

۳.۵ تکنیک رجحان ترتیبی با تشابه به جواب ایده‌آل

تکنیک رجحان ترتیبی با تشابه به جواب ایده‌آل که از این به بعد آن را TOPSIS^۱ می‌نامیم، از مجموعه روش‌های جبرانی MADM است که هوانگ و یون^۲ در سال ۱۹۸۱ ابداع کردند و در ادامه با آن آشنا خواهید شد. توضیح این تکنیک مستلزم آشنایی با مفاهیم ماتریس تصمیم، شاخص‌های درآمدی و هزینه‌ای، شاخص‌های کتی و کیفی و جواب ایده‌آل مثبت و منفی است که در ادامه معرفی خواهند شد. ماتریس تصمیم. ماتریس تصمیم جدولی است که به تعداد گزینه‌ها «سطر» و به تعداد شاخص‌ها «ستون» دارد و مقدار کسب‌شده هر گزینه i در شاخص j ، که در این ماتریس با x_{ij} به نمایش درمی‌آید، در جدول ۳۱.۵ نوشته می‌شود.

جدول ۳۱.۵ ماتریس تصمیم.

	x_1	x_2	$\dots$	x_n
A_1	x_{11}	x_{12}	$\dots$	x_{1n}
A_2	x_{21}	x_{22}	$\dots$	x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_m	x_{m1}	x_{m2}	$\dots$	x_{mn}

که در این ماتریس A_i ; $i = 1, 2, \dots, m$ گزینه‌ها و x_j ; $j = 1, 2, \dots, n$ شاخص‌ها را نشان می‌دهند، نمونه‌ای از این ماتریس را در جدول ۳۲.۵ مشاهده می‌کنید:

1. Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution.
2. Hwang and Yoon.

ماتریس تصمیم برای انتخاب عرضه‌کننده.

جدول ۳۲.۵

شاخص‌ها / گزینه‌ها	کیفیت	قیمت (هزار تومان)	خدمات بعد از فروش
عرضه‌کننده A	عالی	۳۰	خوب
عرضه‌کننده B	متوسط	۲۰	خوب
عرضه‌کننده C	خوب	۲۵	خیلی خوب

تقسیم‌بندی شاخص‌ها

شاخص‌ها از یک جنبه می‌توانند «کمی یا کیفی» و از جنبه دیگر «درآمدی یا هزینه‌ای» باشند. شاخص‌های کمی، شاخص‌هایی با مقادیر عددی واقعی‌اند و با مقیاس‌هایی مانند متر، کیلو، ریال، ... سنجیده می‌شوند اما شاخص‌های کیفی بر مبنای نظرسنجی اندازه‌گیری می‌شوند. برخی از پدیده‌ها را می‌توان هم با شاخص کمی و هم با شاخص کیفی سنجید. مثلاً اگر قیمت یک کالا را بر مبنای ارزش ریالی آن اندازه‌گیری کنید، از شاخص کمی استفاده کرده‌اید و اگر بگویید قیمت آن «زیاد، کم یا متوسط» است شاخص کیفی را به کار گرفته‌اید. مسلم است که همواره به کارگیری شاخص‌های کمی بر شاخص‌های کیفی در حوزه تحقیق در عملیات برتری دارد.

از دیگر سو، شاخص‌ها می‌توانند از نوع درآمدی یا هزینه‌ای باشند. شاخص‌های درآمدی، شاخص‌هایی‌اند که افزایش آن‌ها موجب رضایت تصمیم‌گیرنده و مطلوبیت بیش‌تر برای او می‌شود و شاخص‌های هزینه‌ای، آن‌هایی‌اند که هرچه کم‌تر باشند بهترند. شاخص‌های درآمدی و هزینه‌ای تنها مصداق ریالی ندارند، بلکه هر شاخصی را که افزایش آن موجب مطلوبیت برای تصمیم‌گیرنده می‌شود، به اصطلاح «درآمدی» می‌گویند. مثلاً سلامت، کیفیت و ... از نوع شاخص‌های درآمدی هستند و شاخص‌هایی مانند مصرف بنزین، میزان حوادث و ... از نوع هزینه‌ای قلمداد می‌شوند. در بعضی متون از واژه شاخص‌های با «جنبه مثبت» به جای شاخص‌های درآمد و از «جنبه منفی» به جای شاخص‌های هزینه استفاده می‌کنند.

جواب ایده‌آل مثبت و منفی

در تصمیم‌گیری‌های چندشاخصه، اولویت هر گزینه با توجه به شاخص‌های مختلف بررسی می‌شود و هر گزینه از نظر شاخص‌های مختلف، قوت‌ها و ضعف‌هایی دارد. جواب ایده‌آل مثبت گزینه‌ای است که همزمان مقدار برتر تمامی شاخص‌ها را در خود دارد. به عبارت دیگر، همزمان تمامی شاخص‌ها را در بهترین مقدار خود قرار می‌دهد و خوبی‌های گزینه‌های دیگر را برای هر شاخص به‌تنهایی دارد. آنچه خوبان همه دارند، گزینه‌ای ایده‌آل به‌تنهایی دارد و اگر بدترین‌های هر شاخص در یک گزینه جمع شود، گزینه به‌دست‌آمده را جواب ایده‌آل منفی می‌نامند. در ماتریس تصمیم جدول ۳۲.۵، بهترین کیفیت «عالی»، بهترین قیمت «۲۰» و بهترین خدمات بعد از فروش «خیلی خوب» است. سپس جواب ایده‌آل مثبت که آن را با A^+ نمایش می‌دهیم یک عرضه‌کننده فرضی است که:

$$A^+ = \{ \text{خیلی خوب، ۲۰، عالی} \}$$

و معیارهای هر ستون این جدول جواب ایده‌آل منفی A^- را نشان می‌دهد:

$$A^- = \{ \text{خوب: } 30, \text{ متوسط} \}$$

بهای نظری انتخاب و رتبه‌بندی گزینه‌ها در TOPSIS مقایسه هر گزینه با دو گزینه ایده‌آلی مثبت و منفی است. گزینه برتر گزینه‌ای است که کم‌ترین فاصله را با گزینه ایده‌آل مثبت و بیش‌ترین فاصله را با گزینه ایده‌آل منفی داشته باشد.

مراحل تصمیم‌گیری با TOPSIS

این مراحل شامل گام‌های زیر است:

۱. تشکیل ماتریس تصمیم
۲. نرمال‌سازی ماتریس تصمیم
۳. تشکیل ماتریس نرمال‌شده وزون
۴. تعیین جواب‌های ایده‌آل مثبت و منفی
۵. تعیین فاصله هر گزینه با جواب‌های ایده‌آل مثبت و منفی
۶. رتبه‌بندی و انتخاب گزینه برتر

گام ۱. ماتریس تصمیم را تشکیل دهید.

مهم‌ترین گام TOPSIS، تشکیل ماتریس تصمیم است. تصمیم‌گیرنده باید با توجه به هدف خود شاخص‌ها و گزینه‌ها را تعیین کند و ماتریس تصمیم را تشکیل می‌دهد. به ماتریس تصمیم زیر که برگرفته از کتاب تصمیم‌گیری چندشاخصه هوانگ و یون است، توجه کنید. ماتریس تصمیم برای انتخاب یکی از چهار هواپیمای جنگی است که با A_1, A_2, A_3 و A_4 نشان داده شده و شاخص‌های انتخاب هواپیما، سرعت برحسب مایخ x_1 ، شعاع پرواز برحسب مایل x_2 ، ظرفیت حمل مهمات برحسب پوند x_3 ، قیمت برحسب میلیون دلار x_4 ، قابلیت اعتماد x_5 و قدرت مانور x_6 هستند. داده‌های جمع‌آوری شده را در ماتریس جدول ۳۳.۵ مشاهده می‌کنید.

جدول ۳۳.۵ ماتریس تصمیم برای انتخاب هواپیمای جنگی.

شاخص / گزینه	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
A_1	۲	۱۵۰۰	۲۰۰۰۰	۵٫۵	خوب	فوق‌العاده
A_2	۲٫۵	۲۷۰۰	۱۸۰۰۰	۶٫۵	متوسط	خوب
A_3	۱٫۸	۲۰۰۰	۲۱۰۰۰	۴٫۵	خیلی خوب	خیلی خوب
A_4	۲٫۲	۱۸۰۰	۲۰۰۰۰	۵	خوب	خوب

دقت کنید که در این ماتریس چهار شاخص اول کتی و دو شاخص آخر کیفی هستند. در عین حال تمامی

توجه: در تمامی موارد آمارهای زیر در این کتاب

فقط برای مقاصد آموزشی و به منظور آشنایی با روش‌های آماری در این کتاب

است. این کتاب به هیچ وجه نباید به عنوان مرجع تخصصی در این زمینه

معتبر باشد.

جدول ۱: داده‌های آماری برای تحلیل واریانس

گروه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۱	۱۵۰۰	۱۰۰۰۰	۵۰۰	۲	۱
۲	۱,۵	۱۵۰۰	۱۵۰۰۰	۵۰۰	۲	۲
۳	۱,۸	۱۰۰۰	۱۵۰۰۰	۵۰۰	۲	۲
۴	۱,۲	۱۵۰۰	۱۰۰۰۰	۵۰۰	۲	۲

گام ۲: محاسبه ضرایب واریانس

در این مرحله، ضرایب واریانس برای هر یک از گروه‌های آماری محاسبه می‌شود. این ضرایب

با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌شوند:

در این فرمول، x_{ij} نشان دهنده مقدار مشاهده شده برای گروه i در دسته j است.

در اینجا، i نشان دهنده گروه آماری و j نشان دهنده دسته آماری است.

در اینجا، n_j نشان دهنده تعداد مشاهدات در دسته j است.

در اینجا، $\bar{x}_j$ نشان دهنده میانگین آماری دسته j است.

در اینجا، $\bar{x}$ نشان دهنده میانگین آماری کلی است.

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m x_{ij}^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

در این مثال، داده‌های آماری به صورت زیر است:

داده شده و به روش زیر تحلیل آماری می‌شود:

$$r_{11} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1500^2 + 10000^2 + 500^2}} = 0,2671$$

$$r_{12} = \frac{1,5}{\sqrt{1^2 + 1500^2 + 10000^2 + 500^2}} = 0,6829$$

$$r_{13} = \frac{1,8}{\sqrt{1^2 + 1500^2 + 10000^2 + 500^2}} = 0,2202$$

$$r_{14} = \frac{1,2}{\sqrt{1^2 + 1500^2 + 10000^2 + 500^2}} = 0,5139$$

در صورت نرمال‌سازی پنج ستون دیگر، ماتریس تصمیم نرمال‌شده جدول ۲۵.۵ بدست می‌آید.

جدول ۲۵.۵ ماتریس نرمال‌شده

$R =$

شاخص گزینه	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
A_1	۰,۴۶۷۱	۰,۳۶۶۲	۰,۵۰۵۶	۰,۵۰۶۳	۰,۴۸۱۱	۰,۶۷۰۸
A_2	۰,۶۸۳۹	۰,۶۵۹۱	۰,۴۵۵۰	۰,۵۹۸۳	۰,۲۸۸۷	۰,۳۷۲۷
A_3	۰,۴۲۰۴	۰,۴۸۸۲	۰,۵۳۰۸	۰,۴۱۲۳	۰,۶۷۳۶	۰,۵۲۱۷
A_4	۰,۵۱۳۹	۰,۴۳۹۲	۰,۵۰۵۶	۰,۴۶۰۳	۰,۴۸۱۱	۰,۵۷۲۷

گام ۳. ماتریس نرمال‌شده موزون را تشکیل دهید.

از آن‌جا که از نظر تصمیم‌گیرنده شاخص‌ها می‌توانند اهمیت‌های متفاوتی داشته باشند، باید تفاوت اهمیت‌ها را در تصمیم‌گیری دخالت داد. پس در این گام به هر شیوه دلخواه وزن شاخص‌ها را تعیین کنید و با ضرب کردن این وزن‌ها در ستون شاخص مربوط، ماتریس نرمال‌شده موزون را محاسبه کنید. مقدار موزون هر عدد نرمال‌شده r_{ij} با w_j نشان داده می‌شود.

در صورتی که وزن شش شاخص این مثال $[w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6] = [0,2, 0,1, 0,1, 0,2, 0,3]$ باشد، ماتریس نرمال‌شده موزون آن به صورت جدول ۲۶.۵ است:

جدول ۲۶.۵ ماتریس نرمال‌شده موزون

$V =$

شاخص گزینه	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
A_1	۰,۰۹۳۴	۰,۰۳۶۶	۰,۰۵۰۶	۰,۰۵۰۶	۰,۰۹۶۲	۰,۲۰۱۲
A_2	۰,۱۱۶۸	۰,۰۶۵۹	۰,۰۴۵۵	۰,۰۵۹۸	۰,۰۵۷۷	۰,۱۱۱۸
A_3	۰,۰۸۴۱	۰,۰۴۸۸	۰,۰۵۳۱	۰,۰۴۱۴	۰,۱۳۴۷	۰,۱۵۶۵
A_4	۰,۱۰۲۸	۰,۰۴۳۹	۰,۰۵۰۶	۰,۰۴۶۰	۰,۰۹۶۲	۰,۱۱۱۸

نمونه‌ای از مقادیر محاسبه‌شده در جدول بالا به صورت زیر است:

$$v_{11} = r_{11} \times w_1 = 0,4671 \times 0,2 = 0,0934$$

$$v_{12} = r_{12} \times w_2 = 0,3662 \times 0,1 = 0,0366$$

گام ۴. جواب‌های ایده‌آل مثبت و منفی را تعیین کنید.

جواب ایده‌آل مثبت که با A^+ نشان داده می‌شود از بهترین‌های هر ستون به دست می‌آید؛ یعنی بزرگ‌ترین عدد از ستون

شاخص‌های درآمدی و کوچک‌ترین عدد از سکون مربوط به شاخص‌های هزینه‌ای حاصل می‌شود. در این مسئله:

$$A^+ = [\underset{i}{\text{Max}} v_{i1}, \underset{i}{\text{Max}} v_{i2}, \underset{i}{\text{Max}} v_{i3}, \underset{i}{\text{Min}} v_{i4}, \underset{i}{\text{Max}} v_{i5}, \underset{i}{\text{Max}} v_{i6}]$$

$$= [0,1168, 0,0659, 0,0531, 0,0414, 0,1347, 0,2012]$$

$$A^- = [\underset{i}{\text{Min}} v_{i1}, \underset{i}{\text{Min}} v_{i2}, \underset{i}{\text{Min}} v_{i3}, \underset{i}{\text{Max}} v_{i4}, \underset{i}{\text{Min}} v_{i5}, \underset{i}{\text{Min}} v_{i6}]$$

$$= [0,0841, 0,0366, 0,0455, 0,0518, 0,0577, 0,1118]$$

پادآوری می‌شود که به جز شاخص چهارم که از نوع هزینه‌ای است، بقیه شاخص‌ها درآمدی هستند.

گام ۵. فاصله هر گزینه تا جواب‌های ایده‌آل مثبت و منفی را محاسبه کنید.

در این مرحله فاصله هر گزینه تا جواب‌های ایده‌آل مثبت و منفی سنجیده می‌شود. در واقع هر گزینه نقطه‌ای در فضای همدی است که فاصله آن تا نقطه دیگری در همان فضای برداری، که بیانگر جواب ایده‌آل مثبت و با منفی است، محاسبه می‌شود. این فاصله، فاصله‌ای اقلیدسی است که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^+)^2} \quad \text{فاصله گزینه } i \text{ تا جواب ایده‌آل مثبت}$$

$$S_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2} \quad \text{فاصله گزینه } i \text{ تا جواب ایده‌آل منفی}$$

که v_j^+ و v_j^- به ترتیب، بهترین و بدترین مقدار شاخص‌هایی است که جواب‌های ایده‌آل مثبت و منفی را تشکیل می‌دهند. برای نمونه فاصله گزینه اول (A_1) تا جواب‌های ایده‌آل مثبت و منفی (A^+, A^-) این گونه است:

$$S_1^+ = \sqrt{(0,0934 - 0,1168)^2 + (0,0366 - 0,0659)^2 + (0,0506 - 0,0531)^2 + (0,0506 - 0,0414)^2 + (0,0962 - 0,1347)^2 + (0,2012 - 0,2012)^2} = 0,0545$$

$$S_1^- = \sqrt{(0,0934 - 0,0841)^2 + (0,0366 - 0,0366)^2 + (0,0506 - 0,0455)^2 + (0,0506 - 0,0518)^2 + (0,0962 - 0,0577)^2 + (0,2012 - 0,1118)^2} = 0,0982$$

به همین ترتیب:

$$S_1^+ = 0,1197, S_2^+ = 0,0580, S_3^+ = 0,1009$$

$$S_1^- = 0,0439, S_2^- = 0,0920, S_3^- = 0,0458$$

گام ۶. گزینه برتر را با رتبه‌بندی آن‌ها تعیین کنید.
ملاک رتبه‌بندی و انتخاب گزینه برتر براساس میزان نزدیکی بودن هر گزینه به جواب ایده‌آل مثبت و دور بودن آن در جواب ایده‌آل منفی است که بر مبنای رابطه زیر به دست می‌آید:

$$C_i = \frac{S_i^-}{S_i^- + S_i^+} \quad \text{میزان نزدیکی نسبی به جواب ایده‌آل:}$$

پس:

$$C_1 = \frac{0,0983}{0,0983 + 0,0545} = 0,643$$

$$C_2 = 0,268, C_3 = 0,613, C_4 = 0,312$$

هر اندازه میزان نزدیکی نسبی به جواب ایده‌آل (C_i) محاسبه شده برای هر گزینه بیش‌تر باشد آن گزینه بهتر است. به این ترتیب، گزینه‌ها به شرح زیر رتبه‌بندی می‌شوند: A_1 رتبه اول، A_2 رتبه چهارم، A_3 رتبه دوم، A_4 رتبه **چهارم** ~~پنجم~~