به نام خدا

۱۳۰۷
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

آزمون پایان ترم ریاضی عمومی(۲) ۱۴۰۰/۳/۲۶ مدت پاسخگویی به سوالات و آپلود فایل‌ها: **۱۳۰ دقیقه**

**سوالات در دو صفحه تنظیم شده‌اند**

---

**۱)** اگر $D$ ناحیه محدود به مثلثی با رئوس $(0,0), (0,4), (2,4)$ باشد، حاصل انتگرال زیر را بیابید:

$$\iint_D \sin(y^2)\, dA$$

**۲)** مساحت سطحی از مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ را که بین صفحات $z = 0$ و $x + 2z = 3$ واقع شده بیابید.

**۳)** فرض کنید $R$ جسمی سه بعدی محدود به دو مخروط

$$z = \sqrt{3(x^2+y^2)} \quad \text{و} \quad z = \sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}$$

و کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ باشد. حجم $R$ را بیابید.

**۴) الف**- میدان برداری

$$\mathbf{F} = 6xy\,\mathbf{i} + 3x^2\,\mathbf{j}$$

را در نظر بگیرید. آیا $\mathbf{F}$ یک میدان برداری پایستار (بقا) است؟

**ب**- اگر $D$ ناحیه محدود به منحنی‌های $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$ باشد و $C$ مرز جهت‌دار $D$ با جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت باشد، حاصل $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ چقدر است؟

**ج**- کار نیروی میدان $\mathbf{F}$ در حرکت یک ذره در امتداد منحنی پارامتری زیر را بیابید.

$$x(t) = \arcsin t, \qquad y(t) = 1 - 2t, \quad 0 \le t \le 1$$

۵) فرض کنید

$$\mathbf{F} = \Big(y + \sin(x^{۲}z)\Big)\,\mathbf{i} \;+ \Big(۳x + \cos(z^{۲}y)\Big)\,\mathbf{j} \;+ \Big(۶z + \sin(x^{۲}y + xy^{۲})\Big)\,\mathbf{k}$$

یک میدان برداری باشد. حاصل انتگرال

$$\iint_S \mathbf{curl}\,\mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

را در صورتی بیابید که در آن رویه $S$ قسمتی از سطح کروی $x^{۲} + y^{۲} + (z - ۱)^{۲} = ۵$ است که بالای صفحه $xy$ قرار دارد و $\hat{\mathbf{N}}$ بردار قائم یکه رو به بیرون سطح $S$ است.

۶) شار میدان برداری

$$\mathbf{F} = \Big(z^{۲}e^{y^{۲}}\sin(y^{۲})\Big)\,\mathbf{i} + \Big(z^{۲}e^{x^{۲}}\sin(x^{۲})\Big)\,\mathbf{j} + \Big(\sin(x^{۲} + y^{۲})\Big)\,\mathbf{k}$$

را که از سطح جهت‌دار

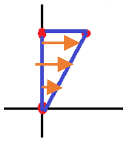
$$S: \quad \frac{x^{۲}}{۴} + \frac{y^{۲}}{۴} + \frac{z^{۲}}{۵} = ۱\,, \qquad z \geq ۰$$

با جهت رو به بیرون عبور می‌کند، بیابید. (دقت داشته باشید اگر چه $S$ یک سطح بسته نیست، اما می‌توان با افزودن یک رویه مناسب به آن، یک سطح بسته بدست آورد.)

موفق باشید

*zmoalemi@mail.kntu.ac.ir*

## پاسخ سوال ۱- انتگرال دوگانه (تعویض کران)



$$\xrightarrow{\text{تعویض کران}} \iint_D \sin(y^2)dA = \int_{y=0}^{y=4}\int_{x=0}^{x=\frac{y}{2}} \sin(y^2)dxdy = \int_{y=0}^{y=4} x\sin(y^2)\Big|_{x=0}^{x=\frac{y}{2}} dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=4}\frac{y}{2}\sin(y^2)dy = -\frac{1}{4}\cos(y^2)\Big|_{y=0}^{y=4} = -\frac{1}{4}\left(\cos(16)-1\right) = \boxed{\frac{1}{4}\left(1-\cos(16)\right)}$$

---

## پاسخ سوال ۲- انتگرال سطح (مساحت سطوح فضایی)

$$s = \iint ds$$

$$ds = \frac{|\vec{\nabla}_g|}{|\vec{\nabla}_g.\vec{k}|}dA \xrightarrow{g:x^2+y^2-z^2=0} ds = \frac{|(2x,2y,-2z)|}{|(2x,2y,-2z).(0,0,1)|}dA \to ds = \frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{2z}dA \to ds = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}dA$$

$$\xrightarrow{z^2=x^2+y^2} ds = \frac{\sqrt{z^2+z^2}}{z}dA \to ds = \frac{z\sqrt{2}}{z}dA \to ds = \sqrt{2}dA$$

$$\xrightarrow{s=\iint ds} s = \iint \sqrt{2}dA \to s = \sqrt{2}\iint dA$$

$$\xrightarrow[x+2z=3]{z^2=x^2+y^2} \left(\frac{3-x}{2}\right)^2 = x^2+y^2 \to \frac{1}{4}\left(9-6x+x^2\right) = x^2+y^2 \to 9-6x+x^2 = 4x^2+4y^2$$

$$\to 9 = 3x^2+6x+4y^2 \to 9 = 3(x+1)^2-3+4y^2 \to 12 = 3(x+1)^2+4y^2 \xrightarrow{\div 12} 1 = \frac{1}{4}(x+1)^2+\frac{1}{3}y^2$$

$$\to \frac{(x+1)^2}{2^2}+\frac{y^2}{\sqrt{3}^2} = 1\left(ellipsoid\right)$$

$$\to s = \sqrt{2}\pi(2)(\sqrt{3}) \to \boxed{s = 2\sqrt{6}\pi}$$

## پاسخ سوال ۳- انتگرال سه گانه (مختصات کروی)

$$V=\iiint dV$$

$$\begin{cases} z=\sqrt{\dfrac{1}{3}(x^2+y^2)} \xrightarrow{\tan\varphi=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}} \tan\varphi=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}} \to \tan\varphi=\sqrt{3} \to \varphi=\dfrac{\pi}{3} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \xrightarrow{\tan\varphi=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}} \tan\varphi=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3(x^2+y^2)}} \to \tan\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \to \varphi=\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[x^2+y^2+z^2=4]{\text{Spherical coordinate}} V=\iiint r^2 dr d\theta \sin\varphi d\varphi \to V=\int_{\varphi=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} r^2 dr d\theta \sin\varphi d\varphi$$

$$\to V=\left(\int_0^2 r^2 dr\right)\left(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{\varphi=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin\varphi d\varphi\right)$$

$$\to V=\left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^2\right)\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)\left(-\cos\varphi\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\right) \to V=\left(\frac{8}{3}\right)(2\pi)\left(-\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{6}\right)\right) \to V=\left(\frac{8}{3}\right)(2\pi)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right) \to \boxed{V=\frac{8}{3}\pi(\sqrt{3}-1)}$$

---

## پاسخ سوال ۴- انتگرال خم (پتانسیل و گرین)

$$curlF=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 6xy & 3x^2 & 0 \end{vmatrix}=(0,0,6x-6x)=\boxed{\vec{0}}$$

الف) چون کرل برابر صفر شد یعنی میدان پایستار است.

$$\xrightarrow{Green} \int F.dr=\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\iint(6x-6x)dA=\boxed{0}$$

$$\xrightarrow{\text{Potential function}} \int F.dr=\int Pdx+\int^{*} Qdy$$

$$=\int 6xydx+0=3x^2y\Big|_{t=0\to(0,1)}^{t=1\to(\frac{\pi}{2},-1)}$$

$$=3\left(-\frac{\pi^2}{4}-0\right)=\boxed{\frac{-3}{4}\pi^2}$$

## پاسخ سوال ۵- انتگرال سطح (صورت اول استوکس)

$$\iint curl\vec{F}.\vec{n}ds$$

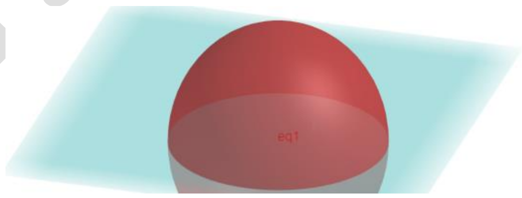
$$\vec{n}ds=\frac{\vec{\nabla}_g}{|\vec{\nabla}_g.\vec{k}|}dA\xrightarrow{z=0}\vec{n}ds=\frac{(0,0,1)}{|(0,0,1).(0,0,1)|}dA\to\vec{n}ds=(0,0,1)dA$$

$$curlF=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+\sin(x^2z) & 3x+\cos(z^2y) & 6z+\sin(x^2y+xy^2)\end{vmatrix}=(0,0,3-1)=(0,0,2)$$

$$\to\iint curl\vec{F}.\vec{n}ds=\iint(0,0,2).(0,0,1)dA=\iint 2dA=2\iint dA\xrightarrow{x^2+y^2+(z-1)^2=5\xrightarrow{z=0}x^2+y^2=4}=2(\pi(2^2))=\boxed{8\pi}$$

---

## پاسخ سوال ۶- انتگرال سطح (دیورژانس)



$$\iint_{half\ sphere}\vec{F}.\vec{n}ds+\iint_{plane}\vec{F}.\vec{n}ds=\iiint divFdV$$

$$divF=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}=0+0+0=0$$

$$\to\iint_{half\ sphere}\vec{F}.\vec{n}ds+\iint_{plane}\vec{F}.\vec{n}ds=0$$

$$\xrightarrow[z=0]{plane}\vec{n}ds=-\frac{\vec{\nabla}_g}{|\vec{\nabla}_g.\vec{k}|}dA\to\vec{n}ds=-\frac{(0,0,1)}{|(0,0,1).(0,0,1)|}dA\to\vec{n}ds=-(0,0,1)dA$$

$$\to\iint_{plane}\vec{F}.\vec{n}ds=-\iint_{plane}\left(0,0,\sin(x^2+y^2)\right).(0,0,1)dA=-\iint_{plane}\sin(x^2+y^2)dA$$

$$\xrightarrow{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{5}=1\xrightarrow{z=0}x^2+y^2=4}=-\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\sin(r^2)rdrd\theta=\left(\int_0^2\sin(r^2)rdr\right)\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\right)$$

$$=-\left(-\frac{1}{2}\cos(r^2)\Big|_{r=0}^{2}\right)\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{1}{2}(\cos(4)-1)(2\pi)=\boxed{(\cos(4)-1)\pi}$$

$$\xrightarrow{\iint_{half\ sphere}\vec{F}.\vec{n}ds+\iint_{plane}\vec{F}.\vec{n}ds=0}\iint_{half\ sphere}\vec{F}.\vec{n}ds+(\cos(4)-1)\pi=0\to\boxed{\iint_{half\ sphere}\vec{F}.\vec{n}ds=(1-\cos(4))\pi}$$