به نام خدا

معادلات همزمان

نام دانشجو: مریم گودرزی

مدل های تک معادله ای

- مدلهایی هستند که دارای یک متغیر درونزا(Y) و یک یا چند متغیر توضیحی(X) می باشند و جهت علیت از X به Y می باشد.
- X ها در آن غیرتصادفی و برونزا هستند.(یکی از شروط کلاسیک)

معادلات همزمان

- اگر چنین شرایطی برقرار نباشد و یک متغیر درونزا تابعی از متغیر درونزای دیگری باشد که خود نیاز به معرفی معادله دیگر دارد، با سیستم معادلات مواجه می شویم.

$$Y_{1t} = \alpha_1 + \beta_1 X_t + \gamma_1 Y_{2t} + u_{1t}$$
$$Y_{2t} = \alpha_2 + \beta_2 X_t + \gamma_2 Y_{1t} + u_{2t}$$

فروض زیر برای سیستم معادلات فوق برقرار است:

$$E(u_{1t} \mid X_t) = E(u_{2t} \mid X_t) = 0$$
$$E(u_{1t}^2 \mid X_t) = \sigma_1^2 , E({u_{2t}}^2 \mid X_t) = \sigma_2^2$$
$$\operatorname{cov}(u_{1t}, u_{2t}) = E(u_{1t}, u_{2t}) = 0$$
$$\operatorname{cov}(u_{1t}, X_t) = E(u_{2t}, X_t) = 0$$

تعاریف

- **متغیر درونزا:** متغیری که برای تعیین آن یک معادله تعریف می شود.
- **متغیر برونزا:** برای تعریف آن هیچ معادله ای تعریف نمی شود.
- **متغیر از قبل تعیین تعیین شده:** متغیرهایی که در نقش متغیرهای توضیحی با وقفه های مختلف ظاهر می شوند.
- **فرم ساختاری:** متغیر درونزا برحسب متغیرهای برونزا و درونزا بیان می شود.
- **فرم حل شده(خلاصه شده):**اگر سیستم معادلات را برای متغیرهای درونزا حل کرده و انها را برحسب متغیرهای برونزا بنویسیم ،ان را فرم خلاصه شده یا حل شده می گویند.

مثال۱(عرضه و تقاضای کار)

معادله عرضه نیروی کار

$$h_s = \alpha_1 w + \beta_1 z_1 + u_1, \quad [16.1]$$

معادله تقاضای نیروی کار

$$h_d = \alpha_2 w + \beta_2 z_2 + u_2, \quad [16.2]$$

شرط تعادل

$$h_{is} = h_{id}. \quad [16.3]$$

$$h_i = \alpha_1 w_i + \beta_1 z_{i1} + u_{i1} \quad [16.4]$$

$$h_i = \alpha_2 w_i + \beta_2 z_{i2} + u_{i2}, \quad [16.5]$$

مثال۲(نرخ جنایت و اندازه پلیس)

نرخ سرانه قتل

$$murdpc = \alpha_1 polpc + \beta_{10} + \beta_{11} incpc + u_1, \qquad [16.6]$$

تعداد نیروی پلیس سرانه

$$polpc = \alpha_2 murdpc + \beta_{20} + \text{other factors}. \qquad [16.7]$$

مثال۳ (مخارج مسکن و پس انداز)

مخارج مسکن

$$housing = \alpha_1 saving + \beta_{10} + \beta_{11} inc + \beta_{12} educ + \beta_{13} age + u_1 \qquad [16.8]$$

پس انداز

$$saving = \alpha_2 housing + \beta_{20} + \beta_{21} inc + \beta_{22} educ + \beta_{23} age + u_2, \qquad [16.9]$$

هر دو معادله غیرقابل تشخیص هستند.

تورش تخمین زننده ols در معادلات همزمان

یکی از ویژگی های معادلات همزمان که موجب نقض فروض کلاسیک می شود آن است که متغیر درونزا به عنوان متغیر توضیحی در یک معادله وارد می شود و این موضوع تخمین زننده های OLS را با تورش مواجه می کند.

در مدل تک معادله ای $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \beta + (X'X)^{-1}X'u$

با توجه به که Xوu مستقل هستند، لذا $E(\beta)=\beta$ است اما اگر X شامل متغیرهایی باشد که مستقل از u نباشند در این صورت $E(\hat{\beta})\neq\beta$

تورش معادلات همزمان- ناسازگاری تخمین زنهای OLS

تابع مصرف:

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + U_t$$

اتحاد درامد ملی:

$$Y_t = C_t + I_t$$

برای اثبات همبستگی Y وU ابتدا معادله اولی را در دومی جایگذاری می کنیم:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + U_t + I_t$$

یعنی:

$$Y_t = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{1}{1-\beta_1} I_t + \frac{1}{1-\beta_1} U_t \qquad (۱)$$

پس امیدریاضی Y برابر است با:

(۲)

$$E(Y_t) = \frac{\beta_۰}{۱ - \beta_۱} + \frac{۱}{۱ - \beta_۱} I_t$$

حال اگر معادله(۲) را از (۱) کم کنیم خواهیم داشت:

(۳)

$$Y_t - E(Y_t) = \frac{U_t}{۱ - \beta_۱}$$

(۴)

$$U_t - E(U_t) = U_t$$

بنابراین:

$$COV(Y_t, U_t) = E[Y_t - E(Y_t)][U_t - E(U_t)]$$

- با استفاده از معادلات (۳) و (۴) خواهیم داشت:

$$= \frac{E\left(U_t^{2}\right)}{1-\beta_1}$$

$$= \frac{\sigma^{2}}{1-\beta_1}$$

چون صورت کسر طبق فرض مثبت است، کوواریانس بینY وU مذکور یقیناً مخاف صفر خواهد بود بنابراین انتظار بر این است که Y و U با یکدیگر همبسته باشند.(نقض فرض استقلال متغیر توضیحی و جزء اخلال) که با نقض این فرض تخمین زننده های OLS ناسازگار خواهند بود.

ناسازگار بودن تخمین زن β به علت همبستگی U و Y

ناسازگاری تخمین زن را از طریق ذیل اثبات می کنیم:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\Sigma (C_t - \bar{C})(Y_t - \bar{Y})}{\Sigma (Y_t - \bar{Y})^2}$$

$$= \frac{\Sigma c_t y_t}{\Sigma y^2_t}$$

$$= \frac{\Sigma C_t y_t}{\Sigma y^2_t}$$

حروف کوچک نمادی برای نمایش کمیتهای دارای مبداء میانگین هستند.

با جایگذار تابع مصرف به جای C خواهیم داشت:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\Sigma(\beta_0 + \beta_1 Y_t + U_t)\, y_t}{\Sigma y_t^2} = \beta_1 + \frac{\Sigma y_t U_t}{\Sigma y_t^2} \qquad (۵)$$

حال از معادله بالا امیدریاضی می گیریم:

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 + E\left[\frac{\Sigma y_t U_t}{\Sigma y_t^2}\right]$$

اگر عبارت اخر صفر نباشد نگاه تخمین زن β یک تخمین زن تورشدار خواهد بود.

برای اثبات ناسازگاری بایستی نشان داد که Plim ان مساوی β حقیقی نمی گردد. با کاربر قواعد مربوط به حد احتمال در مورد معادله (۵) خواهیم داشت:

$$\text{plim}\,(\hat{\beta}_1) = \text{plim}\,(\beta_1) + \text{plim}\left(\frac{\Sigma\, y_t U_t}{\Sigma\, y^2_t}\right)$$

$$= \text{plim}\,(\beta_1) + \text{plim}\left(\frac{\Sigma\, y_t U_t/N}{\Sigma\, y^2_t/N}\right)$$

$$= \beta_1 + \frac{\text{plim}\,(\Sigma\, y_t U_t/N)}{\text{plim}\,(\Sigma\, y^2_t/N)}$$

معادله بالا را به صورت زیر باز نویسی می کنیم:

$$\text{plim}\,(\hat{\beta}_1) = \beta_1 + \frac{\sigma^2/(1-\beta_1)}{\sigma^2_Y}$$

$$= \beta_1 + \frac{1}{1-\beta_1}\left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2_Y}\right)$$

معادلات ساختاری

$$y_1 = \alpha_1 y_2 + \beta_1 z_1 + u_1 \qquad [16.10]$$

$$y_2 = \alpha_2 y_1 + \beta_2 z_2 + u_2 \qquad [16.11]$$

$$y_2 = \alpha_2(\alpha_1 y_2 + \beta_1 z_1 + u_1) + \beta_2 z_2 + u_2$$

$$(1 - \alpha_2\alpha_1)y_2 = \alpha_2\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \alpha_2 u_1 + u_2. \qquad [16.12]$$

فرض می کنیم:

$$\alpha_2\alpha_1 \neq 1. \qquad [16.13]$$

فرم خلاصه شده:

$$y_2 = \pi_{21} z_1 + \pi_{22} z_2 + v_2, \qquad [16.14]$$

توجه به این نکته لازم است که πها توابع غیرخطی از پارامترهای معادلات ساختاری هستند.

حل مشکل تورش معادلات همزمان به روشILS

- برای حل مشکل تورش، می توان از روشOLS برای براورد ضرایب فرم خلاصه شده (πها) استفاده نمود. بدیهی است که چون در فرم حل شده تمام متغیرهای توضیحی، غیرتصادفی هستند لذا تخمین زننده های OLS بدون تورش خواهند بود. اما هدف ما براورد ضرایب ساختاری است و باید با استفاده از ضرایب فرم حل شده ضرایب ساختاری را بدست آوریم.

شناسایی(تشخیص) معادلات فرم ساختاری

قابلیت شناسایی یا تشخیص بدان معناست که آیا امکان محاسبه ضرایب فرم ساختاری با استفاده از ضرایب فرم خلاصه شده جود دارد یا نه

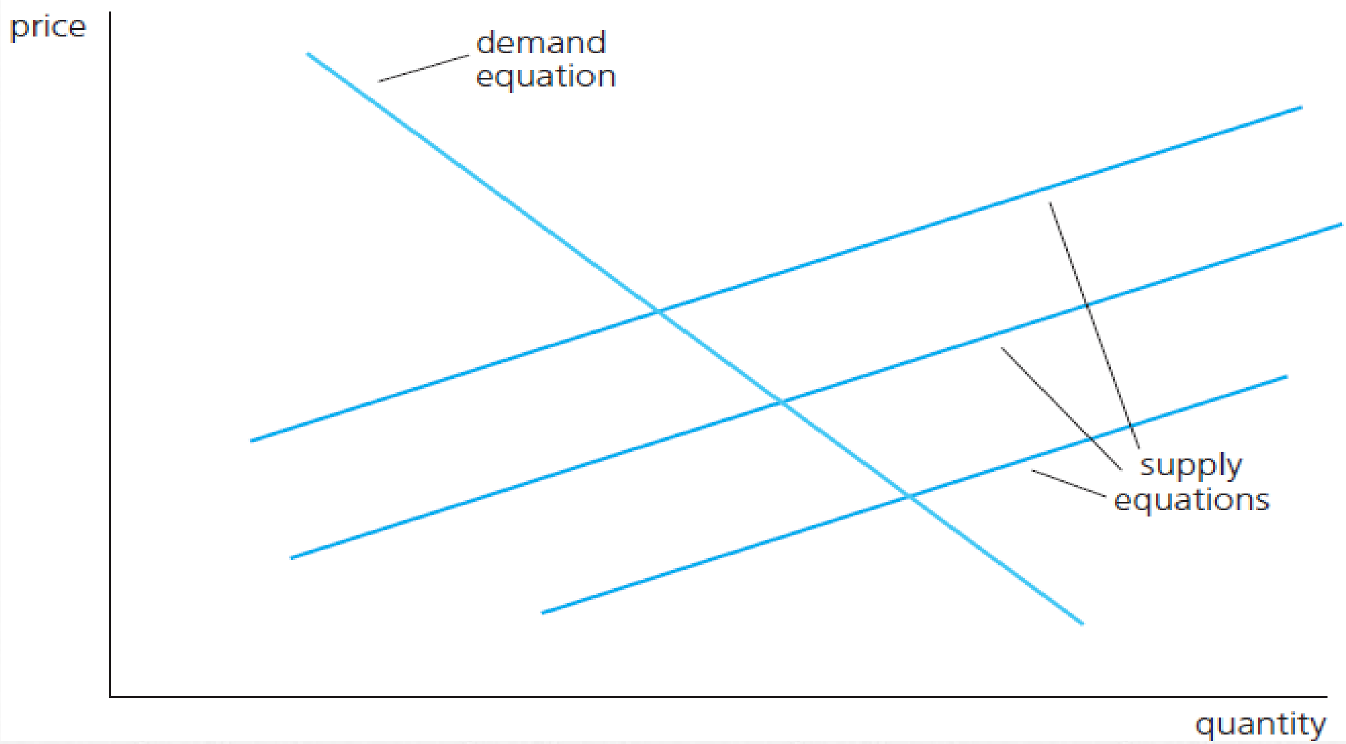
مثال(معادلات عرضه و تقاضا شیر)

تابع عرضه شیر

$$q = \alpha_1 p + \beta_1 z_1 + u_1 \qquad [16.15]$$

تابع تقاضا شیر

$$q = \alpha_2 p + u_2. \qquad [16.16]$$



برای قابلیت شناسایی با سه حالت مواجه ایم:

۱- غیرقابل شناسایی یا کمتر از حد تشخیص

۲- دقیقاً قابل شناسایی و یا دقیقاً مشخص

۳- بیش از حد قابل شناسایی یا بیش از حد مشخص

قاعده تشخیص

- Order Condition
- Rank Condition

Order Condition

ولدریج:

زمانی این شرط برای یک معادله از سیستم معادلات همزمان تأمین می شود که تعداد متغیرهای برونزای خارج نگه داشته شده از آن، بزرگتر یا مساوی تعداد متغیرهای درونزای سمت راست آن باشد.

شرط درجه ای شرط لازم برای مسأله تشخیص است اما کافی نیست.

سوری:

الف) سیستم دارای M معادله و M متغیر درونزاست(Y ها)

ب) سیستم دارای K متغیر توضیحی و از قبل تعیین شده است.

پ) هر معادله دارای m متغیر درونزا است.

ت) هر معادله دارای k متغیر برونزاست.

Order Condition

براساس شرط درجه ای می توان تقسیم بندی زیر را انجام داد:

۱- $K-k<m-1$ باشد، معادله موردنظر نامشخص

۲- $K-k=m-1$ باشد، معادله موردنظر دقیقاً مشخص

۳- $K-k>m-1$ باشد، معادله مورد نظر بیش از حد مشخص

مثال4

$$y_1 = \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 + \beta_{11}z_1 + u_1 \qquad [16.27]$$

$$y_2 = \alpha_{21}y_1 + \beta_{21}z_1 + \beta_{22}z_2 + \beta_{23}z_3 + u_2 \qquad [16.28]$$

$$y_3 = \alpha_{32}y_2 + \beta_{31}z_1 + \beta_{32}z_2 + \beta_{33}z_3 + \beta_{34}z_4 + u_3, \qquad [16.29]$$

M=3 K=4 $\quad$ K ≥ (m-1)+k $\quad$ or K-k ≥ m-1

16.27) m=3 k=1 $\Rightarrow$ $3 > 2$ بیش از حد قابل شناسایی

16.28) m=2 k=3 $\Rightarrow$ $1 = 1$ کاملاً قابل شناسایی

16.29) m=2 k=4 $\Rightarrow$ $0 < 1$ کمتر از حد شناسایی

مثال۵(عرضه نیروی کار زنان متأهل)

فرم ساختاری

$$hours = \alpha_1 \log(wage) + \beta_{10} + \beta_{11} educ + \beta_{12} age + \beta_{13} kidslt6 + \beta_{14} nwifeinc + u_1 \qquad [16.19]$$

$$\log(wage) = \alpha_2 hours + \beta_{20} + \beta_{21} educ + \beta_{22} exper + \beta_{23} exper^2 + u_2. \qquad [16.20]$$

فرم خلاصه شده

$$\log(wage) = \pi_{20} + \pi_{21} educ + \pi_{22} age + \pi_{23} kidslt6 + \pi_{24} nwifeinc + \pi_{25} exper + \pi_{26} exper^2 + v_2. \qquad [16.21]$$

مثال۶(تورم و آزادسازی)

مدل رومر

$$inf = \beta_{10} + \alpha_1 open + \beta_{11}\log(pcinc) + u_1 \qquad [16.22]$$

$$open = \beta_{20} + \alpha_2 inf + \beta_{21}\log(pcinc) + \beta_{22}\log(land) + u_2, \qquad [16.23]$$

هرچه کشور دارای اقتصاد بازتری باشد دارای نرخ تورم پایین تری خواهد بود.

معادله دوم نشانگر این حقیقت است که درجه باز بودن اقتصاد می تواند به متوسط نرخ تورم و سایر عوامل بستگی داشته باشد.

M=2 K=2 , $K-k \geq m-1$

16-22) m=2 k=1 $\Rightarrow$ 1=1

16-23) m=2 k=2 $\Rightarrow$ 0<1

Rank Condition

ولدریج:

اگر دو معادله همزمان داشته باشیم و درصدد یافتن معادله اول باشیم باید حداقل یکی از متغیرهای برونزای خارج از معادله اول دارای ضریب غیرصفر در معادله دوم باشد.

سوری:

این شرط در صورتی تأمین می شود که هیچ ترکیب خطی بین ضرایب متغیرهای خارج از معادله موردنظر وجود نداشته باشد.

Rank Condition

سیستم معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
Y_{1t} - \beta_{10} \quad - \beta_{12} Y_{2t} - \beta_{13} Y_{3t} - \gamma_{11} X_{1t} &= u_{1t} \\
Y_{2t} - \beta_{20} \quad - \beta_{23} Y_{3t} - \gamma_{21} X_{1t} - \gamma_{22} X_{2t} &= u_{2t} \\
Y_{3t} - \beta_{30} - \beta_{31} Y_{1t} \quad - \gamma_{31} X_{1t} - \gamma_{32} X_{2t} &= u_{3t} \\
Y_{4t} - \beta_{40} - \beta_{41} Y_{1t} - \gamma_{42} Y_{2t} \quad - \gamma_{43} X_{3t} &= u_{4t}
\end{aligned}
$$

برای سهولت سیستم معادلات در جدول زیر باز نویسی می گردد:

1	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	X_1	X_2	X_3
$-\beta_{10}$	1	$-\beta_{12}$	$-\beta_{13}$	0	$-\gamma_{11}$	0	0
$-\beta_{20}$	0	1	$-\beta_{23}$	0	$-\gamma_{21}$	$-\gamma_{22}$	0
$-\beta_{30}$	$-\beta_{31}$	0	1	0	$-\gamma_{31}$	$-\gamma_{32}$	0
$-\beta_{40}$	$-\beta_{41}$	$-\beta_{42}$	0	1	0	0	$-\gamma_{43}$

Rank Condition

اگر معادلات را با شرط Order بررسی کنیم درمی یابیم که همه معادلات قابل شناسایی خواهند بود.

و اما برای بررسی شرط Rank ، ماتریسی از ضرایب متغیرهای خارج از معادله موردنظر تشکیل داده شده و دترمینان آن را بررسی می نماییم. برای تأمین شرط مورد نظر لازم است این حداقل یک ماتریس (M-1)*(M-1) با دترمینان مخالف صفر داشته باشد. یعنی رتبه ماتریس مذکور برابر M-1 باشد.

برای معادله اول خواهیم داشت:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -\gamma_{22} & 0 \\ 0 & -\gamma_{32} & 0 \\ 1 & 0 & -\gamma_{43} \end{vmatrix} = 0$$

تخمین سیستم معادلات همزمان

۱- روش تک معادله ای یا روش اطلاعات محدود

۲- روش سیستمی

روش تک معادله ای یا روش اطلاعات محدود

1) روش حداقل مربعات معمولی OLS برای مدلهای بازگشتی
2) روش حداقل مربعات غیرمستقیم ILS
3) روش حداقل مربعات دو مرحله ای 2SLS
4) روش حداکثر درستنمایی با اطلاعات محدود

روش سیستمی

1) روش حداقل مربعات سه مرحله ای 3SLS
2) روش حداکثر درستنمایی با اطلاعات کامل FIML

*روش حداقل مربعات معمولی OLS برای مدلهای بازگشتی

در این حالت رابطه دوسویه بین متغیرهای درونزا وجود ندارد.

$$Y_{1t} = \beta_{10} + \gamma_{11}X_{1t} + \gamma_{21}X_{2t} + u_{1t}$$

$$Y_{2t} = \beta_{20} + \beta_{21}Y_{1t} + \gamma_{11}X_{1t} + \gamma_{21}X_{2t} + u_{2t}$$

$$Y_{3t} = \beta_{30} + \beta_{31}Y_{1t} + \beta_{32}Y_{2t} + \gamma_{11}X_{1t} + \gamma_{21}X_{2t} + u_{3t}$$

❋روش حداقل مربعات غیرمستقیم ILS

روش بدست آوردن تخمین هایی از ضرایب ساختاری با استفاده از تخمین زنهایOLS ضرایب شکل خلاصه شده برای یک معادله ساختاری کاملاً مشخص روش حداقل مربعات غیرمستقیمILS نامیده می شود

روش حداقل مربعات دو مرحله ای 2SLS

برای معادلات بیش از حدتشخیص کاربرد دارد

$$Y_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{2t} + \alpha_2 X_{1t} + \alpha_3 X_{2t} + u_{1t}$$

$$Y_{2t} = \beta_0 + \beta_1 Y_{1t} + \beta_2 X_{3t} + \beta_3 X_{4t} + u_{2t}$$

معادله اول : $k = 2 \quad , \quad m = 2 \quad , \quad K - k = 2 > m - 1 = 1$

معادله دوم : $k = 2 \quad , \quad m = 2 \quad , \quad K - k = 2 > m - 1 = 1$

$$Y_{1t} = \pi_0 + \pi_1 X_{1t} + \pi_2 X_{2t} + \pi_3 X_{3t} + \pi_4 X_{4t} + v_{1t}$$

$$Y_{2t} = \pi_5 + \pi_6 X_{1t} + \pi_7 X_{2t} + \pi_8 X_{3t} + \pi_9 X_{5t} + v_{2t}$$

روش حداقل مربعات دو مرحله ای 2SLS

$$Y_{1t} = \hat{Y}_{1t} + \hat{v}_{1t}$$

$$Y_{2t} = \hat{Y}_{2t} + \hat{v}_{2t}$$

$$Y_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1(\hat{Y}_{2t} + \hat{v}_{2t}) + \alpha_3 X_{1t} + \alpha_4 X_{2t} + u_{1t}$$

$$Y_{2t} = \beta_0 + \beta_1(\hat{Y}_{1t} + \hat{v}_{1t}) + \beta_2 X_{3t} + \beta_3 X_{4t} + u_{2t}$$

$$Y_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{Y}_{2t} + \alpha_2 X_{1t} + \alpha_3 X_{2t} + \varepsilon_{1t} \quad , \quad \varepsilon_{1t} = u_{1t} + \alpha_1 \hat{v}$$

$$Y_{2t} = \beta_0 + \beta_1 \hat{Y}_{1t} + \beta_2 X_{3t} + \beta_3 X_{4t} + \varepsilon_{2t} \quad , \quad \varepsilon_{2t} = u_{2t} + \beta_1 \hat{v}$$

روش حداکثر درستنمایی با اطلاعات محدود

این روش مبتنی بر حداکثر نمودن تابع درستنمایی برای مشاهدات مربوط به متغیرهای درونزای موجود در معادله مورد نظر می باشد.

روش حداقل مربعات سه مرحله ای 3SLS

این روش در سه گام انجام می شود:

۱- تخمین فرم خلاصه شده برای متغیرهای درونزای موجود در هر معادله

۲- محاسبه $\hat{Y}_j = X\hat{\pi}_j$ و جایگذاری در معادلات مورد نظر و براورد ضرایب آنها

با استفاده از این براوردها خطای معادلات مورد نظر را حساب کرده و سپس واریانس و کواریانس بین جملات خطا را براورد می کنیم

۳-از روش حداقل مربعات وزنی(GLS) برای براورد سیستم معادلات استفاده می کنیم که وزن ها معادل با $\hat{\sigma}_{ij}$ هاست و در واقع می خواهیم ارتباط جملات اخلال را با وزن های انها وارد مدل کنیم.

روش حداکثر درستنمایی با اطلاعات کامل(FIML)

همان روش قبلی با این تفاوت که در این روش از تابع درستنمایی استفاده می شود که از تابع احتمال جملات خطای تمام معادلات استخراج می شود و با حداکثر نمودن این تابع تخمین زننده حداکثر درستنمایی بدست می آید.

یک دنیا سپاس از همراهی صبورانه
شما