نوع اول گرفته شود، حساب کنید.

(ب) میانگین تعداد انواع حشراتی که گرفته شده‌اند قبل از این که یکی از نوع اول گرفته شود را حساب کنید.

۳۱- کیسه‌ای شامل n توپ است به قسمی که توپ i ام دارای وزن $W(i)$ ، $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ، می‌باشد. هر دفعه یک توپ بدون جایگذاری طبق قانون زیر انتخاب می‌کنیم. در هر انتخاب احتمال این که توپ معینی از کیسه خارج شود برابر با وزن آن توپ بخش بر مجموع وزنهای باقیمانده در کیسه می‌باشد. لذا به عنوان مثال، اگر در زمانی i_1, \dots, i_r مجموعه توپهای باقیمانده در ظرف باشند، آن گاه انتخاب بعدی i_r با احتمال $W(i_r) / \sum_{k=1}^r W(i_k)$ خواهد بود. میانگین تعداد توپهای انتخابی قبل از توپ شماره ۱ را حساب کنید.

۳۲- برای یک گروه ۱۰۰ نفری مطلوب است:

(الف) میانگین تعداد روزهای سال که روز تولد دقیقاً ۳ نفر باشد.

(ب) میانگین تعداد روزهای تولد متمایز.

۳۳- چند مرتبه انتظار دارید یک تاس سالم را قبل از این که تمام ۶ وجه حداقل یک بار ظاهر شود پرتاب کنید؟

۳۴- کیسه (۱) شامل ۵ توپ سفید و ۶ توپ سیاه است، در حالی که کیسه (۲) شامل ۸ توپ سفید و ۱۰ توپ سیاه است. دو توپ بتصادف از کیسه (۱) بیرون می آوریم و سپس آنها را در کیسه (۲) می گذاریم. حالا سه توپ بتصادف از کیسه (۲) بیرون می آوریم میانگین توپهای سفید بین این سه توپ را حساب کنید.

(راهنمایی: فرض کنید $X_i = 1$ اگر توپ سفید i ام انتقالی از کیسه (۱) یکی از این سه توپ انتخابی باشد، و در غیر این صورت فرض می کنیم $X_i = 0$. بطور مشابه فرض کنید $Y_i = 1$ اگر توپ سفید i ام از کیسه (۲) یکی از این سه توپ انتخابی باشد و در غیر این صورت فرض می کنیم $Y_i = 0$. اکنون تعداد توپهای سفید بین این سه توپ را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\sum_{i=1}^3 X_i + \sum_{i=1}^3 Y_i$$

۳۵- اگر $E[X] = 1$ و $\text{Var}(X) = 5$ مطلوب است:

$$E[(2 + X)^2] \quad (\text{الف})$$

$$\text{Var}(4 + 3X) \quad (\text{ب})$$

۳۶- ۱۰ زوج متاهل به تصادف سر یک میز گرد می نشینند،

(الف) میانگین تعداد زنهایی را که کنار همسرشان نشسته اند حساب کنید.

(ب) واریانس تعداد زنهایی را که کنار همسرشان نشسته اند حساب کنید.

۳۷- از یک دست ورق معمولی هر بار یک ورق بر می گردانیم. میانگین تعداد ورتهایی را که

لازم است برگردانده شوند تا

(الف) ۲ آس، (ب) ۵ پیک، و (پ) ۱۳ دل بیاید حساب کنید.

۳۸- فرض کنید X تعداد ۱ها و Y تعداد ۲هایی باشد که در پرتاب n تاس سالم

رخ می دهد؛ $\text{Cov}(X, Y)$ را حساب کنید. (راهنمایی: قسمت (پ) تمرین ۲۶ نظری را

به کار برید)

۳۹- یک تاس را دوبار پرتاب می کنیم. فرض کنید X برابر مجموع نتایج باشد و فرض کنید Y

برابر نتیجه اول منهای نتیجه دوم باشد. $\text{Cov}(X, Y)$ را حساب کنید.

۴۰- متغیرهای تصادفی X, Y دارای تابع چگالی توأم زیرند.

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-2/x} & 0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$\text{Cov}(X, Y)$ را حساب کنید.

۴۱- فرض کنید X_1, \dots, X_n مستقل با میانگین مشترک μ و واریانس مشترک σ^2 باشند، با

قرار دادن $Y_n = X_n + Y_{n+1} + X_{n+2}$ برای $Y_n \geq 0$ ، $\text{Cov}(Y_n, Y_{n+j})$ را پیدا کنید.

۴۲- تابع چگالی توأم X و Y عبارت است از

$$f(x, y) = \frac{1}{y} e^{-(y+1/x)}, \quad x > 0, y > 0$$

$E[X], E[Y]$ را بیابید و نشان دهید که $\text{Cov}(X, Y) = 1$.

۴۳- استخری شامل ۱۰۰ ماهی است که ۳۰ تای آنها ماهی قنات هستند. اگر ۲۰ ماهی بگیریم

میانگین و واریانس تعداد ماهی قنات در بین این ۲۰ ماهی چیست؟ چه فرضی را طرح

می کنید؟

۴۴- یک گروه از ۲۰ فرد - شامل ۱۰ مرد و ۱۰ زن - را بتصادف به ۱۰ زوج ۲ تایی مرتب

می کنیم میانگین و واریانس تعداد زوجهایی را حساب کنید که شامل یک مرد و یک زن

باشند. اکنون فرض کنید که ۲۰ فرد عبارت از ۱۰ زوج متاهل باشند میانگین و واریانس

تعداد زوجهای متاهلی را که به صورت زوج دوتایی مرتب شده اند حساب کنید.

۴۵- فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل با تابع توزیع پیوسته نامعلوم F

باشند، و فرض کنید که Y_1, Y_2, \dots, Y_n متغیرهای تصادفی مستقل با تابع توزیع پیوسته

نامعلوم G باشند. اکنون این $n+m$ متغیر را مرتب کنید و فرض کنید

$$I_i = \begin{cases} 1 & i \text{ امین کوچکترین از } m+n \\ & \text{متغیر از نمونه } X \text{ باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

متغیر تصادفی $R = \sum_{i=1}^{n+m} i I_i$ مجموع رتبه نمونه X است و مبنای یک روش آماری

استاندارد به نام آزمون مجموع رتبه های ویلککسن برای این آزمون که F, G هم توزیعند،

می باشند. این آزمون فرض $F = G$ را وقتی R نه خیلی بزرگ و نه خیلی کوچک باشد

می پذیرد. فرض کنید که فرضیه تساوی در حقیقت درست باشد. میانگین و واریانس R

رایباید.

(راهنمایی : نتایج مثال ۵ پ را به کار برید).

۴۶- دو روش متمایز برای ساختن یک کالای خاص وجود دارد. کیفیت کالای تولیدی با روش i یک متغیر تصادفی پیوسته با توزیع F_i ، $i = 1, 2$ ، است. فرض کنید n کالا با روش ۱ و m کالا با روش ۲ تولید شود. $n + m$ کالا را بر حسب کیفیت رتبه بندی کنید و فرض کنید

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر } j \text{ امین بهترین با روش ۱ تولید شده باشد} \\ 2 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

برای بردار X_1, X_2, \dots, X_{n+m} که شامل n تا ۱ و m تا ۲ است فرض کنید که R شماره تعداد گشتهای ۱ باشد به عنوان مثال، اگر $n = 5$ و $m = 2$ ، $X = 1, 2, 1, 1, 1, 2, m = 2$ و $n = 5$ در این صورت $R = 2$. اگر $F_1 = F_2$ (یعنی، کالاهای تولید شده با دو روش هم توزیعند) میانگین و واریانس R چیست؟

۴۷- اگر X_1, X_2, X_3, X_4 متغیرهای تصادفی (دو به دو) ناهمبسته هریک با میانگین 0 و واریانس ۱ باشند، مطلوب است همبستگی

$$\text{(الف) } X_1 + X_2 \text{ و } X_2 + X_3, \text{ و (ب) } X_1 + X_2 \text{ و } X_3 + X_4.$$

۴۸- بازی شرط بندی با تاس را به شرح زیر چنان که در بعضی تفریحگاهها بازی می شود در نظر بگیرید. بازیکنهای ۱ و ۲ به نوبت یک جفت تاس را پرتاب می کنند. سپس بانک تاسها را پرتاب می کند تا نتیجه را به شرح زیر تعیین کند؛ بازیکن i ، $i = 1, 2$ ، می برد اگر نتیجه اش اکیداً بیشتر از نتیجه بانک باشد. فرض کنید برای $i = 1, 2$

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i \text{ ببرد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و نشان دهید که I_1 و I_2 همبسته مثبتند. شرح دهید که چرا باید منتظر چنین نتیجه ای باشیم.

۴۹- یک تاس سالم را پی در پی پرتاب می کنیم. فرض کنید X, Y به ترتیب نمایش تعداد پرتابهای لازم برای به دست آوردن ۶ و ۵ باشد. مطلوب است:

$$\text{(الف) } E[X], \text{ (ب) } E[X|Y=1], \text{ و (پ) } E[|XY|=5].$$

۵۰- کیسه ای شامل ۴ توپ سفید و ۶ توپ سیاه است. متوالیاً دو نمونه تصادفی بدون

جایگذاری به ترتیب با حجم ۳ و ۵ از کیسه بیرون می آوریم. فرض کنید X, Y نمایش توپهای سفید در دو نمونه باشند. $E[X|Y=i]$ را برای $i=1,2,3,4$ پیدا کنید.

۵۱ - چگالی توأم X, Y عبارت است از :

$$f(x, y) = \frac{e^{-x/y} e^{-y}}{y} \quad 0 < x < \infty; 0 < y < \infty$$

$E[X^2|Y=y]$ را حساب کنید.

۵۲ - چگالی توأم X و Y عبارت است از

$$f(x, y) = \frac{e^{-y}}{y} \quad 0 < x < y, 0 < y < \infty$$

$E[X^3|Y=y]$ را حساب کنید.

۵۳ - یک زندانی در سلولی که دارای ۳ در است مجبوس است. اولین در به تونلی ختم می شود که او را پس از ۲ روز راه پیمایی به سلولش بر می گرداند. در دوم به تونلی منتهی می شود که پس از ۴ روز وی را به سلول بر می گرداند. در سوم پس از یک روز راه پیمایی منجر به فرار او می شود. اگر فرض شود که زندانی همواره درهای ۱، ۲، ۳ را به ترتیب با احتمالات $0/5, 0/3, 0/2$ انتخاب می کند، میانگین روزها تا زمانی که زندانی فرار کند چقدر است؟

۵۴ - ده شکارچی منتظر پرواز مرغایبهاوند. شکارچیها زمانی که دسته ای از مرغایبها بالای سرشان پرواز کنند در یک زمان شلیک می کنند، ولی هریک بتصادف هدفش را مستقل از دیگران انتخاب می کند. اگر هر شکارچی مستقلاً هدفش را با احتمال $0/6$ بزند، میانگین تعداد مرغایبهای شکار شده را حساب کنید. فرض کنید که تعداد مرغایبها در یک دسته متغیر تصادفی پواسن با میانگین ۶ باشد.

۵۵ - تعداد افرادی که در طبقه همکف وارد آسانسور می شوند متغیر تصادفی پواسن با میانگین ۱۰ است. اگر N طبقه بالای طبقه همکف باشد و هر شخصی با احتمال مساوی در هریک از این طبقات مستقل از دیگران پیاده شود میانگین تعداد توقفهایی را که آسانسور قبل از تخلیه تمام افراد خواهد داشت حساب کنید.

۵۶ - فرض کنید میانگین تعداد حوادث در هفته در یک منطقه صنعتی ۵ مورد باشد. همچنین فرض کنید که تعداد کارگران مصدوم در هر حادثه متغیر تصادفی مستقل با میانگین مشترك

۲/۵ باشد. اگر تعداد کارگران مصدوم در هر حادثه مستقل از تعداد حادثه‌هایی که رخ می‌دهد باشد، میانگین تعداد کارگران مصدوم در هفته را حساب کنید.

۵۷ - در مثال ۶ پ واریانس طول زمان را تا لحظه‌ای که به سلامت معدنچی می‌انجامد حساب کنید.

۵۸ - بازی قمار با تاسها در مسأله ۱۰ فصل ۲ تعریف شد. مطلوب است:

(الف) میانگین، (ب) واریانس، تعداد پرتاب تاس‌ها تا آن که یک بازی قمار کامل گردد.

۵۹ - یک قمار باز که در هر بازی شرط را با احتمال p می‌برد و یا با احتمال $1-p$ می‌بازد در نظر بگیرید. وقتی $p > \frac{1}{2}$ ، یک روش قمار بازی متداول، معروف به شیوه کلی، آن است که همواره کسر $2p-1$ از دارایی موجود شما را شرط‌بندی می‌کنند. میانگین دارایی یک قمار باز که با x واحد شروع می‌کند و شیوه کلی را به کار می‌برد پس از n بار قمار کردن پیدا کنید.

۶۰ - تعداد حوادثی که یک فرد در یک سال معین دارد متغیر تصادفی پواسن با میانگین λ است. ولی فرض کنید که مقدار X از فردی به فرد دیگر تغییر می‌کنند، برای ۶۰ درصد جامعه برابر ۲ و برای ۴۰ درصد دیگر برابر ۳ است. اگر فردی بتصادف انتخاب شود احتمال آن که در یک سال

(الف) ۰ حادثه، و (ب) دقیقاً ۳ حادثه داشته باشد چقدر است؟

احتمال شرطی آن که ۳ حادثه در سال داشته باشد به شرط آن که در سال قبل حادثه‌ای نداشته باشد چقدر است؟

۶۱ - مسأله ۶۰ را وقتی که نسبتی از جامعه که دارای مقدار λ کمتر از x است برابر $1-e^{-x}$ می‌باشد تکرار کنید.

۶۲ - کیسه‌ای را که محتوی تعداد زیادی سکه است در نظر بگیرید و فرض کنید هر سکه وقتی پرتاب شود با احتمال p شیر می‌آید ولی این مقدار p از سکه‌ای به سکه دیگر تغییر می‌کند. فرض کنید ساختار کیسه چنان است که اگر سکه‌ای بتصادف از آن انتخاب شود در این صورت مقدار p را می‌توان به عنوان مقدار متغیر تصادفی که روی $(0, 1)$ دارای توزیع یکنواخت است در نظر گرفت. اگر یک سکه بتصادف از کیسه انتخاب نموده و آن را دوبار پرتاب کنیم، مطلوب است احتمال آن که:

(الف) پرتاب اول شیر بیاید و (ب) هر دو پرتاب شیر بیایند.

۶۳- در مثال ۷ فرض کنید S علامتی باشد که ارسال می شود و R علامت دریافت شده باشد.

(الف) $E[R]$ را حساب کنید.

(ب) $\text{Var}(R)$ را حساب کنید.

(پ) آیا R دارای توزیع نرمال است؟

(ت) $\text{Cov}(R, S)$ را بیابید.

۶۴- در مثال کمیت سنج Y پ فرض کنید که X دارای توزیع یکنواخت روی $(0, 1)$ است. اگر ناحیه گسسته شده با $a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2}$ مشخص شود، کمیت سنج بهینه Y را تعیین کنید و $E[(X - Y)^2]$ را حساب کنید.

۶۵- فرض کنید X متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد.

(الف) $E[(X - \mu)^3]$ را تعیین کنید.

(ب) با استفاده از قسمت (الف) $E[X^3]$ را بیابید.

(ج) جواب قسمت (ب) را با مشتق گیری از تابع مولد گشتاور بررسی کنید.

۶۶- تابع مولد گشتاور برای X به صورت $\phi_X(t) = \exp\{2e^t - 2\}$ و برای Y به صورت

$$\phi_Y(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^{10} [3e^t + 1]^{10}$$

است. اگر X, Y مستقل باشند. مطلوب است:

(الف) $P\{X + Y = 2\}$ ، $P\{XY = 0\}$ ، و $E[XY]$.

۶۷- دو تاس پرتاب می کنیم، فرض کنید X مقدار تاس اول و Y مجموع مقادیر دو تاس باشد.

تابع مولد گشتاور توأم Y, X را حساب کنید.

۶۸- چگالی توأم Y, X عبارت است از

$$f(x, y) = \frac{e^{-x}e^{-y/4}}{x} \quad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty$$

(الف) تابع مولد گشتاور توأم Y, X را بیابید.

(ب) توابع مولد گشتاورهای منفرد را پیدا کنید.

فضای حدی

۱ - مقدمه

فضای حدی مهمترین نتایج نظری در نظریه احتمال هستند. مهمترین این قضیه‌ها آنهایی هستند که تحت عنوان «قانون اعداد بزرگ» یا «فضای حد مرکزی» رده بندی می شوند. معمولاً قضیه‌هایی به عنوان «قانون اعداد بزرگ» در نظر گرفته می شوند که بیانگر شرایطی باشند که تحت آن شرایط متوسط دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی به متوسط مورد انتظار همگرا باشد. از طرف دیگر فضای حد مرکزی به تعیین شرایطی مربوط می شوند که تحت آن شرایط، مجموع تعداد زیادی از متغیرهای تصادفی دارای توزیع احتمالی است که تقریباً نرمال است.

۲- نا مساوی چیشف و قانون ضعیف اعداد بزرگ

این بخش را با اثبات نتیجه‌ای که نا مساوی مارکف نامیده می شود شروع می کنیم

حکم ۱-۲ نا مساوی مارکف

اگر X یک متغیر تصادفی باشد که تنها مقادیر نامنفی را اختیار می کند در این صورت برای هر مقدار $a > 0$ داریم

$$P\{X \geq a\} \leq \frac{E[X]}{a}$$

برهان: اثبات را برای حالتی که X پیوسته با چگالی f است ارائه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^{\infty} xf(x) dx \\ &= \int_0^a xf(x) dx + \int_a^{\infty} xf(x) dx \\ &\geq \int_a^x xf(x) dx \\ &\geq \int_a^x af(x) dx \\ &= a \int_a^x f(x) dx \\ &= aP\{X \geq a\} \end{aligned}$$

در حالت کلی اثبات دقیقاً با جایگزینی $dF(x)$ بجای $f(x) dx$ انجام می‌شود.

حکم ۲-۲ را به عنوان یک نتیجه به دست می‌آوریم.

حکم ۲-۲ نا مساوی چیشف

اگر X متغیری تصادفی با میانگین متناهی μ و واریانس σ^2 باشد آن گاه برای هر مقدار

$k > 0$ داریم

$$P\{|X - \mu| \geq k\} \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

برهان: چون $(X - \mu)^2$ یک متغیر تصادفی نامنفی است لذا برای حصول نا مساوی زیر می‌توانیم

از نا مساوی مارکف با $(a = k^2)$ استفاده کنیم

$$P\{(X - \mu)^2 \geq k^2\} \leq \frac{E[(X - \mu)^2]}{k^2} \quad (1-2)$$

اما چون $(x - \mu)^2 \geq k^2$ اگر و تنها اگر $|x - \mu| \geq k$ در نتیجه معادله (۱-۲) با

$$P\{|X - \mu| \geq k\} \leq \frac{E[(X - \mu)^2]}{k^2} = \frac{\sigma^2}{k^2}$$

معادل بوده و اثبات کامل است.

اهمیت نا مساویهای مارکف و چیشف در این است که ما را در به دست آوردن کران

احتمالها وقتی فقط میانگین یا میانگین و واریانس توزیع احتمال معلوم هستند کمک می کند. البته اگر توزیع واقعی معلوم باشد در آن صورت احتمال مورد نظر را دقیقاً می توان محاسبه کرد و نیازی به کرانهای فوق نیست.

مثال ۲ الف. فرض کنید که بدانیم تعداد اقلام تولید شده در یک کارخانه در طول یک هفته متغیر تصادفی با میانگین ۵۰ است.

۱- در مورد احتمال این که تولید این هفته از ۷۵ بیشتر شود چه می توان گفت؟

۲- اگر واریانس تولید یک هفته مساوی ۲۵ باشد در این صورت در مورد احتمال این که تولید این هفته بین ۴۰ و ۶۰ باشد چه می توان گفت؟

حل: فرض کنید X تعداد اقلامی باشد که در یک هفته تولید می شود.

۱- طبق نامساوی مارکف داریم

$$P\{X > 75\} \leq \frac{E[X]}{75} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$$

۲- طبق نامساوی چبیشف داریم

$$P\{|X - 50| \geq 10\} \leq \frac{\sigma^2}{10^2} = \frac{1}{4}$$

بنابراین

$$P\{|X - 50| < 10\} \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

در نتیجه احتمال تولید هفتگی بین ۴۰ و ۶۰ دست کم ۰/۷۵ است.

چون نامساوی چبیشف برای تمام توزیعهای متغیر تصادفی X معتبر است، در بیشتر حالات نمی توان انتظار داشت که کران احتمال به احتمال واقعی خیلی نزدیک باشد. برای روشن شدن مطلب به مثال ۲ ب توجه کنید.

مثال ۲ ب. اگر توزیع X در فاصله $(0, 10)$ یکنواخت باشد آن گاه چون $E[X] = 5$ و

$$\text{Var} = \frac{25}{3}$$

$$P\{|X - 5| > 4\} \leq \frac{25}{3(16)} \approx .52$$

در صورتی که نتیجه درست عبارت است از

$$P\{|X - 5| > 4\} = .20$$

بنابراین گرچه نامساوی چبیشف درست است ولی کران بالایی که حاصل می شود به احتمال واقعی نزدیک نیست .

بطور مشابه اگر X یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آن گاه از نامساوی چبیشف نتیجه می شود

$$P\{|X - \mu| > 2\sigma\} \leq \frac{1}{4}$$

در صورتی که احتمال واقعی به صورت زیر داده می شود

$$P\{|X - \mu| > 2\sigma\} = P\left\{\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| > 2\right\} = 2[1 - \Phi(2)] \approx .0456$$

نامساوی چبیشف اغلب به عنوان یک وسیله نظری در اثبات نتایج مورد استفاده قرار می گیرد . این مطلب ابتدا به وسیله حکم ۲-۳ و سپس با اهمیت بیشتری به وسیله قانون ضعیف اعداد بزرگ تشریح می شود .

حکم ۲-۳

اگر $\text{Var}(X) = 0$ ، آن گاه

$$P\{X = E[X]\} = 1$$

به بیان دیگر تنها متغیرهای تصادفی که واریانس صفر دارند آنهایی هستند که با احتمال ۱ ثابتند .
برهان : بنا به نامساوی چبیشف برای هر $n \geq 1$ داریم

$$P\left\{|X - \mu| > \frac{1}{n}\right\} = 0$$

با فرض $n \rightarrow \infty$ و استفاده از خاصیت پیوستگی احتمال داریم

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{|X - \mu| > \frac{1}{n}\right\} = P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{|X - \mu| > \frac{1}{n}\right\}\right\} \\ &= P\{X \neq \mu\} \end{aligned}$$

و نتیجه اثبات می شود .

قضیه ۲-۱ قانون ضعیف اعداد بزرگ

فرض کنید X_1, X_2, \dots دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل هم توزیع باشند که

هر یک دارای میانگین متناهی $E\{X_i\} = \mu$ است . در این صورت برای هر $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0 \quad \text{و} \quad n \rightarrow \infty$$

پروان: نتیجه را فقط با توجه به فرض اضافی که متغیرهای تصادفی دارای واریانس متناهی σ^2 هستند اثبات می‌کنیم. اکنون چون

$$E\left[\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right] = \mu \quad \text{و} \quad \text{Var}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

از نامساوی چیشف نتیجه می‌شود

$$P\left\{\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right\} \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

حال اگر $n \rightarrow \infty$ حکم ثابت می‌شود.

قانون ضعیف اعداد بزرگ ابتدا توسط یا کوب برنولی برای حالت ویژه‌ای که X_i ها متغیرهای تصادفی 0-1 (یعنی برنولی) هستند اثبات شد. اظهار نظر و اثبات این قضیه در کتاب «هنر حدس زدن» ارائه شده است که ۸ سال بعد از مرگ او در ۱۷۱۳ به وسیله نوه اش نیکولا برنولی منتشر شد. باید توجه کنیم که چون در آن زمان نامساوی چیشف ناشناخته بود برنولی می‌بایست به روشی استاندارد جهت اثبات نتیجه متوسل شود. شکل کلی قانون ضعیف اعداد بزرگ که در قضیه ۱-۲ ارائه شد توسط چین ریاضی دان روسی اثبات شده است.

۳- قضیه حد مرکزی

قضیه حد مرکزی یکی از برجسته ترین نتایج در نظریه احتمال است. این قضیه بطور نادقیق بیان می‌کند که توزیع مجموع تعداد زیادی از متغیرهای تصادفی مستقل تقریباً نرمال است. بنابراین نه تنها روش ساده‌ای را برای محاسبه تقریبی احتمال‌های مجموع متغیرهای تصادفی مستقل فراهم می‌کند بلکه در بیان این حقیقت بارز که فراوانیهای تجربی جامعه‌های بسیار زیادی منحنیهای زنگی شکل (یعنی نرمال) هستند نیز به ما کمک می‌کند. ساده ترین شکل قضیه حد مرکزی به صورت زیر است:

قضیه ۱-۳ قضیه حد مرکزی

فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل هموزیع با

میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، در این صورت توزیع

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

وقتی $n \rightarrow \infty$ به نرمال استاندارد میل می کند. یعنی

$$P\left\{\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-x^2/2} dx \quad \text{و} \quad n \rightarrow \infty$$

کلید اثبات قضیه حد مرکزی لم زیر است که آن را بدون اثبات بیان می کنیم .

نم ۱-۳

فرض کنید Z_1, Z_2, \dots دنباله ای از متغیرهای تصادفی با توابع توزیع F_{Z_n} و توابع مولد گشتاور ϕ_{Z_n} ، $n \geq 1$ باشد و فرض کنید Z یک متغیر تصادفی دارای تابع توزیع F_Z و تابع مولد گشتاور ϕ_Z باشد. اگر برای هر n $\phi_{Z_n} \rightarrow \phi_Z$ در آن صورت به ازای هر t که $F_Z(t)$ پیوسته باشد $F_{Z_n} \rightarrow F_Z(t)$ باشد.

اگر Z را متغیر تصادفی نرمال استاندارد فرض کنیم آن گاه چون $\phi_{Z_n}(t) = e^{-t^2/2}$ از لم ۱-۳ نتیجه می شود که اگر $\phi_{Z_n}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}$ در این صورت وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $F_{Z_n}(t) \rightarrow \phi(t)$ ، حال می خواهیم قضیه حد مرکزی را اثبات کنیم.

اثبات قضیه حد مرکزی: ابتدا فرض می کنیم که $\mu = 0$ و $\sigma^2 = 1$. با توجه به این فرض که تابع مولد گشتاور X_i یعنی $\phi(t)$ وجود دارد و متناهی است قضیه را اثبات می کنیم. چون تابع مولد گشتاور $\frac{X_i}{\sqrt{n}}$ برابر است با

$$\begin{aligned} \phi_{X_i/\sqrt{n}}(t) &= E\left[\exp\left\{\frac{tX_i}{\sqrt{n}}\right\}\right] \\ &= \phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

بنابراین تابع مولد گشتاور $\sum_{i=1}^n X_i / \sqrt{n}$ عبارت است از

$$\phi_{\sum_{i=1}^n X_i/\sqrt{n}}(t) = \left[\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

فرض کنید

$$L(t) = \log \phi(t)$$

و توجه داشته باشید که

$$L(0) = 0$$

$$L'(0) = \frac{\phi'(0)}{\phi(0)}$$

$$= \mu$$

$$= 0$$

$$L''(0) = \frac{\phi(0)\phi''(0) - [\phi'(0)]^2}{[\phi(0)]^2}$$

$$= E[X^2]$$

$$= 1$$

اکنون برای اثبات قضیه باید نشان دهیم که وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $e^{t^2/2} \rightarrow [\phi(t/\sqrt{n})]^n$ یا بطور معادل نشان دهیم که وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $nL(t/\sqrt{n}) \rightarrow t^2/2$. برای اثبات این مطلب توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(t/\sqrt{n})}{n^{-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-L'(t/\sqrt{n})n^{-3/2}t}{-2n^{-2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{L'(t/\sqrt{n})t}{2n^{-1/2}} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{-L''(t/\sqrt{n})n^{-3/2}t^2}{-2n^{-3/2}} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[L''\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \frac{t^2}{2} \right] \\ &= \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

بنابر این در حالت $\mu = 0$ و $\sigma^2 = 1$ قضیه حد مرکزی ثابت می‌شود. حال اگر متغیرهای تصادفی استاندارد شده $X_i^* = (X_i - \mu) / \sigma$ را در نظر گرفته و نتیجه بالا را به کار ببریم مطلوب در حالت کلی عاید می‌شود زیرا، $E[X_i^*] = 0$ ، $\text{Var}(X_i^*) = 1$.

نیمه: قضیه ۳-۱ گرچه فقط بیان می‌کند که برای هر a

$$P\left\{\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right\} \rightarrow \Phi(a)$$

در واقع می‌توان نشان داد که همگرایی در a یکنواخت است. $[f_n(a) \rightarrow f(a)]$ یکنواخت گوئیم هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ یک N وجود داشته باشد، بطوری که وقتی $n > N$ ، برای هر a داشته باشیم $|f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$.

اولین جنبه قضیه حد مرکزی توسط دو موآور در حدود سال ۱۷۳۳ برای حالت ویژه‌ای که X_i ها متغیرهای تصادفی برنولی با $p = \frac{1}{2}$ هستند اثبات شد. و سپس به وسیله لاپلاس برای حالت دلخواه p اثبات گردید. (چون یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای را می‌توان به صورت مجموع n متغیر تصادفی برنولی مستقل هم توزیع در نظر گرفت لذا این مطلب تقریب نمودن دو جمله‌ای را با نرمال که در بخش ۳-۱ فصل ۵ ارائه شد تأیید می‌کند). لاپلاس شکل کلی‌تر قضیه حد مرکزی را که در قضیه ۳-۱ داده شده نیز کشف نمود. مع هذا اثبات او کاملاً دقیق نبود و در واقع آن را بسهولت نمی‌توان دقیق نمود. ابتدا لیاپانوف ریاضیدان روسی در سالهای ۱۹۰۱ - ۱۹۰۲ اثبات دقیقی از قضیه حد مرکزی ارائه نمود.

مثال ۳ الف. یک منجم می‌خواهد فاصله یک ستاره دور را از رصدخانه اش بر حسب سال نوری اندازه گیری کند گرچه منجم یک روش اندازه گیری دارد و می‌داند که به علت تغییر شرایط جوی و خطای نرمال هر زمان که یک اندازه گیری انجام می‌شود او فاصله دقیق را به دست نخواهد آورد بلکه صرفاً یک برآورد را پیدا می‌کند. در نتیجه منجم اقدام به یک سری اندازه گیریها نموده و سپس از مقدار متوسط اندازه گیریهایش به عنوان مقدار برآورد فاصله واقعی استفاده می‌کند. اگر منجم باور کند که مقادیر اندازه گیریها متغیرهای مستقل هم توزیع با میانگین مشترك d (فاصله واقعی) و واریانس مشترك 4 سال نوری است برای این که مطمئن شود که دقت فاصله‌ای که برآورد کرده بین $0.5 \pm$ سال نوری است به چند اندازه گیری نیاز دارد؟

حل: فرض کنید منجم تصمیم دارد n مشاهده داشته باشد. اگر X_1, X_2, \dots, X_n ،

n اندازه مطلوب باشد با توجه به قضیه حد مرکزی

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - nd}{2\sqrt{n}}$$

توزیع آن تقریباً یک نرمال استاندارد است. بنابراین

$$P\left\{-.5 \leq \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - d \leq .5\right\} = P\left\{-.5 \frac{\sqrt{n}}{2} \leq Z_n \leq .5 \frac{\sqrt{n}}{n}\right\}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) - 1$$

پس اگر برای مثال، منجم بخواهد ۹۵ درصد مطمئن باشد که مقدار برآورد او تا ۰/۵ سال نوری دقت داشته باشد باید n^* اندازه گیری انجام دهد، بطوری که

$$2\Phi\left(\frac{\sqrt{n^*}}{4}\right) - 1 = .95 \quad \text{یا} \quad \Phi\left(\frac{\sqrt{n^*}}{4}\right) = .975$$

و بنابراین از جدول ۵-۱ فصل ۵ داریم

$$\frac{\sqrt{n^*}}{4} = 1.96 \quad \text{یا} \quad n^* = (7.84)^2 = 61.47$$

چون مقدار n^* صحیح نیست باید ۶۲ مشاهده را انتخاب کند.

مع هذا باید توجه کنیم که تجزیه و تحلیل قبلی با توجه به این فرض انجام گرفته است که تقریب نرمال وقتی $n = 62$ ، تقریب خوبی است. گرچه معمولاً چنین است بطور کلی سؤال میزان بزرگ بودن n که باید قبل از «خوبی» تقریب باشد به توزیع X_i بستگی دارد. اگر منجم نگران این نکته باشد و بخواهد شانس را در نظر نگیرد هنوز می تواند مسأله اش را با استفاده از نامساوی چبیشف حل کند؛ چون

$$E\left[\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}\right] = d \quad \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}\right) = \frac{4}{n}$$

از نامساوی چبیشف نتیجه می شود که

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} - d\right| > .5\right\} \leq \frac{4}{n(.5)^2} = \frac{16}{n}$$

بنابر این اگر $n = \frac{16}{0.05} = 320$ مشاهده تهیه کند می تواند ۹۵ درصد مطمئن باشد که برآورد او تقریباً تا ۰/۵ سال نوری دقت دارد.

مثال ۳ ب. تعداد دانشجویانی که در درس روان شناسی ثبت نام می کنند یک متغیر تصادفی پواسن با میانگین ۱۰۰ است. استادی که این درس را می دهد تصمیم می گیرد که اگر

تعداد ثبت نام کنندگان ۱۲۰ یا بیشتر باشد درس را در دو گروه جداگانه تدریس نماید در صورتی که اگر این تعداد کمتر از ۱۲۰ دانشجوی باشد برای تمام دانشجویان در یک گروه تدریس خواهد نمود. احتمال این که این استاد مجبور به تدریس دو گروه باشد چقدر است؟

حل: جواب دقیق $\sum_{i=120}^{\infty} (100)^i i!$ باسانی یک پاسخ عددی را به دست نمی دهد. مع هذا اگر خاطر نشان کنیم که یک متغیر تصادفی پواسن با میانگین ۱۰۰ مجموع ۱۰۰ متغیر تصادفی است که هر یک میانگین ۱ دارند با استفاده از قضیه حد مرکزی می توان یک جواب تقریبی به دست آورد. اگر X تعداد دانشجویان ثبت نام کرده را نشان دهد داریم

$$\begin{aligned} P\{X \geq 120\} &= P\left\{\frac{X-100}{\sqrt{100}} \geq \frac{120-100}{\sqrt{100}}\right\} \\ &\approx 1 - \Phi(2) \\ &= .0228 \end{aligned}$$

در این جا از این حقیقت استفاده نموده ایم که واریانس یک متغیر تصادفی پواسن برابر با میانگین آن است.

مثال ۳ پ. اگر ۱۰ تاس متعادل را پرتاب کنیم مطلوب است احتمال تقریبی این که مجموع حاصل بین ۳۰ و ۴۰ باشد.

حل: فرض کنید X_i مقدار تاس i ام، $i = 1, 2, \dots, 10$ را نشان دهد. چون

$$\begin{aligned} E(X_i) &= \frac{7}{2} \text{ و } \text{Var}(X_i) = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = \frac{35}{12} \text{ از قضیه حد مرکزی داریم} \\ P\left\{30 \leq \sum_{i=1}^{10} X_i \leq 40\right\} &= P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{10} X_i - 35}{\sqrt{\frac{350}{12}}} \leq \frac{40 - 35}{\sqrt{\frac{350}{12}}}\right\} \\ &\approx 2\Phi(\sqrt{6/7}) - 1 \\ &\approx .65 \end{aligned}$$

مثال ۳ ت: فرض کنید X_i ، $i = 1, 2, \dots, 10$ ، متغیرهای تصادفی مستقل باشند که هر یک

دارای توزیع یکنواخت در $(0, 1)$ هستند. یک تقریب برای $P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i > 6\right\}$ محاسبه کنید.

حل: چون $E[X_i] = \frac{1}{2}$ و $\text{Var}(X_i) = \frac{1}{12}$ بنا به قضیه حد مرکزی داریم

$$\begin{aligned}
 P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i > 6\right\} &= P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{10} X_i - 5}{\sqrt{10(\frac{1}{2})}} > \frac{6-5}{\sqrt{10(\frac{1}{2})}}\right\} \\
 &\approx 1 - \Phi(\sqrt{1.2}) \\
 &\approx .16
 \end{aligned}$$

بنابر این تنها در ۱۶ درصد موارد $\sum_{i=1}^{10} X_i$ بزرگتر از ۶ است.

هنگامی که X_i ها متغیرهای تصادفی مستقل ولی لزوماً هم توزیع نیستند قضیه حد مرکزی همچنین وجود دارد. جنبه ای از این قضیه که به هیچ وجه کلی ترین آن نیست به شرح زیر است.

قضیه ۳-۲ قضیه حد مرکزی برای متغیرهای تصادفی مستقل

فرض کنید X_1, X_2, \dots دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقلند که میانگینها و واریانسهای آنها به ترتیب $\mu_i = E[X_i]$ ، $\sigma_i^2 = \text{Var}(X_i)$ است. اگر

(الف) X_i ها بطور یکنواخت کران دار باشند، یعنی اگر برای یک مقدار M و به ازای هر i داشته باشیم $P(|X_i| < M) = 1$ و (ب) $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty$ آن گاه

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \leq a\right\} \rightarrow \Phi(a) \quad \text{وقتی } n \rightarrow \infty$$

۴- قانون قوی اعداد بزرگ

قانون قوی اعداد بزرگ احتمالاً مشهورترین نتیجه در نظریه احتمال است. این قانون بیان می کند که متوسط دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل هم توزیع با احتمال ۱ به میانگین توزیع همگراست.

قضیه ۴-۱ قانون قوی اعداد بزرگ

فرض کنید X_1, X_2, \dots دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل هم توزیع باشد که هر یک

میانگین متناهی $E[X_i] = \mu$ دارند. در این صورت وقتی $n \rightarrow \infty$ با احتمال ۱ داریم^۱.

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mu \quad \text{و} \quad n \rightarrow \infty$$

به عنوان کاربردی از قانون قوی اعداد بزرگ فرض کنید دنباله ای از آزمایشهای مستقل در یک آزمون تجربی را انجام داده ایم. فرض کنید E پشامد ثابتی از تجربه باشد و $P(E)$ احتمال رخ دادن E در هر آزمایش ویژه باشد. با فرض

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر } E \text{ در آزمایش } i \text{ رخ دهد} \\ 0 & \text{اگر } E \text{ در آزمایش } i \text{ رخ ندهد} \end{cases}$$

طبق قانون قوی اعداد بزرگ با احتمال ۱ داریم

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow E[X] = P(E) \quad (1-4)$$

چون $X_1 + \dots + X_n$ تعداد دفعاتی است که پشامد E در n آزمایش اول رخ می دهد می توانیم معادله (۱-۴) را به این صورت بیان کنیم که با احتمال ۱ حد نسبت دفعاتی که پشامد E رخ می دهد برابر $P(E)$ است.

یکی از عوامل کلیدی در اثبات قانون قوی اعداد بزرگ نامساوی کلموگروف است که دارای اهمیت ویژه ای است.

قضیه ۲-۲ نامساوی کلموگروف

فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که $E[X_i] = 0$ و $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2 < \infty$ در این صورت برای هر $a > 0$ داریم

$$P\left\{\max_{i=1, \dots, n} |X_1 + \dots + X_i| > a\right\} \leq \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{a^2}$$

۱- یعنی قانون قوی اعداد بزرگ بیان می کند که

$$P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} (X_1 + \dots + X_n)/n = \mu\right\} = 1$$

برهان: فرض می‌کنیم متغیر تصادفی N کمترین مقدار i ، $i \leq n$ ، باشد، بطوری که $(X_1 + \dots + X_i)^2 > a^2$ ، باشد و اگر برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ آن را مساوی n تعریف می‌کنیم. یعنی تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} N = 1 & \quad X_1 > a^2 \\ N = 2 & \quad X_1^2 \leq a^2 \text{ و } (X_1 + X_2)^2 > a^2 \\ & \quad \vdots \\ N = i & \quad X_1^2 \leq a^2, \dots, (X_1 + \dots + X_{i-1})^2 \leq a^2, (X_1 + \dots + X_i)^2 > a^2 \\ & \quad \vdots \\ N = n & \quad (X_1 + \dots + X_i)^2 \leq a^2, i = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

اکنون چون دو پیشامد

$$\left\{ \max_{i=1, \dots, n} (X_1 + \dots + X_i)^2 > a^2 \right\} \quad \text{و} \quad \{(X_1 + \dots + X_n)^2 > a^2\}$$

معادلتند از نا مساوی مارکف نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} P \left\{ \max_{i=1, \dots, n} (X_1 + \dots + X_i)^2 > a^2 \right\} &= P \{(X_1 + \dots + X_n)^2 > a^2\} \\ &\leq \frac{E[(X_1 + \dots + X_n)^2]}{a^2} \end{aligned} \quad (۲-۴)$$

اگر بتوانیم نشان دهیم که

$$E[(X_1 + \dots + X_n)^2] \leq E[(X_1 + \dots + X_n)^2]$$

آن گاه نتیجه از معادله (۲-۴) حاصل می‌شود زیرا

$$\begin{aligned} E[(X_1 + \dots + X_n)^2] &= \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \end{aligned}$$

برای اثبات این نا مساوی روی N شرط می‌گذاریم و ابتدا توجه می‌کنیم که

$$E[(X_1 + \dots + X_n)^2 | N = n] = E[(X_1 + \dots + X_n)^2 | N = n]$$

برای $i < n$

$$\begin{aligned}
 E[(X_1 + \dots + X_n)^2 | N = i] &= E[((X_1 + \dots + X_i) + (X_{i+1} + \dots + X_n))^2 | N = i] \\
 &= E[(X_1 + \dots + X_i)^2 | N = i] \\
 &\quad + 2E[(X_1 + \dots + X_i)(X_{i+1} + \dots + X_n) | N = i] \\
 &\quad + E[(X_{i+1} + \dots + X_n)^2 | N = i]
 \end{aligned} \tag{۳-۴}$$

حال پیشامد $\{N = i\}$ اطلاعاتی در مورد X_1, \dots, X_i دارد زیرا بیان می‌کند که $X_1^2 \leq a^2$ ، \dots ، $(X_1 + \dots + X_{i-1})^2 \leq a^2$ ، $(X_1 + \dots + X_i)^2 > a^2$ ، و لسی از طرف دیگر در مورد مقادیر X_{i+1}, \dots, X_n چیزی را بیان نمی‌کند. بنابراین چون تمام متغیرهای تصادفی X_1, \dots, X_n مستقلند نتیجه می‌شود که $X_1 + \dots + X_i$ و $X_{i+1} + \dots + X_n$ با معلوم بودن $N = i$ بطور مشروط مستقل باقی می‌مانند. بنابراین،

$$\begin{aligned}
 E[(X_1 + \dots + X_i)(X_{i+1} + \dots + X_n) | N = i] &= E[X_1 + \dots + X_i | N = i] E[X_{i+1} + \dots + X_n | N = i] \\
 &= E[X_1 + \dots + X_i | N = i] E[X_{i+1} + \dots + X_n] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

بنابراین از معادله (۳-۴) به دست می‌آید

$$\begin{aligned}
 E[(X_1 + \dots + X_n)^2 | N = i] &\geq E[(X_1 + \dots + X_i)^2 | N = i] \\
 &= E[(X_1 + \dots + X_n)^2 | N = i]
 \end{aligned}$$

لذا مشاهده می‌کنیم که برای تمام مقادیر N

$$E[(X_1 + \dots + X_n)^2 | N] \geq E[(X_1 + \dots + X_n)^2 | N]$$

اگر امید ریاضی بگیریم عبارت زیر نتیجه می‌شود

$$E[(X_1 + \dots + X_n)^2] \geq E[(X_1 + \dots + X_n)^2]$$

و نتیجه از معادله (۲-۴) حاصل می‌گردد.

نامساوی کلموگروف را به عنوان یک تعمیم نا مساوی چبیشف می‌توان تلقی نمود. زیرا اگر X دارای میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آن گاه با فرض $n = 1$ در نامساوی کلموگروف به دست می‌آوریم

$$P\{|X - \mu| > a\} \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

که البته همان نامساوی چبیشف است. با وجود این باید توجه کنیم که نامساوی کلموگروف نتیجه‌ای قویتر از نامساوی چبیشف است، زیرا اگر X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل با

دهد $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ ، $E[X_i] = 0$ باشد آن گاه نامساوی چیشف نتیجه می دهد

$$P\{|X_1 + \dots + X_n| > a\} \leq \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{a^2}$$

در صورتی که نامساوی کلموگروف همان کران را برای احتمال مجموعه ای بزرگتر، مثلاً

$$\bigcup_{i=1}^n \{|X_1 + \dots + X_i| > a\}$$

می دهد .

اکنون از نامساوی کلموگروف به عنوان مبنای اثبات قانون قوی اعداد بزرگ در حالتی که متغیرهای تصادفی مستقل فرض شده ولی الزاماً هم توزیع نیستند استفاده می شود. قبل از ارائه این اثبات نیاز به حکم زیر است که به لم کرونکر معروف بوده و آن را بدون اثبات بیان می کنیم

حکم ۱-۲ لم کرونکر

اگر a_1, a_2, \dots اعداد حقیقی بوده بطوری که $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i} < \infty$ آن گاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{n} = 0$$

قضیه ۲-۳ قانون قوی اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی مستقل

فرض کنید X_1, X_2, \dots متغیرهای تصادفی مستقل با $E[X_i] = 0$ و $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ باشد. اگر $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 / i^2 < \infty$ آن گاه با احتمال ۱ وقتی $n \rightarrow \infty$ داریم

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow 0 \quad \text{و} \quad n \rightarrow \infty$$

پروهان: بنابراین نامساوی کلموگروف برای هر n و هر $a > 0$ نتیجه می شود که

$$P\left\{ \max_{j=1, \dots, n} \left| \sum_{i=1}^j \frac{X_i}{i} \right| > a \right\} \leq \frac{\sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i/i)}{a^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 / i^2}{a^2} \quad (4-4)$$

اگر $E_n, n \geq 1$ را با

$$E_n = \left\{ \max_{j=1, \dots, n} \left| \sum_{i=1}^j \frac{X_i}{i} \right| > a \right\}$$

تعریف کنیم در آن صورت چون پیشامدهای E_n افزایشی هستند بنا به خاصیت پیوستگی احتمالها نتیجه می شود که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n\right) = P\left(\bigcup_1^{\infty} E_n\right) = P\left\{ \max_{j=1, 2, \dots} \left| \sum_{i=1}^j \frac{X_i}{i} \right| > a \right\}$$

بنابر این از معادله (۴-۴) ملاحظه می کنیم

$$P\left\{ \max_{j=1, 2, \dots} \left| \sum_{i=1}^j \frac{X_i}{i} \right| > a \right\} \leq \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 / i^2}{a^2}$$

یا معادل با آن

$$P\left\{ \max_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^j \frac{X_i}{i} \right| \leq a \right\} \geq 1 - \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 / i^2}{a^2} \quad (۵-۴)$$

بنابراین چون از $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{i} \leq a < \infty$ ، $\max_{j \geq 1} \left| \sum_{i=1}^j \frac{X_i}{i} \right| \leq a$ نتیجه می شود لذا از معادله (۴-۵) عبارت زیر حاصل می گردد

$$P\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{i} < \infty \right\} \geq 1 - \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 / i^2}{a^2}$$

اگر $a \rightarrow \infty$ در می یابیم که

$$P\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{i} < \infty \right\} = 1$$

بنابراین با به کار بردن لم کرونگر عبارت زیر حاصل شده و اثبات کامل می گردد.

$$P\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n X_i / n = 0 \right\} = 1$$

اگر متغیرهای تصادفی نه تنها مستقل بلکه هم توزیع با میانگین μ و واریانس متناهی σ^2 نیز فرض کنیم آن گاه چون $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma^2 / i^2 < \infty$ لذا با احتمال ۱ نتیجه می شود

$$\lim_n \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)}{n} = 0$$

یا بطور معادل

$$\lim_n \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} = \mu$$

بنابراین قضیه ۳-۴ یک اثبات قانون قوی اعداد بزرگ را در حالت متغیرهای تصادفی مستقل هم توزیع (i. i. d) با واریانسهای متناهی فراهم می کند. در واقع با استفاده از آن می توان قانون قوی اعداد بزرگ را برای متغیرهای تصادفی i. i. d حتی وقتی واریانس نامتناهی است اثبات نمود و بنابراین قضیه ۱-۴ اثبات می شود.

سیاری از دانشجویان ابتدا در تفاوت بین قانون ضعیف و قوی اعداد بزرگ دچار مشکل می شوند. قانون ضعیف اعداد بزرگ بیان می کند که برای هر مقدار بزرگ ثابت n مثلاً n^* ، $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ احتمالاً نزدیک μ است. مع هذا این بیان نمی کند که $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ محدود است به این که برای کلیه مقادیر n بزرگتر از n^* نزدیک به μ باقی بماند. بنابراین امکان این که مقادیر بزرگ $|X_1 + \dots + X_n| / n - \mu$ بتوانند اغلب بطور نامتناهی (گرچه در فاصله های اتفاقی) رخ دهند بدون جواب باقی می ماند. قانون قوی ثابت می کند که این حالت نمی تواند رخ دهد. بویژه ثابت می کند که با احتمال ۱ برای هر مقدار مثبت ϵ

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} - \mu \right|$$

تنها تعداد متناهی از دفعات بزرگتر از ϵ خواهد بود.

قانون قوی اعداد بزرگ ابتدا در حالت ویژه متغیرهای تصادفی برنولی توسط بوریس ریاضی دان فرانسوی اثبات شد. مشکل کلی قانون قوی که در قضیه ۳-۴ ارائه شد توسط آ. ان. کلموگروف ریاضی دان روسی به اثبات رسید.

۵- نا مساویهای دیگر

گاهی اوقات با وضعیتهایی مواجه می شویم که علاقه مندیم یک کران بالا برای احتمالی

به شکل $P\{X - \mu > a\}$ که a مقداری است مثبت و وقتی فقط میانگین $\mu = E\{X\}$ و واریانس $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ توزیع X معلومند به دست آوریم. البته چون $a > 0$ ، $X > \mu > a > 0$ ، $X - \mu > a$ را نتیجه می دهد لذا از نامساوی چبیشف وقتی $a > 0$ است عبارت زیر حاصل می گردد

$$P\{X - \mu > a\} \leq P\{|X - \mu| > a\} \leq \frac{\sigma^2}{a^2} \quad \text{هرگاه } a > 0$$

با وجود این بطوری که حکم زیر نشان می دهد به این نتیجه می رسیم که می توانیم کار را بهتر انجام دهیم.

حکم ۵-۱ نامساوی چبیشف يك طرفه

اگر X متغیری تصادفی با میانگین 0 و واریانس متناهی σ^2 باشد آن گاه برای هر $a > 0$ داریم

$$P\{X > a\} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

بوهان: چون $0 = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$ نتیجه می گیریم که

$$\begin{aligned} -a &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - a) dF(x) \\ &\geq \int_{-\infty}^a (x - a) dF(x) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} a &\leq \int_{-\infty}^a (a - x) dF(x) \\ &= \int_{-\infty}^a (a - x) I_a(x) dF(x) \end{aligned} \quad (1-5)$$

که

$$I_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq a \\ 0 & \text{if } x > a \end{cases}$$

وقتی $a > 0$ است با مربع کردن دوطرف معادله (۱-۵) به دست می آوریم

$$a^2 \leq \left(\int_{-\infty}^a (a - x) I_a(x) dF(x) \right)^2$$

یا معادل با آن

$$a^2 \leq (E[(a - X)I_a(X)])^2 \quad (۲-۵)$$

حال از نامساوی مشهور کوشی - شوارتز استفاده می کنیم که بیان می کند برای هر دو متغیر تصادفی Y و Z داریم

$$(E[YZ])^2 \leq E[Y^2]E[Z^2]$$

مشروط به این که طرف راست متناهی باشد (اثبات نامساوی کوشی - شوارتز در تمرین نظری فصل ۲۹ داده شده است). بنابراین اگر نامساوی کوشی - شوارتز را برای طرف راست معادله (۲-۵) با $Y = (a - X)$ و $Z = I_a(X)$ به کار ببریم حاصل خواهد شد

$$\begin{aligned} a^2 &\leq E[(a - X)^2]E[I_a^2(X)] \\ &= \int_{-\infty}^x (a - x)^2 dF(x) \int_{-\infty}^a dF(x) \\ &= F(a) \int_{-\infty}^x (a - x)^2 dF(x) \\ &= F(a) \left[\int_{-\infty}^x a^2 dF(x) - 2a \int_{-\infty}^x x dF(x) + \int_{-\infty}^x x^2 dF(x) \right] \\ &= F(a)(a^2 + \sigma^2) \end{aligned}$$

بنابراین

$$F(a) \geq \frac{a^2}{a^2 + \sigma^2}$$

یا معادل با آن

$$P\{X > a\} = 1 - F(a) \leq 1 - \frac{a^2}{a^2 + \sigma^2} = \frac{\sigma^2}{a^2 + \sigma^2}$$

و نتیجه اثبات می شود.

مثال ۵ الف. اگر تعداد اقلام تولید شده در کارخانه ای در طول یک هفته متغیری تصادفی با میانگین ۱۰۰ و واریانس ۴۰۰ باشد یک کران بالا برای احتمال این که این هفته تولید از ۱۲۰ تجاوز کند به دست آورید.

حل: از نا مساوی یک طرفه چیشف نتیجه می شود

$$P\{X > 120\} = P\{X - 100 > 20\} \leq \frac{400}{400 + (20)^2} = \frac{1}{2}$$

بنابراین احتمال این که تولید این هفته از ۱۲۰ تجاوز کند حداکثر $\frac{1}{2}$ است.

اگر بخواهیم با به کار بردن نا مساوی مارکف کرانی به دست آوریم در آن صورت

$$P\{X > 120\} \leq \frac{E(X)}{120} = \frac{5}{6}$$

که نسبت به کران قبلی ضعیفتر است حاصل می شود.

اکنون فرض کنید X دارای میانگین μ و واریانس σ^2 است. چون $X - \mu$ و $\mu - X$ هر دو

دارای میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند از نا مساوی یک طرفه چیشف برای $a > 0$ ، داریم

$$P\{X - \mu > a\} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

و

$$P\{\mu - X > a\} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

بنابراین نتیجه زیر حاصل می شود

نتیجه ۵-۱

اگر $\mu = E\{X\}$ ، $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ آن گاه برای $a > 0$ داریم

$$P\{X > \mu + a\} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

$$P\{X < \mu - a\} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

مثال ۵ ب. مجموعه ۲۰۰ نفری متشکل از ۱۰۰ مرد و ۱۰۰ زن را بتصادف به ۱۰۰ زوج

دوتایی تقسیم می کنیم. یک کران بالا برای این احتمال که کمتر از ۳۰ زوج شامل یک مرد و

یک زن است پیدا کنید.

حل: مردان را به دلخواه از ۱ تا ۱۰۰ شماره گذاری می کنیم و فرض کنید برای

$$i = 1, 2, \dots, 100$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر مرد } i \text{ با یک زن زوج شده باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت X یعنی تعداد زوجهای مرد-زن را به صورت زیر می توان بیان کرد

$$X = \sum_{i=1}^{100} X_i$$

چون مرد i با احتمال مساوی زوج هریک از ۱۹۹ نفر دیگر که ۱۰۰ نفر آن زن است می باشد داریم

$$E[X_i] = P\{X_i = 1\} = \frac{100}{199}$$

بطور مشابه برای $i \neq j$ ،

$$E[X_i X_j] = P\{X_i = 1, X_j = 1\}$$

$$= P\{X_i = 1\}P\{X_j = 1 | X_i = 1\} = \frac{100}{199} \frac{99}{197}$$

که $P\{X_i = 1 | X_j = 1\} = \frac{99}{197}$ ، زیرا با این شرط که مرد i زوج یک زن است، مرد j با احتمال مساوی زوج هریک از ۱۹۷ نفر باقیمانده است که ۹۹ نفر آن زن هستند. بنابراین

$$E[X] = \sum_{i=1}^{100} E[X_i]$$

$$= (100) \frac{100}{199}$$

$$= 50.25$$

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{100} \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

$$= 100 \frac{100}{199} \frac{99}{199} + 2 \binom{100}{2} \left[\frac{100}{199} \frac{99}{197} - \left(\frac{100}{199} \right)^2 \right]$$

$$= 25.126$$

بنا به نامساوی چیشف

$$P\{X < 30\} \leq P\{|X - 50.25| > 20.25\} \leq \frac{25.126}{(20.25)^2} = .061$$

و بنابراین در ۱۰۰ تا کمتر از ۶ شانس وجود دارد که کمتر از ۳۰ مرد با زن زوج شوند، مع هذا با استفاده از نامساوی یکطرفه چیشف که نتیجه زیر را عاید می کند می توانیم آن را بهتر کنیم،

$$\begin{aligned} P\{X < 30\} &= P\{X < 50.25 - 20.25\} \\ &\leq \frac{25.126}{25.126 + (20.25)^2} \\ &= .058 \end{aligned}$$

نامساوی بعد به جای احتمالات با امید ریاضی انجام می شود. قبل از این که آن را بیان کنیم تعریف زیر لازم است.

تعریف

تابع حقیقی $f(x)$ را که دارای مشتق اول و دوم است محدب می گویند اگر برای هر x ،
 $f''(x) > 0$ باشد بطور مشابه اگر به ازای هر x ، $f''(x) \leq 0$ باشد آن را مقعر می گویند.
 برای $f(x) = -x^{1/n}$ ، $f(x)' = e^{ax}$ ، $f(x) = x^2$ ، $x \geq 0$ از توابع محدب هستند. اگر $f(x)$ محدب باشد آن گاه $g(x) = -f(x)$ مقعر خواهد بود و بالعکس.

حکم ۴-۵ نامساوی جنسن

اگر $f(x)$ تابعی محدب باشد آن گاه

$$E[f(X)] \geq f(E[X])$$

به شرطی که امید ریاضی وجود داشته و متناهی باشد.

برهان: اگر بسط سری تیلور $f(x)$ را حول $E[X] = \mu$ بنویسیم داریم

$$f(x) = f(\mu) + f'(\mu)(x - \mu) + \frac{f''(\xi)(x - \mu)^2}{2}$$

که در آن ξ مقداری بین x و μ است. چون $f''(\xi) \geq 0$ است

$$f(x) \geq f(\mu) + f'(\mu)(x - \mu)$$

بنابراین

$$f(X) \geq f(\mu) + f'(\mu)(X - \mu)$$

اگر امید ریاضی بگیریم

$$E[f(X)] \geq f(\mu) + f'(\mu)E[X - \mu] = f(\mu)$$

و نامساوی ثابت می شود.

مثال ۵ پ. یک سرمایه گذار با انتخابهای زیر مواجه است: او می تواند تمام سرمایه اش را در یک جای مخاطره آمیز بگذارد که به یک برگشت تصادفی X که دارای میانگین m است منتهی می شود یا او می تواند سرمایه اش را به یک معامله بدون مخاطره بزند که منتهی به برگشت m با احتمال ۱ می شود. فرض کنید تصمیم او بر مبنای ماکزیم کردن میانگین $u(R)$ است، که در آن R پول برگشتی و u تابع «مطلوبیت» است باشد. بنا به نامساوی جنسن نتیجه می شود که اگر u تابعی مقعر باشد آن گاه $E[u(X)] \leq u(m)$ و بنابر این موردی خطر بودن ترجیح داده می شود در صورتی که اگر u محدب باشد آن گاه $E[u(x)] \geq u(m)$ و لذا سرمایه گذاری با خطر ترجیح داده می شود.

تمرینهای نظری

۱- اگر σ^2 واریانس X باشد آن گاه σ ریشه دوم مثبت واریانس **انحراف معیار** نامیده می شود. اگر X دارای میانگین μ و انحراف معیار σ باشد نشان دهید

$$P\{|X - \mu| \geq k\sigma\} \leq \frac{1}{k^2}$$

۲- اگر X دارای میانگین μ و انحراف معیار σ باشد نسبت $r \equiv |\mu| / \sigma$ نسبت اندازه علامت به اغتشاش X نامیده می شود. منظور این است که X را می توان به صورت $X = \mu + (X - \mu)$ بیان نمود که μ علامت و $X - \mu$ اغتشاش را نشان می دهد. اگر $D \equiv |X - \mu| / \mu / \sigma$ را به عنوان انحراف نسبی X از علامتش (یا میانگین) μ تعریف کنیم نشان دهید برای $\alpha > 0$

$$P\{D \leq \alpha\} \geq 1 - \frac{1}{r^2 \alpha^2}$$

۳- اندازه نسبت علامت به اغتشاش یعنی $\frac{|\mu|}{\sigma}$ که $\mu = E\{X\}$ ، $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ متغیرهای تصادفی زیر را محاسبه کنید.

(الف) پواسن با میانگین λ

(ب) دو جمله ای با پارامترهای p, n

(پ) هندسی با میانگین $\frac{1}{p}$

(ت) یکنواخت در (a, b)

(ث) نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$

(ج) نرمال با پارامترهای μ, σ^2 .

۴- فرض کنید Z_n ، $n \geq 1$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی و c ثابتی باشد که برای هر $\varepsilon > 0$ وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $P\{|Z_n - c| > \varepsilon\} \rightarrow 0$ ، نشان دهید که برای هر تابع پیوسته کران دار g وقتی $n \rightarrow \infty$

$$E[g(Z_n)] \rightarrow g(c) \text{ و } n \rightarrow \infty$$

۵- فرض کنید $f(x)$ تابع پیوسته ای باشد که برای $0 \leq x \leq 1$ تعریف می شود؛ توابع

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

(که چند جمله ایهای برنشتاین نامیده می شود) را در نظر بگیرید و ثابت کنید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(x) = f(x)$$

راهنمایی: فرض کنید X_1, X_2, \dots متغیرهای تصادفی برنولی مستقل با میانگین x باشد. نشان دهید

$$B_n(x) = E\left[f\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)\right]$$

و سپس (با استفاده از نتیجه تمرین نظری ۴) از واقعیت زیر استفاده کنید

چون می توان ثابت کرد که همگرایی $B_n(x)$ به $f(x)$ در x یکنواخت است موضوع بالا یک اثبات احتمالی قضیه مشهور و ایرستراس در آنالیز را می دهد که بیان می کند هر تابع پیوسته در یک فاصله بسته را می توان با یک چند جمله ای با دقت دلخواه تقریب نمود.

۶- فرض کنید X_1, X_2, \dots دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل باشد. فرض کنید $E[X_i] = 0$ و $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ و فرض کنید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{n^2} = 0$$

ثابت کنید برای هر $\varepsilon > 0$ وقتی $n \rightarrow \infty$ داریم

$$P\left\{\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0$$

با استفاده از این اگر $Y_i, i \geq 1$ متغیرهای تصادفی مستقل برنولی باشد آن گاه برای هر $\varepsilon > 0$ وقتی $n \rightarrow \infty$

$$P\left\{\left|\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} - P(n)\right| \leq \varepsilon\right\} \rightarrow 1$$

که در آن $E[Y_i] = P_i$ و $P(n) = \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{n}$.

۷- فرض کنید X_1, X_2, \dots متغیرهای تصادفی (احتمالاً وابسته) باشند بطوری که $E[X_j] = \mu_j$ ، $\text{Var}(X_j) = \sigma_j^2$ ، $j = 1, \dots, n$ ، ثابت کنید که برای هر $t > 0$ داریم

$$P\left\{\left|\frac{X_j - \mu_j}{\sigma_j}\right| \leq \sqrt{n} t \quad j = 1, \dots, n\right\} \geq 1 - \frac{1}{t^2}$$

۸- (الف) فرض کنید X متغیر تصادفی گسسته ای است که مقادیر ممکن آن $1, 2, \dots$ است. اگر $P\{X = k\}$ در $k = 1, 2, \dots$ نا افزایشی باشد، ثابت کنید

$$P(X = k) \leq 2 \frac{E[X]}{k^2}$$

(ب) فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته نا منفی X دارای یک تابع چگالی نا افزایشی است. نشان دهید

$$f(x) \leq \frac{2E[X]}{x^2} \quad \text{برای هر } x > 0$$

۹- فرض کنید یک تاس متعادل را ۱۰۰ مرتبه انداخته ایم. فرض کنید X مقدار به دست آمده

در پرتاب i ام باشد. یک تقریب برای

$$P\left\{\prod_1^{100} X_i \leq a^{100}\right\} \quad 1 < a < 6$$

پیدا کنید.

۱۰- توضیح دهید که چرا یک متغیر تصادفی گاما با پارامترهای (t, λ) وقتی t بزرگ است تقریباً دارای توزیع نرمال است.

۱۱- ثابت کنید قانون قوی اعداد بزرگ برای هنگامی که $E(X_1) = +\infty$ معتبر است. راهنمایی: برای M معلوم تعریف کنید

$$X_i^M = \begin{cases} X_i & X_i \leq M \\ M & X_i > M \end{cases}$$

از (الف) قانون قوی اعداد بزرگ روی دنباله X_i^M ، $i \geq 1$ ؛

(ب) این حقیقت که $X_i^M \leq X_i$ و

(پ) فرض $M \rightarrow \infty$

استفاده کنید.

۱۲- فرض کنید یک سکه متعادل را ۱۰۰۰ مرتبه پرتاب کرده ایم. اگر نتیجه ۱۰۰ پرتاب اول شیر باشد چه نسبتی از شیرها را در ۹۰۰ پرتاب آخر انتظار دارید؟ نظر خود را در مورد عبارتی که «قانون اعداد بزرگ فراگیر است ولی موازنه نمی کند» بنویسید.

۱۳- اگر $E[X] < 0$ و $\theta \neq 0$ طوری باشد که $E[e^{\theta X}] = 1$ ، نشان دهید $\theta > 0$.

مسائل

۱- فرض کنید میانگین و واریانس متغیر تصادفی X برابر ۲۰ باشد. در مورد $P\{0 \leq X \leq 40\}$ چه می توان گفت؟

۲- استادی از تجربه گذشته خود می داند که نمره آزمون یک دانشجو در امتحان پایانی متغیری است تصادفی با میانگین ۷۵.

- (الف) یک کران بالا برای احتمال این که نمرهٔ آزمون دانشجو از ۸۵ تجاوز کند، پیدا کنید.
 علاوه بر این فرض کنید استاد می داند که واریانس نمرهٔ آزمون دانشجو برابر ۲۵ است.
 (ب) در مورد این احتمال که نمرهٔ دانشجو بین ۶۵ و ۸۵ است چه می توان گفت؟
 (پ) چند دانشجو باید در امتحان شرکت کنند تا مطمئن شویم که با احتمال دست کم 0.9 متوسط کلاس بین ۷۰ و ۸۰ است. از قضیهٔ حد مرکزی استفاده نکنید.
- ۳- برای حل بخش (پ) مسألهٔ ۲ از قضیه حد مرکزی استفاده کنید.
- ۴- فرض کنید X_1, \dots, X_{20} متغیرهای تصادفی مستقل بواسن با میانگین ۱ باشد.
 (الف) با استفاده از نامساوی مارکف یک کران برای $P\left\{\sum_{i=1}^{20} X_i > 15\right\}$ را به دست آورید.
 (ب) با استفاده از قضیهٔ حد مرکزی $P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i > 15\right\}$ را تقریب کنید.
- ۵- پنجاه عدد را به نزدیکترین عدد صحیح گرد نموده و سپس آنها را جمع می کنیم. اگر هر یک از خطاهای گرد شده در فاصلهٔ $(0.5, 0.5)$ دارای توزیع یکنواخت باشند احتمال این که اختلاف مجموع نتیجه شده از مجموع واقعی بیشتر از ۳ باشد چقدر است؟
- ۶- تاسی را مرتباً پرتاب می کنیم تا مجموع تمام پرتابها بیشتر از ۳۰۰ شود. احتمال این که حداقل ۸۰ پرتاب لازم باشد چقدر است؟
- ۷- صد لامپ برق که طول عمر آنها نمایی مستقل با میانگین ۵ ساعت است وجود دارد. اگر در هر زمان یک لامپ را مورد استفاده قرار دهیم و بلافاصله لامپ جدیدی را جایگزین لامپ خراب کنیم، احتمال این که بعد از ۵۲۵ ساعت یک لامپ در حال کار کردن باشد چقدر است؟
- ۸- اگر در مسأله ۷ فرض کنیم زمان تعویض لامپ تصادفی و در فاصلهٔ $(0.5, 0)$ دارای توزیع یکنواخت است، احتمال این که تا ساعت ۵۵۰ تمام لامپها خراب باشند چقدر است؟
- ۹- اگر X یک متغیر تصادفی گاما با پارامترهای $(n, 1)$ باشد n چقدر بزرگ باشد تا
- $$P\{|X/n - 1| > .01\} < .01$$
- ۱۰- مهندسان راه و ساختمان بر این باورند که W مقدار وزنی (به واحدهای ۱۰۰۰ پوند) که دهانهٔ یک پل می تواند تحمل کند بدون این که به ساختمان زبانی وارد شود دارای توزیع نرمال با میانگین ۴۰۰ و انحراف معیار ۴۰ است. فرض کنید وزن (به واحدهای

۱۰۰۰ پوند) یک اتومبیل متغیری تصادفی با میانگین ۳ و انحراف معیار ۰/۳ است. برای این که احتمال زیان ساختمانی از ۰/۱ تجاوز نماید چند اتومبیل باید روی دهانه پل باشند؟

۱۱- بیشتر مردم باور دارند که تغییر روزانه قیمت موجودی یک کمپانی در بازار متغیری است تصادفی با میانگین 0 و واریانس σ^2 . یعنی اگر Y_n قیمت موجودی در روز n ام باشد آن گاه

$$Y_n = Y_{n-1} + X_n \quad n \geq 1$$

که X_1, X_2, \dots متغیرهای تصادفی مستقل هم توزیع با میانگین 0 و واریانس σ^2 است. فرض کنید که قیمت موجودی امروز ۱۰۰ باشد. اگر $\sigma^2 = 1$ باشد در مورد احتمال این که در ۱۰ روز بعد قیمت موجودی همواره بین ۹۵ و ۱۰۵ باقی بماند چه می توان گفت؟

۱۲- صد قطعه داریم که آنها را بطور متوالی مورد استفاده قرار می دهیم. یعنی قطعه ۱ را مورد استفاده قرار داده و بعد از این که خراب شد قطعه ۲ را جایگزین نموده به همین ترتیب الی آخر. اگر طول عمر قطعه i دارای توزیع نمایی با میانگین $10 + i/10$ ، $i = 1, \dots, 100$ باشد، این احتمال را که طول عمر تمام قطعه ها از ۱۲۰۰ تجاوز کند برآورد نمایید. حال اگر توزیع طول عمر قطعه i در فاصله $(0, 20 + i/5)$ ، $i = 1, \dots, 100$ یکنواخت باشد برآورد را به دست آورید.

۱۳- با این فرض که توزیع تعداد زوجهای مرد-زن (تقریباً) نرمال است، مثال ۵ ب را دوباره انجام دهید. آیا این فرض معقول به نظر می رسد؟

۱۴- بخش (الف) مسأله ۲ را وقتی واریانس نمره آزمون دانشجو برابر ۲۵ است تکرار کنید.

۱۵- دریاچه ای ۴ نوع ماهی دارد. فرض کنید صید هریک از این نوع ماهیها با احتمال مساوی انجام شود. فرض کنید Y تعداد مساهیهایی است که لازم است دست کم یکی از هر نوع باشد.

(الف) فاصله (a, b) را طوری تعیین کنید که $P\{a \leq Y \leq b\} \geq 0.90$.

(ب) با استفاده از نا مساوی یک طرفه چیشف، در طرح صید ماهیها چند ماهی لازم است تا دست کم ۹۰ درصد مطمئن باشیم که لا اقل یکی از هر نوع به دست می آوریم؟

۱۶- اگر X متغیر تصادفی نامنفی با میانگین ۲۵ باشد راجع به موارد زیر چه می توان گفت؟

(الف) $E[X^3]$;

(ب) $E[\sqrt{X}]$;

$E[\log X]$; (پ)

$E[e^{-X}]$? (ت)

۱۷- فرض کنید X متغیر تصادفی نامنفی است؛ ثابت کنید

$$E[X] \leq (E[X^2])^{1/2} \leq (E[X^3])^{1/3} \leq \dots$$

۱۸- آیا نتایج مثال ۵ پ وقتی سرمایه گذار اجازه داشته باشد که سرمایه اش را تقسیم کند و کسر α ، $0 < \alpha < 1$ از آن را در وضعیت مخاطره آمیز و بقیه آن را در معامله بدون خطر قرار دهد، تغییر می کند؟ برگشت سرمایه او برای یک چنین تقسیم بندی سرمایه عبارت است از

$$R = \alpha X + (1 - \alpha)m$$

چند موضوع دیگر احتمال

۱ - فرایند پواسن

قبل از تعریف فرایند پواسن یادآور می شویم که اگر $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) / h = 0$ باشد تابع f را $o(h)$ می نامند. یعنی اگر برای مقادیر کوچک h ، $f(h)$ نسبت به h کوچک باشد، f ، $o(h)$ است. حال فرض کنید که «پیشامدها» در نقاط زمانی تصادفی رخ می دهند و فرض کنید $N(t)$ تعداد پیشامدهایی باشد که در فاصله زمانی $[0, t]$ اتفاق می افتد. فرایند تصادفی $\{N(t), t \geq 0\}$ یک فرایند پواسن نامیده می شود هرگاه

$$N(0) = 0 \quad (i)$$

(ii) تعداد پیشامدهایی که در فواصل زمانی جدا اتفاق می افتند مستقل باشند

(iii) توزیع تعداد پیشامدهایی که در فاصله معلومی رخ می دهد تنها به طول آن فاصله

بستگی داشته باشد نه به محل آن

$$P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h) \quad (iv)$$

$$P\{N(h) \geq 2\} = o(h) \quad (v)$$

بنابراین شرط (i) بیان می کند که فرایند در زمان 0 شروع می شود. شرط (ii) یعنی

فرض نمو مستقل برای مثال بیان می کند که تعداد پیشامدها تا زمان t [یعنی $N(t)$] مستقل از تعداد

پیشامدهایی است که بین t و $t+s$ [یعنی $N(t+s) - N(t)$] اتفاق می افتد. شرط (iii) یعنی فرض

نمو ایستایان می کند که توزیع احتمال $N(t+s) - N(t)$ برای تمام مقادیر t یکسان است. در فصل ۴ بحثی را بر این مبنای ارائه کردیم که توزیع پواسن جنبه حدی توزیع دو جمله ای است. از شرط بالا نتیجه می شود که $N(t)$ دارای توزیع پواسن با میانگین λt است. اکنون این نتیجه را با روشی دیگر به دست می آوریم.

م ۱-۱

برای یک فرایند پواسن با نرخ λ داریم

$$P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$$

پوهان: فرض کنید $P_0(t) = P\{N(t) = 0\}$. برای $P_0(t)$ یک معادله دیفرانسیل به روش زیر به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= P\{N(t+h) = 0\} \\ &= P\{N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0\} \\ &= P\{N(t) = 0\}P\{N(t+h) - N(t) = 0\} \\ &= P_0(t)[1 - \lambda h + o(h)] \end{aligned}$$

که دو معادله آخر از فرض (ii) و این حقیقت که از فرضهای (iii) و (iv) $P\{N(h)=0\} = 1 - \lambda h + o(h)$ نتیجه می شود به دست می آیند. بنابراین

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h}$$

حال اگر $h \rightarrow 0$

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$

یا معادل آن

$$\frac{P_0'(t)}{P_0(t)} = -\lambda$$

به دست می آید که با انتگرال گیری

$$\log P_0(t) = -\lambda t + c$$

یا

$$P_0(t) = Ke^{-\lambda t}$$

نتیجه می شود. چون $1 = P\{N(0) = 0\} = P_0(0)$ لذا نتیجه زیر عاید می گردد.

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

برای یک فرایند پواسن زمان اولین پیشامد را با T_1 نمایش می دهیم. به علاوه فرض کنید T_n برای $n > 1$ زمان متقاضی شده بین پیشامد $(n-1)$ و n ام را نشان دهد. دنباله $\{T_n, n = 1, 2, \dots\}$ را دنباله فواصل زمانی مراجعه ها می نامند. برای مثال اگر $T_1 = 5$ و $T_2 = 10$ باشد در این صورت اولین پیشامد فرایند پواسن در زمان ۵ و پیشامد دوم در زمان ۱۵ اتفاق افتاده است.

حال توزیع T_n را به دست می آوریم. برای انجام آن توجه داریم که پیشامد $\{T_1 > t\}$ فقط و فقط زمانی رخ می دهد که هیچ پیشامدی از فرایند پواسن در فاصله $[0, t]$ اتفاق نیفتاده باشد و لذا

$$P\{T_1 > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$$

بنابراین T_1 دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ است. اکنون

$$P\{T_2 > t\} = E\{P\{T_2 > t | T_1\}\}$$

با وجود این

$$\begin{aligned} P\{T_2 > t | T_1 = s\} &= P\{0 \text{ پیشامد در } (s, s+t) | T_1 = s\} \\ &= P\{0 \text{ پیشامد در } (s, s+t)\} \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

که دو معادله آخر از نموهای مستقل و ایستا نتیجه می شود. بنابراین از بالا نتیجه می گیریم که T_2 نیز یک متغیر تصادفی نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ بوده و علاوه بر این T_2 مستقل از T_1 است. اگر استدلال مشابه را تکرار کنیم حکم ۱-۱ حاصل می گردد.

حکم ۱-۱

T_1 و T_2 و . . . متغیرهای تصادفی نمایی هر یک با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ است.

کمیت مورد توجه دیگر S_n ، زمان ورود پیشامد n ام است که زمان انتظار تا پیشامد n ام

نیز نامیده می شود. بسهولت دیده می شود که

$$S_n = \sum_{i=1}^n T_i \quad n \geq 1$$

و بنابراین از حکم ۱-۱ و نتایج بخش ۲ فصل ۵ نتیجه می شود که S_n دارای توزیع گاما با پارامترهای n و λ است، یعنی چگالی احتمال S_n بصورت زیر داده می شود

$$f_{S_n}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \quad x \geq 0$$

اکنون می خواهیم ثابت کنیم که $N(t)$ یک متغیر تصادفی پواسن با میانگین λt است.

قضیه ۱-۱

برای یک فرآیند پواسن با نرخ λ داریم

$$P\{N(t) = n\} = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}$$

پوهان: توجه داریم که پیشامد n ام فرآیند پواسن قبل یا در زمان t اتفاق می افتد اگر و تنها اگر تعداد پیشامدهایی که تا زمان t رخ می دهند دست کم n باشد. یعنی

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} P\{N(t) = n\} &= P\{N(t) \geq n\} - P\{N(t) \geq n+1\} \\ &= P\{S_n \leq t\} - P\{S_{n+1} \leq t\} \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} dx \end{aligned}$$

لیکن اگر در فرمول انتگرال جزء به جزء $u = e^{-\lambda x}$ و $dv = \lambda [(\lambda x)^{n-1} / (n-1)!] dx$ قرار دهیم $\int u dv = uv - \int v du$ به جزء

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} + \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} dx$$

۲- زنجیره‌های مارکف

دنباله ای از متغیرهای تصادفی X_0, X_1, \dots را در نظر بگیرید و فرض کنید مجموعه

مقادیر ممکن این متغیرهای تصادفی $\{0, 1, \dots, M\}$ است. اگر X_n را به عنوان حالت یک سیستم در زمان n تفسیر کنیم، مفید خواهد بود و بر طبق این تفسیر اگر $X_n = i$ باشد سیستم را در زمان n در حالت i گویند.

دنباله متغیرهای تصادفی یک زنجیر مارکف تشکیل می دهد، وقتی که سیستم در حالت i است هرگاه احتمال ثابتی که آن را P_{ij} می نامند وجود داشته باشد که بعد از آن سیستم در حالت j باشد. یعنی برای تمام $j, i, i_{n-1}, \dots, i_1, X_0 = i_0$ داشته باشیم

$$P\{X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\} = P_{ij}$$

مقادیر P_{ij} برای $0 \leq i \leq M$ و $0 \leq j \leq M$ را احتمالات انتقال زنجیر مارکف نامیده و این مقادیر در

$$P_{ij} \geq 0 \quad \sum_{j=0}^M P_{ij} = 1 \quad i = 0, 1, \dots, M$$

صدق می کند (چرا؟).

بهرتر است که احتمالات انتقال P_{ij} را در آرایشی به شکل زیر که آن را **ماتریس** می نامند مرتب کنیم.

$$\begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{0M} \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{M0} & P_{M1} & \dots & P_{MM} \end{pmatrix}$$

دانش مربوط به ماتریس احتمال انتقال و توزیع X_0 ، بطور نظری ما را در محاسبه تمام احتمالات مورد نظر کمک می کند. برای مثال تابع جرم احتمال توأم X_0, \dots, X_n به صورت زیر داده می شود

$$\begin{aligned} P\{X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\} \\ = P\{X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\} P\{X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\} \\ = P_{n-1, i_n} P\{X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\} \end{aligned}$$

و اگر این استدلال را بطور پیوسته تکرار کنیم عبارت بالا برابر می شود با

$$= P_{i_{n-1}, i_n} P_{i_{n-2}, i_{n-1}} \dots P_{i_1, i_2} P_{i_0, i_1} P\{X_0 = i_0\}$$

مثال ۴ الف. فرض کنید باریدن باران در فردا تنها از طریق این که آیا امروز باران می بارد یا نمی بارد به شرایط قبل هوا بستگی داشته باشد. علاوه بر این فرض کنید که اگر امروز باران

بیارد آن گاه فردا با احتمال α باران خواهد بارید و اگر امروز بارانی نباشد آن گاه فردا با احتمال β باران خواهد آمد.

اگر وقتی بارانی است سیستم در حالت 0، و وقتی بارانی نیست در حالت 1 باشد در این صورت مورد بالا یک زنجیر مارکف دو حالتی است و ماتریس احتمال انتقال آن به صورت زیر است

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}$$

$$. P_{10} = \beta = 1 - P_{11}, \quad P_{01} = \alpha = 1 - P_{00}$$

مثال ۴ پ. قمار بازی را در نظر بگیرید که در هر بازی یک واحد را با احتمال $1 - p$ می‌بازد. اگر فرض کنیم که وقتی سرمایه قمارباز به 0 یا M برسد بازی را ترک کند در این صورت دنباله سرمایه های قمارباز یک زنجیر مارکف با احتمالهای انتقال زیر است

$$\begin{aligned} P_{i,i+1} &= p = 1 - P_{i,i-1} & i = 1, \dots, M-1 \\ P_{00} &= P_{MM} = 1 \end{aligned}$$

مثال ۴ پ. فیزیک دانهای P و T یک الگوی فرضی را برای حرکت مولکولهایی که در آن M مولکول در میان دو ظرف توزیع شده اند در نظر می‌گیرند. در هر نقطه زمانی یکی از مولکولها بتصادف انتخاب و از یک ظرف به ظرف دیگر منتقل می‌شود. اگر X_n تعداد مولکولهای اولین ظرف بلافاصله بعد از تعویض n ام باشد آن گاه $\{X_0, X_1, \dots\}$ یک زنجیر مارکف با احتمالهای انتقال زیر است

$$\begin{aligned} P_{i,i+1} &= \frac{M-i}{M} & 0 \leq i \leq M \\ P_{i,i-1} &= \frac{i}{M} & 0 \leq i \leq M \\ P_{ij} &= 0 & \text{if } |j-i| > 1 \end{aligned}$$

بنابراین برای یک زنجیر مارکف P_{ij} احتمالی را نشان می‌دهد که یک سیستم در انتقال بعد از حالت i به حالت j وارد می‌شود. همچنین می‌توانیم احتمال انتقال دو مرحله ای $P_{ij}^{(2)}$ که یک سیستم فعلاً در حالت i بعد از دو انتقال اضافی در حالت j خواهد بود؛ یعنی

$$P_{ij}^{(2)} = P\{X_{m+2} = j | X_m = i\}$$

$P_{ij}^{(2)}$ را از P_{ij} به طریق زیر می توان محاسبه نمود

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(2)} &= P\{X_2 = j | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=0}^M P\{X_2 = j, X_1 = k | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=0}^M P\{X_2 = j | X_1 = k, X_0 = i\} P\{X_1 = k | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=0}^M P_{kj} P_{ik} \end{aligned}$$

بطور کلی احتمالات انتقال n مرحله ای را که به $P_{ij}^{(n)}$ نشان داده می شود به صورت زیر تعریف می کنیم

$$P_{ij}^{(n)} = P\{X_{n+m} = j | X_m = i\}$$

حکم ۱-۲ که به معادلات چپمن - کلموگروف مشهور است طریقه محاسبه $P_{ij}^{(n)}$ را نشان می دهد.

حکم ۱-۲ معادلات چپمن - کلموگروف

برای تمام n ها

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^M P_{ik}^{(r)} P_{kj}^{(n-r)} \quad \text{و} \quad 0 < r < n$$

برهان

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(n)} &= P\{X_n = j | X_0 = i\} \\ &= \sum_k P\{X_n = j, X_r = k | X_0 = i\} \\ &= \sum_k P\{X_n = j | X_r = k, X_0 = i\} P\{X_r = k | X_0 = i\} \\ &= \sum_k P_{kj}^{(n-r)} P_{ik}^{(r)} \end{aligned}$$

مثال ۲ ت. گام برداری تصادفی. شکل خاصی از زنجیر مارکف که دارای یک فضای حالت

نامتناهی شمار است گام برداری تصادفی نام دارد که حرکت یک ذره را در طول یک محور یک بعدی دنبال می کند. فرض کنید در هر لحظه از زمان ذره به ترتیب با احتمالهای p و $1-p$ یک قدم به راست یا به چپ حرکت کند. یعنی فرض کنید مسیر ذره از یک زنجیر مارکف با احتمالهای انتقال زیر پیروی کنند

$$P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1} \quad i = 0, \pm 1, \dots$$

اگر ذره در حالت i است آن گاه احتمال این که بعد از n انتقال در حالت j باشد برابر است با احتمالی که $\frac{(n-i+j)}{2}$ از این قدمها به راست و $\frac{(n+i-j)}{2}$ از این قدمها به چپ باشد. چون هر قدم به راست با احتمال p ، مستقل از قدمهای دیگر است لذا مورد بالا احتمال دو جمله ای زیر است

$$P_{ij}^n = \binom{n}{\frac{n-i+j}{2}} p^{(n-i+j)/2} (1-p)^{(n+i-j)/2}$$

که در آن $\binom{n}{x}$ را وقتی x یک عدد صحیح نامنفی کمتر یا مساوی n نباشد 0 در نظر می گیریم. احتمال بالا را به صورت زیر می توان نوشت

$$P_{i,i+2k}^{2n} = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} (1-p)^{n-k} \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm n$$

$$P_{i,i+2k-1}^{2n+1} = \binom{2n+1}{n+k+1} p^{n+k+1} (1-p)^{n-k} \\ k = 0, \pm 1, \dots, = n, -(n+1)$$

اگرچه $P_{ij}^{(n)}$ احتمالهای شرطی را نشان می دهد ولی با مقید کردن حالت اولیه از آنها می توانیم عباراتی برای احتمالهای غیر شرطی به دست آوریم. برای مثال

$$P\{X_n = j\} = \sum_i P\{X_n = j | X_0 = i\} P\{X_0 = i\} \\ = \sum_i P_{ij}^{(n)} P\{X_0 = i\}$$

برای تعداد زیادی از زنجیرهای مارکف وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $P_{ij}^{(n)}$ به یک مقدار Π_j که فقط به وابستگی دارد همگراست. یعنی برای مقادیر بزرگ n احتمال این که بعد از n انتقال بدون در نظر گرفتن حالت اولیه در حالت j باشیم، تقریباً برابر Π_j است. می توان نشان داد که یک شرط

کافی برای هر زنجیر مارکف که دارای این خاصیت است آن است که برای $n > 0$ داشته باشیم .

$$P_{ij}^{(n)} > 0 \quad i, j = 0, 1, \dots, M \quad (1-2)$$

زنجیرهای مارکفسی که در معادله (۱-۲) صدق کنند **ارگودیک** نامیده می شوند . چون از حکم ۱-۲

$$P_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=0}^M P_{ik}^{(n)} P_{kj}$$

حاصل می شود لذا با فرض $n \rightarrow \infty$ ، برای زنجیرهای ارگودیک داریم

$$\Pi_j = \sum_{k=0}^M \Pi_k P_{kj} \quad (2-2)$$

علاوه بر این چون $1 = \sum_{j=0}^M P_{ij}^{(n)}$ با فرض این که $n \rightarrow \infty$ عبارت زیر را نیز به دست می آوریم

$$\sum_{j=0}^M \Pi_j = 1 \quad (3-2)$$

در حقیقت می توان نشان داد که $0 \leq j \leq M$ ، Π_j جوابهای نامنفی یکتای معادلات (۲-۲) و (۳-۲) هستند . تمام اینها قضیه ۱-۲ که آن را بدون اثبات بیان می کنیم خلاصه می شود .

قضیه ۱-۲

برای یک زنجیر مارکف ارگودیک

$$\Pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)}$$

وجود دارد و Π_j ، $0 \leq j \leq M$ جوابهای نامنفی یکتای

$$\Pi_j = \sum_{k=0}^M \Pi_k P_{kj}$$

$$\sum_{j=0}^M \Pi_j = 1$$

هستند .

مثال ۲ ت. مثال ۲ الف را در نظر می‌گیریم: در آن مثال فرض شده بود که اگر امروز باران بیارد در آن صورت فردا با احتمال α خواهد بارید و اگر امروز باران نیاید آن گاه فردا با احتمال β خواهد بارید. از قضیه ۱-۲ نتیجه می‌گیریم که احتمالهای حدی باریدن و نیاریدن یعنی Π_0 و Π_1 عبارتند از

$$\begin{aligned}\Pi_0 &= \alpha\Pi_0 + \beta\Pi_1 \\ \Pi_1 &= (1 - \alpha)\Pi_0 + (1 - \beta)\Pi_1 \\ \Pi_0 + \Pi_1 &= 1\end{aligned}$$

که عبارات زیر را نتیجه می‌دهد

$$\Pi_0 = \frac{\beta}{1 + \beta - \alpha} \quad \Pi_1 = \frac{1 - \alpha}{1 + \beta - \alpha}$$

برای مثال اگر $\alpha = 0.76$ ، $\beta = 0.73$ آن گاه احتمال حدی این که در روز n ام باران بیاید برابر $\Pi_0 = \frac{\beta}{1 + \beta - \alpha}$ است.

کمیت Π_1 نیز مساوی نسبت دفعات در دراز مدت است که زنجیر مارکف در حالت $z = 0, \dots, M$ است. برای این که بطور شهودی دلیل آن را بدانیم فرض کنید P_j نسبت دفعاتی را نشان می‌دهد که در درازمدت زنجیر در حالت z است. (با استفاده از قانون قوی می‌توان ثابت کرد که برای یک زنجیر ارگودیک چنین نسبتی وجود دارد و ثابت است). اکنون چون P_k نسبت دفعاتی است که زنجیر در حالت k است و چون وقتی در حالت k زنجیر با احتمال P_{kj} به حالت j می‌رود نتیجه می‌شود نسبت دفعاتی که زنجیر مارکف از حالت k به حالت j وارد می‌شود برابر $P_k P_{kj}$ است. با جمع کردن روی تمام k ها نشان داده می‌شود که P_j یعنی نسبت دفعاتی که زنجیر مارکف به حالت j وارد می‌شود در عبارت زیر صدق می‌کند.

$$P_j = \sum_k P_k P_{kj}$$

چون درستی $\sum_j P_j = 1$ واضح است بنابراین چون بنا به قضیه ۱-۲، $\Pi_j = P_j$ ، $j = 0, \dots, M$ جوابهای یکتای بالا هستند لذا

$$P_j = \Pi_j, \quad j = 0, \dots, M$$

مثال ۲ ج. فرض کنید در مثال ۲ پ علاقه مند به نسبت دفعاتی هستیم که z مولکول

در ظرف 1 ($j = 0, \dots, M$) است. بنا به قضیه ۱-۲ این کمیتها جواب یکتای

$$\begin{aligned}\Pi_0 &= \Pi_1 \times \frac{1}{M} \\ \Pi_j &= \Pi_{j-1} \times \frac{M-j+1}{M} + \Pi_{j+1} \times \frac{j+1}{M}, \quad j = 1, \dots, M \\ \Pi_M &= \Pi_{M-1} \times \frac{1}{M} \\ \sum_{j=0}^M \Pi_j &= 1\end{aligned}$$

است. با وجود این چون سهولت می توان بررسی نمود که

$$\Pi_j = \binom{M}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^M, \quad j = 0, \dots, M$$

در معادلات بالا صدق می کند لذا اینها نسبت دفعات در دراز مدت هستند که زنجیر مارکف در هر یک از حالات است. (برای توضیح این که جوابهای بالا را چگونه می توان حدس زد مسأله ۱۱ را ملاحظه کنید).

۳ - شگفتی ، عدم اطمینان و آنزوی

پیشامد E را در نظر بگیرید که با انجام یک آزمایش می تواند رخ دهد. وقتی پیشامد E در واقع رخ می دهد چقدر تعجب می کنیم؟ معقول به نظر می رسد فرض کنیم که میزان شگفتی که با اطلاع از روی دادن E به وجود می آید باید به احتمال E بستگی داشته باشد. برای مثال اگر آزمایش پرتاب یک جفت تاس باشد آن گاه شنیدن این که پیشامد E «مجموع دو عدد تاس زوج» (با احتمال $\frac{1}{4}$) رخ داده است ما را زیاد متعجب نمی کند در صورتی که شنیدن این که پیشامد E «مجموع دو عدد تاس ۱۲» (با احتمال $\frac{1}{۳۶}$) اتفاق افتاده است یقیناً ما را بیشتر متعجب می کند. در این بخش سعی می کنیم مفهوم شگفتی را به صورت کمی در آوریم. برای شروع فرض می کنیم که احساس ما از «شگفتی» آموختن این مطلب است که رویداد پیشامد E تنها به احتمال آن بستگی دارد و فرض کنید $S(p)$ شگفتی حاصل پیشامدی باشد که احتمال وقوع آن p است. ابتدا می خواهیم شکل تابعی $S(p)$ را که باید در شرایط معقولی صدق کند تعیین کنیم و سپس ثابت کنیم که این اصول نیاز به این دارد که $S(p)$ شکل مشخصی داشته باشد. $S(p)$ را برای هر $0 < p \leq 1$ تعریف می کنیم ولی برای پیشامدهایی که $P=0$ است تعریف نمی شود. اولین شرط درست یک حقیقت شهودی است و آن شنیدن وقوع یک پیشامد حتمی است که جای تعجب ندارد.

اصل ۱

$$S(1) = 0$$

شرط دوم بیان می کند که هرچه احتمال وقوع یک پشامد ضعیفتر باشد، وقوع آن ما را بیشتر متعجب می کند.

اصل ۲

$S(p)$ یک تابع اکیداً نزولی از p است یعنی اگر $p < q$ ، آن گاه $S(p) > S(q)$.
شرط سوم بیان ریاضی این حقیقت است که بطور شهودی انتظار داریم که یک تغییر کوچک در P به یک تغییر کوچک در $S(P)$ مربوط شود.

اصل ۳

$S(P)$ یک تابع پیوسته از P است.
برای بیان انگیزه شرط آخر دو پشامد مستقل E و F به ترتیب با احتمالهای $P(E) = p$ و $P(F) = q$ را در نظر می گیریم. چون $P(EF) = pq$ لذا شگفتی حاصل از اطلاع وقوع E و F برابر $S(pq)$ است. حال فرض کنید اول E رخ داده است و بعد از آن F اتفاق افتاده باشد. چون $S(p)$ شگفتی حاصل از وقوع E است لذا $S(pq) - S(p)$ شگفتی اضافی حاصل از اطلاع وقوع F است. با وجود این چون F مستقل از E است دانستن وقوع E احتمال F را تغییر نمی دهد و بنابراین تعجب اضافی باید دقیقاً $S(q)$ باشد. این استدلال شرط دیگری را پیشنهاد می کند

اصل ۴

$$S(pq) = S(p) + S(q) \quad 0 < p \leq 1, 0 < q \leq 1$$

حال برای قضیه ۳-۱ که ساختمان $S(p)$ را می دهد آماده هستیم.

قضیه ۳-۱

اگر $S(0)$ در اصول ۱ تا ۴ صدق کند آن گاه

$$S(p) = -C \log_2 p$$

که در آن C یک عدد صحیح مثبت دلخواه است

پرهان: از اصل ۴ نتیجه می شود

$$S(p^2) = S(p) + S(p) = 2S(p)$$

و با استقرا داریم

$$S(p^m) = mS(p) \quad (۱-۳)$$

همچنین چون برای هر عدد صحیح n ، $S(p^{1/n}) = nS(p^{1/n})$ ، در نتیجه

$$S(p^{1/n}) = \frac{1}{n} S(p) \quad (۲-۳)$$

بنابراین از معادلات (۱-۳) و (۲-۳) به دست می آوریم

$$\begin{aligned} S(p^{m/n}) &= mS(p^{1/n}) \\ &= \frac{m}{n} S(p) \end{aligned}$$

که وقتی x یک عدد گویای مثبت است معادل است با

$$S(p^x) = xS(p) \quad (۳-۳)$$

اما این طبق پیوستگی S (اصل ۳) نتیجه می دهد که معادله (۳-۳) برای تمام x های نامنفی معتبر است. (ثابت کنید).

اکنون برای هر p ، $0 < p \leq 1$ فرض کنید $x = -\log_2 p$ در این صورت $p = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ از معادله (۳-۳) نتیجه می شود که

$$S(p) = S\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = xS\left(\frac{1}{2}\right) = -C \log_2 p$$

که بنا به اصول ۱ و ۲، $C = S\left(\frac{1}{2}\right) > S(1) = 0$.

مطابق معمول C را مساوی ۱ در نظر می گیریم. در این حالت تعجب را بر حسب واحدهای رقم دو بیان می کنند.

اکنون یک متغیر تصادفی X را در نظر بگیرید که بایستی یکی از مقادیر x_1, \dots, x_n را به ترتیب با احتمالهای p_1, \dots, p_n انتخاب کند. چون اگر X مقادیر x_i را انتخاب کند $-\log p_i$

شگفتی حاصل را نشان می دهد^۱، لذا امید میزان شگفتی که از دانستن مقدار X دریافت می کنیم به صورت زیر داده می شود

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$$

در نظریه اطلاع، $H(X)$ به عنوان آنتروپی متغیر تصادفی X در نظر گرفته می شود. (در حالت $P_i = 0$ ، $0 \log 0$ را مساوی 0 فرض می کنیم). می توان نشان داد (به عنوان تمرین نشان دهید) که وقتی تمام P_i ها مساوی باشند $H(X)$ ماکزیمم می شود. (آیا این مطلب واضح است؟).

چون $H(X)$ متوسط میزان شگفتی را که از دانستن مقدار X دریافت می شود نشان می دهد آن را به عنوان نمایش دهنده میزان عدم اطمینانی که برای مقدار X وجود دارد نیز می توان تعبیر نمود. در حقیقت در نظریه اطلاع $H(X)$ متوسط میزان اطلاعی است که از مشاهده مقدار X دریافت می شود. بنابراین متوسط شگفتی که توسط X به وجود می آید، عدم اطمینان X ، یا متوسط میزان اطلاع به دست آمده از X همگی یک مفهوم را نشان می دهند که از سه دیدگاه تا حدی متفاوت مورد بررسی قرار می گیرند.

حال متغیرهای تصادفی X و Y که به ترتیب مقادیر x_1, \dots, x_m و y_1, \dots, y_m را می گیرند با تابع چگالی احتمال توأم زیر در نظر می گیریم

$$p(x_i, y_j) = P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

بنابر این عدم اطمینان به عنوان مقدار بردار تصادفی (X, Y) که با $H(X, Y)$ نشان داده می شود عبارت است از

$$H(X, Y) = - \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j)$$

اکنون فرض کنیم y_j مقدار مشاهده شده Y است. در این وضعیت میزان عدم اطمینان باقیمانده در X با

$$H_{Y=y_j}(X) = - \sum_i p(x_i | y_j) \log p(x_i | y_j)$$

داده می شود که

۱- در باقیمانده این فصل $\log x$ را به جای $\log_2 x$ می نویسیم. همچنین از $\ln x$ به جای $\log_e x$ استفاده می کنیم.

$$p(x_i | y_j) = P\{X = x_i | Y = y_j\}$$

بنابراین متوسط میزان عدم اطمینانی که بعد از مشاهده Y در X باقی می ماند عبارت است از

$$H_Y(X) = \sum_j H_{Y=y_j}(X) p_Y(y_j)$$

که در آن

$$p_Y(y_j) = P\{Y = y_j\}$$

حکم ۱-۳، $H(X, Y)$ را به $H(Y)$ و $H_Y(X)$ مربوط می کند. این حکم بیان می کند که عدم اطمینان مربوط با مقدار X و Y برابر است با عدم اطمینان Y به علاوه متوسط عدم اطمینان باقیمانده در X وقتی Y مشاهده می شود.

حکم ۱-۳

$$H(X, Y) = H(Y) + H_Y(X)$$

پروهان: با استفاده از تساوی $p(x_i, y_j) = p_Y(y_j) p(x_i | y_j)$

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= -\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j) \\ &= -\sum_i \sum_j p_Y(y_j) p(x_i | y_j) [\log p_Y(y_j) + \log p(x_i | y_j)] \\ &= -\sum_j p_Y(y_j) \log p_Y(y_j) \sum_i p(x_i | y_j) \\ &\quad - \sum_j p_Y(y_j) \sum_i p(x_i | y_j) \log p(x_i | y_j) \\ &= H(Y) + H_Y(X) \end{aligned}$$

یک نتیجه اساسی در نظریه اطلاع این است که میزان عدم اطمینانی که در متغیر تصادفی X است وقتی متغیر تصادفی دوم Y مشاهده می شود بطور متوسط کاهش می یابد. قبل از اثبات این مطلب به لم زیر نیاز داریم که اثبات آن به عنوان تمرین در نظر گرفته شده است.

لم ۱-۳

$$\ln x \leq x - 1 \quad x > 0$$

و تنها در $x=1$ تساوی برقرار است.

قضیه ۳-۲

$$H_Y(X) \leq H(X)$$

و اگر و تنها اگر X, Y مستقل باشند تساوی برقرار است.

برهان

$$\begin{aligned} H_Y(X) - H(X) &= -\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log [p(x_i, y_j)] p(y_j) \\ &\quad + \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log p(x_i) \\ &= \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log \left[\frac{p(x_i)}{p(x_i, y_j)} \right] \\ &\leq \log e \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \left[\frac{p(x_i)}{p(x_i, y_j)} - 1 \right] \quad \text{بنا به لم ۳-۱} \\ &= \log e \left[\sum_i \sum_j p(x_i) p(y_j) - \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \right] \\ &= \log e [1 - 1] \\ &= 0 \end{aligned}$$

۴- نظریه کدگذاری و آنتروپی

فرض کنید که مقدار یک بردار تصادفی گسسته X را در محل A مشاهده نموده و سپس از طریق یک شبکه ارتباطی متشکل از دو علامت 0 و 1 به محل B انتقال دهیم. برای انجام این امر ابتدا لازم است هر مقدار ممکن X را بر حسب دنباله ای از 0 و 1 ها به صورت کد در آوریم. برای این که ابهامی نباشد معمولاً لازم است بدانیم که هیچ دنباله به کد در آورده شده را نمی توان از یک دنباله کد گذاری شده کوتاهتر با افزودن جملات بیشتری به آن به دست آورد.

به عنوان مثال اگر X چهار مقدار ممکن x_1, x_2, x_3, x_4 را انتخاب کند آن گاه یک کدگذاری ممکن عبارت است از

$$\begin{aligned} x_1 &\leftrightarrow 00 \\ x_2 &\leftrightarrow 01 \\ x_3 &\leftrightarrow 10 \\ x_4 &\leftrightarrow 11 \end{aligned} \quad (1-4)$$

یعنی اگر $X = x_1$ باشد پیغام 00 و در صورتی که $X = x_2$ باشد 01 به B فرستاده می شود و به همین ترتیب الی آخر. یک کد گذاری دیگر به صورت زیر است

$$\begin{aligned} x_1 &\leftrightarrow 0 \\ x_2 &\leftrightarrow 10 \\ x_3 &\leftrightarrow 110 \\ x_4 &\leftrightarrow 111 \end{aligned} \quad (2-4)$$

با وجود این کد گذاری زیر

$$\begin{aligned} x_1 &\leftrightarrow 0 \\ x_2 &\leftrightarrow 1 \\ x_3 &\leftrightarrow 00 \\ x_4 &\leftrightarrow 01 \end{aligned}$$

درست نیست زیرا دنباله های کد گذاری شده مربوط به x_3 و x_4 هر دو تعمیم کد گذاری مربوط به x_1 است. یکی از اهداف درست کردن یک کد این است که میانگین تعداد رقمهای دو دویی (یعنی رقمهای دوتایی) را که لازم است از محل A به محل B فرستاده شوند مینیمم کنیم، برای مثال اگر

$$\begin{aligned} P\{X = x_1\} &= \frac{1}{2} \\ P\{X = x_2\} &= \frac{1}{4} \\ P\{X = x_3\} &= \frac{1}{8} \\ P\{X = x_4\} &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

در این صورت کدی که با معادله (2-4) داده می شود انتظار می رود به $\frac{1}{4}(1) + \frac{1}{4}(2) + \frac{1}{8}(3) + \frac{1}{8}(3) = 1.75$ رقم دو دویی فرستاده شود در صورتی که کدی که با معادله (1-4) داده می شود انتظار می رود به 2 رقم دو دویی فرستاده شود. بنابراین برای مجموعه احتمالهای بالا کد گذاری در معادله (2-4) نسبت به معادله (1-4) کاراتر است.

موضوع بالا سؤال زیر را موجب می شود: برای یک بردار تصادفی معلوم X ماکزیم کارایی که با یک طرح کد گذاری به دست می آید چقدر است؟ جواب این است که برای هر کد گذاری متوسط تعداد رقمهای دو دویی که فرستاده می شود دست کم به بزرگی آنتروپی X

است. برای اثبات این نتیجه که در نظریه اطلاع به قضیه کد گذاری بدون اغتشاش مشهور است، لم ۴-۱ را لازم داریم.

لم ۴-۱

فرض کنید X مقادیر ممکن x_1, \dots, x_n را انتخاب کند. در این صورت برای این که کد گذاری مقادیر X در دنباله های دوتایی (هیچ یک از آنها تعمیم دیگری نیست) به ترتیب با طولهای n_1, \dots, n_n امکان پذیر باشد لازم و کافی است که

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n_i} \leq 1$$

پروهان: برای یک مجموعه ثابت از N عدد صحیح مثبت n_1, \dots, n_N فرض کنید W_i تعداد n_i های مساوی $z = 1, 2, \dots$ را نشان دهد. برای این که یک کد گذاری باشد که n_i رقم دوتایی را به مقدار x_i ، $i = 1, 2, \dots, N$ نسبت دهد لازم است $W_i \leq 2$ باشد. علاوه بر این چون هیچ دنباله دوتایی تعمیم دیگری نیست باید داشته باشیم $W_2 \leq 2^2 - 2W_1$ (زیرا تعداد دنباله های دوتایی به طول دو برابر 2^2 بوده در حالی که $2W_1$ تعداد دنباله هایی است که تعمیمهای W_1 دنباله دوتایی به طول ۱ است). بطور کلی دلیل مشابهی نشان می دهد که باید برای $n = 1, 2, \dots$ داشته باشیم

$$w_n \leq 2^n - w_1 2^{n-1} - w_2 2^{n-2} - \dots - w_{n-1} 2 \quad (3-4)$$

در حقیقت قدری تفکر باید خواننده را قانع کند که این شرایط نه تنها لازمست بلکه برای وجود یک کد گذاری که n_i رقم دوتایی را به x_i ، $i = 1, \dots, N$ نسبت می دهد کافی نیز هست.

اگر نامساوی (۳-۴) را دوباره به صورت

$$w_n + w_{n-1} 2 + w_{n-2} 2^2 + \dots + w_1 2^{n-1} \leq 2^n \quad n = 1, \dots$$

نوشته ویر 2^n بخش کنیم شرطهای لازم و کافی را به صورت زیر حاصل می کند

$$\sum_{j=1}^n w_j \left(\frac{1}{2}\right)^j \leq 1 \quad (4-4)$$

با وجود این چون $\sum_{j=1}^n W_j \left(\frac{1}{2}\right)^j$ نسبت به n صعودی است لذا معادله (۴-۴) فقط و فقط وقتی درست خواهد بود که

$$\sum_{j=1}^{\infty} w_j \left(\frac{1}{2}\right)^j \leq 1$$

حال نتیجه ثابت می شود، زیرا بنا به تعریف چون w_j مقدار n_j های مساوی ز است لذا

$$\sum_{j=1}^{\infty} w_j \left(\frac{1}{2}\right)^j = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_i}$$

اکنون آماده اثبات قضیه ۴-۱ می باشیم.

قضیه ۴-۱ قضیه نگذاری بدون اغتشاش

فرض کنید X مقادیر x_1, \dots, x_N را به ترتیب با احتمالهای $P(x_1), \dots, P(x_N)$ انتخاب نماید. در این صورت برای هر کسگذاری X که n_i دو دویی را به x_i نسبت دهد داریم

$$\sum_{i=1}^N n_i p(x_i) \geq H(X) = - \sum_{i=1}^N p(x_i) \log p(x_i)$$

پرهان: فرض کنید $q_i = \frac{2^{-n_i}}{\sum_{j=1}^N 2^{-n_j}}$ ، $P_i = p(x_i)$ در این صورت

$$- \sum_{i=1}^N P_i \log \left(\frac{P_i}{q_i}\right) = - \log e \sum_{i=1}^N P_i \ln \left(\frac{P_i}{q_i}\right)$$

$$= \log e \sum_{i=1}^N P_i \ln \left(\frac{q_i}{P_i}\right)$$

$$\leq \log e \sum_{i=1}^N P_i \left(\frac{q_i}{P_i} - 1\right)$$

$$= 0 \quad \sum_{i=1}^N P_i = \sum_{i=1}^N q_i = 1$$

بنا به لم ۳-۱

بنابر این

$$\begin{aligned}
 -\sum_{i=1}^N P_i \log P_i &\leq -\sum_{i=1}^N P_i \log q_i \\
 &= \sum_{i=1}^N n_i P_i + \log \left(\sum_{i=1}^N 2^{-n_i} \right) \\
 &\leq \sum_{i=1}^N n_i P_i
 \end{aligned}$$

بنا به لم ۴-۱

مثال ۴ الف. یک متغیر تصادفی X با تابع جرم احتمال زیر را در نظر می‌گیریم

$$p(x_1) = \frac{1}{2} \quad p(x_2) = \frac{1}{4} \quad p(x_3) = p(x_4) = \frac{1}{8}$$

چون

$$\begin{aligned}
 H(X) &= -\left[\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \log \frac{1}{8} \right] \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \\
 &= 1.75
 \end{aligned}$$

از قضیه ۴-۱ نتیجه می‌شود که طرح کدگذاری کاراتری از طرح زیر وجود ندارد

$$\begin{aligned}
 x_1 &\leftrightarrow 0 \\
 x_2 &\leftrightarrow 10 \\
 x_3 &\leftrightarrow 110 \\
 x_4 &\leftrightarrow 111
 \end{aligned}$$

برای اکثر بردارهای تصادفی یک کدگذاری که برای آن متوسط تعداد رقمهای دو دویی کران پایین $H(X)$ را بگیرد وجود ندارد. مع هذا همیشه یک کدگذاری که متوسط تعداد رقمهای دو دویی بین $H(X)$ و $H(X) + 1$ باشد ممکن است. برای اثبات آن n_i را عدد درستی تعریف می‌کنیم که در نا مساوی زیر صدق کند

$$-\log p(x_i) \leq n_i \leq -\log p(x_i) + 1$$

اکنون

$$\sum_{i=1}^N 2^{-n_i} \leq \sum_{i=1}^N 2^{-(\log p(x_i))} = \sum_{i=1}^N p(x_i) = 1$$

و بنا بر این بنا به لم ۴-۱ دنباله‌هایی از رقمهای دو دویی با طولهای n_i را به x_i ، $i = 1, \dots, N$ می‌توان مرتبط ساخت. متوسط طول یک چنین دنباله‌ای

$$L = \sum_{i=1}^N n_i p(x_i)$$

در

$$-\sum_{i=1}^N p(x_i) \log p(x_i) \leq L \leq -\sum_{i=1}^N p(x_i) \log p(x_i) + 1$$

یا

$$H(X) \leq L \leq H(X) + 1$$

صدق می کند.

مثال ۴ ب. فرض کنید سکه ای را که احتمال آمدن شیر برای آن برابر p است بطور مستقل در محل A ده بار پرتاب نموده ایم و می خواهیم نتیجه را به محل B منتقل نماییم. برآمد این آزمایش بردار تصادفی $X = (X_1, \dots, X_{10})$ است که وقتی که برآمد پرتاب i ام شیر باشد یا نباشد - X_i را ۱ یا ۰ در نظر می گیریم. با توجه به نتایج این بخش، L ، یعنی متوسط تعداد رقمهای دو دویی که با هر کد منتقل می شود در

$$H(X) \leq L$$

$$L \leq H(X) + 1$$

برای دست کم با یک کد صدق می کند. اکنون چون X_i ها مستقلند از حکم ۳-۱ و قضیه ۳-۲ نتیجه می شود

$$\begin{aligned} H(X) &= H(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n H(X_i) \\ &= -10[p \log p + (1-p) \log(1-p)] \end{aligned}$$

اگر $p = \frac{1}{2}$ باشد آن گاه $H(X) = 10$ بنابراین نمی توانیم بهتر از این که X را با مقدار واقعی آن کد گذاری کنیم عمل کنیم. یعنی برای مثال اگر نتیجه ۵ پرتاب اول شیر و ۵ پرتاب آخر خط باشد در این صورت پیام ۱۱۱۱۱۰۰۰۰۰ به محل B منتقل می گردد.

با وجود این اگر $p \neq \frac{1}{2}$ باشد با استفاده از طرحهای کدگذاری مختلف اغلب بهتر عمل می کنیم. برای مثال اگر $p = \frac{1}{4}$ آن گاه

$$H(X) = -10\left(\frac{1}{4} \log \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \log \frac{3}{4}\right) = 8.11$$

و بنابراین یک کد گذاری وجود دارد که متوسط طول پیام کد بیشتر از ۹/۱۱ نیست.

در این حالت یک کد گذاری ساده مؤثرتر از کد همانی این است که (X_1, \dots, X_{10}) را به ۵ زوج که هر یک دو متغیر تصادفی دارد تقسیم کنیم و سپس هر زوج را به طریق زیر برای

$i = 1, 3, 5, 7, 9$ به کد در آوریم:

$$\begin{aligned} X_i = 0, X_{i+1} = 0 &\leftrightarrow 0 \\ X_i = 0, X_{i+1} = 1 &\leftrightarrow 10 \\ X_i = 1, X_{i+1} = 0 &\leftrightarrow 110 \\ X_i = 1, X_{i+1} = 1 &\leftrightarrow 111 \end{aligned}$$

بنابراین کل پیام منتقل شده کدهای پیاپی زوجهای بالاست.

برای مثال اگر برآمد T T T H H T T T T H مشاهده شود آن گاه پیام 010110010 فرستاده می شود، متوسط تعداد رقمهای دو دویی لازم برای انتقال پیام با استفاده از این کد عبارت است از

$$S\left[1\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + 3\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + 3\left(\frac{1}{4}\right)^2\right] = \frac{115}{16} = 8.44$$

تا این جا فرض بر این بود که پیامی که از محل A به محل B ارسال می شود بدون خطا باشد. مع هذا همواره خطاهای حتمی هستند که به علت اغتشاشات تصادفی کانال ارتباطات می توانند اتفاق بیفتند. به عنوان مثال این گونه اغتشاشات تصادفی ممکن است موجب شود که پیام 00101101 ارسالی از A، در B به شکل 01101101 دریافت گردد.

فرض کنید رقم دو دویی ارسالی از محل A مستقل از رقمی به رقم دیگر در محل B با احتمال p درست دریافت شود. این سیستم ارتباطات یک کانال متقارن دو تایی نامیده می شود. علاوه بر این فرض کنید که $p = 0.8$ باشد و بخواهیم پیامی متشکل از تعداد زیادی رقم دو دویی را از A به B منتقل نماییم. بنابراین نتیجه انتقال مستقیم پیام، خطایی است با احتمال 0.2 برای هر رقم دو دویی که خیلی زیاد است. یک راه کاهش دادن این احتمال خطای دو دویی این است که هر رقم دو دویی را ۳ مرتبه منتقل نموده و سپس طبق قانون اکثریت کد را برداریم. یعنی از طرح زیر می توانیم استفاده کنیم:

کد گشایی	کد گذاری
000	0 → 000
001	
010	
100	
111	1 → 111
110	
101	
011	

توجه داشته باشید که اگر در انتقال بیش از یک خطا روی ندهد آن گاه کد رقم دو دویی بطور صحیحی برداشته می شود. بنابراین احتمال خطای رقم دو دویی به

$$.104 = (.2)^3 + 3(.2)^2(.8)$$

کاهش پیدا می کند که بطور قابل ملاحظه ای بهتر شده است. در حقیقت واضح است که اگر رقم دو دویی را دفعات زیادی تکرار نموده و سپس با قانون اکثریت کُد را برداریم می توانیم احتمال خطای رقم دو دویی را به اندازه ای که می خواهیم کوچک کنیم. به عنوان مثال طرح زیر احتمال خطای رقم دو دویی را به کمتر از $1/100$ کاهش می دهد.

جدول ۹-۱ تکرار طرح کد گذاری رقمهای دو دویی

احتمال خطا (در هر رقم دودویی)	نرخ (رقمهای دودویی منتقل شده در هر علامت)
.20	1
.10	.33 ($= \frac{1}{3}$)
.01	.06 ($= \frac{1}{16}$)

در حقیقت در این جابرای خواننده مسلم است که کم کردن احتمال خطای رقم دودویی به 0 نتیجه اش کاهش نرخ مؤثر که در آن رقمهای دودویی در هر علامت به 0 منتقل می شوند نیز می باشد. مع هذا این نتیجه برجسته ای در نظریه اطلاع است که به قضیه «کدگذاری با اغتشاش» معروف بوده و به کلودشان نسبت داده می شود. حال این نتیجه را به صورت قضیه ۴-۲ بیان می کنیم.

قضیه ۴-۲ قضیه کُد گذاری با اغتشاش

عددی مانند C وجود دارد که برای هر مقدار R کمتر از C و هر $\epsilon > 0$ یک طرح کُد گذاری - کُدگشایی وجود دارد که با متوسط نرخ R رقم دو دویی برای هر علامت ارسالی با احتمال خطای (برای هر رقم دو دویی) کمتر از ϵ انتقال را انجام می دهد. بزرگترین مقدار C را C' نامیده و آن را ظرفیت کانال می نامند و برای کانال متقارن دودویی داریم

(F) برای تعیین C' از جنبه آنتروپی به مسأله ۱۸ مراجعه کنید.

مسائل و تمرینهای نظری

- ۱- مشتریان یک بانک با نرخ پواسن λ وارد بانک می شوند. فرض کنید در اثنای ساعت اول دو مشتری وارد بانک شوند؛ احتمال این که
 - (الف) هر دو در طول بیست دقیقه اول وارد شوند
 - (ب) دست کم یکی در طول بیست دقیقه اول وارد شود
 چقدر است؟
- ۲- اتومبیلها از نقطه معینی در بزرگراه طبق یک فرآیند پواسن با نرخ $\lambda = 3$ در دقیقه عبور می کنند. اگر شخصی بیابکانه از عرض بزرگراه عبور کند و اگر پیمودن عرض بزرگراه در آن نقطه S ثانیه طول بکشد احتمال این که صدمه نبیند چقدر است؟ (فرض کنید وقتی که یک اتومبیل عبور می کند او در بزرگراه باشد در این صورت صدمه خواهد دید). آن را برای $s = 2, 5, 10, 20$ انجام دهید.
- ۳- در مسأله ۲ فرض کنید که او برای فرار از یک اتومبیل به اندازه کافی چابک است ولی اگر در هنگام اقدام به عبور از عرض جاده با دو اتومبیل یا بیشتر مواجه شود در این صورت صدمه خواهد دید اگر زمان عبور s ثانیه به طول انجامد احتمال این که صدمه نبیند چقدر است؟ آن را برای $s = 5, 10, 20, 30$ انجام دهید.
- ۴- فرض کنید که سه توپ سفید و سه توپ سیاه را در دو ظرف چنان توزیع کرده ایم که هریک شامل ۳ توپ باشد. سیستم را در حالت i گوئیم هرگاه ظرف اول i توپ سفید داشته باشد ($i = 0, 1, 2, 3$). در هر مرحله یک توپ را از هریک از ظرفها استخراج نموده تویی که از ظرف اول خارج می شود در ظرف دوم و تویی که از ظرف دوم خارج می شود در ظرف اول قرار می دهیم. اگر X_n حالت سیستم بعد از n مرحله باشد، احتمالهای انتقال زنجیر مارکوف $\{X_n, n \geq 0\}$ را محاسبه کنید.
- ۵- مثال ۲ الف را در نظر بگیرید. اگر احتمال این که امروز باران بیارد $50 : 50$ باشد این احتمال را که از حالا به بعد سه روز باران بیارد ($\beta = 0.3$ و $\alpha = 0.7$) محاسبه کنید.
- ۶- احتمالهای حدی را برای الگوی مسأله ۴ محاسبه کنید.
- ۷- ماتریس احتمالهای انتقال را تصادفی مضاعف گوئیم هرگاه برای تمام حالات $z = 0, 1, \dots, M$ داشته باشیم

$$\sum_{i=0}^M P_{ij} = 1$$

اگر این زنجیر مارکف ارگودیک باشد نشان دهید

$$\Pi_j = 1/(M+1), j = 0, 1, \dots, M.$$

۸- ریکا در روز معینی خوشحال (c) یا بی تفاوت (s) یا افسرده (g) است. اگر امروز خوشحال باشد آن گاه فردا به ترتیب با احتمالهای ۰٫۷، ۰٫۲ و ۰٫۱ خوشحال، بی تفاوت (s) یا افسرده (g) خواهد بود. اگر امروز بی تفاوت باشد آن گاه فردا به ترتیب با احتمالهای ۰٫۳، ۰٫۳ و ۰٫۴ خوشحال، بی تفاوت یا افسرده است. اگر امروز افسرده باشد آن گاه فردا به ترتیب با احتمالهای ۰٫۲، ۰٫۴ و ۰٫۴ خوشحال، بی تفاوت یا افسرده خواهد بود. چه سهمی از دفعات ریکا خوشحال است؟

۹- فرض کنید باریدن یا نیاریدن باران در فردا تنها به شرایط هوا در دو روز گذشته بستگی داشته باشد. بویژه فرض کنید که اگر دیروز و امروز باران آمده در این صورت فردا با احتمال ۰٫۸ باران خواهد آمد و اگر دیروز باران باریده باشد ولی امروز نیاریده باشد در این صورت فردا با احتمال ۰٫۳ باران خواهد آمد و اگر امروز باران بیارد ولی دیروز نیاریده باشد آن گاه فردا با احتمال ۰٫۴ خواهد بارید و اگر دیروز یا امروز باران نیاریده باشد در این صورت فردا با احتمال ۰٫۲ خواهد بارید. چه نسبتی از روزها باران می آید؟

۱۰- فردی هر روز صبح منزل را به قصد دویدن ترك می کند. هنگامی که او برای دویدن منزلش را ترك می کند با احتمال مساوی از در جلو یا در عقب خارج می شود و بطور مشابه هنگام برگشت به منزل با احتمال یکسان از در جلو یا عقب وارد می شود. دونه ۵ جفت کفش مخصوص دویدن دارد که پس از دویدن از دری که بطور اتفاقی وارد شده است از پا در می آورد. اگر جلو دری که او برای دویدن ترك می کند کفشی نباشد با پای برهنه می دود. می خواهیم نسبت دفعاتی را که با برهنه می دود تعیین کنیم.

(الف) این را به صورت یک زنجیر مارکف منظم کنید. حالات و احتمالهای انتقال را بدهید.
(ب) نسبت روزهایی را که او با پای برهنه می دود تعیین کنید.

۱۱- با استفاده از اطلاعات مثال ۲ ج مسئله را حل کنید.

(الف) ثابت کنید که مقدار پیشنهادی Π_1 در معادلاتی که لازم است صدق می کند.

(ب) برای یک مولکول معلوم در مورد احتمال (حدی) که مولکول در ظرف ۱ باشد چه

فکر می کنید؟

- (پ) آیا فکر می کنید پشامدهایی که برای آنها مولکول z ($z \geq 1$) در یک زمان بسیار زیاد در ظرف ۱ است (در حد) مستقلند؟
- (ت) بیان کنید که چرا احتمالهای حدی همان احتمالهای داده شده اند.

۱۲- در پرتاب دو تاس آنتروپی مجموع دو تاس را تعیین کنید.

- ۱۳- اگر X هریک از n مقدار ممکن را با احتمالهای p_1, \dots, p_n انتخاب کند ثابت کنید ماکزیمم $H(X)$ وقتی حاصل می شود که $p_i = \frac{1}{n}$ ، $i = 1, \dots, n$. در این حالت $H(x)$ برابر چه مقداری است؟

۱۴- یک جفت تاس متعادل پرتاب می شود؛ فرض کنید

$$X = \begin{cases} 1 & \text{مجموع تاسها برابر ۶ باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و Y مساوی مقدار تاس اول باشد:

(الف) $H(Y)$ (ب) $H_p(X)$ و (پ) $H(X, Y)$ را محاسبه کنید.

- ۱۵- سکه ای را که احتمال آمدن شیر آن $p = \frac{2}{3}$ است ۶ دفعه پرتاب می کنیم. آنتروپی برآمد این آزمایش را محاسبه کنید.

- ۱۶- یک متغیر تصادفی هریک از n مقدار ممکن x_1, \dots, x_n را به ترتیب با احتمالهای $p(x_i)$ ، $i = 1, \dots, n$ انتخاب می کند. می خواهیم مقدار X را با پرسیدن مجموعه سؤالاتی که پاسخ آنها «بلی» یا «خیر» است تعیین کنیم. برای مثال ممکن است سؤال کنیم که آیا $X = x_1$ است؟ یا آیا « X مساوی x_1 یا x_2 یا x_3 است؟ و به همین ترتیب الی آخر. در مورد متوسط تعداد این سؤاها که برای تعیین مقدار X سؤال کردن آن لازم است، چه می توان گفت؟

۱۷- برای هر متغیر تصادفی گسسته X و تابع f نشان دهید که

$$H(f(X)) \leq H(X)$$

- ۱۸- در انتقال یک رقم دو دویی از محل A به محل B اگر مقدار رقم دو دویی را که از محل A فرستاده می شود به X و مقدار دریافت شده در محل B باشد آن گاه $H(X) - H_p(X)$ نرخ انتقال اطلاعات از A به B نامیده می شود. نرخ پیشینه انتقال به عنوان تابعی از $P\{X=1\}$ $P\{X=0\} = 1 - P\{X=1\}$ را ظرفیت کانال می نامند. نشان دهید که برای یک کانال متقارن دوتایی با $P\{Y=1|X=1\} = P\{Y=0|X=0\}$ ، ظرفیت کانال بانرخ انتقال اطلاع وقتی $p\{X=1\} = \frac{1}{2}$ ، به دست می آید و برابر مقدار آن $1 - p \log p + (1-p) \log (1-p)$ است.

شبهه سازی

۱ - مقدمه

چگونه می توان احتمال برنده شدن در یک بازی یک نفره را تعیین نمود؟ (منظور ما از یک نفره، هر بازی یک نفره استاندارد است که با یک دست ورق ۵۲ تایی معمولی و با شیوه ثابتی بازی می شود). یک روش ممکن این است که با فرضی معقول که تمام! (۵۲) ترتیب ممکن یک دست ورق با احتمال یکسانی اتفاق می افتند شروع کنیم و سپس تعیین کنیم که چند تا از اینها منتهی به پیروزی می شود. متأسفانه روشی منظم برای تعیین تعداد ترتیبهایی که منجر به پیروزی می شود به نظر نمی رسد و چون! (۵۲) عدد نسبتاً بزرگی است و تنها راه تعیین این که آیا ترتیب خاصی منجر به پیروزی می شود یا خیر، خسته کننده به نظر می رسد می توان دید که این روش کار نمی کند.

در حقیقت تعیین احتمال پیروزی برای یک بازی تکی از نظر ریاضی به نظر می رسد نشدنی باشد. مع هذا تمام آن را از دست نمی دهیم زیرا احتمال، نه تنها در قلمرو ریاضی بلکه در قلمرو علوم کاربردی نیز قرار می گیرد و مانند تمام علوم کاربردی آزمایش در آن تکنیک بالارزشی است. درمقال یک نفره، آزمایش به صورت انجام تعداد زیادی از این بازیها درمی آید که خوشبختانه با یک برنامه کامپیوتری می توان آن را انجام داد. بعد از n مرتبه بازی کردن اگر فرض کنیم

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{نتیجه بازی نام پیروزی باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

آن گاه X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی برنولی مستقل خواهند بود که برای آن

$$E[X_i] = P\{\text{پیروزی دو بازی نکی}\}$$

بنابراین بنا به قانون قوی اعداد بزرگ می دانیم که

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{\text{تعداد بازیهای برنده شده}}{\text{تعداد بازیهای بازی شده}}$$

با احتمال ۱ به {پیروزی در بازی یک نفره} P همگرا خواهد بود. یعنی اگر تعداد زیادی از بازیها را انجام دهیم از نسبت بازیهای برنده شده به عنوان برآورد احتمال پیروزی می توان استفاده کرد. این روش که در آن احتمالها را بطور تجربی با کمک آزمایش تعیین می کنند شبیه سازی نام دارد. اگر بخواهیم برای مطالعه شبیه سازی از کامپیوتر استفاده کنیم باید بتوانیم مقدار یک متغیر تصادفی یکنواخت $(0, 1)$ که این متغیرها را اعداد تصادفی می نامند تولید کنیم. برای تولید این اعداد بیشتر کامپیوترها دماتور العمل فرعی آماده دارند که مولد اعداد تصادفی نامیده می شود و خروجی آن دنباله ای از اعداد شبه تصادفی است. برای تمام اهداف عملی این دنباله از اعداد غیر قابل تشخیص از یک نمونه از توزیع یکنواخت $(0, 1)$ است.

بیشتر مولدهای اعداد تصادفی با یک مقدار اولیه X_0 که هسته نامیده می شود شروع شده و سپس بطور برگشتی با مشخص کردن اعداد صحیح مثبت a, c, m و فرض

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \text{ به پیمانه } m \quad n \geq 0$$

مقادیر محاسبه می شوند که معنی تساوی بالا این است که $aX_n + c$ را بر m بخش کنیم و باقیمانده را به عنوان مقدار X_{n+1} در نظر بگیریم. بنابراین هر $X_0, 0, 1, \dots, m-1$ خواهد بود و کمیت $\frac{X_n}{m}$ به عنوان تقریبی از متغیر تصادفی یکنواخت $(0, 1)$ در نظر گرفته می شود. می توان نشان داد که با توجه به انتخابهای مناسب a, c, m نتیجه آنچه گذشت دنباله ای از اعداد است که چنین می نماید که از متغیرهای تصادفی یکنواخت مستقل $(0, 1)$ تولید شده اند.

به عنوان نقطه شروع در شبیه سازی فرض بر این است که می توانیم از توزیع یکنواخت $(0, 1)$ شبیه سازی کنیم و اصطلاح «اعداد تصادفی» را به عنوان متغیرهای تصادفی مستقل از این توزیع به کار می بریم.

در مثال بازی تکی به یک برنامه کامپیوتری نیاز داریم که بازی را با یک ترتیب معلوم ورقها شروع کند. با وجود این چون فرض برای این است که ترتیب اولیه با (۵۲) تبدیل ممکن هم احتمال باشد لذا باید بتوانیم یک تبدیل تصادفی را تولید نماییم. اگر فقط از اعداد تصادفی استفاده کنیم الگوریتم زیر چگونگی انجام آن را نشان می دهد. الگوریتم این طور شروع می شود که یکی از عناصر را بتصادف انتخاب نموده و آن را در وضعیت n قرار می دهد و سپس عنصری از میان عناصر باقیمانده بطور تصادفی انتخاب کرده و آن را در وضعیت $n-1$ قرار می دهد و به همین ترتیب الی آخر. الگوریتم بطور مؤثری تصادفی از میان عناصر باقیمانده انجام می دهد بدین ترتیب که این عناصر را در یک فهرست مرتب نموده و سپس یک موقعیت را از این فهرست بتصادف انتخاب می کند).

مثال ۱ الف. تولید یک تبدیل تصادفی - فرض کنید می خواهیم تبدیلی از اعداد صحیح $۱, ۲, \dots, n$ را تولید کنیم بطوری که n ترتیب ممکن آنها هم احتمال باشند. اگر با یک تبدیل اولیه شروع کنیم آن را بعد از $n-1$ مرحله که در هر مرحله موقعیتهای دو عدد از اعداد تبدیل را عوض می کنیم کامل می نماییم. پس از آن با این فرض که $X(i) = 1, \dots, n$ عددی فعلی در موقعیت i را نشان می دهد از تبدیل استفاده می کنیم. الگوریتم به صورت زیر عمل می کند:

۱- هر تبدیل دلخواه را در نظر گرفته و فرض می کنیم $X(i)$ عنصر در موقعیت i ، $i = 1, \dots, n$ است. (برای مثال می توانیم $X(i) = i$ ، $i = 1, \dots, n$ را در نظر بگیریم).

۲- یک متغیر تصادفی N_n که هر یک از مقادیر $1, 2, \dots, n$ را با احتمال مساوی انتخاب می کند تولید می کنیم.

۳- مقادیر $X(N_n)$ و $X(n)$ را تعویض می کنیم. حال مقدار $X(n)$ ثابت باقی می ماند. [برای مثال فرض کنید $n=4$ و $X(i) = i$ ، $i = 1, 2, 3, 4$ را برای شروع در نظر بگیرید. اگر $N_n = 3$ آن گاه تبدیل جدید $X(1) = 1$ ، $X(2) = 2$ ، $X(3) = 4$ ، $X(4) = 3$ است و عنصر ۳ همواره در موقعیت ۴ باقی می ماند].

۴- متغیر تصادفی N_{n-1} که با احتمال مساوی اعداد $1, 2, \dots, (n-1)$ را می گیرد تولید می کنیم.

۵- مقادیر $X(N_{n-1})$ و $X(n-1)$ را تعویض می کنیم. [اگر $N_n = 1$ باشد آن گاه تبدیل جدید $X(1) = 4$ ، $X(2) = 2$ ، $X(3) = 1$ ، $X(4) = 3$ خواهد بود].

۶- N_{n-2} که با احتمال مساوی هریک از اعداد $1, 2, \dots, n-2$ را می‌گیرد تولید می‌کنیم.

۷- مقادیر $X(N_{n-2})$ و $X(2)$ را تعویض می‌کنیم. [اگر $N_2 = 1$ باشد آن‌گاه تبدیل جدید $2 = X(1), 4 = X(2), 1 = X(3), 3 = X(4)$ بوده و این آخرین تبدیل است].

۸- N_{n-3} و غیره را تولید می‌کنیم. الگوریتم تا تولید N_2 ادامه پیدا می‌کند و بعد از تعویض بعدی تبدیل نتیجه شده آخرین تبدیل است.

برای بهتر کردن این الگوریتم تولید یک متغیر تصادفی که با احتمال مساوی هریک از مقادیر $1, 2, \dots, k$ را انتخاب کند الزامی است. برای انجام آن فرض کنید U عددی تصادفی را نشان می‌دهد یعنی U در $(0, 1)$ دارای توزیع یکنواخت باشد و توجه داشته باشیم که kU نیز در $(0, k)$ یکنواخت است.

بنابراین

$$P\{i-1 < kU < i\} = \frac{1}{k} \quad i = 1, \dots, k$$

پس با فرض $N_k = [kU] + 1$ که $[x]$ قسمت صحیح x است (یعنی بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x) آن‌گاه N_k توزیع مطلوب را خواهد داشت.

حال الگوریتم را باختصار به صورت زیر می‌نویسیم:

مرحله ۱: فرض کنید $X(1), \dots, X(n)$ یک تبدیل $1, 2, \dots, n$ باشد (برای مثال، می‌توان قرار داد $X(i) = i, (i = 1, \dots, n)$).

مرحله ۲: فرض کنید $I = n$

مرحله ۳: یک عدد تصادفی U را تولید و قرار دهید $N = [IU] + 1$

مرحله ۴: مقادیر $X(N)$ و $X(I)$ را تعویض کنید.

مرحله ۵: مقدار I را به اندازه یک واحد کاهش داده و اگر $I > 1$ به مرحله ۳ بروید.

مرحله ۶: $X(1), \dots, X(n)$ تبدیل مورد نظری است که به تصادف تولید شده است.

الگوریتم بالا برای تولید یک تبدیل تصادفی بی‌نهایت مفید است. برای مثال فرض کنید که یک آمار دان در حال تهیه آزمایشی است که اثرات m تیمار متفاوت را روی مجموعه‌ای از n موضوع با هم مقایسه کند. او تصمیم می‌گیرد موضوعات را به m گروه متفاوت به ترتیب با حجم‌های n_1, n_2, \dots, n_m که $\sum_{i=1}^m n_i = n$ و اعضای گروه i ام تیمار i را دریافت می‌کنند

تقسیم کند. برای حذف اربیبی در تخصیص موضوعات به تیمارها (برای مثال اگر تمام «بهترین» موضوعات را در یک گروه قرار دهیم مفهوم نتایج آزمایش رضایت بخش نخواهد بود) اختصاص یک موضوع به یک گروه معلوم باید «بتصادف» انجام شود، این کار را باید چگونه انجام داد^۱؟

یک روش ساده و مؤثر این است که موضوعات را بدلیخواه از ۱ تا n شماره گذاری کرده و سپس یک تبدیل تصادفی $X(1), \dots, X(n)$ را از ۱، ۲، ...، n تولید کنیم. حال موضوعات $X(1), \dots, X(n_1)$ را به گروه ۱، $X(n_1 + 1), \dots, X(n_1 + n_2)$ را به گروه ۲ اختصاص داده و بطور کلی گروه j شامل موضوعات به شماره های $X(n_1 + n_2 + \dots + n_{j-1} + k)$ ، $k = 1, \dots, n_j$ است.

۲- تکنیکهای کلی برای شبیه سازی متغیرهای تصادفی پیوسته

در این بخش برای به کاربردن اعداد تصادفی در شبیه سازی متغیرهای تصادفی پیوسته دوروش کلی را ارائه می نمائیم.

۱-۲ روش تبدیل معکوس

یک روش کلی برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی که توزیعی پیوسته دارد روش تبدیل معکوس نام دارد و بر اساس حکم زیر بنا شده است.

حکم ۱-۲

فرض کنید متغیر تصادفی U در (0, 1) یکنواخت است. برای هر تابع توزیع پیوسته F اگر متغیر تصادفی Y را با

$$Y = F^{-1}(U)$$

تعریف کنیم آن گاه متغیر تصادفی Y دارای تابع توزیع F است. $[F^{-1}(x)]$ را مساوی مقدار y که $F(y) = x$ است تعریف می کنیم].

۱- به ازای $m=2$ تکنیک دیگر تصادفی تقسیم نمودن موضوعات در مثال ۲ ج فصل ۶ ارائه شده است. روش قبلی سریعتر است لیکن نسبت به روش مثال ۲ ج فضای بیشتری لازم دارد.

برهان

$$\begin{aligned} F_Y(a) &= P\{Y \leq a\} \\ &= P\{F^{-1}(U) \leq a\} \end{aligned} \quad (1-2)$$

اکنون چون $F(x)$ تابعی یکنواست لذا $F^{-1}(U) < a$ اگر و تنها اگر $U \leq F(a)$. بنابراین از معادله (۱-۲) داریم

$$\begin{aligned} F_Y(a) &= P\{U \leq F(a)\} \\ &= F(a) \end{aligned}$$

از حکم ۱-۲ نتیجه می شود که با تولید یک عدد تصادفی U و سپس قراردادن $X = F^{-1}(U)$ یک متغیر تصادفی X را که دارای تابع توزیع پیوسته F است می توان شبیه سازی نمود.

مثال ۴ الف. شبیه سازی يك متغیر تصادفی نمایی: اگر $F(x) = 1 - e^{-x}$ آن گاه $F^{-1}(u)$ مقدار x است که در معادله زیر صدق می کند

$$1 - e^{-x} = u$$

یا

$$x = -\log(1 - u)$$

بنابر این اگر U یک متغیر یکنواخت $(0, 1)$ باشد آن گاه

$$F^{-1}(U) = -\log(1 - U)$$

دارای توزیع نمایی با میانگین ۱ است. چون توزیع $1 - U$ نیز در $(0, 1)$ یکنواخت است لذا $-\log U$ نمایی با میانگین ۱ خواهد بود. چون وقتی X نمایی با میانگین ۱ باشد cX نمایی با میانگین c است لذا U $c \log U$ نمایی با میانگین c خواهد بود.

از نتایج مثال ۲ الف نیز برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی گاما می توان استفاده کرد.

مثال ۴ ب. شبیه سازی يك متغیر تصادفی گاما با پارامترهای (n, λ)

برای شبیه سازی از یک توزیع گاما با پارامترهای (n, λ) وقتی n عددی صحیح است از این واقعیت استفاده می کنیم که مجموع n متغیر تصادفی نمایی مستقل هریک با نرخ λ دارای

همین توزیع است. بنابراین اگر U_1, \dots, U_n متغیرهای تصادفی یکنواخت مستقل $(0, 1)$ باشند آن گاه

$$X = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda} \log U_i = -\frac{1}{\lambda} \log \left(\prod_{i=1}^n U_i \right)$$

دارای توزیع مطلوب است.

۲-۲ روش عدم پذیرش

فرض کنید روشی برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی که تابع چگالی آن $g(x)$ است داریم. از این فرض به عنوان پایه ای برای شبیه سازی از توزیع پیوسته ای با چگالی $f(x)$ ، با شبیه سازی Y از g و سپس پذیرش این مقدار شبیه سازی شده با احتمالی متناسب با $f(Y)/g(Y)$ می توان بهره گرفت.

بوئژه فرض کنید c ثابتی است که

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq c \quad \text{برای هر } y$$

لذا به روش زیر برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی که دارای چگالی f است نیاز داریم.

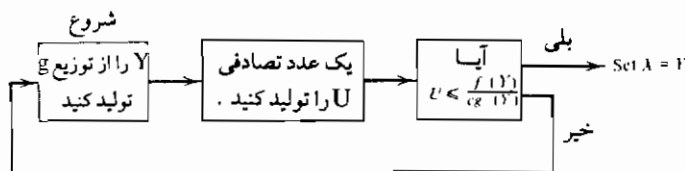
روش عدم پذیرش

مرحله ۱: Y را با چگالی g و یک عدد تصادفی U را شبیه سازی کنید.

مرحله ۲: اگر $U \leq f(Y)/cg(Y)$ قرار دهید $X = Y$ ، در غیر این صورت به مرحله

۱ برگردید. روش عدم پذیرش بطور تصویری در شکل ۱۰-۱ بیان شده است.

قرار دهید.



شکل ۱۰-۱ روش عدم پذیرش برای یک متغیر تصادفی X که تابع چگالی آن f است

حال عملکرد روش عدم پذیرش را ثابت می کنیم.

حکم ۲-۲

متغیر تصادفی X که با روش عدم پذیرش تولید می شود دارای تابع چگالی f است.

پروهان: فرض کنید X مقدار به دست آمده و N تعداد تکرارهای لازم باشد. پس

$$\begin{aligned} P\{X \leq x\} &= P\{Y_N \leq x\} \\ &= P\left\{Y \leq x \mid U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right\} \\ &= \frac{P\left\{Y \leq x, U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right\}}{K} \end{aligned}$$

که در آن $k = P\left\{U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right\}$. اکنون بنا به استقلال، تابع چگالی توأم Y و U عبارت است از

$$f(y, u) = g(y) \quad 0 < u < 1$$

و بنابراین با استفاده از آنچه گذشت داریم

$$\begin{aligned} P\{X \leq x\} &= \frac{1}{K} \int_0^x \int_{0 \leq u \leq f(y)/cg(y)} g(y) du dy \\ &= \frac{1}{K} \int_0^x \int_0^{f(y)/cg(y)} du g(y) dy \\ &= \frac{1}{cK} \int_0^x f(y) dy \end{aligned} \quad (2-2)$$

با توجه به این که f یک چگالی است و وقتی $x \rightarrow \infty$ داریم

$$1 = \frac{1}{cK} \int_0^{\infty} f(y) dy = \frac{1}{cK}$$

بنابر این از معادله (۲-۲) به دست می آوریم

$$P\{X \leq x\} = \int_0^x f(y) dy$$

که اثبات را کامل می کند .

تذکره : (الف) باید توجه کنیم که با تولید یک عدد تصادفی U و سپس پذیرش Y هرگاه $U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}$ ، مقدار Y را با احتمال $\frac{f(Y)}{cg(Y)}$ می پذیریم .

(ب) چون نتیجه هر تکرار مستقلاً و با احتمال $k = \frac{1}{c}$ $P\left\{U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right\}$ یک مقدار پذیرش شده است لذا تعداد تکرارها دارای توزیع هندسی با میانگین c است .

مثال ۲ ب شبیه سازی یک متغیر تصادفی نرمال : برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z (یعنی متغیری با میانگین 0 و واریانس 1) ابتدا توجه می کنیم که قدر مطلق Z دارای تابع چگالی احتمال زیر است

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad 0 < x < \infty \quad (3-2)$$

با استفاده از روش عدم پذیرش و این که g تابع چگالی نمایی با میانگین یک است شبیه سازی را از تابع چگالی پیش شروع می کنیم ، یعنی

$$g(x) = e^{-x} \quad 0 < x < \infty$$

اکنون توجه می کنیم که

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \sqrt{2/\pi} \exp\left\{\frac{-(x^2 - 2x)}{2}\right\} \\ &= \sqrt{2/\pi} \exp\left\{\frac{-(x^2 - 2x + 1)}{2} + \frac{1}{2}\right\} \\ &= \sqrt{2e/\pi} \exp\left\{\frac{-(x - 1)^2}{2}\right\} \\ &\leq \sqrt{2e/\pi} \end{aligned} \quad (4-2)$$

بنابراین می توانیم $C = \sqrt{2e/\pi}$ فرض کنیم و لذا از معادله (۴-۲) داریم

$$\frac{f(x)}{cg(x)} = \exp\left\{\frac{-(x - 1)^2}{2}\right\}$$

پس با استفاده از روش عدم پذیرش می توانیم مقدار مطلق یک متغیر تصادفی نرمال واحد را به شرح زیر شبیه سازی کنیم .

(الف) متغیرهای تصادفی مستقل Y و U را که Y نمایی با نرخ ۱ و U در (۱ و ۰) یکنواخت است تولید می‌کنیم.

(ب) اگر $U \leq \exp\left\{-\frac{(Y-1)^2}{2}\right\}$ باشد $X = Y$ قرار دهید و در غیر این صورت به (الف) برگردید. وقتی یک متغیر تصادفی X با تابع چگالی مانند معادله ۲-۳ شبیه سازی کردیم آن گاه یک متغیر تصادفی نرمال واحد Z که با احتمال مساوی X یا $-X$ است می‌توان تولید نمود.

در مرحله (ب) وقتی مقدار Y را می‌پذیریم که $U \leq \exp\left\{-\frac{(Y-1)^2}{2}\right\}$ یا معادل با آن $-\log U \geq \frac{(Y-1)^2}{2}$ با وجود این در مثال ۲ الف نشان دادیم که $-\log U$ - نمایی با نرخ ۱ و لذا مراحل (الف) و (ب) معادلند با

(الف) نمایه‌های Y_1 و Y_2 را با نرخ ۱ تولید کنید.

(ب) اگر $Y_2 \geq (Y_1 - 1)^2 / 2$ آن گاه قرار دهید $X = Y_1$ ، در غیر این صورت به (الف) باز گردید. حال فرض کنید نتیجه بالا Y_1 بوده و مورد پذیرش باشد، لذا می‌دانیم که Y_2 بزرگتر از $(Y_1 - 1)^2 / 2$ است. به چه میزان یکی بیشتر از دیگری است؟ برای جواب دادن به این سؤال خاطر نشان می‌کنیم که Y_2 نمایی با نرخ ۱ است و بنابراین اگر بدانیم از مقدار معینی بیشتر است، آن مقدار که Y_2 بیشتر از $\frac{(Y_1 - 1)^2}{2}$ است [یعنی «طول عمر اضافی» بیشتر از

زمان $\frac{(Y_1 - 1)^2}{2}$] بنا به خاصیت بی حافظه بودن دارای توزیع نمایی با نرخ ۱ است. یعنی وقتی مرحله (ب) را پذیرفتیم نه فقط X (مقدار مطلق یک نرمال واحد) بلکه با محاسبه $Y_2 - (Y_1 - 1)^2 / 2$ یک متغیر تصادفی نمایی (مستقل از X) با نرخ ۱ را نیز می‌توان تولید نمود.

بنابراین بطور خلاصه الگوریتم زیر را داریم که یک نمایی با نرخ ۱ و یک متغیر تصادفی مستقل نرمال واحد را تولید می‌کند.

مرحله ۱: را Y_1 که یک متغیر تصادفی نمایی با نرخ ۱ است تولید کنید.

مرحله ۲: Y_2 را که یک متغیر تصادفی نمایی با نرخ ۱ است تولید کنید.

مرحله ۳: اگر $Y_2 - (Y_1 - 1)^2 / 2 > 0$ است قرار دهید $Y_2 - (Y_1 - 1)^2 / 2$ و به مرحله ۴

بروید، در غیر این صورت به مرحله ۱ بروید.

مرحله ۴: یک متغیر تصادفی U را تولید نموده و قرار دهید

$$Z = \begin{cases} Y_1 & U \leq 1/2 \\ -Y_1 & U > 1/2 \end{cases}$$

متغیرهای تصادفی Z و Y که در بالا تولید شدند مستقلند و Z دارای توزیع نرمال با میانگین 0 و واریانس 1 و Y دارای توزیع نمایی با شاخص 1 است. (اگر بخواهیم متغیر تصادفی نرمال دارای میانگین μ و واریانس σ^2 باشد فرض کنید $\mu + \sigma Z$).

چند تبصره: (الف) چون $c = \sqrt{2e/\pi} = 1/32$ است لذا تعداد تکرارهای مرحله 2 دارای توزیع هندسی با میانگین $1/32$ است.

(ب) اگر بخواهیم دنباله ای از متغیرهای تصادفی نرمال واحد را تولید کنیم، آن گاه از متغیر تصادفی نمایی Y که در مرحله 3 به دست آمد به عنوان نمایی اولیه مورد نیاز در مرحله 1 برای تولید نرمال بعد می توان استفاده نمود. بنابراین بطور متوسط با تولید $(1 - 1/32) = 2 \times 1/64 = 1/32$ نمایی و محاسبه $1/32$ توان دو می توانیم یک نرمال واحد را شبیه سازی کنیم.

مثال 2 روش قطبی شبیه سازی متغیرهای تصادفی نرمال: در مثال 7 ب فصل 6 ثابت کردیم که اگر X و Y متغیرهای تصادفی نرمال واحد مستقل باشند آن گاه مختصات قطبی آنها $\theta = \text{tg}^{-1}(Y/X)$ ، $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ و R^2 دارای توزیع نمایی با میانگین 2 و θ دارای توزیع یکنواخت در $(0, 2\pi)$ است. بنابراین اگر U_1 و U_2 اعداد تصادفی باشند آن گاه (با به کار بردن نتیجه مثال 2 الف) قرار می دهیم

$$R = (-2 \log U_1)^{1/2}$$

$$\ominus = 2\pi U_2$$

که نتیجه می شود

$$X = R \cos \ominus = (-2 \log U_1)^{1/2} \cos(2\pi U_2)$$

$$Y = R \sin \ominus = (-2 \log U_1)^{1/2} \sin(2\pi U_2) \quad (5-2)$$

متغیرهای تصادفی نرمال واحد مستقلند.

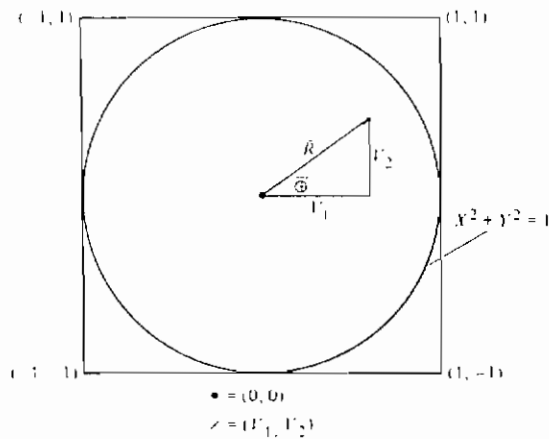
روش بالا برای تولید متغیرهای تصادفی نرمال واحد را روش باکس-مولر می نامند. لزوم محاسبه مقادیر کسینوس و سینوس بالا کارایی روش را کم می کند. مع هذا برای گریز از این شکل اتلاف وقت راهی وجود دارد. برای شروع توجه می کنیم که اگر U در $(0, 1)$

یکنواخت باشد آن گاه $2U$ در $(0, 2)$ یکنواخت بوده و بنابر این $2U - 1$ در $(-1, 1)$ یکنواخت است. پس اگر اعداد تصادفی U_1 و U_2 را تولید نموده و قرار دهیم

$$V_1 = 2U_1 - 1$$

$$V_2 = 2U_2 - 1$$

آن گاه (V_1, V_2) در مربعی که مساحت آن ۴ و مرکز آن $(0, 0)$ است دارای توزیع یکنواخت است (شکل ۱۰-۲ را ملاحظه کنید).



شکل ۱۰-۲

اکنون فرض کنید تولید جفتهای (V_1, V_2) را متوالیاً تا حصول جفتی که در دایره‌ای به شعاع ۱ و مرکز $(0, 0)$ قرار دارد ادامه دهیم، یعنی (V_1, V_2) را به دست آوریم که $V_1^2 + V_2^2 \leq 1$ حال نتیجه می‌شود که توزیع این جفت (V_1, V_2) در دایره یکنواخت است. اگر مختصات قطبی این جفت را به \bar{R} و \oplus نشان دهیم آن گاه اثبات مستقل بودن \bar{R} و \oplus آسان بوده و توزیع R^2 و \oplus به ترتیب در $(0, 1)$ و $(0, 2\pi)$ یکنواخت است. (مسأله ۱۳ را ملاحظه کنید)

چون

$$\sin \oplus = V_2 / \bar{R} = - \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$$

$$\cos \oplus = V_1 / \bar{R} = \frac{V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$$

از معادله (۲ - ۵) نتیجه می شود که با تولید عدد تصادفی دیگر U و قرار دادن

$$X = (-2 \log U)^{1/2} V_1 / \bar{R}$$

$$Y = (-2 \log U)^{1/2} V_2 / \bar{R}$$

می توانیم نرمالهای واحد مستقل X و Y را تولید کنیم. در حقیقت چون (با فرض $1 \leq V_1^2 + V_2^2 \leq \bar{R}^2$ در $(0, 1)$ یکنواخت و مستقل از \oplus است لذا به جای تولید عدد تصادفی جدید U از آن می توان استفاده نمود بنابراین نشان می دهیم

$$X = (-2 \log \bar{R}^2)^{1/2} V_1 / \bar{R} = \sqrt{\frac{-2 \log S}{S}} V_1$$

$$Y = (-2 \log \bar{R}^2)^{1/2} V_2 / \bar{R} = \sqrt{\frac{-2 \log S}{S}} V_2$$

نرمالهای واحد مستقلند هرگاه

$$S = \bar{R}^2 = V_1^2 + V_2^2$$

بنابراین بطور خلاصه برای تولید یک جفت نرمال واحد مستقل روش زیر را داریم:

مرحله ۱: اعداد تصادفی U_1 و U_2 را تولید می کنیم.

مرحله ۲: قرار می دهیم $V_1 = 2U_1 - 1$ ، $V_2 = 2U_2 - 1$ ، $S = V_1^2 + V_2^2$

مرحله ۳: اگر $S > 1$ به مرحله ۱ می گردیم

مرحله ۴: به نرمالهای واحد مستقل

$$X = \sqrt{\frac{-2 \log S}{S}} V_1, Y = \sqrt{\frac{-2 \log S}{S}} V_2$$

بر می گردیم.

روش بالا روش قطبی نامیده می شود. چون احتمال این که یک نقطه از مربع در داخل دایره قرار گیرد $\frac{\pi}{4}$ است (مساحت دایره تقسیم بر مساحت مربع) لذا روش قطبی بطور متوسط نیاز به $\frac{4}{\pi} = 1.273$ تکرار مرحله ۱ دارد. بنابراین برای تولید دو نرمال واحد مستقل بطور متوسط 2.546 عدد تصادفی، ۱ الگاریتم، ۱ ریشه دوم، ۱ تقسیم و 4.546 ضرب لازم دارد.

مثال ۲ شبیه سازی یک متغیر تصادفی کی دو. توزیع $\chi_n^2 = Z_1^2 + \dots + Z_n^2$ که Z_i ، $i = 1, \dots, n$

n نرمالهای واحد مستقلند توزیع کی دو با n درجه آزادی است. در بخش ۳ فصل ۶ نشان داده شد که $Z_1^2 + Z_2^2$ دارای توزیع نمایی با نرخ $\frac{1}{2}$ است. بنابراین وقتی n زوج است ($n = 2k$)، χ_{2k}^2 دارای توزیع گاما با پارامترهای $(k, \frac{1}{2})$ می باشد. در نتیجه توزیع $-2 \log \left(\prod_{i=1}^k U_i \right)$ کی دو با $2k$ درجه آزادی خواهد بود. ابتدا با شبیه سازی متغیر تصادفی نرمال واحد Z و سپس افزودن Z^2 به قبلی می توانیم یک متغیر تصادفی کی دو با $2k + 1$ درجه آزادی شبیه سازی کنیم؛ یعنی

$$\chi_{2k+1}^2 = Z^2 - 2 \log \left(\prod_{i=1}^k U_i \right)$$

که Z, U_1, \dots, U_n مستقل بوده و Z متغیر تصادفی نرمال واحد و بقیه متغیرهای تصادفی یکنواخت در $(0, 1)$ می باشند.

۳- شبیه سازی توزیعهای گسسته

تمام روشهای عمومی برای شبیه سازی متغیرهای تصادفی از توزیعهای پیوسته در حالت گسسته نیز مشابه دارند. برای مثال اگر بخواهیم یک متغیر تصادفی Z که دارای تابع چگالی احتمال

$$P\{X = x_j\} = P_j, \quad j = 0, 1, \dots, \quad \sum_j P_j = 1$$

می باشد شبیه سازی کنیم از مشابه روش تبدیل معکوس برای حالت گسسته می توان استفاده نمود. برای شبیه سازی X که $P\{X = x_j\} = P_j$ است فرض کنید U در $(0, 1)$ دارای توزیع یکنواخت بوده و قرار می دهیم

$$X = \begin{cases} x_1 & U < P_1 \\ x_2 & P_1 < U < P_1 + P_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_j & \sum_{i=1}^{j-1} P_i < U < \sum_{i=1}^j P_i \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

$$P\{X = x_j\} = P\left\{\sum_1^{j-1} P_i < U < \sum_1^j P_i\right\} = P_j$$

می بینیم که X دارای توزیع مورد نظر است.

مثال ۳ الف توزیع هندسی. فرض کنید آزمایشهای مستقلی که هر یک نتیجه اش « موفقیت » با احتمال p , $0 < p < 1$ است را متوالیاً انجام داده تا یک موفقیت رخ دهد، اگر X تعداد آزمایشهای لازم باشد آن گاه

$$P\{X = i\} = (1 - p)^{i-1} p \quad i \geq 1$$

که با توجه به این که اگر $i - 1$ آزمایش اول شکست و آزمایش i ام موفقیت است داریم $X = i$. متغیر تصادفی X را متغیر تصادفی هندسی با پارامتر p می نامند. چون

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{j-1} P\{X = i\} &= 1 - P\{X > j - 1\} \\ &= 1 - P\{\text{تمام } j - 1 \text{ آزمایش شکست}\} \\ &= 1 - (1 - p)^{j-1} \quad j \geq 1 \end{aligned}$$

لذا این متغیر تصادفی را با تولید یک عدد تصادفی U و سپس مساوی قرار دادن X با آن مقدار z که

$$1 - (1 - p)^{j-1} < U < 1 - (1 - p)^j$$

یا معادل آن مقدار z که

$$(1 - p)^j < 1 - U < (1 - p)^{j-1}$$

می توان شبیه سازی نمود. چون $1 - U$ و U هم توزیع هستند لذا X را به صورت

$$\begin{aligned} X &= \min \{j : (1 - p)^j < U\} \\ &= \min \{j : j \log(1 - p) < \log U\} \\ &= \min \left\{ j : j > \frac{\log U}{\log(1 - p)} \right\} \end{aligned}$$

می توان تعریف نمود که با توجه به این که $\log(1 - p)$ منفی است علامت نا مساوی تغییر می کند [زیرا $\log(1 - p) < \log 1 = 0$]. اگر از نماد $[x]$ برای قسمت صحیح x (یعنی $[x]$ بزرگترین عدد صحیح کمتر یا مساوی x است) استفاده کنیم می توان نوشت

$$X = 1 + \left\lceil \frac{\log U}{\log(1-p)} \right\rceil$$

مانند حالت پیوسته تکنیکهای شبیه سازی ویژه‌ای برای توزیعهای گسسته متداولتر اختصاص داده شده است. حال برخی از اینها را ارائه می‌کنیم.

مثال ۳ ب شبیه سازی یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای. یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای (n, p) را با توجه به این که آن را به صورت مجموع n متغیر تصادفی برنولی مستقل می‌توان نوشت به ساده‌ترین صورت شبیه سازی می‌شود. یعنی اگر U_1, U_2, \dots, U_n متغیرهای مستقل یکنواخت $(0, 1)$ باشند آن‌گاه با فرض

$$X_i = \begin{cases} 1 & U_i < p \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

نتیجه می‌شود که $X = \sum_{i=1}^n X_i$ یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای p, n است.

مثال ۳ ب شبیه سازی یک متغیر تصادفی پواسن. برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی پواسن با میانگین λ ، متغیرهای تصادفی مستقل یکنواخت $(0, 1)$ ، U_1, U_2, \dots را تولید نموده و سپس با توجه به مقدار زیر توقف کنید.

$$N = \min \left\{ n : \prod_{i=1}^n U_i < e^{-\lambda} \right\}$$

متغیر تصادفی $X \equiv N - 1$ دارای توزیع مطلوب است. یعنی اگر به تولید اعداد تصادفی تا این که حاصل ضرب آنها کمتر از $e^{-\lambda}$ شود ادامه دهیم آن‌گاه عدد مورد نظر منهای ۱، پواسن با میانگین λ است، که $X \equiv N - 1$ در واقع یک متغیر تصادفی پواسن با میانگین λ است که آن را بسهولت با توجه به این که

$$X + 1 = \min \left\{ n : \prod_{i=1}^n U_i < e^{-\lambda} \right\}$$

$$X = \max \left\{ n : \prod_{i=1}^n U_i \geq e^{-\lambda} \right\} \quad \text{و} \quad \prod_{i=1}^0 U_i \equiv 1$$

با

معادل است یا با در نظر گرفتن لگاریتم معادل است با

$$X = \max \left\{ n : \sum_{i=1}^n \log U_i \geq -\lambda \right\}$$

یا

$$X = \max \left\{ n : \sum_{i=1}^n -\log U_i \leq \lambda \right\}$$

می توان دید .

با وجود این $-\log U_i$ - نمای با نرخ ۱ است و بنابراین X را به عنوان ماکزیمم تعداد نمایه‌هایی که دارای نرخ ۱ بوده و مجموع آنها هنوز کمتر از λ است می توان در نظر گرفت . اما با توجه به این که زمانهای بین پیشامدهای متوالی یک فرآیند پواسن با نرخ ۱ نمایه‌های مستقل با همین شاخصند لذا X برابر تعداد پیشامدها تا زمان λ از یک فرآیند پواسن با نرخ ۱ است و بنابراین توزیع X پواسن با میانگین λ است .

۲- روشهای کاهش واریانس

فرض کنید X_1, \dots, X_n دارای توزیع توأم معلوم بوده و فرض کنید

$$\theta \equiv E[g(X_1, \dots, X_n)]$$

باشد که در آن g تابع مشخصی است . گاهی اوقات محاسبهٔ تحلیلی مورد فوق بسیار مشکل است و وقتی به این مورد بر می خوریم می توانیم از شبیه سازی استفاده نموده و θ را برآورد نماییم . این کار را به صورت زیر انجام می دهیم : $X_1^{(1)}, \dots, X_n^{(1)}$ را که با X_1, \dots, X_n همتوزیعند تولید کرده و قرار می دهیم

$$Y_1 = g(X_1^{(1)}, \dots, X_n^{(1)})$$

اکنون مجموعهٔ دومی از متغیرهای تصادفی (مستقل از مجموعه اول) ، $X_1^{(2)}, \dots, X_n^{(2)}$ را که دارای توزیع X_1, \dots, X_n است شبیه سازی نموده و قرار می دهیم

$$Y_2 = g(X_1^{(2)}, \dots, X_n^{(2)})$$

این کار را تا تولید K (عدد از پیش تعیین شده) مجموعه و بنابراین محاسبهٔ Y_1, Y_2, \dots, Y_k

ادامه می دهیم . حال Y_1, Y_2, \dots, Y_n متغیرهای تصادفی مستقل هم توزیع هستند که هر یک دارای توزیع $g(X_1, \dots, X_n)$ می باشند . بنابراین اگر Y را متوسط این k متغیر تصادفی فرض کنیم ، یعنی

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^k \frac{Y_i}{k}$$

آن گاه

$$E(\bar{Y}) = \theta$$

$$E[(\bar{Y} - \theta)^2] = \text{Var}(\bar{Y})$$

بنابراین \bar{Y} را به عنوان یک برآورد به کار می بریم . چون امید توان دوم تفاوت بین \bar{Y} و θ برابر واریانس \bar{Y} است می خواهیم این کمیت تاجایی که ممکن است کوچک باشد . [در وضعیت پیش $\text{Var}(\bar{Y}) = \text{Var}(Y_i) / k$ است که از قبل معلوم نیست و باید از مقادیر تولید شده Y_1, \dots, Y_n برآورد شود] . حال سه روش عمومی کاهش واریانس یک برآورد گر را ارائه می کنیم

۲- ۱ استفاده از متغیرهای متضاد

فرض کنید در وضعیت قبل متغیرهای تصادفی هم توزیع Y_2 و Y_1 که دارای میانگین θ می باشند را تولید کرده باشیم . حال داریم

$$\text{Var}\left(\frac{Y_1 + Y_2}{2}\right) = \frac{1}{4} [\text{Var}(Y_1) + \text{Var}(Y_2) + 2 \text{Cov}(Y_1, Y_2)]$$

$$= \frac{\text{Var}(Y_1)}{2} + \frac{\text{Cov}(Y_1, Y_2)}{2}$$

بنابراین اگر Y_2 و Y_1 به جای استقلال همبستگی منفی داشته باشند (به جهت این که واریانس کاهش پیدا می کند) سودمند خواهد بود . برای چگونگی انجام آن فرض کنید متغیرهای تصادفی X_1, \dots, X_n مستقل بوده و علاوه بر آن هر یک با توجه به روش تبدیل وارون ، شبیه سازی شده باشند . یعنی X_i از $F_i^{-1}(U_i)$ که U_i عددی تصادفی و F_i توزیع X_i است شبیه سازی شده باشد . بنابر این Y_1 را به صورت زیر می توان بیان کرد

$$Y_1 = g(F_1^{-1}(U_1), \dots, F_n^{-1}(U_n))$$

حال چون $1 - U$ که U عددی است تصادفی (U و $1 - U$ همبستگی منفی دارند) نیز در $(0, 1)$

یکنواخت است لذا Y_2 که به صورت زیر تعریف می شود همان توزیع Y_1 را خواهد داشت .

$$Y_2 = g(F_1^{-1}(1 - U_1), \dots, F_n^{-1}(1 - U_n))$$

بنابر این اگر Y_1 و Y_2 همبستگی منفی داشته باشند آن گاه تولید نمودن Y_2 به صورت بالا نسبت به این که اگر Y_1 و Y_2 توسط مجموعه جدیدی از اعداد تصادفی تولید شوند واریانس کمتری خواهد داشت . (علاوه بر این از نظر محاسبات صرفه جویی می شود زیرا به جای تولید n عدد تصادفی اضافی تنها لازم است هریک از n مقدار را از ۱ کم کنیم) . گرچه بطور کلی مطمئن نیستیم که Y_1 و Y_2 همبستگی منفی دارند ولی اغلب چنین است و در واقع می توان ثابت نمود که اگر g یک تابع یکنوا باشد آن گاه Y_1 و Y_2 همبستگی منفی دارند .

۴-۴ کاهش واریانس با مشروط نمودن

موضوع را با اشاره به رابطه واریانس شرطی (بخش ۶-۴ فصل ۷ را ملاحظه کنید) آغاز می کنیم .

$$\text{Var}(Y) = E[\text{Var}(Y|Z)] + \text{Var}(E\{Y|Z\})$$

حال فرض کنید می خواهیم با شبیه سازی $X = (X_1, \dots, X_n)$ و سپس محاسبه $Y = g(X)$ ، $E[g(X_1, \dots, X_n)]$ را برآورد کنیم . حال اگر برای متغیر تصادفی Z بتوانیم $E\{Y|Z\}$ را محاسبه کنیم آن گاه چون $\text{Var}(Y|Z) \geq 0$ است بنا به فرمول واریانس شرطی بالا

$$\text{Var}(E\{Y|Z\}) \leq \text{Var}(Y)$$

نتیجه می شود و چون $E[E\{Y|Z\}] = E\{Y\}$ بنابر این $E\{Y|Z\}$ برآورد کننده بهتری از $E\{Y\}$ است تا Y .

مثال ۱۲۴ . برآورد کننده π . فرض کنید U_1 و U_2 اعداد تصادفی بوده $V_1 = 2U_1 - 1$ ، $i = 1, 2$

باشد . بطوری که در مثال ۲ ت اشاره نمودیم (V_1, V_2) در مربعی به مساحت ۴ که در مرکز $(0, 0)$ قرار دارد دارای توزیع یکنواخت است . احتمال قرار گرفتن این نقطه در داخل دایره به شعاع ۱ و مرکز $(0, 0)$ (شکل ۱۰ - ۲ را ملاحظه کنید) برابر $\frac{\pi}{4}$ (نسبت مساحت دایره به مربع) است . بنابر این اگر تعداد زیادی از این جفتها را شبیه سازی نموده و قرار دهیم

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{جفت زام در داخل دایره باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

نتیجه می شود که $I_j, j = 1, \dots, n$ متغیرهای تصادفی مستقل هم توزیع دارای میانگین $E[I_j] = \frac{\pi}{4}$ است. بنابراین بنا به قانون قوی اعداد بزرگ داریم

$$\frac{I_1 + \dots + I_n}{n} \rightarrow \pi/4 \quad n \rightarrow \infty$$

بنابراین به این نتیجه می رسیم که اگر تعداد زیادی از جفتهای (V_1, V_2) را شبیه سازی نموده و نسبت آنهایی را که در داخل دایره قرار می گیرند در ۴ ضرب کنیم می توانیم π را بدقت تقریب کنیم.

با وجود این برآورد کننده بالا را با استفاده از امید شرطی می توان بهتر نمود. اگر برای جفت (V_1, V_2) ، I را متغیر نشانگر فرض کنیم آن گاه بهتر است به جای استفاده از مقدار مشاهده شده I مقدار مشروط آن را با فرض V در نظر گرفته و از عبارت زیر استفاده کنیم

$$\begin{aligned} E[I|V_1] &= P\{V_1^2 + V_2^2 \leq 1 | V_1\} \\ &= P\{V_2^2 \leq 1 - V_1^2 | V_1\} \end{aligned}$$

حال داریم،

$$\begin{aligned} P\{V_2^2 \leq 1 - V_1^2 | V_1 = v\} &= P\{V_2^2 \leq 1 - v^2\} \\ &= P\{-\sqrt{1 - v^2} \leq V_2 \leq \sqrt{1 - v^2}\} \\ &= \sqrt{1 - v^2} \end{aligned}$$

و بنابراین

$$E[I|V_1] = E[\sqrt{1 - V_1^2}]$$

بنابراین یک اصلاح در به کاربردن مقدار متوسط I برآورد $\frac{\pi}{4}$ این است که از مقدار متوسط

$$\sqrt{1 - V_1^2} \quad \text{در واقع چون}$$

$$E[\sqrt{1 - V_1^2}] = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \sqrt{1 - v^2} dv = \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du = E[\sqrt{1 - U^2}]$$

که U در $(0, 1)$ یکنواخت است می توانیم n عدد تصادفی U را تولید نموده و از مقدار متوسط $\sqrt{1-U^2}$ به عنوان برآورد $\frac{\pi}{4}$ استفاده کنیم. (مسأله ۱۴ نشان می دهد که این برآوردگر و متوسط n مقدار $\sqrt{1-U^2}$ دارای یک واریانس اند).

برآوردگر بالا برای π را با توجه به این که تابع $g(u) = \sqrt{1-u^2}$, $0 \leq u \leq 1$ یکنوای کاهشی u است و لذا روش متغیرهای متضاد واریانس برآوردگر $E[\sqrt{1-U^2}]$ را کاهش می دهد، حتی مجدداً می توان بهتر نمود. یعنی به عوض تولید n عدد تصادفی و به کاربردن مقدار متوسط $\sqrt{1-U^2}$ به عنوان یک برآوردگر π ، با تولید تنها $\frac{n}{2}$ عدد تصادفی و سپس استفاده از نصف متوسط $\sqrt{1-U^2} + \sqrt{1-(1-U)^2}$ به عنوان برآورد کننده $\frac{\pi}{4}$ یک برآوردکننده بهتر به دست آورد.

جدول زیر نتیجه برآورد π بر مبنای سه برآوردکننده بالا را با توجه به شبیه سازی و استفاده از $n = 10000$ می دهد.

روش	برآورد π
استفاده از نسبت نقاط تصادفی که در داخل دایره واقع می شوند	۳٫۱۶۱۲
استفاده از مقدار متوسط $\sqrt{1-U^2}$	۳٫۱۲۸۴۴۸
استفاده از مقدار متوسط $\sqrt{1-U^2} + \sqrt{1-(1-U)^2}$	۳٫۱۳۹۵۷۸

با شبیه سازی مجدد و استفاده از روش آخر و $n = 64000$ برآورد 3.143288 حاصل می شود.

۳-۴ متغیرهای کنترل

مجدداً فرض کنید می خواهیم با استفاده از شبیه سازی $E[g(X)]$ که $X = (X_1, \dots, X_n)$ و f تابع f امید ریاضی $f(X)$ یعنی $E[f(X)] = \mu$ معلوم است. پس برای هر ثابت a می توانیم از

$$W = g(X) + a[f(X) - \mu]$$

به عنوان یک برآوردگر $E[g(X)]$ استفاده کنیم. حال

$$\text{Var}(W) = \text{Var}[g(X)] + a^2 \text{Var}[f(X)] + 2a \text{Cov}[g(X), f(X)] \quad (1-4)$$

به سهولت می توان ثابت کرد که وقتی

$$a = \frac{-\text{Cov}[f(X), g(X)]}{\text{Var}[f(X)]} \quad (2-4)$$

باشد مقدار فوق مینیمم می شود و برای این مقدار a داریم

$$\text{Var}(W) = \text{Var}[g(X)] - \frac{[\text{Cov}[f(X), g(X)]]^2}{\text{Var}[f(X)]} \quad (3-4)$$

متأسفانه چون معمولاً هیچ کدام از $\text{Var}[f(X)]$ و $\text{Cov}[f(X), g(X)]$ معلوم نیستند بنابراین معمولاً کاهش واریانس بالا را نمی توان به دست آورد. در عمل یک روش این است که این مقادیر را حدس بزنیم و امیدوار باشیم که W نتیجه شده نسبت به $g(X)$ واریانس کمتری داشته باشد در صورتی که امکان دیگر این است که از داده های شبیه سازی شده برای برآورد این کمیتها استفاده کنیم.

مسائل

۱- الگوریتم زیر یک تبدیل تصادفی عناصر $1, 2, \dots, n$ را تولید می کند این تا حدودی سریعتر از آن است که در مثال ۱ الف ارائه شد ولی در آن وضعیت ثابتی تا پایان الگوریتم وجود ندارد. در این الگوریتم $P(i)$ را به عنوان عنصر در وضعیت i می توان تفسیر نمود.

مرحله ۱: قرار دهید $k = 1$

مرحله ۲: قرار دهید $P(1) = 1$

مرحله ۳: اگر $k = n$ توقف کنید و فرض کنید $K = K + 1$

مرحله ۴: یک عدد تصادفی U را تولید نموده و فرض کنید

$$P(k) = P(\{kU\} + 1)$$

$$P(\{kU\} + 1) = k$$

به مرحله ۳ بروید

(الف) عملکرد الگوریتم را بیان کنید.

(ب) نشان دهید که در تکرار k یعنی وقتی مقدار اولیه $P(k)$ منظور می شود، $P(1), P(2), \dots, P(k)$ یک تبدیل تصادفی $k, 2, \dots, 1$ است.

راهنمایی: با استفاده از استقرابه صورت زیر استدلال کنید

$$\begin{aligned} P_k(i_1, i_2, \dots, i_{j-1}, k, i_j, \dots, i_{k-2}, i) \\ = P_{k-1}(i_1, i_2, \dots, i_{j-1}, i, i_j, \dots, i_{k-2}) \frac{1}{k} \\ = \frac{1}{k!} \quad \text{بنا به فرض استقرا} \end{aligned}$$

۲- روشی را برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی که دارای چگالی زیر است بسازید.

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & -\infty < x < 0 \\ e^{-2x} & 0 < x < \infty \end{cases}$$

۳- روشی برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی که دارای تابع چگالی احتمال زیر است ارائه نمایید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-2) & 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{2}\left(2 - \frac{x}{3}\right) & 3 < x \leq 6 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۴- روشی را شبیه سازی یک متغیر تصادفی که دارای تابع توزیع زیر است ارائه کنید.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -3 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{6} & -3 < x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x^2}{32} & 0 < x \leq 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$

۵- با استفاده از روش تبدیل معکوس روشی برای تولید یک متغیر تصادفی از توزیع وایبل ارائه نمایید.

$$F(t) = 1 - e^{-at^b} \quad t \geq 0$$

۶- روشی برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی که دارای تابع نرخ شکست زیر است ارائه نمایید

$$\lambda(t) = c \quad (\text{الف})$$

نخستین درس احتمال

$$\lambda(t) = ct \quad (\text{ب})$$

$$\lambda(t) = ct^2 \quad (\text{پ})$$

$$\lambda(t) = ct^3 \quad (\text{ت})$$

۷-F تابع توزیع به صورت زیر است

$$F(x) = x^n \quad 0 < x < \infty$$

(الف) روشی را برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی که دارای توزیع F است و تنها از یک عدد تصادفی استفاده می کند ارائه نمایید.

(ب) فرض کنید U_1, \dots, U_n اعداد تصادفی مستقلند، ثابت کنید

$$P\{\max(U_1, \dots, U_n) \leq x\} = x^n$$

(پ) با استفاده از بخش (ب) روشی دومی را برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی که دارای توزیع F است ارائه نمایید.

۸- فرض کنید شبیه سازی از F_i برای هر $i = 1, \dots, n$ نسبتاً ساده است. از توابع زیر چطور می توان شبیه سازی نمود.

$$F(x) = \prod_{i=1}^n F_i(x) \quad (\text{الف})$$

$$F(x) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_i(x)] \quad (\text{ب})$$

۹- فرض کنید روشی برای شبیه سازی متغیرهای تصادفی از توزیعهای F_1 و F_2 داریم، توضیح دهید که از توزیع زیر چگونه شبیه سازی می کنید

$$F(x) = pF_1(x) + (1-p)F_2(x) \quad 0 < p < 1$$

روشی را برای شبیه سازی از تابع زیر ارائه کنید

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(1 - e^{-3x}) + \frac{2}{3}x & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{3}(1 - e^{-3x}) + \frac{2}{3} & x > 1 \end{cases}$$

۱۰- در مثال ۲ مقدار مطلق یک نرمال واحد را با به کاربردن روش عدم پذیرش در متغیرهای تصادفی نمایی با نرخ ۱ شبیه سازی نمودیم. حال این سؤال پیش می آید که آیا می توانیم الگوریتم کارآمدی را با استفاده از یک چگالی نمایی دیگر به دست آوریم، یعنی می توانیم

چگالی $g(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ را به کار ببریم. نشان دهید که وقتی $\lambda = 1$ باشد میانگین تعداد تکرارهای لازم در طرح عدم پذیرش مینیمم می شود.

۱۱- با استفاده از روش عدم پذیرش با $g(x) = 1, 0 < x < 1$ ، الگوریتمی را برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی با تابع چگالی زیر تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 60x^3(1-x)^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۱۲- توضیح دهید که از اعداد تصادفی جهت تقریب $\int_0^1 k(x) dx$ که تابع دلخواهی است چگونه استفاده می کنید.

راهنمایی: اگر U در $(0, 1)$ یکنواخت باشد $E[k(U)]$ چقدر است؟

۱۳- فرض کنید (X, Y) در دایره ای به شعاع ۱ و مرکز مبدأ دارای توزیع یکنواخت باشد. چگالی توأم آن عبارت است از

$$f(x, y) = 1/\pi, \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$$

فرض کنید $R = (X^2 + Y^2)^{1/2}$ و $\theta = \tan^{-1}(Y/X)$ مختصات قطبی آن را نشان دهد.

ثابت کنید R و θ که R^2 در $(0, 1)$ یکنواخت و θ در $(0, 2\pi)$ یکنواخت است مستقلند.

۱۴- در مثال ۴ الف که V در $(-1, 1)$ و U در $(0, 1)$ یکنواخت بود ثابت کردیم

$$E[(1 - V^2)^{1/2}] = E[(1 - U^2)^{1/2}] = \pi/4$$

نشان دهید.

$$\text{Var} [(1 - V^2)^{1/2}] = \text{Var} [(1 - U^2)^{1/2}]$$

و مقدار مشترک آنها را پیدا کنید.

۱۵- الف) ثابت کنید که اگر a همان a در (۲-۴) باشد آن گاه (۱-۴) مینیمم می شود.

ب) ثابت کنید که مینیمم (۱-۴) بوسیله (۳-۴) داده می شود.

۱۶- فرض کنید X متغیری تصادفی در $(0, 1)$ باشد که چگالی آن $f(x)$ است. ثابت کنید با

شبیه سازی X و سپس منظور نمودن $\frac{g(X)}{f(X)}$ به عنوان برآوردمان $\int_0^1 g(x) dx$ را می توان

برآورد نمود. در این روش که روش نمونه گیری با اهمیت نامیده شده سعی بر این است که f

از نظر شکل مشابه g انتخاب شود بطوری که $\frac{g(X)}{f(X)}$ دارای واریانس کوچکی باشد.

فهرست راهنما

تابع جرم احتمال ۲۲۸	الف
تابع چگالی احتمال ۱۸۳	اجتماع ۳۳
تابع چگالی توأم ۲۳۱	احتمال شرطی ۷۱
تابع مولد گشتاور ۳۴۶	ارگودیک ۴۲۷
تابع مولد مجموع ۳۵۵	آشفستگی لاپلاس ۲۰۶
تابع مولد نمایی ۳۴۹	اشتراک ۳۳
تابع مولد بواسن ۱۸۲-۱۵۲-۳۴۸	اصل اساسی شمارش ۸
تابع مولد نرمال ۱۹۳-۳۵۰	اصول احتمال ۳۱-۳۷
تابع نرخ خرابی ۲۰۷	آماره‌های ترتیبی ۲۶۰
ترکیب ۱۲	امید ریاضی ۲۸۸
تقریب نرمال ۱۹۹	آنالیز ترکیبی ۷
توأم پیوسته ۲۳۱	آنتروپی ۳۹۹
توزیع بتا ۲۱۴	
توزیع چند جمله‌ای ۲۳۷	پ
توزیع زتا ۱۶۷	پیشامد ۳۳
توزیع دامنه ۲۶۴	پیشامدهای مستقل ۸۷
توزیع دامنه ۲۵۰	
تعبیر احتمالی نصف عمر ۲۴۸	ت
توزیعهای شرطی ۲۵۴	تابع توزیع توأم ۲۲۷
	تابع توزیع دوجمله‌ای ۱۵۰-۱۸۱

ج

جایگشتها ۱۰

ض

ضرایب چندجمله‌ای ۱۷

د

درست‌نمایی ماکزیمم ۱۶۶

دوجمله‌ای منفی ۱۷

ک

کدگذاری ۴۴۱-۴۳۷-۴۳۴

کوواریانس هندسی ۳۳۴

کوواریانس شرطی ۳۶۶

ر

روش تبدیل معکوس ۴۴۹

روش کاهش واریانس ۴۶۱

روش عدم پذیرش ۴۵۱

گ

گام برداری تصادفی ۳۱۰-۳۲۵

ز

زنجیر مارکوف ۴۲۰-۴۲۳

زمان انتظار ۴۲۱

ل

لاپلاس ۲۰۵

لم کرونگر ۴۰۳

م

متغیر تصادفی ۱۳۱

متغیر تصادفی برنولی ۱۴۲

متغیر تصادفی پواسن ۱۵۲-۱۸۲-۱۶۰

متغیر تصادفی پیوسته ۱۸۳

متغیر تصادفی کنترل ۴۶۵

متغیر تصادفی کوشی ۲۹۳

متغیر تصادفی گسته ۱۳۹

متغیر تصادفی نرمال ۱۹۳

متغیر تصادفی نمایی ۲۰۲

ش

شبه‌سازی ۴۴۵

شبه‌سازی دوجمله‌ای ۴۶۰

شبه‌سازی کی دو ۴۵۷

شبه‌سازی نمایی ۲۵۰

شبه‌سازی نرمال ۴۵۳-۴۵۵

شبه‌سازی پواسن ۴۶۰

شبه‌سازی گاما ۴۵۰

شبه‌سازی هندسی ۴۵۹

- متغیر تصادفی مستقل ۲۳۷
- متغیر تصادفی یکنواخت ۱۸۷
- متغیر تصادفی تبدیل تصادفی ۴۴۷
- متغیر تصادفی هندسی ۱۶۲-۱۴۵
- مرکز ثقل ۲۹۳
- معادله تابعی ۲۰۴
- معادلات چپمن کلموگروف ۴۲۵
- میانگین ۲۸۸-۳۵۹
- میانگین تابعی از متغیرها ۳۹۴
- میانگین جورها ۳۰۲
- میانگین دو جمله‌ای منفی ۳۰۳
- میانگین پواسن ۳۴۹
- میانگین شرطی ۳۲۷-۳۳۹
- میانگین گشتها ۳۰۸
- میانگین نرمال ۳۵۱
- میانگین نمایی ۳۴۹
- میانگین هندسی ۳۰۴
- فضای نمونه ۳۱
- ق**
- قانون ضعیف اعداد بزرگ ۳۹۲
- قانون قوی اعداد بزرگ ۴۰۳
- قانون ناآگاهی ۲۹۵
- قضیه حد مرکزی ۳۹۳-۳۹۹-۱۹۹
- قانون چند جمله‌ای ۱۹-۱۵
- قوانین دومورگان ۲۶
- ن**
- ناسازگار ۳۴
- نامساوی جنس ۴۱۰
- نامساوی چبیشف ۳۹۰-۴۰۶
- نامساوی کلموگروف ۴۰۰-۴۰۲
- نامساوی کوشی شوارتز ۴۰۷
- نامساوی مارکف ۳۸۹
- نموهای مستقل ۴۱۹
- و**
- واریانس ۳۱۴
- واریانس پواسن ۳۴۹
- واریانس جورها ۳۲۰
- واریانس دو جمله‌ای ۳۱۹
- واریانس شرطی ۳۳۸-۳۳۷
- واریانس نرمال ۳۵۱
- واریانس نمایی ۳۴۹
- ع**
- عدم اطمینان ۴۲۹
- ف**
- فرایند پواسن ۴۱۹
- فرایند شاخه‌ای ۳۷۱
- فرمول بیز ۷۶



FERDOWSI UNIVERSITY OF MASHHAD

Publication No. 223

A First Course
In
Probability

by

Sheldon Ross

Translated by

H. Azarnoush - A. Bozorgnia

A. Meshkani - H. Niroomand

Ferdowsi University Press

1997