

بسمه تعالی

تمرین‌های درس ریاضی عمومی (۱)، مدرس: محفوظ رستم‌زاده

مباحث: مختصات قطبی و اعداد مختلط

۱- زوج نقاط زیر را که در مختصات دکارتی نوشته شده‌اند به مختصات قطبی تبدیل کنید.

i. $(2, 0)$ ii. $(0, -1)$ iii. $(-\pi, \pi\sqrt{3})$ iv. $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ v. $(\ln 2, -1)$ vi. $(2, 3)$

۲- زوج نقاط زیر را که در مختصات قطبی نوشته شده‌اند به مختصات دکارتی تبدیل کنید.

i. $(2, \frac{\pi}{3})$ ii. $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ iii. $(1, -\pi\sqrt{3})$ iv. $(\sqrt{2}, 0)$ v. $(\ln 2, \frac{5\pi}{3})$ vi. $(3, \arctan 2)$

۳- معادلات زیر را که در مختصات دکارتی نوشته شده‌اند در مختصات قطبی بنویسید.

i. $x^2 + y^2 - x - y = 1$ ii. $\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$ iii. $x^2 + x + 1 = 0$
 iv. $xy = 1$ v. $ax + by + c = 0$ vi. $y \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = 1$

۴- معادلات زیر را که در مختصات قطبی نوشته شده‌اند در مختصات دکارتی بنویسید، سپس شکل آن‌ها را در مختصات دکارتی رسم کنید.

i. $r = 1$ ii. $r + 2 \sin \theta - 2 \cos \theta = \frac{2}{r}$ iii. $r + 1 = 2 \sin^2(\frac{\theta}{2})$
 iv. $\theta = 0$ v. $\sqrt{2r} \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{r+1}$ vi. $r^2 \cos(2\theta) = 1$

۵- نمودار معادلات قطبی زیر را رسم کنید.

i. $r = 2$ ii. $\theta = \frac{\pi}{3}$ iii. $r = 1 + \cos \theta$ iv. $r = \frac{1}{\theta}$ v. $r = 1 - 2 \cos \theta$ vi. $r = \sin(2\theta)$

۶- برای معادلات قطبی زیر زاویه‌ی بین خط مماس بر نمودار و شعاع حامل در یک نقطه‌ی دلخواه را به دست آورید. هم چنین طول خم را در بازه‌ی داده شده محاسبه کنید.

$$i. r = 1 + \sin \theta, \quad [0, \pi]$$

$$ii. r = \sin^3\left(\frac{\theta}{3}\right), \quad [0, \pi]$$

۷- عبارات زیر را به صورت یک عدد مختلط بنویسید.

$$I. (1+i)(-1-2i)|4-i\sqrt{5}| \quad II. i^{\sqrt{2}} \frac{(2-i)^2}{1-i} \quad III. \frac{1}{(2+2i)^2}$$

$$IV. (1+i)^{2015} \quad V. \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1394} \quad VI. \frac{1+i}{1-i} - \frac{i}{2+i}$$

۸- نمایش قطبی اعداد مختلط زیر را بنویسید.

$$(I) 2 \quad (II) -5i \quad (III) -\pi - i\pi\sqrt{3} \quad (IV) -\sqrt{2} + i\sqrt{6} \quad (V) 2 + 3i$$

۹- مکان هندسی نقاطی از صفحه را معین کنید که در روابط زیر صدق می‌کنند.

$$(I) |z|^2 + 2\bar{z} = 1 + i \quad (II) -\operatorname{Re}\{(z-1)(\bar{z}+1)\} + \operatorname{Im}(z^2-1) \leq 1$$

$$(III) z\bar{z} < \operatorname{Re}\left(\frac{2i}{1+i}\right) \quad (IV) \operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z}\right) = 1$$

برای به دست آوردن ریشه‌های n ام عدد مختلط $w = \rho e^{i\phi}$ ، یعنی به طور معادل برای حل معادله‌ی $z^n = w$ بهتر است از مختصات قطبی استفاده کنیم. بنابراین

$$z := re^{i\theta}, w := \rho e^{i\phi} \implies z^n = \{re^{i\theta}\}^n = r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\phi}$$

$$\iff r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = \rho(\cos \phi + i \sin \phi)$$

$$\iff r^n \cos n\theta + ir^n \sin n\theta = \rho \cos \phi + i\rho \sin \phi$$

$$\iff r^n \cos n\theta = \rho \cos \phi \text{ و } r^n \sin n\theta = \rho \sin \phi$$

$$\iff r^n = \rho \text{ و } n\theta = 2k\pi + \phi$$

$$\iff r = \sqrt[n]{\rho} \text{ و } \theta = \frac{2k\pi + \phi}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

بنابراین ریشه‌های n ام عدد مختلط $w = \rho e^{i\phi}$ عبارتند از:

$$z = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\sqrt[n]{k\pi + \phi}}{n} + i \sin \frac{\sqrt[n]{k\pi + \phi}}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

مثال: ریشه‌های $z^3 = 1$ را به دست آورید.

حل:

چون برای عدد 1 داریم: $1 = 1e^{i \times 0} = \rho e^{i\phi}$ بنابراین

$$z = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\sqrt[3]{k\pi + 0}}{3} + i \sin \frac{\sqrt[3]{k\pi + 0}}{3} \right) = \cos \frac{\sqrt[3]{k\pi}}{3} + i \sin \frac{\sqrt[3]{k\pi}}{3}, \quad k = 0, 1, 2$$

در نتیجه برای

$$k = 0: \quad z_1 = \cos \frac{0 \times \pi}{3} + i \sin \frac{0 \times \pi}{3} = 1$$

$$k = 1: \quad z_2 = \cos \frac{1 \times \pi}{3} + i \sin \frac{1 \times \pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 2: \quad z_3 = \cos \frac{2 \times \pi}{3} + i \sin \frac{2 \times \pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۰- معادلات زیر را در اعداد مختلط حل کنید.

$$(I) \quad z^2 - z + 3 = 0 \quad (II) \quad z^4 + 2 = 0$$

$$(III) \quad z^5 = 1 \quad (IV) \quad iz^5 - z^3 - z^2 - i = 0$$