فصل ۳

معادلات خطی مرتبهٔ دوم

معادلات خطی مرتبهٔ دوم به دو دلیل در مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل از اهمیت اساسی برخوردارند. اول آنکه ساختار نظری معادلات خطی چنان پربار است که شالودهٔ چند روش سامان‌مند حل است. علاوه بر این، بخش عمدهٔ این ساختار و این روشها در سطح ریاضیات کاملاً مقدماتی قابل فهم است. برای اینکه ایده‌های کلیدی را در ساده‌ترین چارچوب ممکن معرفی کنیم، در این فصل آنها را برای معادلات مرتبهٔ دوم تشریح می‌کنیم. دلیل دیگر برای مطالعهٔ معادلات خطی مرتبهٔ دوم این است که این نوع معادله‌ها برای هر بررسی جدی مباحث کلاسیک فیزیک ریاضی حیاتی هستند. به مجرد اینکه در مکانیک سیالات، انتقال حرارت، حرکت موج یا پدیده الکترومغناطیس پیش برویم، درمی‌یابیم که لازم است بتوانیم معادله‌های خطی مرتبهٔ دومی را حل کنیم. به‌عنوان مثال، نوسانهای بعضی از سیستم‌های مکانیکی و الکتریکی ساده را در انتهای فصل بررسی می‌کنیم.

۱.۳ معادلات همگن با ضرایب ثابت

معادلهٔ دیفرانسیل عادی مرتبهٔ دوم به‌صورت

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \qquad (1)$$

است که در آن f تابع مفروضی است. چون متغیر مستقل در اغلب مسئله‌های فیزیکی زمان است معمولاً متغیر مستقل را با t نشان می‌دهیم، اما گاهی به‌جای آن از x استفاده می‌کنیم. از y و گاهی از حروف دیگر برای متغیر وابسته استفاده می‌کنیم. می‌گوییم معادلهٔ (۱) **خطی** است اگر تابع f به‌صورت

$$f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = g(t) - p(t)\frac{dy}{dt} - q(t)y \qquad (2)$$

باشد؛ یعنی f نسبت به y و dy/dt خطی باشد. در معادلهٔ (۲) g، p و q تابعهایی مشخص از متغیر مستقل t هستند؛ اما به y بستگی ندارند. در این حالت معمولاً معادلهٔ (۱) را به‌صورت

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \qquad (3)$$

بازنویسی می‌کنیم که در آن «پریم» مشتق‌گیری نسبت به t را نشان می‌دهد. اغلب به‌جای معادلهٔ (۳) به معادلهٔ

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = G(t) \tag{۴}$$

برمی‌خوریم که البته اگر $P(t) \neq 0$، می‌توانیم معادلهٔ (۴) را بر $P(t)$ تقسیم کنیم و به معادلهٔ (۳) با

$$p(t) = \frac{Q(t)}{P(t)}, \qquad q(t) = \frac{R(t)}{P(t)}, \qquad g(t) = \frac{G(t)}{P(t)} \tag{۵}$$

برسیم. هنگام بحث معادلهٔ (۳) و تلاش برای حل آن، خود را به بازه‌هایی محدود می‌کنیم که در آن p، q و g پیوسته هستند.[1]

اگر معادلهٔ (۱) به‌صورت (۳) و (۴) نباشد، به آن **غیرخطی** می‌گوییم. بررسی تحلیلی معادلات غیرخطی نسبتاً مشکل است، بنابراین چندان چیزی نداریم که در این کتاب دربارهٔ آنها بگوییم. اغلب روشهای عددی یا هندسی برای حل این معادله‌ها مناسب‌ترند و این روشها در فصلهای ۸ و ۹ بررسی می‌شوند.

هر مسئلهٔ مقدار اولیه شامل یک معادلهٔ دیفرانسیل مانند (۱) و (۳) یا (۴) به‌همراه یک جفت شرط اولیه به‌صورت

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y'_0 \tag{۶}$$

است که در آن y_0 و y'_0 مقدارهای مشخصی برای y و y' در نقطهٔ ابتدایی t_0 هستند. توجه کنید که شرایط اولیه برای معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم علاوه بر مشخص کردن نقطهٔ خاص (t_0, y_0) که نمودار جواب باید از آن بگذرد، شیب y'_0 نمودار در آن نقطه را هم مشخص می‌کند. از آنجا که، قطع نظر از جزئیات، برای یافتن جواب معادلهٔ مرتبهٔ دوم دو انتگرال‌گیری لازم است و هر انتگرال‌گیری یک ثابت دلخواه را اضافه می‌کند، منطقی است انتظار داشته باشیم که دو شرط اولیه برای معادلهٔ مرتبهٔ دوم لازم باشد. علی‌القاعده، دو شرط اولیه برای تعیین مقدار این دو ثابت کافی هستند.

اگر جملهٔ $g(t)$ در معادلهٔ (۳) یا جملهٔ $G(t)$ در معادلهٔ (۴) به‌ازای هر t صفر باشد، به معادله **همگن** می‌گوییم و در غیر این‌صورت به آن **غیرهمگن** می‌گوییم. در نتیجه، گاهی به جملهٔ $g(t)$ یا $G(t)$ جملهٔ غیرهمگن می‌گوییم. بحث را با معادلات همگن شروع می‌کنیم که آنها را به‌صورت

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = 0 \tag{۷}$$

می‌نویسیم. بعداً در بخش‌های ۵.۳ و ۶.۳ نشان می‌دهیم که اگر بتوانیم معادلهٔ همگن (۷) را حل کنیم، می‌توانیم معادلهٔ غیرهمگن (۴) را هم حل کنیم و یا حداقل می‌توانیم آن را به‌صورت انتگرال بیان کنیم. پس مسئلهٔ بنیادی‌تر حل معادلات همگن است.

در این فصل توجه خود را به معادلاتی معطوف می‌کنیم که در آن تابعهای P، Q و R ثابت هستند. در این حالت معادلهٔ (۱۷) به

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{۸}$$

۱. معادلات خطی مرتبهٔ بالاتر متناظر را در فصل ۴ بررسی کرده‌ایم. اگر مایلید می‌توانید بخش‌های مناسب از فصل ۴ را به موازات فصل ۳ مطالعه کنید.

تبدیل می‌شود که در آن a، b و c ثابتهای مفروضی هستند. خواهیم دید که همواره می‌توان معادلهٔ (۸) را برحسب توابع مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال حل کرد. از طرف دیگر، اگر ضرایب ثابت نباشند معمولاً حل معادلهٔ (۷) بسیار مشکل است و بررسی این نوع معادله‌ها را تا فصل ۵ به تعویق می‌اندازیم. قبل از بررسی معادلهٔ (۸)، می‌خواهیم با مثالی ساده که از جنبه‌های مختلف مثالی کلی است کمی تجربه کسب کنیم.

مثال ۱

معادلهٔ

$$y'' - y = 0 \tag{۹}$$

را حل کنید و جوابی را بیابید که در شرایط اولیهٔ

$$y(0) = 2, \qquad y'(0) = -1 \tag{۱۰}$$

صدق کند.

توجه کنید که معادلهٔ (۹) همان معادلهٔ (۸) با $a = 1$، $b = 0$ و $c = -1$ است. معادلهٔ (۹) بیان می‌کند که در جستجوی تابعی با این خاصیت هستیم که مشتق دوم آن با خود تابع یکی باشد. آیا بین توابعی که در حساب دیفرانسیل و انتگرال مطالعه کرده‌اید چنین تابعی را می‌شناسید؟ با کمی تفکر احتمالاً چنین تابعی پیدا می‌شود: تابع نمایی $y_1(t) = e^t$. با کمی تفکر بیشتر، احتمالاً به تابع دوم $y_2(t) = e^{-t}$ هم می‌رسیم. آزمایش نشان می‌دهد که مضارب ثابت این جوابها هم جواب هستند. به‌عنوان مثال $2e^t$ و $5e^{-t}$ هم در معادلهٔ (۹) صدق می‌کنند — می‌توانید این موضوع را با محاسبهٔ مشتق دوم آنها تحقیق کنید. به همین ترتیب، تابعهای $c_1y_1(t) = c_1e^t$ و $c_2y_2(t) = c_2e^{-t}$ هم به‌ازای همهٔ مقادیر c_1 و c_2 در معادلهٔ دیفرانسیل (۹) صدق می‌کنند.

این نکته را هم نباید از یاد برد که مجموع هر دو جواب از معادلهٔ (۹) هم جواب است. به‌ویژه، چون $c_1y_1(t)$ و $c_2y_2(t)$ جوابهای معادلهٔ (۹) هستند، به‌ازای هر مقدار c_1 و c_2، تابع

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} \tag{۱۱}$$

هم جواب است. مجدداً، این موضوع را می‌توان با توجه به معادلهٔ (۱۱) و محاسبهٔ مشتق مرتبهٔ دوم، y''، تحقیق کرد: چون $y' = c_1e^t - c_2e^{-t}$ و $y'' = c_1e^t + c_2e^{-t}$، y'' همان y است و معادلهٔ (۹) برقرار است.

اکنون می‌خواهیم آنچه را که تا به حال در این مثال انجام داده‌ایم خلاصه کنیم. پس از اینکه متوجه شدیم که $y_1(t) = e^t$ و $y_2(t) = e^{-t}$ جوابهای معادلهٔ (۹) هستند، نتیجه می‌شود که ترکیب خطی کلی (۱۱) از این تابعها هم جواب است. چون ضرایب c_1 و c_2 در معادلهٔ (۱۱) دلخواه هستند، این عبارت خانواده‌ای نامتناهی از جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل (۹) را نمایش می‌دهد.

حال به بررسی نحوهٔ انتخاب عضوی دلخواه از این خانوادهٔ نامتناهی می‌پردازیم که در شرایط اولیهٔ داده‌شدهٔ (۱۰) صدق کند. به‌عبارت دیگر، در جستجوی جوابی هستیم که از نقطهٔ $(0, 2)$ بگذرد و در آن نقطه شیب -1 داشته باشد. ابتدا در معادلهٔ (۱۱) قرار می‌دهیم $t = 0$ و $y = 2$ که به معادلهٔ

$$c_1 + c_2 = 2 \tag{۱۲}$$

منجر می‌شود. حال از معادلهٔ (۱۱) مشتق می‌گیریم که نتیجه می‌دهد

$$y' = c_1e^t - c_2e^{-t}.$$

با جایگزینی $t=0$ و $y'=-1$، نتیجه می‌شود

$$c_1 - c_2 = -1. \tag{13}$$

با حل همزمان معادله‌های (۱۲) و (۱۳) نسبت به c_1 و c_2 نتیجه می‌شود

$$c_1 = \frac{1}{2}, \qquad c_2 = \frac{3}{2}. \tag{14}$$

درنهایت، با جایگزینی این مقادیر در معادلهٔ (۱۱)، جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ شامل معادلهٔ دیفرانسیل (۹) و شرایط اولیهٔ (۱۰) به‌دست می‌آید که عبارت است از

$$y = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{3}{2}e^{-t} \tag{15}$$

از مثال قبل چه نتیجه‌هایی می‌توانیم به‌دست بیاوریم که در بررسی معادلهٔ کلی‌تر (۸)، یعنی

$$ay'' + by' + cy = 0$$

که ضرایب آن ثابتهای دلخواه (حقیقی) هستند کمکمان کنند؟ ابتدا اینکه در مثال، جوابها توابع نمایی هستند. علاوه بر این، پس از آنکه دو تا از جوابها را شناسایی کردیم، توانستیم از ترکیبی از آنها استفاده کنیم که هم در شرایط اولیه صدق می‌کرد و هم در خود معادلهٔ دیفرانسیل.

با بکارگیری این دو ایده، می‌توانیم معادلهٔ (۸) را به‌ازای هر مقدار ضرایب طوری حل کنیم که جواب در مجموعهٔ شرایط اولیه برای y و y' هم صدق کند. کار را با جستجوی جوابهای نمایی به‌صورت $y = e^{rt}$ شروع می‌کنیم که در آن r پارامتری است که باید تعیین شود. در این‌صورت $y' = re^{rt}$ و $y'' = r^2e^{rt}$. با جایگزینی این عبارتها به‌جای y، y' و y'' در معادلهٔ (۸) نتیجه می‌شود

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0$$

یا، چون $e^{rt} \neq 0$،

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{16}$$

به معادلهٔ (۱۶) **معادلهٔ مشخصهٔ** معادلهٔ دیفرانسیل (۸) می‌گوییم. اهمیت معادلهٔ مشخصه در این است که اگر r ریشه‌ای از چندجمله‌ای (۱۶) باشد، $y = e^{rt}$ جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل (۸) است. چون معادلهٔ (۱۶) چندجمله‌ای مرتبهٔ دوم با ضرایب حقیقی است، دو ریشه دارد که ممکن است حقیقی و متمایز، حقیقی و تکراری یا مزدوج مختلط باشند. حالت اول را اینجا و دو حالت دیگر را در بخشهای ۳.۳ و ۴.۳ بررسی می‌کنیم.

فرض کنید ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ (۱۶) حقیقی و متمایز باشند. آنها را با r_1 و r_2 نشان می‌دهیم که $r_1 \neq r_2$. در این‌صورت $y_1(t) = e^{r_1t}$ و $y_2(t) = e^{r_2t}$ دو جواب معادلهٔ (۸) هستند. مانند مثال ۱، نتیجه می‌شود که

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} \tag{17}$$

نیز جوابی برای معادلهٔ (۸) است. برای تأیید این مطلب از عبارت معادلهٔ (۱۷) مشتق می‌گیریم که نتیجه می‌دهد

$$y' = c_1r_1e^{r_1t} + c_2r_2e^{r_2t} \tag{18}$$

و

$$y'' = c_1r_1^2e^{r_1t} + c_2r_2^2e^{r_2t}. \tag{19}$$

با جایگزینی این عبارتها به‌جای y، y' و y'' در معادلهٔ (۸) و مرتب کردن جمله‌ها نتیجه می‌شود

$$ay'' + by' + cy = c_1(ar_1^2 + br_1 + c)e^{r_1t} + c_2(ar_2^2 + br_2 + c)e^{r_2t}. \tag{20}$$

چون r_1 و r_2 ریشه‌های معادلهٔ (۱۶) هستند مقدار عبارت هر یک از پرانتزهای طرف راست معادلهٔ (۲۰) صفر است؛ بنابراین y داده‌شده در معادلهٔ (۱۷) واقعاً جواب معادلهٔ (۸) است، همان که می‌خواستیم.

حال فرض کنید که می‌خواهیم عضو خاصی از خانوادهٔ جوابهای (۱۷) را به‌دست بیاوریم که در شرایط اولیهٔ (۶)، یعنی

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y'_0$$

صدق کند. با جایگزینی $t = t_0$ و $y = y_0$ در معادلهٔ (۱۷) نتیجه می‌شود

$$c_1e^{r_1t_0} + c_2e^{r_2t_0} = y_0. \tag{21}$$

به‌طور مشابه، جایگزینی $t = t_0$ و $y' = y'_0$ در معادلهٔ (۱۸) نتیجه می‌دهد

$$c_1r_1e^{r_1t_0} + c_2r_2e^{r_2t_0} = y'_0. \tag{22}$$

با حل همزمان معادله‌های (۲۱) و (۲۲) نسبت به c_1 و c_2 نتیجه می‌شود

$$c_1 = \frac{y'_0 - y_0r_2}{r_1 - r_2}e^{-r_1t_0}, \qquad c_2 = \frac{y_0r_1 - y'_0}{r_1 - r_2}e^{-r_2t_0}. \tag{23}$$

به‌خاطر بیاورید که $r_1 - r_2 \neq 0$، بنابراین عبارت (۲۳) همواره بامعنی است. پس صرف‌نظر از شرایط اولیهٔ داده‌شده، یعنی صرف‌نظر از مقادیر t_0، y_0 و y'_0 در معادلهٔ (۶)، همواره می‌توان c_1 و c_2 را طوری تعیین کرد که شرایط اولیه برقرار باشند. علاوه بر این، به‌ازای هر مجموعه از شرایط اولیه تنها یک انتخاب برای c_1 و c_2 موجود است. با مقدارهای c_1 و c_2 داده‌شده در معادلهٔ (۲۳)، عبارت (۱۷) جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y'_0 \tag{24}$$

است.

بر پایهٔ قضیهٔ بنیادی که در بخش بعد بیان می‌شود، می‌توان ثابت کرد که حداقل در حالتی که ریشه‌های معادلهٔ (۱۶) حقیقی و متمایز هستند، همهٔ جوابهای معادلهٔ (۸) مشمول در عبارت (۱۷) هستند؛ بنابراین به معادلهٔ (۱۷) جواب عمومی معادلهٔ (۸) می‌گوییم. این واقعیت که هر شرط اولیهٔ احتمالی را می‌توان با انتخاب مناسب ضرایب در معادلهٔ (۱۷) برآورده کرد، این ایده را که عبارت (۱۷) شامل همهٔ جوابهای معادلهٔ (۸) است پذیرفتنی می‌کند. به چند مثال دیگر توجه کنید.

مثال ۲

جواب عمومی معادلهٔ

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \qquad (۲۵)$$

را به‌دست بیاورید.

فرض می‌کنیم $y = e^{rt}$، در این‌صورت r باید ریشهٔ معادلهٔ مشخصهٔ

$$r^2 + 5r + 6 = (r+2)(r+3) = 0$$

باشد. پس مقادیر ممکن r عبارت‌اند از $r_1 = -2$ و $r_2 = -3$؛ جواب عمومی معادلهٔ (۲۵) عبارت است از

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}. \qquad (۲۶)$$

مثال ۳

جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 3 \qquad (۲۷)$$

را به‌دست بیاورید.

جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل در مثال (۲) پیدا شد و آن را در معادلهٔ (۲۶) آوردیم. برای برآورده‌شدن اولین شرط اولیه، در معادلهٔ (۲۶) قرار می‌دهیم $t = 0$ و $y = 2$؛ پس c_1 و c_2 باید در

$$c_1 + c_2 = 2 \qquad (۲۸)$$

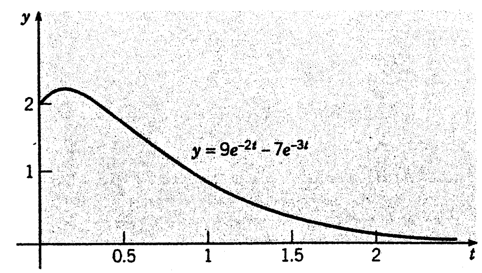
صدق کنند. برای استفاده از شرط اولیهٔ دوم، باید از معادلهٔ (۲۶) مشتق بگیریم. چون $y' = -2c_1e^{-2t} - 3c_2e^{-3t}$، با جایگزینی $t = 0$ و $y' = 3$ نتیجه می‌شود

$$-2c_1 - 3c_2 = 3. \qquad (۲۹)$$

با حل همزمان معادله‌های (۲۸) و (۲۹) نتیجه می‌شود $c_1 = 9$ و $c_2 = -7$. با استفاده از این مقادیر در عبارت (۲۶) جواب

$$y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t} \qquad (۳۰)$$

را برای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲۷) به‌دست می‌آوریم. نمودار جواب در شکل ۱.۱.۳ نشان داده شده است.



شکل ۱.۱.۳ جواب $y'' + 5y' + 6y = 0$، $y(0) = 2$ و $y'(0) = 3$.

مثال ۴

جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$4y'' - 8y' + 3y = 0, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = \frac{1}{2} \qquad (۳۱)$$

را به‌دست بیاورید.

اگر $y = e^{rt}$، معادلهٔ مشخصه عبارت است از

$$4r^2 - 8r + 3 = 0$$

و ریشه‌های آن عبارت‌اند از $r = \frac{3}{2}$ و $r = \frac{1}{2}$. بنابراین جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل عبارت است از

$$y = c_1 e^{3t/2} + c_2 e^{t/2}. \qquad (۳۲)$$

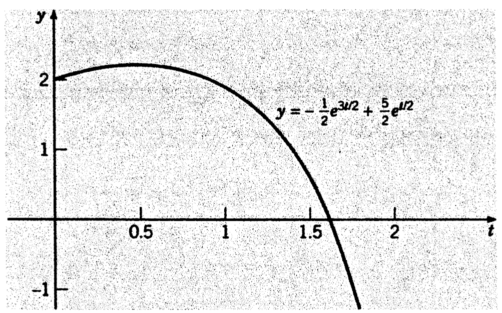
با استفاده از شرایط اولیه، معادله‌های

$$c_1 + c_2 = 2, \qquad \frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = \frac{1}{2}$$

برحسب c_1 و c_2 به‌دست می‌آیند. جواب این دستگاه عبارت است از $c_1 = -\frac{1}{2}$ و $c_2 = \frac{5}{2}$، بنابراین جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۳۱) عبارت است از

$$y = -\frac{1}{2}e^{3t/2} + \frac{5}{2}e^{t/2}. \qquad (۳۳)$$

نمودار جواب در شکل ۲.۱.۳ نشان داده شده است.



شکل ۲.۱.۳ جواب $4y'' - 8y' + 3y = 0$، $y(0) = 2$، $y'(0) = 0{,}5$.

مثال ۵

جواب (۳۰) برای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲۷) ابتدا افزایشی است (چون شیب اولیه مثبت است)، اما درنهایت به صفر میل می‌کند (چون هر دو جمله شامل توابع نمایی با نمای منفی هستند). بنابراین جواب باید نقطهٔ ماکزیمم داشته باشد و نمودار ۱.۱.۳ هم این موضوع را تأیید می‌کند. موقعیت این نقطهٔ ماکزیمم را تعیین کنید.

مختصات نقطهٔ ماکزیمم را می‌توان از روی نمودار تخمین زد، اما برای تعیین دقیق‌تر آنها، در جستجوی نقطه‌ای هستیم که جواب در آن مماس افقی دارد. با مشتق‌گیری از جواب (۳۰)، یعنی $y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$، نسبت به t نتیجه می‌شود

$$y' = -18e^{-2t} + 21e^{-3t}. \qquad (۳۴)$$

با قرار دادن y' برابر صفر و ضرب طرفین در $e^{۳t}$، نقطهٔ بحرانی t_m به‌دست می‌آید که در $e^t = ۷/۶$ صدق می‌کند، بنابراین

$$t_m = \ln(۷/۶) \cong ۰٫۱۵۴۱۵. \qquad (۳۵)$$

مقدار ماکزیمم متناظر، y_m، با عبارت

$$y_m = ۹e^{-۲t_m} - ۷e^{-۳t_m} = \frac{۱۰۸}{۴۹} \cong ۲٫۲۰۴۰۸ \qquad (۳۶)$$

پیدا می‌شود.

در این مثال، شیب اولیه ۳ است، اما جواب به‌ازای هر شیب اولیهٔ مثبت دیگر نیز به‌طور مشابه رفتار می‌کند. در مسئلهٔ ۲۶ از شما خواسته‌ایم که چگونگی وابستگی مختصات نقطهٔ ماکزیمم به شیب اولیه را معیّن کنید.

با بازگشت به معادلهٔ $ay'' + by' + cy = ۰$ با ضرایب دلخواه، یادآوری می‌کنیم که اگر r_1 و r_2 حقیقی باشند و $r_1 \neq r_2$، جواب عمومی (۱۷) مجموع دو تابع نمایی است؛ بنابراین جواب رفتار هندسی نسبتاً ساده‌ای دارد: با افزایش t یا جواب به صفر میل می‌کند (وقتی هر دو نما منفی باشند) یا به سرعت رشد می‌کند (وقتی حداقل یکی از نماها مثبت باشد). این دو حالت را می‌توان در جوابهای مثالهای ۳ و ۴ که به‌ترتیب در شکلهای ۱.۱.۳ و ۲.۱.۳ نشان داده شده‌اند دید. حالت سومی هم وجود دارد که کمتر رخ می‌دهد: اگر یکی از نماها صفر و دیگری منفی باشد، جواب به یک ثابت میل می‌کند.

در بخش‌های ۳.۳ و ۴.۳ به مسئلهٔ حل معادلهٔ $ay'' + by' + cy = ۰$ که در آن ریشه‌های معادلهٔ مشخصه مزدوج مختلط و یا حقیقی و تکراری باشند بازمی‌گردیم. در ضمن، در بخش ۲.۳، ساختار ریاضی جوابهای همهٔ معادلات خطی مرتبهٔ دوم همگن را به شکل نظام‌مند بررسی می‌کنیم.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۸، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده را به‌دست بیاورید.

۱. $y'' + ۳y' - ۴y = ۰$

۲. $۲y'' - ۳y' + y = ۰$

۳. $۶y'' - y' - y = ۰$

۴. $y'' + ۳y' + ۲y = ۰$

۵. $y'' + ۵y' = ۰$

۶. $۹y'' - ۱۶y = ۰$

۷. $y'' - ۹y' + ۹y = ۰$

۸. $y'' - ۲y' - ۲y = ۰$

در هر یک از مسئله‌های ۹ تا ۱۶، جواب مسئلهٔ مقدار اولیه را به‌دست بیاورید. نمودار جواب را رسم کنید و رفتار آن با افزایش t را توصیف کنید.

۹. $y'' - ۳y' + ۲y = ۰$، $y(۰) = ۱$، $y'(۰) = ۱$

۱۰. $y'' + ۴y' + ۳y = ۰$، $y(۰) = ۲$، $y'(۰) = -۱$

۱۱. $y'' + ۵y' + ۳y = ۰$، $y(۰) = ۱$، $y'(۰) = ۰$

۱۲. $y'' + ۳y' = ۰$، $y(۰) = -۲$، $y'(۰) = ۳$

۱۳. $۶y'' - ۵y' + y = ۰$، $y(۰) = ۴$، $y'(۰) = ۰$

۱۴. $۲y'' + y' - ۴y = ۰$، $y(۰) = ۰$، $y'(۰) = ۱$

۱۵. $y'' + ۸y' - ۹y = ۰$، $y(۱) = ۱$، $y'(۱) = ۰$

۱۶. $۴y'' - y = ۰$، $y(-۲) = ۲$، $y'(-۲) = -۱$

۱۷. معادلهٔ دیفرانسیلی بیابید که جواب عمومی آن $y = c_1e^{۲t} + c_2e^{-۳t}$ باشد.

۱۸. معادلهٔ دیفرانسیلی بیابید که جواب عمومی آن $y = c_1e^{-t/۲} + c_2e^{۲t}$ باشد.

۱۹. جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'' - y = ۰, \qquad y(۰) = \frac{۵}{۴}, \qquad y'(۰) = -\frac{۳}{۴}$$

را به‌دست بیاورید. جواب را به‌ازای $۰ \leq t \leq ۲$ رسم کنید و مقدار مینیمم آن را تعیین کنید.

۲۰. جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$۲y'' - ۳y' + y = ۰, \qquad y(۰) = ۲, \qquad y'(۰) = \frac{۱}{۲}$$

را به‌دست بیاورید. مقدار ماکزیمم جواب را تعیین کنید و نقطه‌ای را بیابید که جواب در آن برابر صفر است.

۲۱. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ $y'' - y' - ۲y = ۰$، $y(۰) = \alpha$، $y'(۰) = ۲$ را حل کنید. سپس α را طوری تعیین کنید که وقتی $t \to \infty$، جواب به صفر میل کند.

۲۲. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ $۴y'' - y = ۰$، $y(۰) = ۲$، $y'(۰) = \beta$ را حل کنید. سپس β را طوری تعیین کنید که وقتی $t \to \infty$، جواب به صفر میل کند.

در هر یک از مسئله‌های ۲۳ و ۲۴، مقدار α را طوری تعیین کنید که وقتی $t \to \infty$، همهٔ جوابها به صفر میل کنند. همچنین (در صورت وجود) مقادیری از α را تعیین کنید که همهٔ جوابهای (ناصفر) معادله، وقتی $t \to \infty$ بی‌کران شوند.

۲۳. $y'' - (۲\alpha - ۱)y' + \alpha(\alpha - ۱)y = ۰$

۲۴. $y'' + (۳ - \alpha)y' - ۲(\alpha - ۱)y = ۰$

۲۵. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$۲y'' + ۳y' - ۲y = ۰, \qquad y(۰) = ۱, \qquad y'(۰) = -\beta$$

را در نظر بگیرید که در آن $\beta > ۰$.

الف) مسئلهٔ مقدار اولیه را حل کنید.

ب) جواب را به‌ازای $\beta = ۱$ رسم کنید. مختصات نقطهٔ مینیمم این جواب را به‌دست بیاورید.

ج) کوچک‌ترین مقدار β را پیدا کنید که به‌ازای آن جواب نقطهٔ مینیمم نداشته باشد.

۲۶. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'' + ۵y' + ۶y = ۰, \qquad y(۰) = ۲, \qquad y'(۰) = \beta$$

را به‌ازای $\beta > ۰$ (مثال ۵ را مشاهده کنید) در نظر بگیرید.

الف) مسئلهٔ مقدار اولیه را حل کنید.

ب) مختصات نقطهٔ ماکزیمم جواب، (t_m, y_m)، را برحسب β تعیین کنید.

ج) کوچک‌ترین مقدار β را تعیین کنید که به‌ازای آن $y_m \geq 4$.

د) رفتار t_m و y_m را وقتی $\beta \to \infty$ تعیین کنید.

۲۷. معادلهٔ $ay''+by'+cy=d$ را در نظر بگیرید که در آن a، b، c و d ثابت هستند.

الف) همهٔ جوابهای تعادلی و یا ثابت این معادلهٔ دیفرانسیل را بیابید.

ب) فرض کنید y_e جواب تعادلی باشد و $Y = y - y_e$؛ پس Y انحراف جواب y از جواب تعادلی است. معادلهٔ دیفرانسیلی را بیابید که Y در آن صدق می‌کند.

۲۸. معادلهٔ $ay''+by'+cy=0$ را در نظر بگیرید که در آن a، b و c ثابت هستند و $a>0$. شرایطی برای a، b و c بیابید که ریشه‌های معادلهٔ مشخصه

الف) حقیقی، متمایز و منفی باشند.

ب) حقیقی با علامتهای متفاوت باشند.

ج) حقیقی، متمایز و مثبت باشند.

۲.۳ جوابهای معادلات خطی همگن؛ رانسکین

در بخش قبل نشان دادیم که چگونه می‌توان معادله‌های دیفرانسیلی به‌صورت

$$ay''+by'+cy=0$$

را که در آن a، b و c ثابت هستند حل کرد. اکنون آنچه را که به‌دست آورده‌ایم طوری بسط می‌دهیم که تصویر روشن‌تری از ساختار جوابهای همهٔ معادلات خطی و همگن مرتبهٔ دوم به‌دست بدهد. این دریافت به‌نوبهٔ خود در پیدا کردن جوابهای مسئله‌های دیگری که بعداً با آنها روبه‌رو خواهیم شد کمک می‌کند.

در بررسی خواص عمومی معادلات دیفرانسیل خطی، معرفی نماد عملگر مشتق سودمند است. فرض کنید p و q تابعهایی پیوسته روی بازهٔ I، یعنی به‌ازای $\alpha<t<\beta$، باشند. حالتهای $\alpha=-\infty$ یا $\beta=\infty$ و یا هر دو را هم می‌پذیریم. در این‌صورت، به‌ازای هر تابع مانند ϕ که دوبار روی I مشتق‌پذیر است، عملگر دیفرانسیل L را با معادلهٔ

$$L[\phi]=\phi''+p\phi'+q\phi \tag{۱}$$

تعریف می‌کنیم. توجه کنید که $L[\phi]$ تابعی روی I است. مقدار $L[\phi]$ در هر نقطه مانند t برابر است با

$$L[\phi](t)=\phi''(t)+p(t)\phi'(t)+q(t)\phi(t).$$

به‌عنوان مثال، اگر $p(t)=t^2$، $q(t)=1+t$ و $\phi(t)=\sin 3t$ آنگاه

$$\begin{aligned} L[\phi](t) &= (\sin 3t)'' + t^2(\sin 3t)' + (1+t)\sin 3t \\ &= -9\sin 3t + 3t^2\cos 3t + (1+t)\sin 3t. \end{aligned}$$

عملگر L را معمولاً به‌صورت $L=D^2+pD+q$ می‌نویسیم که در آن D عملگر مشتق است.

در این بخش معادلات مرتبهٔ دوم خطی و همگن $L[\phi](t)=0$ را بررسی می‌کنیم. چون معمولاً به‌جای $\phi(t)$ از نماد y استفاده می‌کنند، معمولاً این معادله را به شکل

$$L[y]=y''+p(t)y'+q(t)y=0 \tag{۲}$$

می‌نویسیم. درکنار معادلهٔ (۲) شرایط اولیهٔ

$$y(t_0)=y_0,\qquad y'(t_0)=y_0' \tag{۳}$$

را هم در نظر می‌گیریم که در آنها t_0 نقطه‌ای در بازهٔ I است و y_0 و y_0' اعداد حقیقی مفروضی هستند. می‌خواهیم بدانیم که مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲) و (۳) همواره جواب دارد یا نه، و اینکه ممکن است بیش از یک جواب داشته باشد یا نه. در ضمن علاقه‌مندیم بدانیم که می‌توان دربارهٔ شکل و ساختار جوابها چیزی یافت که احتمالاً در پیدا کردن جوابهای مسئله‌های خاص مفید باشد یا نه. جواب این سؤالها در قضیه‌های این بخش آمده است.

حکم بنیادی نظری برای مسئله‌های مقدار اولیهٔ معادلات خطی مرتبهٔ دوم در قضیهٔ ۱.۲.۳ بیان شده است که نظیر قضیهٔ ۱.۴.۲ برای معادلات خطی مرتبهٔ اول است. نتیجه به همین شکل برای معادلات غیرهمگن هم برقرار است، بنابراین قضیه را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱.۲.۳ (قضیهٔ وجود و یکتایی)

مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y''+p(t)y'+q(t)y=g(t),\qquad y(t_0)=y_0,\qquad y'(t_0)=y_0' \tag{۴}$$

را در نظر بگیرید که در آن p، q و g تابعهایی پیوسته روی بازه‌ای مانند I شامل t_0 هستند. در این‌صورت دقیقاً یک جواب $y=\phi(t)$ برای این مسئله موجود است و جواب در همهٔ بازهٔ I موجود است.

تأکید می‌کنیم که این قضیه سه مطلب زیر را بیان می‌کند:

۱. مسئلهٔ مقدار اولیه جواب دارد؛ به‌عبارت دیگر جوابی موجود است.

۲. مسئلهٔ مقدار اولیه تنها یک جواب دارد؛ یعنی جواب یکتا است.

۳. جواب ϕ در همه جای بازهٔ I، که ضرایب در آن پیوسته هستند، تعریف شده و حداقل دوبار مشتق‌پذیر است.

بعضی از این گزاره‌ها را می‌توان به‌سادگی برای بعضی مسئله‌ها ثابت کرد. به‌عنوان مثال در مثال ۱ بخش ۱.۳ دیدیم که جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y''-y=0,\qquad y(0)=2,\qquad y'(0)=-1 \tag{۵}$$

عبارت است از

$$y=\frac{1}{2}e^t+\frac{3}{2}e^{-t}. \tag{۶}$$

این واقعیت که جوابی پیدا کردیم مطمئناً نشان می‌دهد که این مسئلهٔ مقدار اولیه جواب دارد. علاوه بر این، جواب (۶) دوبار مشتق‌پذیر است، در حقیقت در همهٔ بازهٔ $(-\infty, \infty)$ که در آن ضرایب معادلهٔ دیفرانسیل پیوسته هستند به هر تعداد مشتق‌پذیر است. اما واضح نیست که مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۵) جوابی غیر از آنچه با معادلهٔ (۶) داده می‌شود ندارد و اثبات این موضوع مشکل‌تر است. به‌هر حال، قضیهٔ ۱.۲.۳ بیان می‌کند که این جواب در حقیقت تنها جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۵) است.

برای اکثر مسئله‌های به‌صورت (۴) نمی‌توانیم عبارت به‌دردبخوری برای جواب بنویسیم. این یکی از تفاوتهای عمدهٔ بین معادلات خطی مرتبهٔ اول و مرتبهٔ دوم است. بنابراین باید همهٔ قسمت‌های این قضیه با روشهایی کلی ثابت بشوند که نیازی به استفاده از عبارتی صریح برای جواب نباشد. اثبات قضیهٔ ۱.۲.۳ نسبتاً مشکل است و آن را در اینجا بیان نمی‌کنیم[1]، اما به هر حال قضیهٔ ۱.۲.۳ را می‌پذیریم و در صورت لزوم از آن استفاده می‌کنیم.

مثال ۱

بزرگ‌ترین بازه‌ای را بیابید که در آن مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$(t^2 - 3t)y'' + ty' - (t+3)y = 0, \qquad y(1) = 2, \qquad y'(1) = 1$$

مطمئناً جواب دارد.

اگر معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده را به‌صورت معادلهٔ (۴) بنویسیم آنگاه $p(t) = 1/(t-3)$، $q(t) = -(t+3)/t(t-3)$ و $g(t) = 0$. تنها نقاط ناپیوستگی ضرایب $t = 0$ و $t = 3$ هستند؛ بنابراین بزرگ‌ترین بازهٔ شامل نقطهٔ اولیهٔ $t = 1$ که در آن همهٔ ضرایب پیوسته هستند، $0 < t < 3$ است. پس این بزرگ‌ترین بازه‌ای است که قضیهٔ ۱.۲.۳ وجود جواب را در آن تضمین می‌کند.

مثال ۲

جواب یکتای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \qquad y(t_0) = 0, \qquad y'(t_0) = 0$$

را، که در آن p و q تابعهایی پیوسته در بازهٔ I شامل t_0 هستند، پیدا کنید.

تابع $y = \phi(t) = 0$ به‌ازای هر t در I مطمئناً در معادلهٔ دیفرانسیل و شرایط اولیه صدق می‌کند. طبق حکم یکتایی قضیهٔ ۱.۲.۳، این تنها جواب مسئلهٔ داده‌شده است.

اکنون فرض کنید که y_1 و y_2 دو جواب معادلهٔ (۲) هستند؛ به‌عبارت دیگر

$$L[y_1] = y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$$

و حکم مشابه برای y_2. در این‌صورت، مانند مثالهای بخش ۱.۳، می‌توانیم با تشکیل ترکیبهای خطی y_1 و y_2 جوابهای بیشتری به‌دست بیاوریم. این نتیجه را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۲.۲.۳ (اصل برهم‌نهی)

اگر y_1 و y_2 دو جواب معادلهٔ دیفرانسیل (۲)، یعنی

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

باشند، به‌ازای هر مقدار از ثابتهای c_1 و c_2، ترکیب خطی $c_1y_1 + c_2y_2$ هم جواب است.

حالت خاص قضیهٔ ۲.۲.۳ این است که c_1 یا c_2 صفر باشند که نتیجه می‌دهد که هر مضرب ثابت از جوابی برای معادلهٔ (۲) هم جواب است.

۱. اثبات قضیهٔ ۱.۲.۳ را می‌توانید مثلاً در فصل ۶، بخش ۸ کتاب کادینگتون که در مراجع انتهای این فصل فهرست شده است پیدا کنید.

برای اثبات قضیهٔ ۲.۲.۳ کافی است که

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \tag{7}$$

را به‌جای y در معادلهٔ (۲) قرار بدهیم. با محاسبهٔ مشتقها و دسته‌بندی جملات نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
L[c_1y_1 + c_2y_2] &= [c_1y_1 + c_2y_2]'' + p[c_1y_1 + c_2y_2]' + q[c_1y_1 + c_2y_2] \\
&= c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1py_1' + c_2py_2' + c_1qy_1 + c_2qy_2 \\
&= c_1[y_1'' + py_1' + qy_1] + c_2[y_2'' + py_2' + qy_2] \\
&= c_1L[y_1] + c_2L[y_2].
\end{aligned}$$

چون $L[y_1] = 0$ و $L[y_2] = 0$ باید $L[c_1y_1 + c_2y_2] = 0$. بنابراین، صرف‌نظر از مقادیر c_1 و c_2، y داده‌شده در (۷) در معادلهٔ دیفرانسیل (۲) صدق می‌کند و اثبات قضیهٔ ۲.۲.۳ کامل است.

قضیهٔ ۲.۲.۳ بیان می‌کند که تنها با استفاده از دو جواب معادلهٔ (۲) می‌توانیم به‌وسیلهٔ معادلهٔ (۷) خانواده‌ای نامتناهی از جوابها به‌دست بیاوریم. سؤال بعدی که مطرح می‌شود این است که همهٔ جوابهای (۲) به شکل معادلهٔ (۷) هستند یا ممکن است جوابهای دیگری به شکلی متفاوت وجود داشته باشند. بحث دربارهٔ این سؤال را با بررسی این موضوع شروع می‌کنیم که چگونه می‌توان ثابتهای c_1 و c_2 در معادلهٔ (۷) را طوری انتخاب کرد که جواب در شرایط (۳) صدق کند. از این شرایط اولیه نتیجه می‌شود که c_1 و c_2 باید در معادله‌های

$$\begin{aligned}
c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) &= y_0, \\
c_1y_1'(t_0) + c_2y_2'(t_0) &= y_0'
\end{aligned} \tag{8}$$

صدق کنند. دترمینان ماتریس ضرایب معادلهٔ (۸) عبارت است از

$$W = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0). \tag{9}$$

اگر $W \neq 0$، معادلهٔ (۸) صرف‌نظر از مقادیر y_0 و y_0' جواب یکتای (c_1, c_2) را دارد که با

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{y_0y_2'(t_0) - y_0'y_2(t_0)}{y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)}, \\
c_2 &= \frac{-y_0y_1'(t_0) + y_0'y_1(t_0)}{y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)}
\end{aligned} \tag{10}$$

داده می‌شود که با استفاده از دترمینان‌ها، به‌صورت

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y'_0 & y'_2(t_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{vmatrix}}, \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y'_1(t_0) & y'_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{vmatrix}} \tag{11}$$

نوشته می‌شود. با این مقادیر از c_1 و c_2، عبارت (۷) در شرایط اولیهٔ (۳) و نیز معادلهٔ دیفرانسیل (۲) صدق می‌کند.

از طرف دیگر، اگر $W = 0$ دستگاه (۸) جواب ندارد مگر آنکه y_0 و y'_0 در شرط اضافی معینی صدق کنند، که در این حالت نامتناهی جواب موجود است.

به دترمینان W، **دترمینان رانسکین**[1] ویا رانسکین y_1 و y_2 می‌گوییم. گاهی از نماد طولانی‌تر $W(y_1, y_2)(t_0)$ برای نمایش عبارت طرف راست معادلهٔ (۹) استفاده می‌کنیم، برای اینکه تأکید کنیم که رانسکین به تابعهای y_1 و y_2 بستگی دارد و در نقطهٔ t_0 محاسبه شده است. بحث قبلی به حکم زیر منجر می‌شود.

قضیهٔ ۳.۲.۳ فرض کنید y_1 و y_2 دو جواب معادلهٔ (۲)، یعنی

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

باشند و شرایط اولیهٔ (۳)

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y'_0$$

را در نظر بگیرید. در این‌صورت همواره می‌توان ثابتهای c_1 و c_2 را طوری انتخاب کرد که

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

در معادلهٔ دیفرانسیل (۲) و شرایط اولیهٔ (۳) صدق کند، اگر و تنها اگر رانسکین، یعنی

$$W = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$$

در t_0 صفر نباشد.

مثال ۳

در مثال ۲ از بخش ۱.۳ دریافتیم که $y_1(t) = e^{-2t}$ و $y_2(t) = e^{-3t}$ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

هستند. رانسکین y_1 و y_2 را به‌دست بیاورید.

رانسکین این دو تابع عبارت است از

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \end{vmatrix} = -e^{-5t}.$$

۱. دترمینان رانسکین منتسب به ژوزف ماریا هوئنه-رانسکی (۱۷۷۶-۱۸۵۳م) است که در لهستان زاده شد اما بیشتر عمر خود را در فرانسه گذراند. رانسکی مردی نابغه اما تندخو بود و زندگیش پر از درگیریهای شدید مکرر با اشخاص و سازمانهای دیگر بود.

چون W به‌ازای همهٔ مقادیر t ناصفر است، از y_1 و y_2 می‌توان برای ساختن جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده به همراه شرایط اولیهٔ تعیین شده در هر مقدار t استفاده کرد. یک مسئلهٔ مقدار اولیه از این دست در مثال ۳ بخش ۱.۳ حل شد.

قضیهٔ بعد، استفاده از واژهٔ «جواب عمومی» برای ترکیب خطی $c_1 y_1 + c_2 y_2$ را، که در بخش ۱.۳ معرفی شد، توجیه می‌کند.

قضیهٔ ۴.۲.۳ فرض کنید y_1 و y_2 دو جواب معادلهٔ دیفرانسیل (۲)، یعنی

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

باشند. در این‌صورت خانوادهٔ جوابهای

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

با ثابتهای دلخواه c_1 و c_2 همهٔ جوابهای معادلهٔ (۲) را به‌دست می‌دهد اگر و تنها اگر نقطه‌ای مانند t_0 وجود داشته باشد که رانسکین y_1 و y_2 در آن مخالف صفر باشد.

فرض کنید ϕ جوابی از معادلهٔ (۲) باشد. برای اثبات قضیه باید ثابت کنیم که ϕ ترکیبی خطی به‌صورت $c_1 y_1 + c_2 y_2$ است؛ یعنی باید تعیین کنیم که چه مقادیری از c_1 و c_2 ترکیب خطی را برابر ϕ می‌کند. فرض کنید t_0 نقطه‌ای باشد که در آن رانسکین y_1 و y_2 ناصفر است. ϕ و ϕ' را در این نقطه محاسبه می‌کنیم و این مقادیر را به‌ترتیب y_0 و y'_0 می‌نامیم؛ پس

$$y_0 = \phi(t_0), \qquad y'_0 = \phi'(t_0).$$

حال مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \qquad y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y'_0 \tag{12}$$

را در نظر بگیرید. تابع ϕ مطمئناً جوابی برای این مسئلهٔ مقدار اولیه است. علاوه بر این، چون فرض می‌کنیم که $W(y_1, y_2)(t_0)$ ناصفر است، طبق قضیهٔ ۳.۲.۳ می‌توانیم c_1 و c_2 را طوری انتخاب کنیم که $y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ هم جوابی از مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۲) باشد. در حقیقت مقادیر مناسب c_1 و c_2 در معادله‌های (۱۰) و (۱۱) داده شده‌اند. قسمت یکتایی قضیهٔ ۱.۲.۳ تضمین می‌کند که این دو جواب برای یک مسئلهٔ مقدار اولیه، درواقع یکی هستند؛ پس به‌ازای انتخاب مناسب c_1 و c_2 باید

$$\phi(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \tag{13}$$

و بنابراین ϕ هم در خانوادهٔ توابع $c_1 y_1 + c_2 y_2$ است. بالاخره، چون ϕ جواب دلخواهی از معادلهٔ (۲) است، نتیجه می‌شود که هر جواب معادلهٔ (۲) در این خانواده قرار دارد.

حال فرض کنید نقطه‌ای مانند t_0 موجود نباشد که در آن رانسکین ناصفر باشد. پس صرف‌نظر از اینکه کدام نقطه به‌عنوان t_0 انتخاب شود، $W(y_1, y_2)(t_0) = 0$. در این‌صورت (طبق قضیهٔ ۳.۲.۳) مقادیر y_0 و y'_0 موجودند که دستگاه (۸) برحسب c_1 و c_2 جواب ندارد. یک جفت از این مقادیر را انتخاب می‌کنیم و جواب

$\phi(t)$ از معادلهٔ (۲) را طوری انتخاب می‌کنیم که در شرط اولیهٔ (۳) صدق کند. توجه کنید که قضیهٔ ۱.۲.۳ وجود چنین جوابی را تضمین می‌کند. اما این جواب در خانوادهٔ $y = c_1y_1 + c_2y_2$ نیست. پس این ترکیب خطی شامل همهٔ جوابهای معادلهٔ (۲) نیست اگر $W(y_1, y_2) = 0$. این نکته اثبات قضیهٔ ۴.۲.۳ را کامل می‌کند.

قضیهٔ ۴.۲.۳ بیان می‌کند اگر و تنها اگر رانسکین y_1 و y_2 همه جا صفر نباشد، ترکیب خطی $c_1y_1 + c_2y_2$ شامل همهٔ جوابهای معادلهٔ (۲) است. بنابراین طبیعی است که به‌عبارت

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

با ضرایب ثابت دلخواه **جواب عمومی** معادلهٔ (۲) بگوییم؛ چنان‌که در بخش قبل این کار را کردیم. می‌گوییم جوابهای y_1 و y_2 **مجموعهٔ اساسی جوابهای** معادلهٔ (۲) را تشکیل می‌دهند اگر و تنها اگر رانسکین آنها ناصفر باشد.

می‌توانیم نتیجهٔ قضیهٔ ۴.۲.۳ را به زبانی کمی متفاوت بیان کنیم. برای یافتن جواب عمومی و بنابراین همهٔ جوابهای معادله‌ای به‌صورت (۲)، تنها به یافتن دو جواب از معادلهٔ داده‌شده نیاز داریم که رانسکین آنها ناصفر است. دقیقاً در مثالهای بخش ۱.۳ دقیقاً همین کار را انجام دادیم، هرچند که در آنجا رانسکین را محاسبه نکردیم. حالا می‌توانید به آن مثالها برگردید و این کار را انجام بدهید و به این صورت نشان بدهید که همهٔ جوابهایی که آنها را «جواب عمومی» نامیدیم در شرط لازم رانسکین صدق می‌کنند. مثال بعدی دربرگیرندهٔ همهٔ مثالهای ذکر شده در بخش ۱.۳ و همچنین بسیاری از مسئله‌های مشابه دیگر است.

مثال ۴

فرض کنید $y_1(t) = e^{r_1t}$ و $y_2(t) = e^{r_2t}$ دو جواب معادله‌ای به شکل (۲) باشند. ثابت کنید که آنها یک مجموعهٔ اساسی از جوابها را تشکیل می‌دهند اگر $r_2 \neq r_1$.

رانسکین y_1 و y_2 را محاسبه می‌کنیم:

$$W = \begin{vmatrix} e^{r_1t} & e^{r_2t} \\ r_1e^{r_1t} & r_2e^{r_2t} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)\exp[(r_1 + r_2)t]$$

چون تابع نمایی هرگز صفر نمی‌شود و چون فرض کردیم که $r_2 - r_1 \neq 0$، پس به‌ازای هر مقدار t، W ناصفر است. در نتیجه y_1 و y_2 مجموعه‌ای اساسی از جوابها را تشکیل می‌دهند.

مثال ۵

ثابت کنید $y_1(t) = t^{1/2}$ و $y_2(t) = t^{-1}$ یک مجموعهٔ اساسی از جوابهای

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \qquad t > 0 \tag{14}$$

را تشکیل می‌دهند.

بعداً نشان می‌دهیم که چگونه معادلهٔ (۱۴) را حل می‌کنیم (مسئلهٔ ۳۴ بخش ۳.۳ را ببینید). اما در این مرحله می‌توانیم با جایگزینی مستقیم، ثابت کنیم که y_1 و y_2 جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل هستند. چون $y_1'(t) = \frac{1}{2}t^{-1/2}$ و $y_1''(t) = -\frac{1}{4}t^{-3/2}$، می‌توانیم بنویسیم

$$2t^2\left(-\frac{1}{4}t^{-3/2}\right) + 3t\left(\frac{1}{2}t^{-1/2}\right) - t^{1/2} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1\right)t^{1/2} = 0.$$

به‌طور مشابه $y_2'(t) = -t^{-2}$ و $y_2''(t) = 2t^{-3}$، پس

$$2t^2(2t^{-3}) + 3t(-t^{-2}) - t^{-1} = (4 - 3 - 1)t^{-1} = 0.$$

حال رانسکین y_1 و y_2 را محاسبه می‌کنیم:

$$W = \begin{vmatrix} t^{1/2} & t^{-1} \\ \frac{1}{2}t^{-1/2} & -t^{-2} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}t^{-3/2}. \tag{15}$$

چون به‌ازای $t > 0$، $W \neq 0$، پس y_1 و y_2 مجموعهٔ اساسی از جوابها را در آن ناحیه تشکیل می‌دهند.

تاکنون توانسته‌ایم مجموعهٔ اساسی جوابها را بیابیم و در نتیجه جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده را پیدا کردیم. اما این کار معمولاً دشوار است و این سؤال مطرح است که معادلهٔ دیفرانسیلی به‌صورت (۲) همواره مجموعهٔ اساسی‌ای از جوابها دارد یا نه. قضیهٔ بعد پاسخی مثبت به این سؤال می‌دهد.

قضیهٔ ۵.۲.۳

معادلهٔ دیفرانسیل (۲)، یعنی

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

را در نظر بگیرید که در آن p و q روی بازهٔ بازی مانند I پیوسته هستند. نقطه‌ای مانند t_0 در I انتخاب کنید. فرض کنید y_1 جوابی از معادلهٔ (۲) است که در شرایط اولیهٔ

$$y(t_0) = 1, \qquad y'(t_0) = 0$$

صدق می‌کند و فرض کنید y_2 جوابی از معادلهٔ (۲) است که در شرایط اولیهٔ

$$y(t_0) = 0, \qquad y'(t_0) = 1$$

صدق می‌کند. در این‌صورت y_1 و y_2 مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادلهٔ (۲) تشکیل می‌دهند.

ابتدا توجه کنید که وجود تابعهای y_1 و y_2 در قسمت وجود قضیهٔ ۱.۲.۳ تضمین شده است. برای اینکه ثابت کنیم که آنها مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند، تنها کافی است رانسکین آنها را در t_0 حساب کنیم:

$$W(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

چون رانسکین در نقطهٔ t_0 ناصفر است، y_1 و y_2 مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند و اثبات قضیهٔ ۵.۲.۳ کامل می‌شود.

توجه کنید که بخش بالقوهٔ مشکل اثبات این قضیه، اثبات وجود یک جفت جواب است که رجوع به قضیهٔ ۱.۲.۳ به آن جواب داد. همچنین توجه کنید که قضیهٔ ۵.۲.۳ به چگونگی یافتن جوابهای y_1 و y_2 با حل مسئلهٔ مقدار اولیهٔ مشخص نمی‌پردازد. به هر حال دانستن اینکه همواره مجموعه‌ای اساسی از جوابها وجود دارد اطمینان‌بخش است.

مثال ۶

مجموعهٔ اساسی جوابها را که در قضیهٔ ۵.۲.۳ مشخص شده است برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''-y=0 \tag{16}$$

با استفاده از نقطهٔ اولیهٔ $t_0=0$ بیابید.

در بخش ۱.۳ نشان دادیم که دو جواب معادلهٔ (۱۶) عبارت‌اند از $y_1(t)=e^t$ و $y_2(t)=e^{-t}$. رانسکین این جوابها یعنی $W(y_1,y_2)(t)=-2\neq 0$ ناصفر است؛ بنابراین آنها مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند. اما این جوابها همان جوابهای اساسی مشخص شده در قضیهٔ ۵.۲.۳ نیستند، چون در شرایط اولیهٔ ذکرشده در آن قضیه در نقطهٔ $t_0=0$ صدق نمی‌کنند.

برای یافتن جوابهای اساسی مشخص شده در قضیه، باید جوابهایی را بیابیم که در شرایط اولیهٔ مناسب صدق می‌کنند. فرض کنید $y_3(t)$ جوابی برای معادلهٔ (۱۶) است که در شرایط اولیهٔ

$$y(0)=1,\quad y'(0)=0 \tag{17}$$

صدق می‌کند. جواب عمومی معادلهٔ (۱۶) عبارت است از

$$y=c_1e^t+c_2e^{-t} \tag{18}$$

و شرایط اولیهٔ (۱۷) برقرارند اگر $c_1=1/2$ و $c_2=1/2$. پس

$$y_3(t)=\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}=\cosh t$$

به‌طور مشابه، اگر $y_4(t)$ در شرایط اولیهٔ

$$y(0)=0,\quad y'(0)=1 \tag{19}$$

صدق کند، باید

$$y_4(t)=\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t}=\sinh t.$$

چون رانسکین y_3 و y_4 عبارت است از

$$W(y_3,y_4)(t)=\cosh^2 t-\sinh^2 t=1,$$

این تابعها همانگونه که در قضیهٔ ۵.۲.۳ بیان شد مجموعه‌ای اساسی تشکیل می‌دهند. بنابراین جواب عمومی معادلهٔ (۱۶) را می‌توان علاوه بر شکل (۱۸)، به‌صورت

$$y=k_1\cosh t+k_2\sinh t \tag{20}$$

هم نوشت. از k_1 و k_2 برای نمایش ثابتهای دلخواه در معادلهٔ (۲۰) استفاده کردیم، چون آنها همان ثابتهای c_1 و c_2 در معادلهٔ (۱۸) نیستند. یک هدف این مثال روشن کردن این نکته است که هر معادلهٔ دیفرانسیل مفروض بیش از یک مجموعهٔ اساسی از جوابها دارد ــ در حقیقت تعداد این مجموعه‌ها نامتناهی است؛ مسئلهٔ ۲۱ را ببینید. قاعده این است که باید مجموعهٔ اساسی‌ای را انتخاب کنید که مناسب‌تر است.

اکنون می‌خواهیم خواص رانسکین دو جواب معادلهٔ دیفرانسیل خطی و همگن را بیشتر بررسی کنیم. شاید تعجب‌برانگیز باشد که قضیهٔ بعد دستور صریح و ساده‌ای برای رانسکین هر دو جواب چنین معادله‌ای است، حتی اگر خود جوابها معلوم نباشند.

قضیهٔ ۶.۲.۳ (قضیه آبل[1])

اگر y_1 و y_2 جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل

$$L[y]=y''+p(t)y'+q(t)y=0 \tag{21}$$

باشند که در آن p و q روی بازه‌ای مانند I پیوسته هستند، رانسکین $W(y_1,y_2)(t)$ برابر است با

$$W(y_1,y_2)(t)=c\exp\left[-\int p(t)dt\right] \tag{22}$$

که در آن c ثابت معینی است که فقط به y_1 و y_2 (و نه به t) بستگی دارد. علاوه بر این، به‌ازای هر t در I، $W(y_1,y_2)(t)$ یا صفر است (اگر $c=0$) و یا هرگز در I صفر نمی‌شود (اگر $c\neq 0$).

برای اثبات قضیهٔ آبل با این نکته شروع می‌کنیم که y_1 و y_2 در

$$\begin{aligned} y_1''+p(t)y_1'+q(t)y_1&=0,\\ y_2''+p(t)y_2'+q(t)y_2&=0 \end{aligned} \tag{23}$$

صدق می‌کنند. اگر معادلهٔ اول را در $-y_2$ و دومی را در y_1 ضرب کنیم و معادلات حاصله را با هم جمع کنیم نتیجه می‌شود

$$(y_1y_2''-y_1''y_2)+p(t)(y_1y_2'-y_1'y_2)=0. \tag{24}$$

حال فرض می‌کنیم $W(t)=W(y_1,y_2)(t)$ و توجه می‌کنیم که

$$W'=y_1y_2''-y_1''y_2; \tag{25}$$

پس می‌توان معادلهٔ (۲۴) را به‌صورت

$$W'+p(t)W=0 \tag{26}$$

نوشت. معادلهٔ (۲۶) را بلافاصله می‌توان حل کرد، زیرا هم معادله‌ای خطی (بخش ۱.۲) است و هم معادله‌ای جداشدنی (بخش ۲.۲) است. پس

$$W(t)=c\exp\left[-\int p(t)dt\right] \tag{27}$$

که در آن c ثابت است. مقدار c بستگی به جفت جوابهای معادلهٔ (۲۱) دارد؛ اما چون تابع نمایی هرگز صفر نمی‌شود، $W(t)$ صفر نیست مگر آنکه $c=0$ که در این حالت $W(t)$ به‌ازای هر t صفر است، و این اثبات قضیهٔ ۶.۲.۳ را تکمیل می‌کند.

۱. حکم قضیهٔ ۶.۲.۳ را ریاضیدان نروژی نیلس هنریک آبل (۱۸۰۲–۱۸۲۹م) در ۱۸۲۷ میلادی به‌دست آورد. در ضمن، او ثابت کرده است که هیچ فرمول کلی‌ای برای حل معادلهٔ چندجمله‌ای از درجهٔ ۵ برحسب عملیات صریح جبری روی ضرایب وجود ندارد و در نتیجه به سؤالی که از ابتدای قرن شانزدهم حل نشده بود پاسخ داد. اما مهم‌ترین کار او در آنالیز و به‌خصوص در مطالعهٔ توابع بیضوی بود. متأسفانه کار او تا قبل از مرگش چندان شناخته نشد. لژاندر، ریاضیدان برجستهٔ فرانسوی، آن را «اثری تاریخی» دانست که «بیشتر از برنز دوام می‌یابد».

توجه کنید که رانسکین‌های هر دو مجموعهٔ اساسی از جوابهای یک معادلهٔ دیفرانسیل تنها می‌توانند در یک ضریب ثابت متفاوت باشند و رانسکین هر مجموعهٔ اساسی از جوابها را بدون حل معادلهٔ دیفرانسیل می‌توان با تقریب یک ضریب ثابت به‌دست آورد. علاوه بر این، چون تحت شرایط قضیهٔ ۶.۲.۳ رانسکین W یا همواره صفر است و یا هیچگاه صفر نمی‌شود، می‌توانید با محاسبهٔ W به‌ازای مقدار مناسبی از t تعیین کنید که کدام حالت رخ می‌دهد.

مثال ۷

در مثال ۵ نشان دادیم که $y_1(t) = t^{1/2}$ و $y_2(t) = t^{-1}$ جوابهای معادلهٔ

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \qquad t > 0 \tag{28}$$

هستند. تحقیق کنید که رانسکین y_1 و y_2 با آنچه در معادلهٔ (۲۲) داده شده برابر است.

از مثال ۵ می‌دانیم که $W(y_1, y_2)(t) = -(3/2)t^{-3/2}$. برای استفاده از معادلهٔ (۲۲) باید معادلهٔ دیفرانسیل (۲۸) را به‌صورت استاندارد بنویسیم که در آن ضریب y'' برابر واحد است؛ یعنی

$$y'' + \frac{3}{2t}y' - \frac{1}{2t^2}y = 0$$

و بنابراین $p(t) = 3/2t$. پس

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(t) &= c\exp\left[-\int \frac{3}{2t}dt\right] = c\exp\left(-\frac{3}{2}\ln t\right). \\ &= ct^{-3/2} \end{aligned} \tag{29}$$

معادلهٔ (۲۹) رانسکین هر جفت از جوابهای معادلهٔ (۲۸) را به‌دست می‌دهد. برای جوابهای خاص داده‌شده در این مثال، باید c را برابر $-3/2$ انتخاب کنیم.

خلاصه. می‌توانیم بحث این بخش را به‌صورت زیر خلاصه کنیم: برای یافتن جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \qquad \alpha < t < \beta$$

ابتدا باید دو جواب y_1 و y_2 را بیابیم که به‌ازای $\alpha < t < \beta$ در معادلهٔ دیفرانسیل صدق می‌کنند. سپس باید اطمینان پیدا کنیم که نقطه‌ای در بازه موجود است که رانسکین y_1 و y_2 در آن ناصفر است. تحت این شرایط، y_1 و y_2 مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند و جواب عمومی به‌صورت

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

است که در آن c_1 و c_2 ثابتهایی دلخواه هستند. اگر شرایط اولیه در نقطه‌ای از $\alpha < t < \beta$ داده شده باشند، می‌توان c_1 و c_2 را طوری انتخاب کرد که در این شرایط صدق کنند.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۶، رانسکین جفت جوابهای داده‌شده را به‌دست بیاورید.

۱. e^{2t}، e^{-3t}

۲. $\cos t$، $\sin t$

۳. e^{-2t}، te^{-2t}

۴. x، xe^x

۵. $e^t \sin t$، $e^t \cos t$

۶. $\sin^2\theta$، $1 - \cos 2\theta$

در هر یک از مسئله‌های ۷ تا ۱۲، بزرگ‌ترین بازه‌ای را تعیین کنید که در آن مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده مطمئناً جوابی یکتا و دوبار مشتق‌پذیر دارد. سعی نکنید که جواب را پیدا کنید.

۷. $ty'' + 3y = t$، $y(2) = 1$، $y'(2) = 3$

۸. $(t-1)y'' - 3ty' + 4y = \sin t$، $y(-2) = 2$، $y'(-2) = 1$

۹. $t(t-4)y'' + 3ty' + 5y = 2$، $y(3) = 0$، $y'(3) = -1$

۱۰. $y'' + (\cos t)y' + 3(\ln|t|)y = 0$، $y(3) = 2$، $y'(3) = 1$

۱۱. $(x-3)y'' + xy' + (\ln|x|)y = 0$، $y(1) = 0$، $y'(1) = 1$

۱۲. $(x-2)y'' + y' + (x-2)(\tan x)y = 0$، $y(3) = 1$، $y'(3) = 2$

۱۳. تحقیق کنید که $y_1(t) = t^2$ و $y_2(t) = t^{-1}$ به‌ازای $t > 0$ دو جواب معادلهٔ دیفرانسیل $t^2y'' - 2y = 0$ هستند. سپس ثابت کنید که $y = c_1t^2 + c_2t^{-1}$ هم به‌ازای هر c_1 و c_2 جواب این معادله است.

۱۴. تحقیق کنید که $y_1(t) = 1$ و $y_2(t) = t^{1/2}$ به‌ازای $t > 0$ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل $yy'' + (y')^2 = 0$ هستند. سپس ثابت کنید که $y = c_1 + c_2t^{1/2}$ در حالت کلی جواب این معادله نیست. توضیح بدهید که چرا این نتیجه، قضیهٔ ۲.۲.۳ را نقض نمی‌کند.

۱۵. ثابت کنید اگر $y = \phi(t)$ جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ باشد که در آن $g(t)$ همواره صفر نیست، $y = c\phi(t)$ که در آن c یک ثابت مخالف ۱ است، جواب نیست. توضیح بدهید که چرا این نتیجه در تناقض با تذکر پس از قضیهٔ ۲.۲.۳ نیست.

۱۶. آیا $y = \sin(t^2)$ می‌تواند جواب معادلهٔ $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ با ضرایب پیوسته در بازه‌ای شامل $t = 0$ باشد؟ توضیح بدهید.

۱۷. اگر رانسکین f و g برابر $2e^{6t}$ باشد و $f(t) = e^{3t}$، $g(t)$ را بیابید.

۱۸. اگر رانسکین f و g برابر t^2e^t باشد و $f(t) = t$، $g(t)$ را بیابید.

۱۹. اگر $W(f, g)$ رانسکین f و g باشد و اگر $u = 2f - g$ و $v = f + 3g$، $W(u, v)$ را برحسب $W(f, g)$ به‌دست بیاورید.

۲۰. اگر رانسکین f و g، $t\cos t - \sin t$ باشد و اگر $u = f + 3g$، $v = f - 2g$، رانسکین u و v را بیابید.

۲۱. فرض کنید y_1 و y_2 مجموعه‌ای اساسی از جوابهای $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ را تشکیل بدهند و فرض کنید $y_3 = a_1y_1 + a_2y_2$ و $y_4 = b_1y_1 + b_2y_2$ که در آن a_1، a_2، b_1 و b_2 ثابتهایی دلخواه هستند. ثابت کنید

$$W(y_3, y_4) = (a_1b_2 - a_2b_1)W(y_1, y_2)$$

آیا y_3 و y_4 نیز مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند؟ چرا؟

در هر یک از مسئله‌های ۲۲ و ۲۳، مجموعهٔ اساسی از جوابهای مشخص‌شده در قضیهٔ ۵.۲.۳ را برای معادلهٔ دیفرانسیل و نقطهٔ شروع داده‌شده بیابید.

۲۲. $y'' + y' - 2y = 0$، $t_0 = 0$

۲۳. $y'' + 5y' + 4y = 0$، $t_0 = 1$

در هر یک از مسئله‌های ۲۴ تا ۲۷، تحقیق کنید که تابعهای y_1 و y_2 جوابهای معادلهٔ داده‌شده هستند. آیا آنها مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند؟

۲۴. $y''+4y=0$؛ $y_1(t)=\cos 2t$، $y_2(t)=\sin 2t$

۲۵. $y''-2y'+y=0$؛ $y_1(t)=e^t$، $y_2(t)=te^t$

۲۶. $x^2y''-x(x+2)y'+(x+2)y=0$، $x>0$؛ $y_1(x)=x$، $y_2(x)=xe^x$

۲۷. $(1-x\cot x)y''-xy'+y=0$، $0<x<\pi$؛ $y_1(x)=x$، $y_2(x)=\sin x$

۲۸. معادلهٔ $y''-y'-2y=0$ را در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید $y_1(t)=e^{-t}$ و $y_2(t)=e^{2t}$ مجموعه‌ای اساسی از جوابها را تشکیل می‌دهند.

ب) فرض کنید $y_3(t)=-2e^{2t}$، $y_4(t)=y_1(t)+2y_2(t)$ و $y_5(t)=2y_1(t)-2y_3(t)$. آیا $y_3(t)$، $y_4(t)$ و $y_5(t)$ هم جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده هستند؟

ج) تعیین کنید که کدام جفتهای زیر مجموعه‌ای اساسی از جوابها را تشکیل می‌دهند: $[y_1(t),y_3(t)]$؛ $[y_2(t),y_3(t)]$؛ $[y_1(t),y_4(t)]$؛ $[y_4(t),y_5(t)]$.

در هر یک از مسئله‌های ۲۹ تا ۳۲، رانسکین دو جواب معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده را بدون حل معادله به‌دست بیاورید.

۲۹. $t^2y''-t(t+2)y'+(t+2)y=0$

۳۰. $(\cos t)y''+(\sin t)y'-ty=0$

۳۱. $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$، معادلهٔ بسل

۳۲. $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$، معادلهٔ لژاندر

۳۳. ثابت کنید که اگر p مشتق‌پذیر باشد و $p(t)>0$، رانسکین $W(t)$ از دو جواب $[p(t)y']'+q(t)y=0$، عبارت است از $W(t)=c/p(t)$ که در آن c ثابت است.

۳۴. اگر y_1 و y_2 مجموعه‌ای اساسی از جوابهای $ty''+2y'+te^ty=0$ تشکیل بدهند و اگر $W(y_1,y_2)(1)=3$، مقدار $W(y_1,y_2)(5)$ را به‌دست بیاورید.

۳۵. اگر y_1 و y_2 مجموعه‌ای اساسی از جوابهای $t^2y''-2y'+(3+t)y=0$ تشکیل بدهند و اگر $W(y_1,y_2)(2)=3$، مقدار $W(y_1,y_2)(6)$ را به‌دست بیاورید.

۳۶. اگر رانسکین هر دو جواب $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ ثابت باشد، چه نتیجه‌ای دربارهٔ ضرایب p و q می‌توان گرفت؟

۳۷. اگر f، g و h تابعهایی مشتق‌پذیر باشند، ثابت کنید $W(fg,fh)=f^2W(g,h)$.

در مسئله‌های ۳۸ تا ۴۰، فرض کنید p و q تابعهایی پیوسته و y_1 و y_2 جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ روی بازه‌ای باز مانند I هستند.

۳۸. ثابت کنید اگر y_1 و y_2 صفر مشترکی در I داشته باشند آنگاه نمی‌توانند مجموعه‌ای اساسی از جوابها در آن بازه تشکیل بدهند.

۳۹. ثابت کنید اگر y_1 و y_2 نقطهٔ ماکزیمم و یا مینیمم مشترک در نقطه‌ای در I داشته باشند آنگاه نمی‌توانند مجموعه‌ای اساسی از جوابها در آن بازه تشکیل بدهند.

۴۰. ثابت کنید که اگر y_1 و y_2 نقطهٔ عطف مشترکی در t_0 در I داشته باشند آنگاه نمی‌توانند مجموعه‌ای اساسی از جوابها در آن بازه باشند مگر اینکه p و q هر دو در t_0 صفر باشند.

۴۱. **معادلات کامل.** معادلهٔ $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ را کامل می‌گوییم اگر آن را بتوان به‌صورت $[P(x)y']'+[f(x)y]'=0$ نوشت که در آن $f(x)$ تابعی است که برحسب $P(x)$، $Q(x)$ و $R(x)$ تعیین می‌شود. از معادلهٔ آخری بلافاصله می‌توان انتگرال گرفت و به معادلهٔ خطی مرتبهٔ اولی برحسب y رسید که می‌توان همانند بخش ۱.۲ آن را حل کرد. با مساوی قرار دادن ضرایب معادلات قبلی و حذف $f(x)$، ثابت کنید شرط لازم برای کامل بودن این است که $P''(x)-Q'(x)+R(x)=0$. می‌توان ثابت کرد که این شرط کافی هم هست.

در هر یک از مسئله‌های ۴۲ تا ۴۵، با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۴۱، تعیین کنید که معادلهٔ داده‌شده کامل است یا نه. در صورت کامل بودن آن را حل کنید.

۴۲. $y''+3x^2y'+xy=0$

۴۳. $y''+xy'+y=0$

۴۴. $xy''-(\cos x)y'+(\sin x)y=0$، $x>0$

۴۵. $x^2y''+xy'-y=0$، $x>0$

۴۶. **معادلهٔ الحاقی.** اگر معادلهٔ مرتبهٔ دوم خطی همگنی کامل نباشد، می‌توان آن را با ضرب در یک عامل انتگرال‌ساز مناسب مانند $\mu(x)$ کامل کرد. بنابراین $\mu(x)$ باید به گونه‌ای باشد که $\mu(x)P(x)y''+\mu(x)Q(x)y'+\mu(x)R(x)y=0$ را بتوان به‌صورت $[\mu(x)P(x)y']'+[f(x)y]'=0$ نوشت. با مساوی قرار دادن ضرایب این دو معادله و حذف $f(x)$، ثابت کنید تابع μ باید در معادلهٔ

$$P\mu''+(2P'-Q)\mu'+(P''-Q'+R)\mu=0$$

صدق کند. به این معادله، الحاقی معادلهٔ اولیه می‌گوییم و در نظریهٔ پیشرفتهٔ معادلات دیفرانسیل اهمیت دارد. در حالت کلی مسئلهٔ حل الحاقی معادلهٔ دیفرانسیل همان اندازه مشکل است که حل معادلهٔ اولیه، بنابراین پیدا کردن عامل انتگرال‌سازی برای معادلهٔ مرتبهٔ دوم تنها به‌صورت اتفاقی ممکن است.

در هر یک از مسئله‌های ۴۷ تا ۴۹، از نتیجهٔ مسئلهٔ ۴۶ برای یافتن الحاقی معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده استفاده کنید.

۴۷. $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$، معادلهٔ بسل

۴۸. $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$، معادلهٔ لژاندر

۴۹. $y''-xy=0$، معادلهٔ ایری

۵۰. ثابت کنید که معادلهٔ الحاقی معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ همان معادلهٔ اولیه است.

۵۱. معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ را خودالحاق می‌گوییم اگر الحاقی آن با معادلهٔ اولیه یکسان باشد. ثابت کنید شرط لازم برای اینکه این معادله خودالحاق باشد آن است که $P'(x)=Q(x)$. تعیین کنید که از معادله‌های مسئله‌های ۴۷ تا ۴۹، کدامها خودالحاق هستند.

۳.۳ ریشه‌های مختلط معادلهٔ مشخصه

بررسی معادلهٔ

$$ay''+by'+cy=0 \tag{1}$$

را، که در آن a، b و c اعداد حقیقی مفروضی هستند، ادامه می‌دهیم. در بخش ۳.۱ دریافتیم که اگر در جستجوی جوابی به شکل $y=e^{rt}$ باشیم، r باید ریشهٔ معادلهٔ مشخصه، یعنی

$$ar^2+br+c=0 \tag{2}$$

باشد. اگر ریشه‌های معادله (که آنها را با r_1 و r_2 نشان می‌دهیم) حقیقی و متمایز باشند، یعنی وقتی مبین b^2-4ac مثبت است، جواب عمومی معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$y=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}. \tag{3}$$

حال فرض کنید b^2-4ac منفی است. در این‌صورت، ریشه‌های معادلهٔ (۲) اعداد مختلط مزدوج هستند؛ این ریشه‌ها را با

$$r_1=\lambda+i\mu, \qquad r_2=\lambda-i\mu \tag{4}$$

نشان می‌دهیم که در آن λ و μ حقیقی هستند. عبارتهای متناظر این ریشه‌ها برای y عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} y_1(t)&=\exp[(\lambda+i\mu)t],\\ y_2(t)&=\exp[(\lambda-i\mu)t]. \end{aligned} \tag{5}$$

اول باید ببینیم که این عبارتها، که شامل تابع نمایی به توان عددی مختلط هستند، چه معنایی دارند. به‌عنوان مثال، اگر $\lambda=-1$، $\mu=2$ و $t=3$، از معادلهٔ (۵) نتیجه می‌شود

$$y_1(3)=e^{-3+6i}. \tag{6}$$

معنی رساندن e به‌توان عددی مختلط چیست؟ پاسخ در رابطهٔ مهمی داده می‌شود که به آن فرمول اویلر می‌گوییم.

فرمول اویلر. برای اینکه عبارتهای معادلهٔ (۵) معنی‌دار باشند، باید تابع نمایی مختلط را تعریف کنیم. البته می‌خواهیم که این تعریف، به‌ازای مقادیر حقیقی نما، به تابع نمایی حقیقی تبدیل شود. چندین راه برای کشف چگونگی تعمیم تعریف تابع نمایی وجود دارد. در اینجا از روشی بر مبنای سریهای نامتناهی استفاده می‌کنیم؛ کلیات روشی دیگر در مسئلهٔ ۲۸ توصیف شده است.

از حساب دیفرانسیل و انتگرال به یاد بیاورید که سری تیلور e^t حول $t=0$ عبارت است از

$$e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}, \qquad -\infty<t<\infty. \tag{7}$$

اگر فرض کنیم که در معادلهٔ (۷) می‌توانیم it را جایگزین t کنیم، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} e^{it}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^{2n-1}}{(2n-1)!} \end{aligned} \tag{8}$$

که در آن جمع را با استفاده از این واقعیت که $i^2=-1$، $i^3=-i$، $i^4=1$ و به همین ترتیب، به قسمت‌های حقیقی و موهومی تفکیک کرده‌ایم. سری اول در معادلهٔ (۸) دقیقاً سری تیلور $\cos t$ حول $t=0$ و دومی سری تیلور $\sin t$ حول $t=0$ است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$e^{it}=\cos t+i\sin t. \tag{9}$$

معادلهٔ (۹) به فرمول اویلر مشهور است و رابطهٔ ریاضی بسیار مهمی است. البته، معادلهٔ (۹) را براساس این فرض اثبات‌شده به‌دست آوردیم که می‌توان به‌جای متغیر مستقل سری (۷) اعداد مختلط را همانند اعداد حقیقی قرار داد، و هدفمان از این بحث صرفاً این بود که معادلهٔ (۹) پذیرفتنی به‌نظر بیاید. حالا، e^{it} را با معادلهٔ (۹) تعریف می‌کنیم؛ به‌عبارت دیگر، وقتی می‌نویسیم e^{it} منظورمان طرف راست معادلهٔ (۹) است.

بعضی از حالتهای خاص فرمول اویلر هم جالب توجه‌اند. اگر در معادلهٔ (۹)، $-t$ را جایگزین t کنیم و توجه کنیم که $\cos(-t)=\cos t$ و $\sin(-t)=-\sin t$، نتیجه می‌شود

$$e^{-it}=\cos t-i\sin t \tag{10}$$

علاوه بر این اگر در معادلهٔ (۹)، μt را جایگزین t کنیم، صورت کلی فرمول اویلر را به‌دست می‌آوریم، یعنی

$$e^{i\mu t}=\cos\mu t+i\sin\mu t. \tag{11}$$

حال می‌خواهیم تعریف تابع نمایی را به نمای مختلط دلخواهی به‌صورت $(\lambda+i\mu)t$ تعمیم بدهیم. چون می‌خواهیم خواص معمول توابع نمایی به‌ازای نماهای مختلط برقرار باشد، مطمئناً می‌خواهیم که $\exp[(\lambda+i\mu)t]$ در

$$e^{(\lambda+i\mu)t}=e^{\lambda t}e^{i\mu t} \tag{12}$$

صدق کند. پس با جایگزینی $e^{i\mu t}$ از معادلهٔ (۱۱) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} e^{(\lambda+i\mu)t}&=e^{\lambda t}(\cos\mu t+i\sin\mu t)\\ &=e^{\lambda t}\cos\mu t+ie^{\lambda t}\sin\mu t \end{aligned} \tag{13}$$

از این به بعد، معادلهٔ (۱۳) را تعریف $\exp[(\lambda+i\mu)t]$ در نظر می‌گیریم. مقدار تابع نمایی با نمای مختلط، عدد مختلطی است که قسمت حقیقی و موهومی آن با جمله‌های طرف راست معادلهٔ (۱۳) داده می‌شود. توجه کنید که قسمت‌های حقیقی و موهومی $\exp[(\lambda+i\mu)t]$ برحسب توابع مقدماتی حقیقی‌مقدار معرفی می‌شوند. به‌عنوان مثال، مقدار کمیت معادلهٔ (۶) برابر است با

$$e^{-3+6i}=e^{-3}\cos 6+ie^{-3}\sin 6\cong 0.0478041-0.0139113i.$$

با استفاده از تعریفهای (۹) و (۱۳)، اثبات اینکه قوانین معمول توانها برای اعداد مختلط معتبرند ساده است. می‌توانید از معادلهٔ (۱۳) استفاده کنید و ثابت کنید که

$$\frac{d}{dt}(e^{rt}) = re^{rt} \qquad (۱۴)$$

به‌ازای هر مقدار مختلط r برقرار است.

مثال ۱

جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + y' + ۹٫۲۵y = ۰ \qquad (۱۵)$$

را بیابید. همچنین جوابی را بیابید که در شرایط اولیهٔ

$$y(۰) = ۲, \quad y'(۰) = ۸ \qquad (۱۶)$$

صدق کند و نمودار آن را رسم کنید.

معادلهٔ مشخصهٔ (۱۵) عبارت است از

$$r^۲ + r + ۹٫۲۵ = ۰$$

که ریشه‌هایش عبارت‌اند از

$$r_۱ = -\frac{۱}{۲} + ۳i, \quad r_۲ = -\frac{۱}{۲} - ۳i.$$

بنابراین دو جواب معادلهٔ (۱۵) عبارت‌اند از

$$y_۱(t) = \exp\left[\left(-\frac{۱}{۲} + ۳i\right)t\right] = e^{-t/۲}(\cos ۳t + i\sin ۳t) \qquad (۱۷)$$

و

$$y_۲(t) = \exp\left[\left(-\frac{۱}{۲} - ۳i\right)t\right] = e^{-t/۲}(\cos ۳t - i\sin ۳t). \qquad (۱۸)$$

می‌توانید بررسی کنید که $W(y_۱, y_۲)(t) = -۶ie^{-t}$ که صفر نیست، بنابراین جواب عمومی (۱۵) را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی $y_۱(t)$ و $y_۲(t)$ با ثابتهای دلخواه نوشت.

اما به‌جای استفاده از جوابهای مختلط‌مقدار $y_۱(t)$ و $y_۲(t)$، می‌خواهیم مجموعه‌ای اساسی از جوابهای حقیقی‌مقدار معادلهٔ (۱۵) را پیدا کنیم. از قضیهٔ ۲.۲.۳ می‌دانیم که هر ترکیب خطی از این دو جواب هم جواب است؛ بنابراین ترکیب خطی $y_۱(t) + y_۲(t)$ و $y_۱(t) - y_۲(t)$ را تشکیل می‌دهیم. به این ترتیب از معادله‌های (۱۷) و (۱۸) نتیجه می‌شود

$$y_۱(t) + y_۲(t) = ۲e^{-t/۲}\cos ۳t, \quad y_۱(t) - y_۲(t) = ۲ie^{-t/۲}\sin ۳t.$$

برای سادگی، ضرایب ثابت ۲ و $۲i$ را حذف می‌کنیم و به تابعهای

$$u(t) = e^{-t/۲}\cos ۳t, \quad v(t) = e^{-t/۲}\sin ۳t \qquad (۱۹)$$

می‌رسیم که جوابهای حقیقی‌مقدار معادلهٔ (۱۵) هستند [اگر قانع نشده‌اید که $u(t)$ و $v(t)$ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده هستند، باید این تابعها را در معادلهٔ (۱۵) جایگزین کنید و تحقیق کنید که در معادله صدق می‌کنند]. رانسکین $u(t)$ و $v(t)$ برابر است با $W(u, v)(t) = ۳e^{-t}$؛ پس $u(t)$ و $v(t)$ مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند و جواب عمومی

معادلهٔ (۱۵) را می‌توان به‌صورت

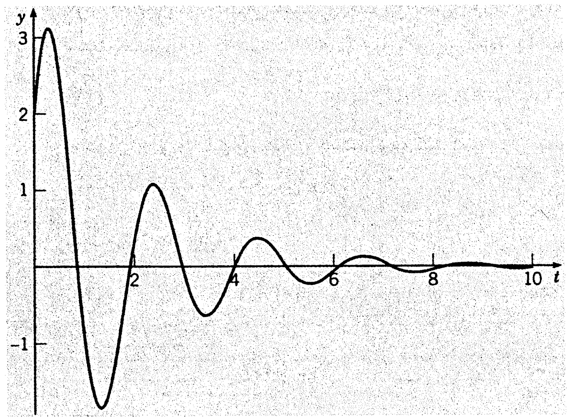
$$y = c_۱u(t) + c_۲v(t) = e^{-t/۲}(c_۱\cos ۳t + c_۲\sin ۳t) \qquad (۲۰)$$

نوشت، که در آن $c_۱$ و $c_۲$ ثابتهایی دلخواه هستند.

برای برآورده شدن شرایط اولیهٔ (۱۶)، در معادلهٔ (۲۰) قرار می‌دهیم $t = ۰$ و $y = ۲$ که نتیجه می‌دهد $c_۱ = ۲$. به این ترتیب با مشتق‌گیری از معادلهٔ (۲۰) و قرار دادن $t = ۰$ و $y' = ۸$ نتیجه می‌شود $-\frac{۱}{۲}c_۱ + ۳c_۲ = ۸$ و بنابراین $c_۲ = ۳$. پس جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۵) و (۱۶) عبارت است از

$$y = e^{-t/۲}(۲\cos ۳t + ۳\sin ۳t). \qquad (۲۱)$$

نمودار این جواب در شکل ۱.۳.۳ نشان داده شده است.



شکل ۱.۳.۳ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ $y'' + y' + ۹٫۲۵y = ۰$، $y(۰) = ۲$، $y'(۰) = ۸$.

می‌توان در نمودار دید که جواب این مسئله، نوسانی میرا است. عاملهای سینوس و کسینوس ماهیت نوسانی جواب را کنترل می‌کنند و در هر جمله، عامل نمایی با نمای منفی با افزایش زمان منجر به میرایی نوسانات می‌شود.

ریشه‌های مختلط؛ حالت کلی. اگر ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ (۲) اعداد مختلط $\lambda \pm i\mu$ باشند، تابعهای $y_۱(t)$ و $y_۲(t)$ داده‌شده در معادله‌های (۵) به معنای معادلهٔ (۱۳) جوابهای معادلهٔ (۱) هستند. متأسفانه جوابهای $y_۱$ و $y_۲$ مختلط‌مقدار هستند، در حالی که در حالت کلی، در صورت امکان ترجیح می‌دهیم که جواب حقیقی‌مقدار داشته باشیم، چون ضرایب خود معادلهٔ دیفرانسیل حقیقی هستند. می‌توانیم برای یافتن مجموعه‌ای اساسی از جوابهای حقیقی‌مقدار مانند مثال ۱ عمل کنیم و مجموع و تفاضل $y_۱$ و $y_۲$ را تشکیل بدهیم. می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} y_۱(t) + y_۲(t) &= e^{\lambda t}(\cos \mu t + i\sin \mu t) + e^{\lambda t}(\cos \mu t - i\sin \mu t) \\ &= ۲e^{\lambda t}\cos \mu t \end{aligned}$$

و

$$y_1(t) - y_2(t) = e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \sin \mu t) - e^{\lambda t}(\cos \mu t - i \sin \mu t) = 2ie^{\lambda t}\sin \mu t;$$

بنابراین با صرف‌نظر کردن از ضرایب ۲ و $2i$، یک جفت جواب حقیقی‌مقدار

$$u(t) = e^{\lambda t}\cos \mu t, \qquad v(t) = e^{\lambda t}\sin \mu t \qquad (۲۲)$$

به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که u و v به‌ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی y_1 هستند. می‌توانید با محاسبهٔ مستقیم ثابت کنید که رانسکین u و v عبارت است از

$$W(u,v)(t) = \mu e^{2\lambda t}; \qquad (۲۳)$$

پس اگر $\mu \neq 0$ رانسکین صفر نیست و در نتیجه، u و v مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند (البته اگر $\mu = 0$، ریشه‌ها حقیقی هستند و بحث این بخش کاربرد ندارد). در نتیجه اگر ریشه‌های معادلهٔ مشخصه اعداد مختلط $\lambda \pm i\mu$ باشند که $\mu \neq 0$، جواب عمومی معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$y = c_1 e^{\lambda t}\cos \mu t + c_2 e^{\lambda t}\sin \mu t \qquad (۲۴)$$

که در آن c_1 و c_2 ثابتهایی دلخواه هستند. توجه کنید که به مجرد معلوم بودن λ و μ، می‌توان جواب (۲۴) را نوشت. اکنون چند مثال دیگر می‌آوریم.

مثال ۲

جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$16y'' - 8y' + 145y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 1 \qquad (۲۵)$$

را به‌دست بیاورید.

معادلهٔ مشخصه $16r^2 - 8r + 145 = 0$ است و ریشه‌های آن $r = \frac{1}{4} \pm 3i$ هستند. پس جواب عمومی عبارت است از

$$y = c_1 e^{t/4}\cos 3t + c_2 e^{t/4}\sin 3t. \qquad (۲۶)$$

برای استفاده از اولین شرط اولیه در معادلهٔ (۲۶) قرار می‌دهیم $t = 0$؛ در نتیجه

$$y(0) = c_1 = -2.$$

برای دومین شرط اولیه باید از معادلهٔ (۲۶) مشتق بگیریم و سپس قرار بدهیم $t = 0$؛ پس

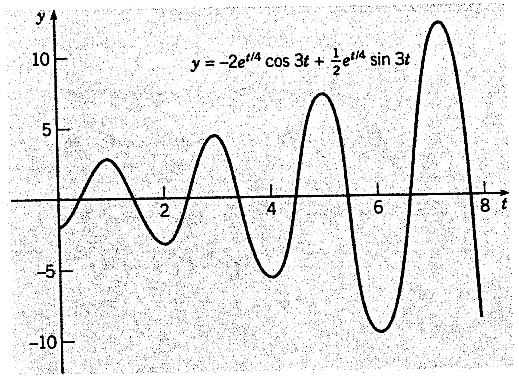
$$y'(0) = \frac{1}{4}c_1 + 3c_2 = 1$$

که از آن $c_2 = 1/2$ به‌دست می‌آید. با قرار دادن c_1 و c_2 در معادلهٔ (۲۶)،

$$y = -2e^{t/4}\cos 3t + \frac{1}{2}e^{t/4}\sin 3t \qquad (۲۷)$$

را به‌عنوان جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲۵) به‌دست می‌آوریم. نمودار این جواب در شکل ۲.۳.۳ نمایش داده شده است.

در این حالت می‌بینیم که جواب، نوسانی فزاینده است. مجدداً عاملهای مثلثاتی در معادلهٔ (۲۷) قسمت نوسانی جواب را مشخص می‌کنند و عامل نمایی (این بار با نمای مثبت) باعث افزایش دامنهٔ نوسانات با زمان می‌شود.



شکل ۲.۳.۳ جواب $16y'' - 8y' + 145y = 0$، $y(0) = -2$، $y'(0) = 1$.

مثال ۳

جواب عمومی معادلهٔ

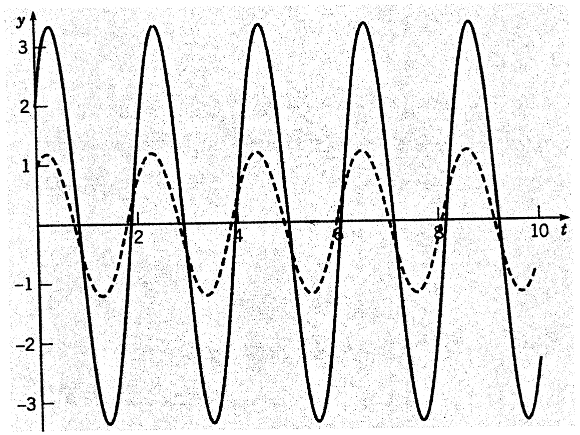
$$y'' + 9y = 0 \qquad (۲۸)$$

را به‌دست بیاورید.

معادلهٔ مشخصه، $r^2 + 9 = 0$ با ریشه‌های $r = \pm 3i$ است؛ پس $\lambda = 0$ و $\mu = 3$. جواب عمومی عبارت است از

$$y = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t. \qquad (۲۹)$$

توجه کنید که اگر قسمت حقیقی ریشه‌ها مانند این مثال صفر باشد، هیچ عامل نمایی‌ای در جواب موجود نخواهد بود. شکل ۳.۳.۳ نمودار دو جواب نوعی معادلهٔ (۲۸) را نشان می‌دهد. در هر حالت جواب یک نوسان محض است که دامنهٔ آن با شرایط اولیه معین می‌شود. چون عامل نمایی در جواب (۲۹) موجود نیست، دامنهٔ هر نوسان در زمان ثابت می‌ماند.



شکل ۳.۳.۳ جوابهای نوعیِ $y'' + 9y = 0$.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۶، با استفاده از فرمول اویلر عبارت داده‌شده را به‌صورت $a+ib$ بنویسید.

۱. $\exp(۱+۲i)$ ۲. $\exp(۲+۴i)$

۳. $e^{۲i\pi}$ ۴. $e^{۲+(\pi/۲)i}$

۵. $۲^{۱-i}$ ۶. $\pi^{-۱+۲i}$

در هر یک از مسئله‌های ۷ تا ۱۶، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده را بنویسید.

۷. $y''-۲y'+۲y=۰$ ۸. $y''+۲y'+۲y=۰$

۹. $y''+۲y'-۸y=۰$ ۱۰. $y''-۲y'+۶y=۰$

۱۱. $y''+۶y'+۱۳y=۰$ ۱۲. $۹y''+۱۶y=۰$

۱۳. $y''+y'+۱{,}۲۵y=۰$ ۱۴. $۹y''+۹y'-۴y=۰$

۱۵. $y''+۲y'+۱{,}۲۵y=۰$ ۱۶. $y''+۴y'+۶{,}۲۵y=۰$

در هر یک از مسئله‌های ۱۷ تا ۲۲، جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را بیابید. نمودار جواب را رسم کنید و رفتار آن را با افزایش t تشریح کنید.

۱۷. $y''+۴y=۰$، $y(۰)=۰$، $y'(۰)=۱$

۱۸. $y''+۴y'+۵y=۰$، $y(۰)=۱$، $y'(۰)=۰$

۱۹. $y''-۶y'+۱۳y=۰$، $y(\pi/۲)=۰$، $y'(\pi/۲)=۲$

۲۰. $y''+y=۰$، $y(\pi/۳)=۲$، $y'(\pi/۳)=-۴$

۲۱. $y''+y'+۱{,}۲۵y=۰$، $y(۰)=۴$، $y'(۰)=۱$

۲۲. $y''+۲y'+۲y=۰$، $y(\pi/۴)=۲$، $y'(\pi/۴)=-۲$

۲۳. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$۳u''-u'+۲u=۰,\qquad u(۰)=۲,\quad u'(۰)=۰$$

را در نظر بگیرید.

الف) جواب این مسئله (یعنی $u(t)$) را بیابید.

ب) به‌ازای $t>۰$، اولین زمانی را بیابید که در آن $|u(t)|=۱۰$.

۲۴. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$۵u''+۲u'+۷u=۰,\qquad u(۰)=۲,\quad u'(۰)=۱$$

را در نظر بگیرید.

الف) جواب این مسئله (یعنی $u(t)$) را بیابید.

ب) کوچک‌ترین T را بیابید که به‌ازای هر $t>T$، $|u(t)|\le ۰{,}۱$.

۲۵. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y''+۲y'+۶y=۰,\qquad y(۰)=۲,\quad y'(۰)=\alpha\ge ۰$$

را در نظر بگیرید.

الف) جواب این مسئله (یعنی $y(t)$) را بیابید.

ب) α را طوری بیابید که اگر $t=۱$ آنگاه $y=۰$.

ج) کوچک‌ترین مقدار مثبت t را برحسب α بیابید که به‌ازای آن $y=۰$.

د) حد عبارت پیداشده در قسمت (ج) را وقتی $\alpha\to\infty$ به‌دست بیاورید.

۲۶. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y''+۲ay'+(a^۲+۱)y=۰,\qquad y(۰)=۱,\quad y'(۰)=۰$$

را در نظر بگیرید.

الف) جواب این مسئله (یعنی $y(t)$) را بیابید.

ب) به‌ازای $a=۱$، کوچک‌ترین T را بیابید که به‌ازای $t>T$، $|y(t)|<۰{,}۱$.

ج) قسمت (ب) را به‌ازای a برابر ۱/۴، ۱/۲ و ۲ انجام بدهید.

د) با استفاده از نتایج قسمت (ب) و (ج)، نمودار T برحسب a را رسم کنید و رابطهٔ بین T و a را تشریح کنید.

۲۷. ثابت کنید $W(e^{\lambda t}\cos\mu t, e^{\lambda t}\sin\mu t)=\mu e^{۲\lambda t}$.

۲۸. در این مسئله روش دیگری را برای به‌دست آوردن فرمول اویلر طرح می‌کنیم.

الف) ثابت کنید $y_۱(t)=\cos t$ و $y_۲(t)=\sin t$ مجموعه‌ای اساسی از جوابهای $y''+y=۰$ تشکیل می‌دهند؛ یعنی ثابت کنید جواب معادله هستند و رانسکین آنها ناصفر است.

ب) ثابت کنید که $y=e^{it}$ هم (به‌طور صوری) جوابی از معادلهٔ $y''+y=۰$ است. بنابراین به‌ازای $c_۱$ و $c_۲$ مناسب،

$$e^{it}=c_۱\cos t+c_۲\sin t. \qquad \text{(i)}$$

چرا چنین است؟

ج) در معادلهٔ (i) قرار دهید $t=۰$ و نتیجه بگیرید $c_۱=۱$.

د) با فرض درستی معادلهٔ (۱۴)، از معادلهٔ (i) مشتق بگیرید و قرار بدهید $t=۰$ تا نتیجه بگیرید $c_۲=i$. از مقادیر $c_۱$ و $c_۲$ در معادلهٔ (i) استفاده کنید تا به فرمول اویلر برسید.

۲۹. با استفاده از فرمول اویلر ثابت کنید

$$\cos t=(e^{it}+e^{-it})/۲,\qquad \sin t=(e^{it}-e^{-it})/۲i.$$

۳۰. اگر e^{rt} با معادلهٔ (۱۳) داده شود، ثابت کنید به‌ازای اعداد مختلط $r_۱$ و $r_۲$، $e^{(r_۱+r_۲)t}=e^{r_۱t}e^{r_۲t}$.

۳۱. اگر e^{rt} با معادلهٔ (۱۳) داده شود، ثابت کنید به‌ازای هر عدد مختلط مانند r،

$$\frac{d}{dt}e^{rt}=re^{rt}.$$

۳۲. فرض کنید تابعهای حقیقی‌مقدار p و q روی بازهٔ باز I پیوسته هستند و فرض کنید $y=\phi(t)=u(t)+iv(t)$ جواب مختلط‌مقداری برای

$$y''+p(t)y'+q(t)y=0 \tag{i}$$

است که در آن u و v حقیقی‌مقدار هستند. ثابت کنید u و v هم جوابهای معادلهٔ (i) هستند.

راهنمایی: در معادلهٔ (i) قرار دهید $y=\phi(t)$ و قسمت‌های حقیقی و موهومی را جدا کنید.

۳۳. اگر تابعهای y_1 و y_2 مجموعه‌ای اساسی از جوابهای $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ تشکیل بدهند، ثابت کنید بین هر دو ریشهٔ متوالی y_1، یک و تنها یک ریشه از y_2 موجود است. توجه کنید که این نتیجه را می‌توان در جوابهای $y_1(t)=\cos t$ و $y_2(t)=\sin t$ برای معادلهٔ $y''+y=0$ دید.

راهنمایی: فرض کنید t_1 و t_2 دو صفر از y_1 باشند که بین آنها y_2 ریشه‌ای ندارد. با استفاده از قضیهٔ رُل در مورد y_1/y_2 به تناقض برسید.

تغییر متغیر. گاهی برای یافتن جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل با ضرایب متغیر مثل

$$y''+p(t)y'+q(t)y=0 \tag{i}$$

می‌توان آن را با تغییر متغیر مستقل به شکل مناسب‌تری تبدیل کرد. این ایده را در مسئله‌های ۳۴ تا ۴۶ بررسی می‌کنیم. به‌ویژه در مسئلهٔ ۳۴، نشان می‌دهیم که خانواده‌ای از معادلات را که به معادلهٔ اویلر مشهورند می‌توان با تغییر متغیر مستقل به معادله‌ای با ضرایب ثابت تبدیل کرد. مسئله‌های ۳۵ تا ۴۲ از این نوع معادله‌ها هستند. مسئلهٔ ۴۳ شرایطی را معین می‌کند که تحت آن معادلهٔ کلی‌تر (i) را می‌توان به معادلهٔ دیفرانسیلی با ضرایب ثابت تبدیل کرد. مسئله‌های ۴۴ تا ۴۶ شکل خاص این روند هستند.

۳۴. **معادلات اویلر.** به معادله‌ای به‌صورت

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+\alpha t\frac{dy}{dt}+\beta y=0,\qquad t>0 \tag{ii}$$

که در آن α و β ثابتهای حقیقی هستند، معادلهٔ اویلر می‌گوییم.

الف) قرار دهید $x=\ln t$ و dy/dt و d^2y/dt^2 را برحسب dy/dx و d^2y/dx^2 محاسبه کنید.

ب) با استفاده از نتایج قسمت (الف) معادلهٔ (ii) را به‌صورت

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(\alpha-1)\frac{dy}{dx}+\beta y=0 \tag{iii}$$

تبدیل کنید. توجه کنید که ضرایب معادلهٔ (iii) ثابت هستند. اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادلهٔ (iii) تشکیل بدهند، $y_1(\ln t)$ و $y_2(\ln t)$ مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادلهٔ (ii) تشکیل می‌دهند.

در هر یک از مسئله‌های ۳۵ تا ۴۲، با استفاده از روش مسئلهٔ ۳۴ معادلهٔ داده‌شده را به‌ازای $t>0$ حل کنید.

۳۵. $t^2y''+ty'+y=0$

۳۶. $t^2y''+4ty'+2y=0$

۳۷. $t^2y''-4ty'-6y=0$

۳۸. $t^2y''+3ty'+1.25y=0$

۳۹. $t^2y''-7ty'+15y=0$

۴۰. $t^2y''-ty'+5y=0$

۴۱. $t^2y''+7ty'+10y=0$

۴۲. $t^2y''+3ty'-3y=0$

۴۳. در این مسئله شرایطی روی p و q تعیین می‌کنیم که با تغییر متغیر مستقل، تبدیل معادلهٔ (i) به معادله‌ای با ضرایب ثابت را امکان‌پذیر می‌کند. فرض کنید $x=u(t)$ متغیر مستقل جدیدی باشد که رابطهٔ بین x و t بعداً مشخص می‌شود.

الف) ثابت کنید

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dx},\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dx}.$$

ب) ثابت کنید معادلهٔ دیفرانسیل (i) تبدیل می‌شود به

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}\right)\frac{dy}{dx}+q(t)y=0. \tag{iv}$$

ج) برای اینکه ضرایب معادلهٔ (iv) ثابت باشند، ضرایب d^2y/dx^2 و y باید متناسب باشند. اگر $q(t)>0$، ثابت نسبت را می‌توانیم ۱ انتخاب کنیم؛ بنابراین

$$x=u(t)=\int [q(t)]^{1/2}\,dt. \tag{v}$$

د) با x انتخاب‌شده در قسمت (ج) ثابت کنید ضریب dy/dx در معادلهٔ (iv) هم ثابت است، به‌شرط اینکه عبارت

$$\frac{q'(t)+2p(t)q(t)}{2[q(t)]^{3/2}} \tag{vi}$$

ثابت باشد. پس معادلهٔ (i) را می‌توان با تغییر متغیر مستقل به معادله‌ای با ضرایب ثابت تبدیل کرد، به‌شرط اینکه $(q'+2pq)/q^{3/2}$ ثابت باشد. اگر $q(t)<0$، این نتیجه چگونه باید اصلاح شود؟

در هر یک از مسئله‌های ۴۴ تا ۴۶، سعی کنید معادلهٔ داده‌شده را با روش مسئلهٔ ۴۳ به معادله‌ای با ضرایب ثابت تبدیل کنید. در صورت امکان جواب عمومی معادلهٔ داده‌شده را به‌دست بیاورید.

۴۴. $y''+ty'+e^{-t^2}y=0$، $-\infty<t<\infty$

۴۵. $ty''+(t^2-1)y'+t^3y=0$، $0<t<\infty$

۴۶. $y''+3ty'+t^2y=0$، $-\infty<t<\infty$

۴.۳ ریشه‌های تکراری؛ کاهش مرتبه

در بخش‌های قبلی نشان دادیم که چگونه معادلهٔ

$$ay''+by'+cy=0 \tag{1}$$

را وقتی ریشه‌های معادلهٔ مشخصه، یعنی

$$ar^2+br+c=0 \tag{2}$$

حقیقی و متمایز و یا مختلط مزدوج هستند حل کنیم. اکنون حالت سوم را، یعنی حالتی را که r_1 و r_2 مساوی هستند، بررسی می‌کنیم. این حالت، حالتی انتقالی بین دو حالت دیگر است که در آن مبیّن، یعنی b^2-4ac صفر است. در این‌صورت از دستور محاسبهٔ ریشه‌های معادلهٔ مرتبهٔ دوم نتیجه می‌شود که

$$r_1=r_2=-\frac{b}{2a}. \tag{3}$$

مشکل بلافاصله ظاهر می‌شود. هر دو ریشه منجر به یک جواب

$$y_1(t)=e^{-bt/2a} \tag{4}$$

برای معادلهٔ دیفرانسیل (۱) می‌شوند، و معلوم نیست که جواب دوم را چطور باید به‌دست بیاوریم.

مثال ۱

معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+4y'+4y=0 \tag{5}$$

را حل کنید.

معادلهٔ مشخصه عبارت است از

$$r^2+4r+4=(r+2)^2=0$$

بنابراین $r_1=r_2=-2$ و در نتیجه، یک جواب معادلهٔ (۵)، $y_1(t)=e^{-2t}$ است. برای یافتن جواب عمومی معادلهٔ (۵)، باید جواب دومی پیدا کنیم که مضربی ثابت از y_1 نیست. این جواب دوم را می‌توان به روشهای مختلف پیدا کرد (مسئله‌های ۲۰ تا ۲۲ را ببینید)، اما در اینجا از روشی که دالامبر[1] در قرن هجدهم ابداع کرده استفاده می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که چون $y_1(t)$ جوابی از معادلهٔ (۱) است، به‌ازای هر ثابت c، $cy_1(t)$ هم جواب است. ایدهٔ اصلی این است که این نکته را با جایگزین کردن تابع $v(t)$ به‌جای c و سپس سعی در تعیین $v(t)$ به‌طوری که حاصلضرب $y=v(t)y_1(t)$ هم جواب معادلهٔ (۱) باشد، تعمیم بدهیم.

برای انجام این کار، $y=v(t)y_1(t)$ را در معادلهٔ (۵) جایگزین می‌کنیم و از معادلهٔ حاصل برای یافتن $v(t)$ استفاده می‌کنیم. با شروع از

$$y=v(t)y_1(t)=v(t)e^{-2t}, \tag{6}$$

می‌توانیم بنویسیم

$$y'=v'(t)e^{-2t}-2v(t)e^{-2t} \tag{7}$$

و

$$y''=v''(t)e^{-2t}-4v'(t)e^{-2t}+4v(t)e^{-2t}. \tag{8}$$

با جایگذاری عبارتهای معادله‌های (۶)، (۷) و (۸) در معادلهٔ (۵) و گردآوری جمله‌ها نتیجه می‌شود

$$[v''(t)-4v'(t)+4v(t)+4v'(t)-8v(t)+4v(t)]e^{-2t}=0$$

که ساده می‌شود به

$$v''(t)=0; \tag{9}$$

بنابراین

$$v'(t)=c_1$$

۱. ژان دالامبر (۱۷۱۷-۱۷۸۳م) ریاضیدانی فرانسوی معاصر اویلر و دانیل برنولی بود و عمدتاً برای کارهایش در مکانیک و معادلات دیفرانسیل شهرت دارد. اصل دالامبر در مکانیک و پارادوکس دالامبر در هیدرودینامیک منتسب به او است و معادلهٔ موج اولین‌بار در مقالهٔ وی دربارهٔ تار مرتعش در ۱۷۴۷ میلادی ظاهر شد. او سالهای آخر عمرش را بیشتر صرف فلسفه و وظایفش به‌عنوان سردبیر علوم دائرةالمعارف دیدرو کرد.

و

$$v(t)=c_1t+c_2 \tag{10}$$

که در آن c_1 و c_2 ثابتهایی دلخواه هستند. درنهایت با جایگزینی $v(t)$ در معادلهٔ (۶) نتیجه می‌شود

$$y=c_1te^{-2t}+c_2e^{-2t}. \tag{11}$$

جملهٔ دوم طرف راست معادلهٔ (۱۱) متناظر جواب اول، یعنی $y_1(t)=\exp(-2t)$ است، اما جملهٔ اول از جواب دوم به‌دست می‌آید؛ یعنی از $y_2(t)=t\exp(-2t)$. با محاسبهٔ رانسکین این دو جواب می‌توانیم ثابت کنیم که این دو جواب مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند:

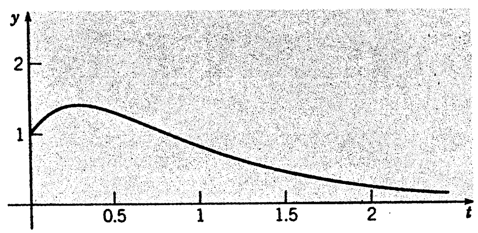
$$W(y_1,y_2)(t)=\begin{vmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ -2e^{-2t} & (1-2t)e^{-2t}\end{vmatrix}$$

$$=e^{-4t}-2te^{-4t}+2te^{-4t}=e^{-4t}\neq 0.$$

بنابراین

$$y_1(t)=e^{-2t}, \qquad y_2(t)=te^{-2t} \tag{12}$$

مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادلهٔ (۵) تشکیل می‌دهند و جواب عمومی با معادلهٔ (۱۱) داده می‌شود. توجه کنید که هر دو جواب $y_1(t)$ و $y_2(t)$ وقتی $t\to\infty$ به صفر میل می‌کنند؛ در نتیجه همهٔ جوابهای معادلهٔ (۵) هم به این‌صورت رفتار می‌کنند. نمودار یک جواب نوعی در شکل ۱.۴.۳ نشان داده شده است.



شکل ۱.۴.۳ یک جواب نوعی $y''+4y'+4y=0$.

روند مثال ۱ را می‌توان به معادله‌ای کلی که معادلهٔ مشخصه‌اش ریشه‌های تکراری دارد تعمیم داد. یعنی فرض می‌کنیم که ضرایب معادلهٔ (۱) در $b^2-4ac=0$ صدق می‌کنند که در این حالت

$$y_1(t)=e^{-bt/2a}$$

یکی از جوابها است. برای یافتن جواب دوم، فرض می‌کنیم

$$y=v(t)y_1(t)=v(t)e^{-bt/2a} \tag{13}$$

و برای تعیین $v(t)$، y را در معادلهٔ (۱) قرار می‌دهیم. می‌توانیم بنویسیم

$$y'=v'(t)e^{-bt/2a}-\frac{b}{2a}v(t)e^{-bt/2a} \tag{14}$$

و

$$y''=v''(t)e^{-bt/2a}-\frac{b}{a}v'(t)e^{-bt/2a}+\frac{b^2}{4a^2}v(t)e^{-bt/2a}. \qquad (۱۵)$$

از قرار دادن این مقدارها در معادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود

$$\left\{a\left[v''(t)-\frac{b}{a}v'(t)+\frac{b^2}{4a^2}v(t)\right]+b\left[v'(t)-\frac{b}{2a}v(t)\right]+cv(t)\right\}e^{-bt/2a}=0. \qquad (۱۶)$$

با حذف عامل ناصفر $\exp(-bt/2a)$ و بازنویسی بقیهٔ جمله‌ها نتیجه می‌شود

$$av''(t)+(-b+b)v'(t)+\left(\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c\right)v(t)=0. \qquad (۱۷)$$

واضح است که جملهٔ شامل $v'(t)$ صفر است. علاوه بر این، ضریب $v(t)$ برابر است با $c-(b^2/4a)$ که آن هم برابر صفر است چون در این مسئله $b^2-4ac=0$. پس مانند مثال ۱، معادلهٔ (۱۷) ساده می‌شود به

$$v''(t)=0;$$

بنابراین

$$v(t)=c_1+c_2t$$

و از معادلهٔ (۱۳) نتیجه می‌شود

$$y=c_1e^{-bt/2a}+c_2te^{-bt/2a}. \qquad (۱۸)$$

پس y ترکیبی خطی از دو جواب

$$y_1(t)=e^{-bt/2a}, \qquad y_2(t)=te^{-bt/2a} \qquad (۱۹)$$

است. رانسکین این دو جواب عبارت است از

$$W(y_1,y_2)(t)=\begin{vmatrix} e^{-bt/2a} & te^{-bt/2a} \\ -\frac{b}{2a}e^{-bt/2a} & \left(1-\frac{bt}{2a}\right)e^{-bt/2a}\end{vmatrix}=e^{-bt/a}. \qquad (۲۰)$$

چون $W(y_1,y_2)(t)$ هرگز صفر نمی‌شود، جوابهای y_1 و y_2 در معادلهٔ (۱۹) مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند. علاوه بر این، اگر ریشه‌های معادلهٔ مشخصه تکراری باشند، معادلهٔ (۱۸) جواب عمومی معادلهٔ (۱) است. به عبارت دیگر در این حالت یک تابع نمایی متناظر ریشهٔ تکراری است و جواب دوم از ضرب جواب نمایی در t به‌دست می‌آید.

مثال ۲

جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y''-y'+0{,}25y=0, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=\frac{1}{3} \qquad (۲۱)$$

را به‌دست بیاورید.

معادلهٔ مشخصه عبارت است از

$$r^2-r+0{,}25=0;$$

بنابراین ریشه‌ها عبارت‌اند از $r_1=r_2=1/2$. پس جواب عمومی عبارت است از

$$y=c_1e^{t/2}+c_2te^{t/2}. \qquad (۲۲)$$

از اولین شرط نتیجه می‌شود که

$$y(0)=c_1=2.$$

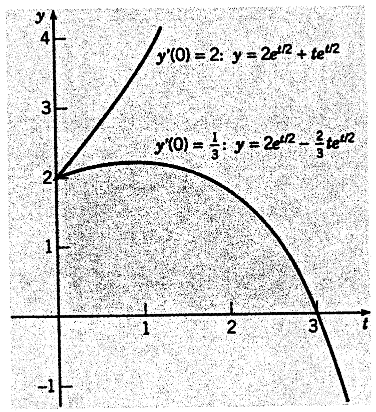
برای برآورده شدن شرط دوم، ابتدا از معادلهٔ (۲۲) مشتق می‌گیریم و قرار می‌دهیم $t=0$، در نتیجه

$$y'(0)=\frac{1}{2}c_1+c_2=\frac{1}{3};$$

بنابراین $c_2=-2/3$. پس جواب مسئلهٔ مقدار اولیه،

$$y=2e^{t/2}-\frac{2}{3}te^{t/2} \qquad (۲۳)$$

است. نمودار این جواب در شکل ۲.۴.۳ نشان داده شده است.



شکل ۲.۴.۳ جوابهای $y''-y'+0{,}25y=0$، $y(0)=2$، به‌ترتیب با $y'(0)=1/3$ و $y'(0)=2$.

اکنون می‌خواهیم مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲۱) را با تغییر شیب اولیه اصلاح کنیم؛ فرض کنید شرط دوم $y'(0)=2$ باشد. جواب این مسئلهٔ اصلاح‌شده،

$$y=2e^{t/2}+te^{t/2}$$

است و نمودار آن هم در شکل ۲.۴.۳ نشان داده شده است. از نمودارهای نشان داده‌شده در این شکل به نظر می‌رسد که یک مقدار بحرانی برای شیب اولیه بین $\frac{1}{3}$ و ۲ موجود است که جوابهایی را که به‌طور مثبت رشد می‌کنند از آنها که درنهایت به‌طور منفی رشد می‌کنند جدا می‌کند. در مسئلهٔ ۱۶ خواسته‌ایم که این شیب بحرانی را تعیین کنید.

رفتار هندسی جوابها در این حالت مشابه حالتی است که ریشه‌ها حقیقی و متمایز هستند. اگر نماها مثبت و یا منفی باشند، نمودار جواب به‌ترتیب بزرگ یا کوچک می‌شود و عامل خطی t تأثیر چندانی ندارد. جواب کم‌شونده در شکل ۱.۴.۳ و جواب رشدیابنده در شکل ۲.۴.۳ نشان داده شده‌اند. اگر ریشهٔ تکراری صفر باشد، معادلهٔ دیفرانسیل $y''=0$ است و جواب عمومی تابعی خطی از t است.

خلاصه. اکنون می‌توانیم نتایج به‌دست آمده برای معادلات مرتبهٔ دوم خطی و همگن با ضرایب ثابت، یعنی

$$ay''+by'+cy=0 \tag{1}$$

را خلاصه کنیم. فرض کنید r_1 و r_2 ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصهٔ متناظر، یعنی

$$ar^2+br+c=0 \tag{2}$$

باشند. اگر r_1 و r_2 حقیقی و نامساوی باشند، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل (۱) عبارت است از

$$y=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}. \tag{24}$$

اگر r_1 و r_2 اعداد مزدوج مختلط به شکل $\lambda \pm i\mu$ باشند، جواب عمومی عبارت است از

$$y=c_1e^{\lambda t}\cos\mu t+c_2e^{\lambda t}\sin\mu t. \tag{25}$$

اگر $r_1=r_2$، جواب عمومی عبارت است از

$$y=c_1e^{r_1t}+c_2te^{r_1t}. \tag{26}$$

کاهش مرتبه. قابل توجه است که روندی که در این بخش برای معادلات با ضرایب ثابت به‌کار بردیم در حالت کلی‌تر هم کاربرد دارد. فرض کنید می‌دانیم که $y_1(t)$ جوابی برای

$$y''+p(t)y'+q(t)y=0 \tag{27}$$

است که همه‌جا صفر نیست. برای یافتن جواب دوم قرار می‌دهیم

$$y=v(t)y_1(t); \tag{28}$$

در این‌صورت

$$y'=v'(t)y_1(t)+v(t)y_1'(t)$$

و

$$y''=v''(t)y_1(t)+2v'(t)y_1'(t)+v(t)y_1''(t).$$

با جایگزین کردن y و y' و y'' در معادلهٔ (۲۷) و گردآوری جمله‌ها نتیجه می‌شود

$$y_1v''+(2y_1'+py_1)v'+(y_1''+py_1'+qy_1)v=0. \tag{29}$$

چون y_1 جواب معادلهٔ (۲۷) است، ضریب v در معادلهٔ (۲۹) صفر است؛ بنابراین معادلهٔ (۲۹) تبدیل می‌شود به

$$y_1v''+(2y_1'+py_1)v'=0. \tag{30}$$

معادلهٔ (۳۰)، علی‌رغم ظاهرش، درواقع معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول برحسب v' است و می‌توان آن را به‌عنوان معادله‌ای خطی و یا جداشدنی حل کرد. به محض یافتن v'، v را می‌توان با انتگرال‌گیری به‌دست آورد. چون گام

اصلی در این روش، حل معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول برحسب v' به‌جای به‌دست آوردن y برای معادلهٔ اولیه مرتبهٔ دوم است، به این روند روش کاهش مرتبه می‌گوییم. هر چند می‌توانیم فرمولی برای $v(t)$ بنویسیم، این روش را با مثالی نشان می‌دهیم.

مثال ۳

فرض کنید $y_1(t)=t^{-1}$ جواب

$$2t^2y''+3ty'-y=0, \qquad t>0 \tag{31}$$

است. مجموعه‌ای اساسی از جوابها را به‌دست بیاورید.

قرار می‌دهیم $y=v(t)t^{-1}$؛ پس

$$y'=v't^{-1}-vt^{-2}, \qquad y''=v''t^{-1}-2v't^{-2}+2vt^{-3}.$$

با جایگزین کردن y و y' و y'' در معادلهٔ (۳۱) و گردآوری جمله‌ها نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} 2t^2(v''t^{-1}-2v't^{-2}+2vt^{-3})&+3t(v't^{-1}-vt^{-2})-vt^{-1}\\ &=2tv''+(-4+3)v'+(4t^{-1}-3t^{-1}-t^{-1})v\\ &=2tv''-v'=0. \end{aligned} \tag{32}$$

توجه کنید که ضریب v همان‌طور که انتظار داشتیم صفر است؛ این نکته برای تأیید صحت عملیات جبری مفید است. با جدا کردن متغیرها در معادلهٔ (۳۲) و حل آن برحسب $v'(t)$ نتیجه می‌شود

$$v'(t)=ct^{1/2};$$

بنابراین

$$v(t)=\frac{2}{3}ct^{3/2}+k$$

و در نتیجه

$$y=\frac{2}{3}ct^{1/2}+kt^{-1} \tag{33}$$

که در آن c و k ثابتهایی دلخواه هستند. جملهٔ دوم طرف راست معادلهٔ (۳۳) مضربی از $y_1(t)$ است و می‌تواند حذف شود. اما جملهٔ اول جواب جدید $y_2(t)=t^{1/2}$ را به‌دست می‌دهد. می‌توانید ثابت کنید که رانسکین y_1 و y_2 عبارت است از

$$W(y_1,y_2)(t)=\frac{3}{2}t^{-3/2}, \quad t>0; \tag{34}$$

در نتیجه y_1 و y_2 مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادلهٔ (۳۳) تشکیل می‌دهند.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۱۰، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده را بیابید.

۱. $y''-2y'+y=0$

۲. $9y''+6y'+y=0$

۳. $4y''+12y'+9y=0$

۴. $4y''-4y'-3y=0$

۵. $y''-2y'+10y=0$

۶. $y''-6y'+9y=0$

۷. $4y''+17y'+4y=0$ ۸. $4y''+20y'+25=0$

۹. $25y''-20y'+4y=0$ ۱۰. $2y''+2y'+y=0$

در هر یک از مسئله‌های ۱۱ تا ۱۴، مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را حل کنید. نمودار جواب را رسم کنید و رفتار جواب را با افزایش t تشریح کنید.

۱۱. $9y''+6y'+82y=0$، $y(0)=-1$، $y'(0)=2$

۱۲. $y''-6y'+9y=0$، $y(0)=0$، $y'(0)=2$

۱۳. $9y''-12y'+4y=0$، $y(0)=2$، $y'(0)=-1$

۱۴. $y''+4y'+4y=0$، $y(-1)=2$، $y'(-1)=1$

۱۵. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$4y''+12y'+9y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-4$$

را در نظر بگیرید.

الف) مسئلهٔ مقدار اولیه را حل کنید و جوابش را به‌ازای $0\le t\le 5$ رسم کنید.

ب) تعیین کنید که مقدار جواب کجا صفر است.

ج) مختصات نقطهٔ مینیمم را تعیین کنید.

د) شرط اولیهٔ دوم را به $y'(0)=b$ تغییر بدهید و جواب را به‌عنوان تابعی از b به‌دست بیاورید و سپس مقدار بحرانی b را تعیین کنید، که جوابهایی را که همواره مثبت هستند از جوابهایی که درنهایت منفی می‌شوند جدا می‌کند.

۱۶. صورت اصلاح‌شدهٔ

$$y''-y'+0.25y=0,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=b$$

برای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ مثال ۲ را در نظر بگیرید. جواب را به‌عنوان تابعی از b به‌دست بیاورید و مقدار بحرانی b را مشخص کنید، که جوابهایی را که به‌طور مثبت رشد می‌کنند از جوابهایی که درنهایت به‌طور منفی رشد می‌کنند جدا می‌کند.

۱۷. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$4y''+4y'+y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2$$

را در نظر بگیرید.

الف) مسئلهٔ مقدار اولیه را حل کنید و جواب را رسم کنید.

ب) مختصات نقطهٔ ماکزیمم (t_M, y_M)، را تعیین کنید.

ج) شرط اولیهٔ دوم را به $y'(0)=b>0$ تبدیل کنید و جواب را به‌عنوان تابعی از b بیابید.

د) مختصات نقطهٔ ماکزیمم، (t_M, y_M)، را برحسب b بیابید. نحوهٔ وابستگی t_M و y_M را به b با افزایش b تشریح کنید.

۱۸. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$16y''+24y'+9y=0,\quad y(0)=a>0,\quad y'(0)=-1$$

را در نظر بگیرید.

الف) مسئلهٔ مقدار اولیه را حل کنید.

ب) مقدار بحرانی a را بیابید، که جوابهایی را که منفی می‌شوند از جوابهایی که همواره مثبت هستند جدا می‌کند.

۱۹. اگر ریشه‌های معادلهٔ مشخصه حقیقی باشند، ثابت کنید که جواب $ay''+by'+cy=0$ یا همواره صفر است و یا اینکه حداکثر یک مقدار صفر اختیار می‌کند.

در مسئله‌های ۲۰ تا ۲۲، راههای دیگر یافتن جواب دوم را در حالتی که ریشه‌های معادلهٔ مشخصه تکراری باشند نشان داده‌ایم.

۲۰. الف) معادلهٔ $y''+2ay'+a^2y=0$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید که ریشه‌های معادلهٔ مشخصه $r_1=r_2=-a$ هستند و بنابراین یک جواب معادله e^{-at} است.

ب) با استفاده از فرمول آبل [معادلهٔ (۲۲) بخش ۲.۳] ثابت کنید رانسکین هر دو جواب از معادلهٔ داده‌شده برابر است با

$$W(t)=y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)=c_1e^{-2at}$$

که در آن c_1 ثابت است.

ج) فرض کنید $y_1(t)=e^{-at}$ و با استفاده از نتیجهٔ قسمت (ب) معادلهٔ دیفرانسیلی را بیابید که $y_2(t)$ در آن صدق می‌کند. با حل این معادله ثابت کنید $y_2(t)=te^{-at}$.

۲۱. فرض کنید r_1 و r_2 ریشه‌های $ar^2+br+c=0$ هستند و $r_1\ne r_2$؛ در این‌صورت $\exp(r_1t)$ و $\exp(r_2t)$ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل $ay''+by'+cy=0$ هستند. ثابت کنید اگر $r_1\ne r_2$،

$$\phi(t;r_1,r_2)=\frac{[\exp(r_2t)-\exp(r_1t)]}{(r_2-r_1)}$$

هم جواب معادله است. حال r_1 را ثابت نگه دارید و با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، حد $\phi(t;r_1,r_2)$ را وقتی $r_2\to r_1$ بیابید و به این وسیله جواب دوم را در حالتی که ریشه‌ها تکراری هستند پیدا کنید.

۲۲. الف) اگر $ar^2+br+c=0$ ریشهٔ تکراری r_1 داشته باشد، ثابت کنید

$$L[e^{rt}]=a(e^{rt})''+b(e^{rt})'+ce^{rt}=a(r-r_1)^2e^{rt}. \qquad \text{(i)}$$

چون طرف راست معادلهٔ (i) به‌ازای $r=r_1$ برابر صفر است، $\exp(r_1t)$ جواب $L[y]=ay''+by'+cy=0$ است.

ب) از (i) نسبت به r مشتق بگیرید و ترتیب مشتق‌گیری نسبت به r و نسبت به t را جابه‌جا کنید و نتیجه بگیرید

$$\frac{\partial}{\partial r}L[e^{rt}]=L\left[\frac{\partial}{\partial r}e^{rt}\right]=L[te^{rt}]=ate^{rt}(r-r_1)^2+2ae^{rt}(r-r_1) \qquad \text{(ii)}$$

چون وقتی $r=r_1$ طرف راست معادلهٔ (ii) برابر صفر است، نتیجه بگیرید که $t\exp(r_1t)$ هم جواب $L[y]=0$ است.

در هر یک از مسئله‌های ۲۳ تا ۳۰، از روش کاهش مرتبه برای یافتن جواب دوم معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده استفاده کنید.

۲۳. $t^۲y'' + ۲ty' - ۲y = ۰$، $t > ۰$؛ $y_۱(t) = t$

۲۴. $t^۲y'' - ۴ty' + ۶y = ۰$، $t > ۰$؛ $y_۱(t) = t^۲$

۲۵. $t^۲y'' + ۳ty' + y = ۰$، $t > ۰$؛ $y_۱(t) = t^{-۱}$

۲۶. $t^۲y'' - t(t+۲)y' + (t+۲)y = ۰$، $t > ۰$؛ $y_۱(t) = t$

۲۷. $xy'' - y' + ۴x^۳y = ۰$، $x > ۰$؛ $y_۱(x) = \sin x^۲$

۲۸. $x^۲y'' - (x - ۰٫۱۸۷۵)y = ۰$، $x > ۰$؛ $y_۱(x) = x^{۱/۴}e^{۲\sqrt{x}}$

۲۹. $(x-۱)y'' - xy' + y = ۰$، $x > ۱$؛ $y_۱(x) = e^x$

۳۰. $x^۲y'' + xy' + (x^۲ - ۰٫۲۵)y = ۰$، $x > ۰$؛ $y_۱(x) = x^{-۱/۲}\sin x$

۳۱. تاکنون چندین نفر دربارهٔ معادلهٔ دیفرانسیل

$$xy'' - (x+N)y' + Ny = ۰$$

که در آن N عددی صحیح و نامنفی است بحث کرده‌اند.[۱] یک دلیل جذابیت آن این است که یک جواب نمایی و یک جواب چندجمله‌ای دارد.

الف) تحقیق کنید که یک جواب معادله، $y_۱(x) = e^x$ است.

ب) ثابت کنید که جواب دوم به‌صورت $y_۲(x) = ce^x\int x^N e^{-x}dx$ است. $y_۲(x)$ را به‌ازای $N = ۱$ و $N = ۲$ به‌دست بیاورید؛ ثابت کنید که با $c = -۱/N!$،

$$y_۲(x) = ۱ + \frac{x}{۱!} + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots + \frac{x^N}{N!}.$$

توجه کنید که $y_۲(x)$ دقیقاً $N + ۱$ جملهٔ سری تیلور e^x حول $x = ۰$ است.

۳۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + \delta(xy' + y) = ۰$$

در مطالعهٔ جریان اغتشاشی جریان یکنواخت گذرا از استوانهٔ دوار پیش می‌آید. تحقیق کنید که $y_۱(x) = \exp(-\delta x^۲/۲)$ جواب معادله است و سپس جواب عمومی را به‌صورت انتگرال به‌دست بیاورید.

۳۳. روش مسئلهٔ ۲۰ را می‌توان به معادله‌های مرتبهٔ دوم با ضرایب متغیر تعمیم داد. اگر $y_۱$ جواب ناصفری برای $y'' + p(t)y' + q(t)y = ۰$ باشد، ثابت کنید یک جواب دوم $y_۲$ در $(y_۲/y_۱)' = W(y_۱, y_۲)/y_۱^۲$ صدق می‌کند، که در آن $W(y_۱, y_۲)$ رانسکین $y_۱$ و $y_۲$ است. آنگاه از فرمول آبل [معادلهٔ (۲۲) از بخش ۳.۲] استفاده کنید و $y_۲$ را تعیین کنید.

۱. نگاه کنید به

T. A. Newton, "On Using a Differential Equation to Generate Polynomials," *American Mathematical Monthly 81* (1974), pp. 592-601.

مراجع این مقاله را هم ببینید.

در هر یک از مسئله‌های ۳۴ تا ۳۷، با استفاده از روش مسئلهٔ ۳۳، جواب مستقل خطی معادلهٔ داده‌شده را بیابید.

۳۴. $(x-۱)y'' - xy' + y = ۰$، $x > ۱$؛ $y_۱(x) = e^x$

۳۵. $ty'' - y' + ۴t^۳y = ۰$، $t > ۰$؛ $y_۱(t) = \sin(t^۲)$

۳۶. $t^۲y'' + ۳ty' + y = ۰$، $t > ۰$؛ $y_۱(t) = t^{-۱}$

۳۷. $x^۲y'' + xy' + (x^۲ - ۰٫۲۵)y = ۰$، $x > ۰$؛ $y_۱(x) = x^{-۱/۲}\sin x$

رفتار جوابها وقتی $t \to \infty$. در مسئله‌های ۳۸ تا ۴۰ به رفتار جوابها وقتی $t \to \infty$ می‌پردازیم.

۳۸. اگر a، b و c ثابتهای مثبت باشند، ثابت کنید وقتی $t \to \infty$، همهٔ جوابهای $ay'' + by' + cy = ۰$ به صفر میل می‌کنند.

۳۹. الف) اگر $a > ۰$ و $c > ۰$، اما $b = ۰$، ثابت کنید نتیجهٔ مسئلهٔ ۳۸ دیگر برقرار نیست، اما وقتی $t \to \infty$ همهٔ جوابها کراندارند.

ب) اگر $a > ۰$ و $b > ۰$ ولی $c = ۰$، ثابت کنید نتیجهٔ مسئلهٔ ۳۸ دیگر برقرار نیست، اما وقتی $t \to \infty$ همهٔ جوابها به ثابتی میل می‌کنند که وابسته به شرایط اولیه است. این ثابت را برای شرایط اولیهٔ $y(۰) = y_۰$ و $y'(۰) = y'_۰$ تعیین کنید.

۴۰. ثابت کنید $y = \sin t$ به‌ازای هر مقدار ثابت k جوابی برای

$$y'' + (k\sin^۲ t)y' + (۱ - k\cos t\sin t)y = ۰$$

است. اگر $۰ < k < ۲$، ثابت کنید $۱ - k\cos t\sin t > ۰$ و $k\sin^۲ t \geq ۰$. بنابراین توجه کنید که با اینکه ضرایب این معادلهٔ دیفرانسیل با ضرایب متغیر نامنفی هستند (و ضریب y' تنها در نقاط t برابر ۰، π، ۲π، ... صفر است) معادله جوابی دارد که وقتی $t \to \infty$ به صفر میل نمی‌کند. این وضعیت را با نتیجهٔ مسئلهٔ ۳۸ مقایسه کنید. پس باز وضعی را می‌بینیم که در مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل غیرمعمول نیست: معادله‌هایی که ظاهراً بسیار شبیه هستند اما رفتار کاملاً متفاوت دارند.

معادلات اویلر. در هر یک از مسئله‌های ۴۱ تا ۴۶، با استفاده از تغییر متغیر معرفی‌شده در مسئلهٔ ۳۴ در بخش ۳.۳، معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده را حل کنید.

۴۱. $۲t^۲y'' - ۵ty' + ۵y = ۰$، $t > ۰$

۴۲. $t^۲y'' + ۲ty' + ۰٫۲۵y = ۰$، $t > ۰$

۴۳. $t^۲y'' - ۳ty' + ۴y = ۰$، $t > ۰$

۴۴. $t^۲y'' + ۵ty' + ۴y = ۰$، $t > ۰$

۴۵. $۴t^۲y'' - ۸ty' + ۹y = ۰$، $t > ۰$

۴۶. $t^۲y'' + ۵ty' + ۱۳y = ۰$، $t > ۰$

۵.۳ معادلات غیرهمگن؛ روش ضرایب نامعیّن

حال به معادلهٔ غیرهمگن، یعنی

$$L[y]=y''+p(t)y'+q(t)y=g(t) \qquad (۱)$$

می‌پردازیم که در آن p، q و g تابعهای (پیوستهٔ) مفروضی روی بازهٔ بازی مانند I هستند. به معادلهٔ

$$L[y]=y''+p(t)y'+q(t)y=0 \qquad (۲)$$

که در آن $g(t)=0$ و p و q مانند معادلهٔ (۱) هستند معادلهٔ همگن متناظر معادلهٔ (۱) می‌گوییم. در قضیهٔ زیر ساختار جوابهای معادلهٔ غیرهمگن (۱) را تشریح کرده‌ایم و مقدمات ساختن جواب عمومی را فراهم آورده‌ایم.

قضیهٔ ۱.۵.۳ اگر Y_1 و Y_2 دو جواب معادلهٔ غیرهمگن (۱) باشند، Y_1-Y_2 جواب معادلهٔ همگن متناظر (یعنی (۲)) است. به‌علاوه، اگر y_1 و y_2 مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادلهٔ (۲) تشکیل بدهند آنگاه

$$Y_1(t)-Y_2(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t) \qquad (۳)$$

که در آن c_1 و c_2 ثابتهای معینی هستند.

برای اثبات این حکم توجه کنید که Y_1 و Y_2 در معادله‌های

$$L[Y_1](t)=g(t),\qquad L[Y_2](t)=g(t) \qquad (۴)$$

صدق می‌کنند. با تفریق معادلهٔ دوم از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود

$$L[Y_1](t)-L[Y_2](t)=g(t)-g(t)=0. \qquad (۵)$$

اما

$$L[Y_1]-L[Y_2]=L[Y_1-Y_2];$$

بنابراین معادلهٔ (۵) تبدیل می‌شود به

$$L[Y_1-Y_2](t)=0. \qquad (۶)$$

معادلهٔ (۶) نشان می‌دهد که Y_1-Y_2 جوابی برای معادلهٔ (۲) است. درنهایت از اینکه طبق قضیهٔ ۴.۲.۳ می‌توان هر جواب معادلهٔ (۲) را به‌صورت ترکیبی خطی از اعضای مجموعه‌ای اساسی از جوابها نمایش داد، نتیجه می‌شود که Y_1-Y_2 را هم می‌توان به این‌صورت نوشت. بنابراین معادلهٔ (۳) برقرار است و اثبات کامل است.

قضیهٔ ۲.۵.۳ جواب عمومی معادلهٔ (۱) را می‌توان به‌صورت

$$y=\phi(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+Y(t) \qquad (۷)$$

نوشت که در آن y_1 و y_2 مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادلهٔ همگن متناظر (۲) تشکیل می‌دهند، c_1 و c_2 ثابتهای دلخواه هستند و Y جواب خاصی برای معادلهٔ غیرهمگن (۱) است.

قضیهٔ ۲.۵.۳ فوراً از قضیهٔ قبل نتیجه می‌شود. توجه کنید که معادلهٔ (۳) برقرار است اگر Y_1 را جواب دلخواه ϕ برای معادلهٔ (۱) و Y_2 را جواب خاص Y بگیریم. بنابراین از معادلهٔ (۳) نتیجه می‌شود

$$\phi(t)-Y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t) \qquad (۸)$$

که هم‌ارز معادلهٔ (۷) است. چون ϕ جوابی دلخواه برای معادلهٔ (۱) است، عبارت طرف راست معادلهٔ (۷) شامل همهٔ جوابهای معادلهٔ (۱) است؛ پس طبیعی است که به آن جواب عمومی معادلهٔ (۱) بگوییم.

به‌عبارت دیگر، قضیهٔ ۲.۵.۳ بیان می‌کند که برای حل معادلهٔ غیرهمگن (۱) باید سه کار انجام بدهید:

۱. جواب عمومی $c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ برای معادلهٔ همگن متناظر را بیابید. معمولاً به این جواب، جواب مکمل می‌گوییم و آن را با $y_c(t)$ نشان می‌دهیم.

۲. یک جواب $Y(t)$ برای معادلهٔ غیرهمگن بیابید. معمولاً به این جواب جواب خاص می‌گوییم.

۳. تابعهایی را که در دو گام قبل پیدا کرده‌اید با هم جمع کنید.

پیش‌تر دربارهٔ چگونگی پیدا کردن $y_c(t)$ حداقل برای معادلات همگن با ضرایب ثابت بحث کردیم. بنابراین در ادامهٔ این بخش و بخش آینده هدفمان پیدا کردن جواب خاص $Y(t)$ برای معادلهٔ غیرهمگن (۱) است. دو روش موجودند که می‌خواهیم آنها را بررسی کنیم: روش ضرایب نامعین (که در اینجا بررسی می‌شود) و روش تغییر پارامترها (بخش ۶.۳ را ببینید). هر یک از این روشها مزایا و معایبی دارند.

روش ضرایب نامعین. در روش ضرایب نامعین ابتدا شکل کلی جواب $Y(t)$ را حدس می‌زنیم، اما ضرایب آن نامشخص فرض می‌شوند. سپس این عبارت مفروض را در معادلهٔ (۱) جایگزین می‌کنیم و سعی می‌کنیم ضرایب را طوری تعیین کنیم که این جواب در معادله صدق کند. اگر موفق شویم، جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل (۱) یافته‌ایم و می‌توانیم از آن به‌عنوان جواب خاص $Y(t)$ استفاده کنیم. اگر نتوانیم ضرایب را پیدا کنیم، یعنی جوابی به شکل فرض شده موجود نیست. در این حالت می‌توانیم فرض ابتدایی را اصلاح کنیم و تابع جدید را آزمایش کنیم.

مزیت اصلی روش ضرایب نامعین این است که پس از اینکه شکل کلی $Y(t)$ را فرض کردیم، به‌سادگی قابل اجرا است. محدودیت اصلی آن، این است که این روش اساساً مناسب معادله‌هایی است که بتوان شکل کلی جواب خاصشان را از قبل معیّن کرد. به همین دلیل، این روش معمولاً برای معادلاتی استفاده می‌شود که ضرایب معادلهٔ همگن متناظرشان ثابت است و جملهٔ غیرهمگن به دسته‌ای نسبتاً خاص از تابعها محدود است. با وجود این محدودیت، روش ضرایب نامعین برای بسیاری از مسئله‌های مهم کاربردی مفید است. البته ممکن است جزئیات

عملیات جبری بسیار کسل‌کننده باشد و سیستم‌های جبر کامپیوتری در کاربردهای عملی بسیار مفید هستند. روش ضرایب نامعین را با چند مثال ساده تشریح می‌کنیم و بعد، چند قانون برای استفاده از آن بیان می‌کنیم.

مثال ۱

یک جواب خاص برای معادلهٔ

$$y'' - ۳y' - ۴y = ۳e^{۲t} \qquad (۹)$$

بیابید.

می‌خواهیم تابعی مثل Y پیدا کنیم که ترکیب $Y''(t) - ۳Y'(t) - ۴Y(t)$ برابر $۳e^{۲t}$ باشد. چون تابعهای نمایی در مشتق خودشان ظاهر می‌شوند، در دسترس‌ترین روش برای دست یافتن به نتیجه این است که فرض کنیم $Y(t)$ مضربی از $e^{۲t}$ است؛ یعنی

$$Y(t) = Ae^{۲t}$$

که در آن ضریب A باید تعیین شود. برای محاسبهٔ A، می‌نویسیم

$$Y'(t) = ۲Ae^{۲t}, \quad Y''(t) = ۴Ae^{۲t}$$

و در معادلهٔ (۹) به‌جای y، y' و y'' جایگزین می‌کنیم؛ نتیجه می‌شود

$$(۴A - ۶A - ۴A)e^{۲t} = ۳e^{۲t}.$$

یعنی $-۶Ae^{۲t}$ باید برابر $۳e^{۲t}$ شود، پس $A = -۱/۲$. بنابراین جواب خاص عبارت است از

$$Y(t) = -\frac{۱}{۲}e^{۲t}. \qquad (۱۰)$$

مثال ۲

یک جواب خاص برای معادلهٔ

$$y'' - ۳y' - ۴y = ۲\sin t \qquad (۱۱)$$

به‌دست بیاورید.

با تحلیلی مشابه مثال ۱، ابتدا فرض می‌کنیم $Y(t) = A\sin t$، که در آن A را باید تعیین کرد. با قرار دادن Y در معادلهٔ (۱۱) و مرتب کردن جمله‌ها نتیجه می‌شود

$$-۵A\sin t - ۳A\cos t = ۲\sin t$$

یا

$$(۲ + ۵A)\sin t + ۳A\cos t = ۰. \qquad (۱۲)$$

می‌خواهیم معادلهٔ (۱۲) به‌ازای هر t برقرار باشد؛ پس باید به‌ازای نقاط خاص مثل $t = ۰$ و $t = \pi/۲$ هم برقرار باشد. در این نقطه‌ها معادلهٔ (۱۲) به‌ترتیب به $۳A = ۰$ و $۲ + ۵A = ۰$ ساده می‌شود. این شرایط متناقض به این معنی است که هیچ انتخابی از A موجود نیست که معادلهٔ (۱۲) حتی به‌ازای $t = ۰$ و $t = \pi/۲$ برقرار باشد؛ چه رسد به هر t. پس نتیجه می‌گیریم که فرضمان در مورد $Y(t)$ مناسب نیست. از ظاهر شدن جملهٔ کسینوس در معادلهٔ (۱۲) به‌نظر می‌رسد که باید فرض ابتدایی را با اضافه کردن یک جملهٔ کسینوس در $Y(t)$ اصلاح کنیم؛ یعنی شکل کلی جواب خاص را به‌صورت

$$Y(t) = A\sin t + B\cos t$$

بنویسیم که در آن A و B باید تعیین شوند. بنابراین

$$Y'(t) = A\cos t - B\sin t, \quad Y''(t) = -A\sin t - B\cos t$$

و با جایگزین کردن این عبارتها به‌جای y، y' و y'' در معادلهٔ (۱۱) و مرتب کردن جمله‌ها نتیجه می‌شود

$$(-A + ۳B - ۴A)\sin t + (-B - ۳A - ۴B)\cos t = ۲\sin t. \qquad (۱۳)$$

برای برقراری معادلهٔ (۱۳)، باید ضرایب $\sin t$ و $\cos t$ در هر دو طرف معادله برابر باشند؛ پس A و B باید در معادله‌های

$$-۵A + ۳B = ۲, \quad -۳A - ۵B = ۰$$

صدق کنند. پس $A = -۵/۱۷$ و $B = ۳/۱۷$ و در نتیجه یک جواب خاص معادلهٔ (۱۱) عبارت است از

$$Y(t) = -\frac{۵}{۱۷}\sin t + \frac{۳}{۱۷}\cos t.$$

روش مثال قبل را وقتی طرف راست معادله چندجمله‌ای باشد هم می‌توان به‌کار برد. پس برای یافتن یک جواب خاص معادلهٔ

$$y'' - ۳y' - ۴y = ۴t^۲ - ۱ \qquad (۱۴)$$

در مرحلهٔ اول فرض می‌کنیم که $Y(t)$ از همان درجهٔ جملهٔ غیرهمگن است؛ یعنی $Y(t) = At^۲ + Bt + C$.

خلاصهٔ نتایج تا این مرحله از این قرار است: اگر جملهٔ غیرهمگن $g(t)$ در معادلهٔ (۱) تابع نمایی $e^{\alpha t}$ باشد، فرض می‌کنیم که $Y(t)$ متناسب با همان تابع نمایی است. اگر $g(t)$، $\sin\beta t$ یا $\cos\beta t$ باشد، فرض می‌کنیم $Y(t)$ ترکیبی خطی از $\sin\beta t$ و $\cos\beta t$ است. اگر $g(t)$ چندجمله‌ای باشد، فرض می‌کنیم که $Y(t)$ هم چندجمله‌ای با همان درجه است. همان‌طور که در مثال بعد خواهید دید، همین اصل برای حالتی که $g(t)$ حاصلضرب دو و یا هر سه نوع این تابعها باشد هم به‌کار می‌آید.

مثال ۳

یک جواب خاص معادلهٔ

$$y'' - ۳y' - ۴y = -۸e^t\cos ۲t \qquad (۱۵)$$

را به‌دست بیاورید.

در این حالت فرض می‌کنیم که $Y(t)$ حاصلضرب e^t و ترکیبی خطی از $\cos ۲t$ و $\sin ۲t$ است؛ یعنی

$$Y(t) = Ae^t\cos ۲t + Be^t\sin ۲t.$$

محاسبات در این مورد مفصل‌تر است، اما بالاخره نتیجه می‌شود

$$Y'(t) = (A + ۲B)e^t\cos ۲t + (-۲A + B)e^t\sin ۲t$$

و

$$Y''(t) = (-۳A + ۴B)e^t\cos ۲t + (-۴A - ۳B)e^t\sin ۲t.$$

با جایگزین کردن این عبارتها در معادلهٔ (۱۵) درمی‌یابیم که A و B باید در معادله‌های

$$۱۰A + ۲B = ۸, \qquad ۲A - ۱۰B = ۰$$

صدق کنند؛ پس $A = ۱۰/۱۳$ و $B = ۲/۱۳$ و در نتیجه یک جواب خاص معادلهٔ (۱۵) عبارت است از

$$Y(t) = \frac{۱۰}{۱۳}e^t \cos ۲t + \frac{۲}{۱۳}e^t \sin ۲t.$$

اکنون فرض کنید که $g(t)$ مجموع دو جمله است، یعنی $g(t) = g_۱(t) + g_۲(t)$ و فرض کنید که $Y_۱$ و $Y_۲$ به‌ترتیب جوابهای معادله‌های

$$ay'' + by' + cy = g_۱(t) \tag{۱۶}$$

و

$$ay'' + by' + cy = g_۲(t) \tag{۱۷}$$

هستند. در این‌صورت $Y_۱ + Y_۲$ یک جواب معادلهٔ

$$ay'' + by' + cy = g(t) \tag{۱۸}$$

است. برای اثبات این گزاره $Y_۱(t) + Y_۲(t)$ را به‌جای y در معادلهٔ (۱۸) قرار می‌دهیم و از معادله‌های (۱۶) و (۱۷) استفاده می‌کنیم. اگر $g(t)$ مجموع تعداد متناهی جمله باشد هم همین حکم برقرار است. اهمیت عملی این نتیجه این است که می‌توانیم به‌جای معادله‌ای که جملهٔ غیرهمگن $g(t)$ آن به‌صورت مجموع است، چند معادلهٔ ساده‌تر را در نظر بگیریم و جوابها را با هم جمع کنیم. در مثال بعدی این روند را نشان داده‌ایم.

مثال ۴

یک جواب خاص برای معادلهٔ

$$y'' - ۳y' - ۴y = ۳e^{۲t} + ۲\sin t - ۸e^t \cos ۲t \tag{۱۹}$$

به‌دست بیاورید.

با جدا کردن جمله‌های طرف راست معادلهٔ (۱۹)، به سه معادلهٔ

$$y'' - ۳y' - ۴y = ۳e^{۲t}$$
$$y'' - ۳y' - ۴y = ۲\sin t$$
$$y'' - ۳y' - ۴y = -۸e^t \cos ۲t$$

می‌رسیم. جوابهای این سه معادله به‌ترتیب در مثالهای ۱، ۲ و ۳ پیدا شدند. بنابراین یک جواب خاص معادلهٔ (۱۹) مجموع آنها است؛ یعنی

$$Y(t) = -\frac{۱}{۲}e^{۲t} + \frac{۳}{۱۷}\cos t - \frac{۵}{۱۷}\sin t + \frac{۱۰}{۱۳}e^t \cos ۲t + \frac{۲}{۱۳}e^t \sin ۲t.$$

با استفاده از روندی که در این مثالها دیدیم، می‌توانیم دستهٔ نسبتاً بزرگی از مسئله‌ها را به روشی کارامد حل کنیم؛ اما گاهی مشکلی پیش می‌آید. در مثال بعد چگونگی بروز آن را خواهیم دید.

مثال ۵

یک جواب خاص معادلهٔ

$$y'' - ۳y' - ۴y = ۲e^{-t} \tag{۲۰}$$

را به‌دست بیاورید.

مشابه مثال ۱، فرض می‌کنیم که $Y(t) = Ae^{-t}$. با جایگزینی در معادلهٔ (۲۰) نتیجه می‌شود

$$(A + ۳A - ۴A)e^{-t} = ۲e^{-t}. \tag{۲۱}$$

چون طرف چپ معادلهٔ (۲۱) صفر است، نمی‌توانیم A را طوری انتخاب کنیم که در این معادله صدق کند. بنابراین معادلهٔ (۲۰) جواب خاصی به‌صورت فرض‌شده ندارد. دلیل این نتیجهٔ احتمالاً دور از انتظار با حل معادلهٔ همگن

$$y'' - ۳y' - ۴y = ۰ \tag{۲۲}$$

که متناظر معادلهٔ (۲۰) است روشن می‌شود. $y_۱(t) = e^{-t}$ و $y_۲(t) = e^{۴t}$ مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادلهٔ (۲۲) تشکیل می‌دهند؛ پس آنچه که فرض کردیم جواب خاصی برای معادلهٔ (۲۰) است، درواقع جوابی از معادلهٔ همگن (۲۲) است و در نتیجه امکان ندارد که جواب معادلهٔ غیرهمگن (۲۰) باشد. بنابراین برای یافتن جوابی از معادلهٔ (۲۰) باید تابعهایی با شکل کمی متفاوت را در نظر بگیریم.

در این مرحله به چند روش می‌توانیم کار را ادامه بدهیم: یکی این است که سعی کنیم شکل مناسبی برای جواب خاص معادلهٔ (۲۰) حدس بزنیم و دیگری این است که مسئله را با روشی کمی متفاوت حل کنیم و سپس از آنچه به‌دست می‌آوریم برای حدس زدن شکل جواب در موقعیتهای مشابه استفاده کنیم. برای روشهای دیگر یافتن جواب، مسئله‌های ۲۷ و ۳۳ را ببینید. یک امکان دیگر هم جستجوی معادلهٔ ساده‌تری است که این مشکل در آن هم بروز می‌کند و می‌توان از حل آن، برای به‌دست آوردن ایدهٔ چگونگی ادامهٔ کار با معادلهٔ (۲۰) استفاده کرد. می‌توانیم معادلهٔ خطی

$$y' + y = ۲e^{-t} \tag{۲۳}$$

را در نظر بگیریم. اگر سعی کنیم جواب خاصی به‌صورت Ae^{-t} برای معادلهٔ (۲۲) پیدا کنیم، با شکست روبه‌رو می‌شویم چون e^{-t} جواب معادلهٔ همگن $y' + y = ۰$ است. با این حال، از بخش ۱.۲ می‌دانیم که چگونه معادلهٔ (۲۳) را حل کنیم: یک عامل انتگرال‌ساز $\mu(t) = e^t$ است و با ضرب طرفین معادله در $\mu(t)$ و انتگرال‌گیری از دو طرف، به جواب

$$y = ۲te^{-t} + ce^{-t} \tag{۲۴}$$

می‌رسیم. جملهٔ دوم طرف راست معادلهٔ (۲۴) جواب عمومی معادلهٔ همگن $y' + y = ۰$ است، اما جملهٔ اول جواب معادلهٔ غیرهمگن (۲۳) است. توجه کنید که این جمله شامل عامل نمایی e^{-t} است که در عامل t ضرب شده است. این کلیدی است که در جستجویش هستیم.

اکنون به معادلهٔ (۲۰) برمی‌گردیم و فرض می‌کنیم که جواب خاصی به‌صورت $Y(t) = Ate^{-t}$ وجود دارد. بنابراین

$$Y'(t) = Ae^{-t} - Ate^{-t}, \qquad Y''(t) = -۲Ae^{-t} + Ate^{-t}. \tag{۲۵}$$

با جایگزین کردن این عبارتها به‌جای y، y' و y'' در معادلهٔ (۲۰) نتیجه می‌شود

$$(-۲A - ۳A)e^{-t} + (A + ۳A - ۴A)te^{-t} = ۲e^{-t};$$

بنابراین $-5A = 2$ و لذا $A = -2/5$. پس یک جواب خاص معادلهٔ (۲۰) عبارت است از

$$Y(t) = -\frac{2}{5}te^{-t}. \qquad (26)$$

با استفاده از آنچه در مثال ۵ دیدیم، می‌توانیم قاعده‌ای را که قبلاً بیان کردیم اصلاح کنیم: اگر شکلی که برای جواب خاص در نظر گرفتیم جواب معادلهٔ همگن متناظر باشد، آن را با ضرب در t اصلاح می‌کنیم. گاهی ممکن است این کار هم برای حذف همهٔ جوابهایی که جواب معادلهٔ همگن هم هستند ناکافی باشد که در این حالت لازم است بار دیگر آن را در t ضرب کنیم. برای معادلهٔ مرتبهٔ دوم هرگز لازم نمی‌شود که این فرایند را بیش از این به پیش ببریم.

خلاصه. اکنون گامهای لازم برای یافتن جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ تشکیل‌شده از معادله‌ای غیرهمگن به‌صورت

$$ay'' + by' + cy = g(t) \qquad (27)$$

به‌همراه مجموعه‌ای از شرایط اولیه را خلاصه می‌کنیم که در آن a، b و c ثابت هستند.

۱. جواب عمومی معادلهٔ همگن متناظر را به‌دست بیاورید.

۲. مطمئن شوید که $g(t)$ در معادلهٔ (۲۷) به خانواده‌ای که در این بخش دیدیم تعلق دارد، یعنی مطمئن شوید که همهٔ جمله‌های آن از تابعهای نمایی، سینوسی، کسینوسی، چندجمله‌ای‌ها و یا مجموع و حاصلضرب آنها تشکیل شده‌اند. در غیر این‌صورت از روش تغییر پارامترها (که در بخش بعد بررسی می‌شود) استفاده کنید.

۳. اگر $g(t) = g_1(t) + \cdots + g_n(t)$، یعنی $g(t)$ مجموعی از n جمله بود، n زیرمسئله تشکیل بدهید که هر کدامشان تنها شامل یکی از عبارتهای $g_1(t)$، ...، $g_n(t)$ باشد. iامین زیرمسئله، معادلهٔ

$$ay'' + by' + cy = g_i(t)$$

است که در آن i بین ۱ تا n تغییر می‌کند.

۴. برای زیرمسئلهٔ iام جواب خاص $Y_i(t)$ را که از ترکیبی مناسب از تابعهای نمایی، سینوسی، کسینوسی و چندجمله‌ای تشکیل شده در نظر بگیرید. اگر شکل $Y_i(t)$ در جوابهای معادلهٔ همگن (پیداشده در گام ۱) موجود بود، $Y_i(t)$ را در t و یا (در صورت لزوم) در t^2 ضرب کنید که این اشتراک حذف شود. جدول ۱.۵.۳ را ببینید.

۵. جواب $Y_i(t)$ را برای هر یک از زیرمسئله‌ها بیابید. آنگاه مجموع $Y_1(t) + \cdots + Y_n(t)$ یک جواب خاص معادلهٔ غیرهمگن (۲۷) است.

۶. مجموع جواب عمومی معادلهٔ همگن (گام ۱) و جواب خاص معادلهٔ غیرهمگن (گام ۲)، جواب عمومی معادلهٔ غیرهمگن است.

۷. با استفاده از شرایط اولیه، مقدار ثابتهای دلخواه باقی‌مانده در جواب عمومی را تعیین کنید.

انجام دستی همهٔ این روند برای بعضی از معادله‌ها ساده است، اما در بسیاری از موارد باید محاسبات فراوانی انجام بدهیم. وقتی نحوهٔ کار را کاملاً متوجه شدید، می‌توانید برای انجام جزئیات از رایانه کمک بگیرید.

جدول ۱.۵.۳ جوابهای خاص $ay'' + by' + cy = g_i(t)$

$g_i(t)$	$Y_i(t)$
$P_n(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_n$	$t^s(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_n)$
$P_n(t)e^{\alpha t}$	$t^s(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_n)e^{\alpha t}$
$P_n(t)e^{\alpha t}\begin{cases}\sin\beta t\\ \cos\beta t\end{cases}$	$t^s[(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_n)e^{\alpha t}\cos\beta t + (B_0t^n + B_1t^{n-1} + \cdots + B_n)e^{\alpha t}\sin\beta t]$

توجه. در اینجا s کوچک‌ترین عدد صحیح نامنفی ۰، ۱ یا ۲ است که تضمین می‌کند هیچ جملهٔ $Y_i(t)$ جواب معادلهٔ همگن متناظر نیست. به‌طور معادل، در سه حالت بالا s به‌ترتیب تعداد دفعاتی است که ۰ ریشهٔ معادلهٔ مشخصه است، α ریشهٔ معادلهٔ مشخصه است و $\alpha + i\beta$ ریشهٔ معادلهٔ مشخصه است.

روش ضرایب نامعین خودش را اصلاح می‌کند؛ به این معنی که اگر فرضهایمان در مورد $Y(t)$ ناکافی باشد، زود به تناقض می‌رسیم و معمولاً نحوهٔ اصلاح لازم در شکلی که در نظر گرفتیم معلوم می‌شود. از طرف دیگر فرضهای اضافی باعث کارهای غیرضروری می‌شود و بعضی از ضرایب برابر صفر خواهند شد. اما حداقل به جواب درست می‌رسیم.

اثبات روش ضرایب نامعین. در بحث قبل روش ضرایب نامعین را با چند مثال تشریح کردیم. برای اثبات اینکه این روند همواره درست کار می‌کند، استدلال کلی‌ای ارائه می‌کنیم که در آن چند حالت متناظر به شکلهای متفاوت جملهٔ غیرهمگن $g(t)$ را در نظر گرفته‌ایم.

$\boldsymbol{g(t) = P_n(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_n}$. در این حالت معادلهٔ (۲۷) تبدیل می‌شود به

$$ay'' + by' + cy = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_n. \qquad (28)$$

برای به‌دست آوردن یک جواب خاص، فرض می‌کنیم که

$$Y(t) = A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_{n-2}t^2 + A_{n-1}t + A_n. \qquad (29)$$

با جایگزینی در معادلهٔ (۲۸) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} a[n(n-1)A_0t^{n-2} + \cdots + 2A_{n-2}] + b(nA_0t^{n-1} + \cdots + A_{n-1})& \\ + c(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_n) = a_0t^n + \cdots + a_n.& \end{aligned} \qquad (30)$$

با مساوی قرار دادن جمله‌های هم‌توان برحسب t نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} cA_0 &= a_0, \\ cA_1 + nbA_0 &= a_1, \\ &\vdots \\ cA_n + bA_{n-1} + 2aA_{n-2} &= a_n. \end{aligned}$$

به شرط اینکه $c \neq 0$، جواب معادلهٔ اول $A_0 = a_0/c$ است و بقیهٔ معادله‌ها $A_1, \ldots, A_n$ را به‌طور متوالی تعیین می‌کنند. اگر $c = 0$ اما $b \neq 0$، چندجمله‌ای طرف چپ معادلهٔ (۳۰) از درجهٔ $n-1$ است و نمی‌تواند در معادلهٔ (۳۰) صدق کند. برای اطمینان از اینکه $aY''(t) + bY'(t)$ چندجمله‌ای از مرتبهٔ n است، باید $Y(t)$ را به‌صورت چندجمله‌ای از درجهٔ $n+1$ در نظر گرفت. بنابراین فرض می‌کنیم

$$Y(t) = t(A_0 t^n + \cdots + A_n).$$

در این عبارت که برای $Y(t)$ نوشته‌ایم هیچ جملهٔ ثابتی وجود ندارد. لازم نیست که چنین جمله‌ای را در نظر بگیریم، چون در حالتی که $c = 0$، تابع ثابت جواب معادلهٔ همگن است. چون $b \neq 0$، می‌توانیم بنویسیم $A_0 = a_0/b(n+1)$ و $A_1, \ldots, A_n$ را هم می‌توانیم به‌طور مشابه تعیین کنیم. اگر هر دوی b و c صفر باشند، فرض می‌کنیم که

$$Y(t) = t^2(A_0 t^n + \cdots + A_n).$$

عبارت $aY''(t)$ هم عبارتی از درجهٔ n می‌شود و می‌توانیم کار را مانند قبل ادامه بدهیم. مجدداً جملهٔ ثابت و جملهٔ خطی در $Y(t)$ حذف می‌شوند، چون در این حالت هر دوی آنها جوابهای معادلهٔ همگن هستند.

$g(t) = e^{\alpha t}P_n(t)$. مسئلهٔ تعیین یک جواب خاص برای

$$ay'' + by' + cy = e^{\alpha t}P_n(t) \tag{31}$$

را می‌توان با یک جایگزینی به حالت قبل تحویل کرد. فرض کنید

$$Y(t) = e^{\alpha t}u(t);$$

در این‌صورت

$$Y'(t) = e^{\alpha t}[u'(t) + \alpha u(t)]$$

و

$$Y''(t) = e^{\alpha t}[u''(t) + 2\alpha u'(t) + \alpha^2 u(t)].$$

با جایگزینی به‌جای y، y' و y'' در معادلهٔ (۳۱) و حذف عامل $e^{\alpha t}$ و ساده‌کردن جمله‌ها نتیجه می‌شود

$$au''(t) + (2a\alpha + b)u'(t) + (a\alpha^2 + b\alpha + c)u(t) = P_n(t). \tag{32}$$

به‌دست آوردن جواب خاصی برای معادلهٔ (۳۲) دقیقاً همان مسئلهٔ معادلهٔ (۲۸) است به‌جز آنکه اسم ثابتها تغییر کرده است. پس اگر $a\alpha^2 + b\alpha + c$ صفر نباشد، فرض می‌کنیم $u(t) = A_0 t^n + \cdots + A_n$؛ بنابراین یک جواب خاص معادلهٔ (۳۱) به شکل

$$Y(t) = e^{\alpha t}(A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + \cdots + A_n) \tag{33}$$

است. از طرف دیگر اگر $a\alpha^2 + b\alpha + c$ صفر باشد اما $2a\alpha + b$ صفر نباشد، باید $u(t)$ را به‌صورت $t(A_0 t^n + \cdots + A_n)$ در نظر بگیریم. شکل متناظر برای $Y(t)$، t برابر عبارت طرف راست معادلهٔ (۳۳) است.

توجه کنید که اگر $a\alpha^2 + b\alpha + c$ صفر باشد، $e^{\alpha t}$ جواب معادلهٔ همگن است. اگر هر دوی $a\alpha^2 + b\alpha + c$ و $2a\alpha + b$ صفر باشند (که نتیجه می‌دهد هر دوی $e^{\alpha t}$ و $te^{\alpha t}$ جوابهای معادلهٔ همگن هستند)، شکل درست $u(t)$، $t^2(A_0 t^n + \cdots + A_n)$ است. بنابراین $Y(t)$، t^2 برابر عبارت سمت راست معادلهٔ (۳۳) است.

$g(t) = e^{\alpha t}P_n(t)\cos\beta t$ یا $g(t) = e^{\alpha t}P_n(t)\sin\beta t$. این دو حالت مشابه هستند، بنابراین فقط دومی را در نظر می‌گیریم. می‌توانیم با توجه به اینکه طبق فرمول اویلر $\sin\beta t = (e^{i\beta t} - e^{-i\beta t})/2i$، مسئله را به حالت قبل تحویل کنیم. بنابراین $g(t)$ به شکل

$$g(t) = P_n(t)\frac{e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}}{2i}$$

است و باید $Y(t)$ را به شکل

$$Y(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}(A_0 t^n + \cdots + A_n) + e^{(\alpha-i\beta)t}(B_0 t^n + \cdots + B_n)$$

یا به‌طور معادل

$$Y(t) = e^{\alpha t}(A_0 t^n + \cdots + A_n)\cos\beta t + e^{\alpha t}(B_0 t^n + \cdots + B_n)\sin\beta t$$

انتخاب کنیم. معمولاً شکل اخیر مرجح است. اگر $\alpha \pm i\beta$ در معادلهٔ مشخصه معادلهٔ همگن متناظر صدق کند، باید هر چندجمله‌ای را در t ضرب کنیم که درجه را یک واحد اضافه می‌کند.

اگر جملهٔ غیرهمگن شامل $\cos\beta t$ و $\sin\beta t$ باشد، معمولاً بهتر است که این جمله‌ها را با هم در نظر بگیریم، چون هر یک از آنها به تنهایی منجر به همان شکل جواب خاص می‌شود. به‌عنوان مثال اگر $g(t) = t\sin t + 2\cos t$، $Y(t)$ به‌صورت

$$Y(t) = (A_0 t + A_1)\sin t + (B_0 t + B_1)\cos t$$

خواهد بود به شرط اینکه $\sin t$ و $\cos t$ جوابهای معادلهٔ همگن نباشند.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۱۲، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده را به‌دست بیاورید.

۱. $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$

۲. $y'' + 2y' + 5y = 3\cos 2t$

۳. $y'' - 2y' - 3y = 2 - 3te^{-t}$

۴. $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2t$

۵. $y'' + 9y = t^2 e^{3t} + 6$

۶. $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$

۷. $2y'' + 3y' + y = t^3 + 3\sin t$

۸. $y'' + y = 3\sin 2t + t\cos 2t$

۹. $u'' + \omega_0^2 u = \cos\omega t$، $\omega^2 \neq \omega_0^2$

۱۰. $u'' + \omega_0^2 u = \cos\omega_0 t$

۱۱. $y'' + y' + 4y = 2\sinh t$ راهنمایی: $\sinh t = (e^t - e^{-t})/2$

۱۲. $y'' - y' - 2y = 3\cosh 2t$ راهنمایی: $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$

در هر یک از مسئله‌های ۱۳ تا ۱۸، جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را به‌دست بیاورید.

۱۳. $y'' + y' - 2y = 2t$، $y(0) = 0$، $y'(0) = 1$

۱۴. $y''-2y'+y=te^t+4$، $y(0)=1$، $y'(0)=1$

۱۵. $y''+4y=t^2+3e^t$، $y(0)=0$، $y'(0)=2$

۱۶. $y''-2y'-3y=3te^{2t}$، $y(0)=1$، $y'(0)=0$

۱۷. $y''+4y=2\sin 2t$، $y(0)=2$، $y'(0)=-1$

۱۸. $y''+2y'+5y=4e^{-t}\cos 2t$، $y(0)=1$، $y'(0)=0$

در هر یک از مسئله‌های ۱۹ تا ۲۶،

الف) شکل مناسب $Y(t)$ را برای روش ضرایب نامعین پیدا کنید.

ب) با استفاده از رایانه یک جواب خاص برای معادلهٔ داده‌شده بیابید.

۱۹. $y''+3y'=2t^4+t^2e^{-3t}+\sin 3t$

۲۰. $y''-5y'+6y=e^t\cos 2t+e^{2t}(3t+4)\sin t$

۲۱. $y''+\grave{y}=t(1+\sin t)$

۲۲. $y''+2y'+2y=3e^{-t}+2e^{-t}\cos t+4e^{-t}t^2\sin t$

۲۳. $y''-4y'+4y=4t+4te^{2t}+t\sin 2t$

۲۴. $y''+4y=t^2\sin 2t+(6t+7)\cos 2t$

۲۵. $y''+3y'+2y=e^t(t^2+1)\sin 2t+3e^{-t}\cos t+5e^t$

۲۶. $y''+2y'+5y=3te^{-t}\cos 2t-2te^{-2t}\cos t$

۲۷. معادلهٔ

$$y''-3y'-4y=2e^{-t} \qquad \text{(i)}$$

را از مثال ۵ در نظر بگیرید. یادآوری می‌کنیم که $y_1(t)=e^{-t}$ و $y_2(t)=e^{4t}$ جوابهای معادلهٔ همگن متناظر هستند. با روش کاهش مرتبه (بخش ۴.۳) جوابی از معادلهٔ غیرهمگن $Y(t)=v(t)y_1(t)=v(t)e^{-t}$ را پیدا کنید که در آن $v(t)$ باید تعیین شود.

الف) $Y(t)$، $Y'(t)$ و $Y''(t)$ را در معادلهٔ (i) جایگزین کنید و ثابت کنید $v(t)$ باید در معادلهٔ $v''-5v'=2$ صدق کند.

ب) قرار دهید $w(t)=v'(t)$ و ثابت کنید $w(t)$ باید در معادلهٔ $w'-5w=2$ صدق کند. این معادله را نسبت به $w(t)$ حل کنید.

ج) از $w(t)$ انتگرال بگیرید تا $v(t)$ را پیدا کنید و سپس ثابت کنید که

$$Y(t)=-\frac{2}{5}te^{-t}+\frac{1}{5}c_1e^{4t}+c_2e^{-t}.$$

اولین جملهٔ طرف راست، جواب خاص دلخواه از معادلهٔ غیرهمگن است. توجه کنید که این جواب حاصلضرب t و e^{-t} است.

۲۸. جواب عمومی

$$y''+\lambda^2y=\sum_{m=1}^{N}a_m\sin m\pi t$$

را، که در آن $\lambda>0$ و به‌ازای $m=1,\dots,N$، $\lambda\neq m\pi$، پیدا کنید.

۲۹. در بسیاری از مسئله‌های فیزیکی، جمله‌های غیرهمگن در بازه‌های زمانی متفاوت با ضابطه‌ای متفاوت مشخص می‌شوند؛ به‌عنوان مثال جواب $y=\phi(t)$ برای

$$y''+y=\begin{cases} t, & 0\le t\le \pi\\ \pi e^{\pi-t}, & t>\pi\end{cases}$$

را تعیین کنید که در شرایط اولیهٔ $y(0)=0$ و $y'(0)=1$ صدق می‌کند. فرض کنید y و y' هم در $t=\pi$ پیوسته هستند. جملهٔ غیرهمگن و جواب را به‌عنوان تابعی از زمان رسم کنید.

راهنمایی: ابتدا مسئلهٔ مقدار اولیه را به‌ازای $t\le\pi$ حل کنید، سپس آن را به‌ازای $t>\pi$ حل کنید و ثابتها را با استفاده از شرط پیوستگی در $t=\pi$ تعیین کنید.

۳۰. خواسته‌های مسئلهٔ ۲۹ را برای حل معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+2y'+5y=\begin{cases} 1, & 0\le t\le \pi/2\\ 0, & t>\pi/2\end{cases}$$

با شرایط اولیهٔ $y(0)=0$ و $y'(0)=0$ انجام بدهید.

رفتار جوابها وقتی $t\to\infty$. در مسئله‌های ۳۱ و ۳۲ بحث شروع‌شده در مسئله‌های ۳۸ تا ۴۰ بخش ۴.۳ را دنبال می‌کنیم. معادلهٔ دیفرانسیل

$$ay''+by'+cy=g(t) \qquad \text{(i)}$$

را در نظر بگیرید که در آن a، b و c مثبت هستند.

۳۱. اگر $Y_1(t)$ و $Y_2(t)$ جواب معادلهٔ(i) باشند، ثابت کنید که وقتی $t\to\infty$، $Y_1(t)-Y_2(t)\to 0$. آیا این نتیجه وقتی $b=0$ هم درست است؟

۳۲. اگر $g(t)=d$ تابع ثابت باشد، ثابت کنید که هر جواب معادلهٔ (i) وقتی $t\to\infty$ به d/c میل می‌کند. اگر $c=0$ چه اتفاقی می‌افتد؟ اگر b هم صفر باشد چطور؟

۳۳. در این مسئله روند دیگری برای حل معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+by'+cy=(D^2+bD+c)y=g(t) \qquad \text{(i)}$$

را، که در آن b و c ثابت هستند و D مشتق‌گیری نسبت به t را نشان می‌دهد، مطرح می‌کنیم.[1] فرض کنید r_1 و r_2

۱. نگاه کنید به

R. S. Luthar, "Another Approach to a Standard Differential Equation," *Two Year College Mathematics Journal 10* (1979), pp. 200-201.

برای بحث کلی‌تر دربارهٔ عملگرهای تجزیه‌کننده،

D. C. Sandell and F. M. Stein, "Factorization of Operators of Second Order Linear Homogeneous Ordinary Differential Equations," *Two Year College Mathematics Journal 8* (1977), pp. 132-141

را ببینید.

ریشه‌های معادلهٔ مشخصه معادلهٔ همگن متناظر باشند. این ریشه‌ها ممکن است حقیقی و متفاوت، حقیقی و تکراری و یا مزدوج مختلط باشند.

الف) ثابت کنید معادلهٔ (i) را می‌توان به‌صورت تجزیه‌شدهٔ

$$(D-r_1)(D-r_2)y=g(t)$$

نوشت که در آن $r_1+r_2=-b$ و $r_1r_2=c$.

ب) فرض کنید $u=(D-r_2)y$. ثابت کنید جواب معادلهٔ (i) را می‌توان با حل معادله‌های مرتبهٔ اول

$$(D-r_1)u=g(t), \qquad (D-r_2)y=u(t)$$

به‌دست آورد.

در هر یک از مسئله‌های ۳۴ تا ۳۷ با استفاده از روش مسئلهٔ ۳۳ معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده را حل کنید.

۳۴. $y''-3y'-4y=3e^{2t}$ (مثال ۱ را ببینید)

۳۵. $y''+2y'+y=2e^{-t}$ (مسئلهٔ ۶ را ببینید)

۳۶. $2y''+3y'+y=t^2+3\sin t$ (مسئلهٔ ۷ را ببینید)

۳۷. $y''+2y'=3+4\sin 2t$ (مسئلهٔ ۴ را ببینید)

۶.۳ تغییر پارامترها

در این بخش روش دیگری را برای یافتن یک جواب خاص معادلهٔ غیرهمگن تشریح می‌کنیم. این روش که با نام **تغییر پارامترها** شناخته می‌شود از لاگرانژ است و به‌خوبی روش ضرایب نامعین را کامل می‌کند. مهم‌ترین برتری تغییر پارامترها کلی بودن روش است؛ حداقل علی‌القاعده می‌توان آن را برای هر معادله‌ای به‌کار برد و لازم نیست که شکل خاصی را برای جواب در نظر بگیریم. در حقیقت در ادامهٔ این بخش، با استفاده از این روش فرمولی برای جواب خاص معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم غیرهمگن ارائه می‌کنیم. از طرف دیگر، روش تغییر پارامترها درنهایت نیاز به محاسبهٔ انتگرال‌هایی دارد که شامل جمله‌های غیرهمگن معادلهٔ دیفرانسیل هستند و ممکن است مشکل‌ساز شود. قبل از اینکه به بررسی این روش در حالت کلی بپردازیم، استفاده از آن را در مثال زیر نشان می‌دهیم.

مثال ۱

یک جواب خاص معادلهٔ

$$y''+4y=3\csc t \tag{1}$$

را به‌دست بیاورید.

توجه کنید که برای حل این مسئله نمی‌توانیم از روش ضرایب نامعین که در بخش ۵.۳ تشریح شد استفاده کنیم، چون جملهٔ غیرهمگن $g(t)=3\csc t$ به‌جای جمع و یا ضرب حاوی نسبتی از $\sin t$ و $\cos t$ است. بنابراین به روشی متفاوت نیاز داریم. همچنین توجه کنید که معادلهٔ همگن متناظر معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$y''+4y=0. \tag{2}$$

جواب عمومی معادلهٔ (۲) عبارت است از

$$y_c(t)=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t. \tag{3}$$

ایدهٔ اساسی روش تغییر پارامترها جایگزینی ثابتهای c_1 و c_2 در معادلهٔ (۳) با تابعهای $u_1(t)$ و $u_2(t)$ و سپس تعیین این تابعها است به‌طوری که عبارت حاصله، یعنی

$$y=u_1(t)\cos 2t+u_2(t)\sin 2t \tag{4}$$

جوابی از معادلهٔ غیرهمگن (۱) باشد.

برای تعیین u_1 و u_2 باید y را از معادلهٔ (۴) در معادلهٔ (۱) جایگزین کنیم. حتی بدون انجام این جایگزینی، می‌توانیم انتظار داشته باشیم که نتیجه، معادله‌ای شامل ترکیبی از u_1 و u_2 و مشتق اول و دوم آنهاست. چون یک معادله و دو مجهول داریم، می‌توانیم انتظار داشته باشیم که انتخابهای ممکن زیادی برای u_1 و u_2 موجود باشند که نیازمان را برآورده کنند. لذا ممکن است بتوانیم شرطی روی انتخابمان بگذاریم که معادلهٔ دومی را برای دو مجهول u_1 و u_2 فراهم کنند. کمی جلوتر (به پیروی از لاگرانژ) ثابت می‌کنیم که می‌توانیم این شرط دوم را طوری انتخاب کنیم که محاسبات را به‌طور قابل توجهی کاراتر کند.

حال با بازگشت به معادلهٔ (۴)، از آن مشتق می‌گیریم و جمله‌ها را مرتب می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$y'=-2u_1(t)\sin 2t+2u_2(t)\cos 2t+u_1'(t)\cos 2t+u_2'(t)\sin 2t. \tag{5}$$

با به‌خاطر داشتن امکان انتخاب شرط دومی روی u_1 و u_2، فرض می‌کنیم مجموع دو جملهٔ آخر طرف راست معادلهٔ (۵) صفر است؛ یعنی فرض می‌کنیم

$$u_1'(t)\cos 2t+u_2'(t)\sin 2t=0. \tag{6}$$

در این‌صورت از معادلهٔ (۵) نتیجه می‌شود

$$y'=-2u_1(t)\sin 2t+2u_2(t)\cos 2t. \tag{7}$$

هرچند تأثیر نهایی شرط (۶) هنوز معلوم نیست، حداقل عبارت y' را ساده می‌کند. علاوه بر این با مشتق‌گیری از معادلهٔ (۷) نتیجه می‌شود

$$y''=-4u_1(t)\cos 2t-4u_2(t)\sin 2t-2u_1'(t)\sin 2t+2u_2'(t)\cos 2t. \tag{8}$$

با جایگزین کردن y و y'' از معادله‌های (۴) و (۸) در معادلهٔ (۱)، نتیجه می‌شود که u_1 و u_2 باید در معادلهٔ

$$-2u_1'(t)\sin 2t+2u_2'(t)\cos 2t=3\csc t \tag{9}$$

صدق کنند.

آنچه را که تا اینجا به‌دست آورده‌ایم خلاصه می‌کنیم. می‌خواهیم u_1 و u_2 را طوری به‌دست بیاوریم که در معادله‌های (۶) و (۹) صدق کنند. این معادله‌ها را می‌توان معادله‌های جبری خطی برای دو مجهول $u_1'(t)$ و $u_2'(t)$ دانست. معادله‌های (۶) و (۹) را به روشهای مختلف می‌توان حل کرد؛ به‌عنوان مثال، $u_2'(t)$ را می‌توانیم از معادلهٔ (۶) به‌صورت

$$u_2'(t)=-u_1'(t)\frac{\cos 2t}{\sin 2t} \tag{10}$$

بنویسیم. این مقدار را به‌جای $u_2'(t)$ در معادلهٔ (۹) قرار می‌دهیم و آن را ساده می‌کنیم تا به

$$u_1'(t) = -\frac{3\csc t \sin 2t}{2} = -3\cos t \tag{۱۱}$$

برسیم. علاوه بر این، با جایگزینی این عبارت به‌جای $u_1'(t)$ در معادلهٔ (۱۰) و استفاده از فرمول دوبرابر قوس نتیجه می‌شود

$$u_2'(t) = \frac{3\cos t\cos 2t}{\sin 2t} = \frac{3(1-2\sin^2 t)}{2\sin t} = \frac{3}{2}\csc t - 3\sin t. \tag{۱۲}$$

اکنون که $u_1'(t)$ و $u_2'(t)$ را به‌دست آورده‌ایم، از آنها انتگرال می‌گیریم تا $u_1(t)$ و $u_2(t)$ را به‌دست بیاوریم. نتیجه عبارت است از

$$u_1(t) = -3\sin t + c_1 \tag{۱۳}$$

و

$$u_2(t) = \frac{3}{2}\ln|\csc t - \cot t| + 3\cos t + c_2. \tag{۱۴}$$

با جایگزین کردن این عبارتها در معادلهٔ (۴) نتیجه می‌شود

$$y = -3\sin t\cos 2t + \frac{3}{2}\ln|\csc t - \cot t|\sin 2t + 3\cos t\sin 2t$$
$$+ c_1\cos 2t + c_2\sin 2t.$$

درنهایت با استفادهٔ مجدد از فرمول دوبرابر قوس نتیجه می‌شود

$$y = 3\sin t + \frac{3}{2}\ln|\csc t - \cot t|\sin 2t + c_1\cos 2t + c_2\sin 2t. \tag{۱۵}$$

جمله‌های شامل ثابتهای c_1 و c_2 در معادلهٔ (۱۵)، جواب عمومی معادلهٔ همگن متناظر هستند و بقیهٔ جمله‌ها جواب خاصی برای معادلهٔ غیرهمگن (۱) هستند. پس معادلهٔ (۱۵) جواب عمومی معادلهٔ (۱) است.

در مثال فوق روش تغییر پارامتر برای تعیین یک جواب خاص و بنابراین جواب عمومی معادلهٔ (۱) به‌خوبی کارکرد. سؤال بعدی این است که این روش را می‌توان به‌طور مؤثر برای معادلهٔ دلخواه به‌کار برد یا نه. بنابراین معادلهٔ

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \tag{۱۶}$$

را، که در آن p، q و g تابعهای پیوستهٔ مفروض هستند، در نظر می‌گیریم. به‌عنوان نقطهٔ شروع، فرض می‌کنیم که جواب عمومی

$$y_c(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \tag{۱۷}$$

را برای معادلهٔ همگن متناظر یعنی

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{۱۸}$$

می‌دانیم. این فرض، فرض بزرگی است، چرا که تا به حال تنها چگونگی حل معادلهٔ (۱۸) را تنها در حالتی که ضرایب آن ثابت باشند نشان داده‌ایم. اگر معادلهٔ (۱۸) ضرایبی وابسته به t داشته باشد، معمولاً باید برای تعیین $y_c(t)$ از روشهای تشریح‌شده در فصل ۵ استفاده کنیم.

همان‌گونه که در مثال ۱ نشان داده شد، ایدهٔ اساسی جایگزینی ثابتهای c_1 و c_2 با تابعهای $u_1(t)$ و $u_2(t)$ در معادلهٔ (۱۷) است؛ پس می‌نویسیم

$$y = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) \tag{۱۹}$$

و سپس سعی می‌کنیم که $u_1(t)$ و $u_2(t)$ را طوری تعیین کنیم که عبارت معادلهٔ (۱۹) به‌جای جواب معادلهٔ همگن (۱۸) جواب معادلهٔ غیرهمگن (۱۶) باشد. پس، از معادلهٔ (۱۹) مشتق می‌گیریم تا به

$$y' = u_1'(t)y_1(t) + u_1(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2(t) + u_2(t)y_2'(t) \tag{۲۰}$$

برسیم. مانند مثال ۱، جمله‌های شامل $u_1'(t)$ و $u_2'(t)$ در معادلهٔ (۲۰) را برابر صفر قرار می‌دهیم؛ یعنی فرض می‌کنیم

$$u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0; \tag{۲۱}$$

پس از معادلهٔ (۲۰) نتیجه می‌شود

$$y' = u_1(t)y_1'(t) + u_2(t)y_2'(t). \tag{۲۲}$$

علاوه بر این، با مشتق‌گیری مجدد می‌توانیم بنویسیم

$$y'' = u_1'(t)y_1'(t) + u_1(t)y_1''(t) + u_2'(t)y_2'(t) + u_2(t)y_2''(t). \tag{۲۳}$$

حال y، y' و y'' را از معادله‌های (۱۹)، (۲۲) و (۲۳) در معادلهٔ (۱۶) جایگزین می‌کنیم. پس از مرتب کردن جمله‌ها در معادلهٔ حاصله نتیجه می‌شود

$$u_1(t)[y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)] + u_2(t)[y_2''(t)$$
$$+ p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t)] + u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t). \tag{۲۴}$$

عبارتهای داخل کروشه در معادلهٔ (۲۴) برابر صفرند چون هر دوی y_1 و y_2 جوابهای معادلهٔ همگن (۱۸) هستند. بنابراین معادلهٔ (۲۴) به

$$u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t) \tag{۲۵}$$

تحویل می‌شود. معادله‌های (۲۱) و (۲۵) دستگاهی خطی از معادله‌های جبری خطی برحسب $u_1'(t)$ و $u_2'(t)$ تشکیل می‌دهند که دقیقاً متناظر معادله‌های (۶) و (۹) مثال ۱ هستند.

با حل دستگاه (۲۱) و (۲۵) نتیجه می‌شود

$$u_1'(t) = -\frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}, \qquad u_2'(t) = \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)} \tag{۲۶}$$

که در آن $W(y_1,y_2)$ رانسکین y_1 و y_2 است. توجه کنید که تقسیم بر W مجاز است چون y_1 و y_2

مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند و بنابراین رانسکین آنها غیرصفر است. با انتگرال‌گیری از معادله‌های (۲۶) جوابهای $u_1(t)$ و $u_2(t)$ را به‌دست می‌آوریم، یعنی

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt + c_1, \qquad u_2(t) = \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt + c_2. \tag{۲۷}$$

اگر بتوان انتگرال معادله‌های (۲۷) را برحسب توابع مقدماتی به‌دست آورد، می‌توانیم نتیجه را در معادلهٔ (۱۹) جایگزین کنیم و جواب عمومی معادلهٔ (۱۶) را به‌دست بیاوریم. به‌طور کلی، همان‌گونه که در قضیهٔ بعد بیان می‌شود، جواب را همواره می‌توان برحسب انتگرال‌ها ارائه کرد.

قضیهٔ ۳.۶.۱ اگر تابعهای p، q و g روی بازهٔ باز I پیوسته باشند و اگر تابعهای y_1 و y_2 مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادلهٔ همگن (۱۸) متناظر معادلهٔ غیرهمگن (۱۶)، یعنی

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

تشکیل بدهند، یک جواب خاص معادلهٔ (۱۶) عبارت است از

$$Y(t) = -y_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_2(s)g(s)}{W(y_1,y_2)(s)}ds + y_2(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)g(s)}{W(y_1,y_2)(s)} \tag{۲۸}$$

که در آن t_0 نقطهٔ مناسب دلخواهی در بازهٔ I است. جواب عمومی عبارت است از

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + Y(t) \tag{۲۹}$$

به شکلی که در قضیهٔ ۳.۵.۲ بیان شد.

با آزمایش عبارت (۲۸) و روندی که این عبارت از آن به‌دست آمده، متوجه می‌شویم که دو مشکل اساسی در استفاده از روش تغییر پارامترها پیش می‌آید. همان‌گونه که قبلاً ذکر کردیم، یکی تعیین $y_1(t)$ و $y_2(t)$، یعنی مجموعهٔ اساسی از جوابهای معادلهٔ همگن (۱۸) است وقتی ضرایب معادله ثابت نباشند. مشکل دیگری که بروز می‌کند به محاسبهٔ انتگرال‌های ظاهرشده در معادلهٔ (۲۸) مربوط است که کاملاً به ماهیت y_1، y_2 و g بستگی دارد. هنگام استفاده از معادلهٔ (۲۸) مطمئن شوید که معادلهٔ دیفرانسیل دقیقاً به شکل معادلهٔ (۱۶) است؛ در غیر این‌صورت جملهٔ غیرهمگن $g(t)$ درست شناخته نمی‌شود.

مزیت اصلی روش تغییر پارامترها این است که معادلهٔ (۲۸) عبارتی برای جواب خاص $Y(t)$ برحسب تابع واداشتهٔ دلخواه $g(t)$ به‌دست می‌دهد. این عبارت شروع خوبی برای تحقیق دربارهٔ اثر تغییرات تابع واداشته و یا تحلیل پاسخ سیستم به چند تابع واداشتهٔ متفاوت است.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۴، از روش تغییر پارامترها برای یافتن یک جواب خاص معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده استفاده کنید. آنگاه جوابتان را با جواب حاصل از روش ضرایب نامعین مقایسه کنید.

۱. $y'' - 5y' + 6y = 2e^t$

۲. $y'' - y' - 2y = 2e^{-t}$

۳. $y'' + 2y' + y = 3e^{-t}$

۴. $4y'' - 4y' + y = 16e^{t/2}$

در هر یک از مسئله‌های ۵ تا ۱۲، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده را به‌دست بیاورید. در مسئله‌های ۱۱ و ۱۲، g تابع پیوستهٔ دلخواه است.

۵. $y'' + y = \tan t$، $0 < t < \pi/2$

۶. $y'' + 4y = 3\csc 2t$، $0 < t < \pi/2$

۷. $y'' + 4y' + 4y = t^{-2}e^{-2t}$، $t > 0$

۸. $y'' + 9y = 9\sec^2 3t$، $0 < t < \pi/6$

۹. $4y'' + y = 2\sec(t/2)$، $-\pi < t < \pi$

۱۰. $y'' - 2y' + y = e^t/(1+t^2)$

۱۱. $y'' - 5y' + 6y = g(t)$

۱۲. $y'' + 9y = g(t)$

در هر یک از مسئله‌های ۱۳ تا ۲۰، ثابت کنید که تابعهای داده‌شدهٔ y_1 و y_2 در معادلهٔ همگن متناظر صدق می‌کنند؛ سپس یک جواب خاص معادلهٔ غیرهمگن داده‌شده را به‌دست بیاورید. در مسئله‌های ۱۹ و ۲۰، g تابع پیوستهٔ دلخواه است.

۱۳. $t^2y'' - 2y = 3t^2 - 1$، $t > 0$؛ $y_1(t) = t^2$، $y_2(t) = t^{-1}$

۱۴. $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 2t^3$، $t > 0$؛ $y_1(t) = t$، $y_2(t) = te^t$

۱۵. $(1-t)y'' + ty' - y = 2(t-1)^2e^{-t}$، $0 < t < 1$؛ $y_1(t) = e^t$، $y_2(t) = t$

۱۶. $ty'' - (1+t)y' + y = t^2e^{2t}$، $t > 0$؛ $y_1(t) = 1 + t$، $y_2(t) = e^t$

۱۷. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2\ln x$، $x > 0$؛ $y_1(x) = x^2$، $y_2(x) = x^2\ln x$

۱۸. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0.25)y = 3x^{3/2}\sin x$، $x > 0$؛ $y_1(x) = x^{-1/2}\sin x$، $y_2(x) = x^{-1/2}\cos x$

۱۹. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0.25)y = g(x)$، $x > 0$؛ $y_1(x) = x^{-1/2}\sin x$، $y_2(x) = x^{-1/2}\cos x$

۲۰. $(1-x)y'' + xy' - y = g(x)$، $0 < x < 1$؛ $y_1(x) = e^x$، $y_2(x) = x$

۲۱. ثابت کنید جوابهای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \qquad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \tag{i}$$

را می‌توان به‌صورت $y = u(t) + v(t)$ نوشت که در آن u و v جوابهای دو مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$L[u] = 0, \qquad u(t_0) = y_0, \quad u'(t_0) = y'_0 \tag{ii}$$

$$L[v] = g(t), \qquad v(t_0) = 0, \quad v'(t_0) = 0 \tag{iii}$$

هستند. به‌عبارت دیگر غیرهمگن بودن در معادلهٔ دیفرانسیل و در مقادیر اولیه را می‌توان به‌صورت مجزا بررسی کرد. توجه کنید که اگر یک مجموعهٔ اساسی از جوابهای $L[u] = 0$ معلوم باشد، u را به‌سادگی می‌توان یافت.

۲۲. با انتخاب کران پایینی انتگرال در معادلهٔ (۲۸) متن به‌عنوان نقطهٔ اولیهٔ t_0، ثابت کنید $Y(t)$ تبدیل می‌شود به

$$Y(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)y_2(t) - y_1(t)y_2(s)}{y_1(s)y'_2(s) - y'_1(s)y_2(s)}g(s)ds.$$

ثابت کنید $Y(t)$ جوابی از مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$L[y] = g(t), \qquad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0$$

است. بنابراین $Y(t)$ را می‌توان v در مسئلهٔ ۲۱ فرض کرد.

۲۳. الف) با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۲۲ ثابت کنید جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y''+y=g(t),\quad y(t_0)=0,\quad y'(t_0)=0 \qquad \text{(i)}$$

عبارت است از

$$y=\int_{t_0}^{t}\sin(t-s)g(s)ds. \qquad \text{(ii)}$$

ب) با استفاده از مسئلهٔ ۲۱ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y''+y=g(t),\quad y(0)=y_0,\quad y'(0)=y'_0$$

را به‌دست بیاورید.

۲۴. با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۲۲، جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$L[y]=(D-a)(D-b)y=g(t),\quad y(t_0)=0,\quad y'(t_0)=0$$

را که در آن a و b اعداد حقیقی‌ای هستند و $a\neq b$ به‌دست بیاورید.

۲۵. با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۲۲، جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$L[y]=[D^2-2\lambda D+(\lambda^2+\mu^2)]y=g(t),\quad y(t_0)=0,\quad y'(t_0)=0$$

را به‌دست بیاورید. توجه کنید که ریشه‌های معادلهٔ مشخصه $\lambda\pm i\mu$ هستند.

۲۶. با استفاده از مسئلهٔ ۲۲، جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$L[y]=(D-a)^2y=g(t),\quad y(t_0)=0,\quad y'(t_0)=0$$

را به‌دست بیاورید که در آن a عدد حقیقی دلخواهی است.

۲۷. با ترکیب نتایج مسئله‌های ۲۴ تا ۲۶، ثابت کنید جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$L[y]=(D^2+bD+c)y=g(t),\quad y(t_0)=0,\quad y'(t_0)=0$$

که در آن b و c ثابت هستند، به شکل

$$y=\phi(t)=\int_{t_0}^{t}K(t-s)g(s)ds \qquad \text{(i)}$$

است. تابع K تنها به جوابهای y_1 و y_2 برای معادلهٔ همگن متناظر بستگی دارد و مستقل از جملهٔ ناهمگن است. به محض تعیین K، همهٔ مسئله‌های غیرهمگن شامل همان عملگر دیفرانسیلی L به محاسبهٔ انتگرال ساده تحویل می‌شوند. توجه کنید که اگرچه K به هر دوی t و s بستگی دارد، تنها ترکیب $t-s$ ظاهر می‌شود، بنابراین K عملاً تابعی یک‌متغیره است. هنگامی که $g(t)$ را ورودی مسئله و $\phi(t)$ را خروجی فرض کنیم، از معادلهٔ (i) نتیجه می‌شود که خروجی بستگی به ورودی روی تمام بازه از نقطهٔ اولیهٔ t_0 تا مقدار فعلی t دارد. به انتگرال معادلهٔ (i) **پیچش** K و g، و به K **هسته** می‌گوییم.

۲۸. روش کاهش مرتبه (بخش ۴.۳) را هم می‌توان برای حل معادلهٔ غیرهمگن

$$y''+p(t)y'+q(t)y=g(t) \qquad \text{(i)}$$

به‌کار گرفت به‌شرط اینکه یک جواب y_1 از معادلهٔ همگن معلوم باشد. فرض کنید $y=v(t)y_1(t)$ و ثابت کنید y در معادلهٔ (i) صدق می‌کند اگر v جواب

$$y_1(t)v''+[2y_1'(t)+p(t)y_1(t)]v'=g(t) \qquad \text{(ii)}$$

باشد. معادلهٔ (ii) معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول برحسب v' است. با حل این معادله، انتگرال‌گیری از نتیجه و سپس ضرب آن در $y_1(t)$، جواب عمومی معادلهٔ (i) به‌دست می‌آید.

در هر یک از مسئله‌های ۲۹ تا ۳۲، از روش ارائه‌شده در مسئلهٔ ۲۸ برای حل معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده استفاده کنید.

۲۹. $t^2y''-2ty'+2y=4t^2$؛ $t>0$؛ $y_1(t)=t$

۳۰. $t^2y''+7ty'+5y=t$؛ $t>0$؛ $y_1(t)=t^{-1}$

۳۱. $ty''-(1+t)y'+y=t^2e^{2t}$؛ $t>0$؛ $y_1(t)=1+t$؛ مسئلهٔ ۱۶ را ببینید.

۳۲. $(1-t)y''+ty'-y=2(t-1)^2e^{-t}$؛ $0<t<1$؛ $y_1(t)=e^t$؛ مسئلهٔ ۱۵ را ببینید.

۷.۳ ارتعاشات مکانیکی و الکتریکی

یکی از دلایل اهمیت مطالعهٔ معادلات مرتبهٔ دوم خطی با ضرایب ثابت این است که از این معادله‌ها می‌توان به‌عنوان مدل ریاضی بعضی از فرایندهای فیزیکی استفاده کرد. دو زمینهٔ مهم از کاربردهای این معادله‌ها ارتعاشات مکانیکی و الکتریکی هستند. به‌عنوان مثال، حرکت وزنهٔ متصل به فنر مرتعش، ارتعاشات پیچشی یک میله با چرخ لنگر، جاری شدن جریان الکتریکی در مدار سادهٔ سری و بی‌شمار مسئلهٔ فیزیکی دیگر همگی با جواب مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای به شکل

$$ay''+by'+cy=g(t),\quad y(0)=y_0,\quad y'(0)=y'_0 \qquad (1)$$

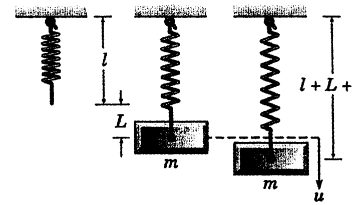
توصیف می‌شوند.

این امر ارتباط اساسی بین ریاضیات و فیزیک را نشان می‌دهد: مدل ریاضی بسیاری از مسئله‌های فیزیکی یکی است. پس به مجرد اینکه نحوهٔ حل مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱) را دانستیم، تنها لازم است که ثابتهای a، b و c و تابعهای y و g را به نحو مناسبی تعبیر کنیم تا جوابهای مسئله‌های مختلف فیزیکی را به‌دست بیاوریم.

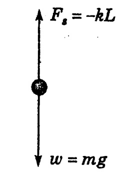
از آنجا که درک رفتار سیستم سادهٔ وزنهٔ متصل به فنر اولین گام در بررسی سیستم‌های مرتعش پیچیده‌تر است، آن را به تفصیل بررسی می‌کنیم. وزنه‌ای به جرم m را در نظر بگیرید که همان‌گونه که در شکل ۱.۷.۳ نمایش داده شده است، به انتهای فنری قائم به طول اولیهٔ l آویزان است. وزنه باعث بیشتر شدن طول L فنر در جهت رو به پایین (مثبت) می‌شود. در نقطه‌ای که وزنه به فنر متصل شده است دو نیرو وارد می‌شود؛ شکل ۲.۷.۳ را ببینید. نیروی گرانش یا وزن وزنه به طرف پایین عمل می‌کند و اندازه‌اش mg است که در آن g شتاب جاذبه است. همچنین نیروی F_s فنر هم موجود است که به طرف بالا عمل می‌کند. اگر فرض کنیم که افزایش L کم است، نیروی فنر تقریباً متناسب با L است؛ این موضوع به قانون هوک[1] مشهور است. پس می‌نویسیم $F_s=-kL$، که در آن به ثابت نسبت k، ثابت فنر می‌گوییم و علامت منفی به‌خاطر این است که نیروی فنر به طرف بالا (منفی) عمل می‌کند. چون وزنه در حالت تعادل است، دو نیرو یکدیگر را خنثی می‌کنند، که یعنی

$$mg-kL=0. \qquad (2)$$

۱. رابرت هوک (۱۶۳۵-۱۷۰۳م) دانشمندی انگلیسی با علایق بسیارگسترده بود. مهم‌ترین کتاب او *Micrographia* در ۱۶۶۵ میلادی به چاپ رسید و مشاهدات میکروسکوپی بسیاری را توصیف کرد. هوک قانون کشسانی را در ۱۶۷۶ میلادی در *ceiiinosssttuv* منتشر کرد. در ۱۶۷۸ میلادی او تفسیر *uttensio sic vis* را ارائه کرد که تقریباً یعنی «هرقدر نیرو همان‌قدر جابه‌جایی».



شکل ۱.۷.۳ دستگاه فنر-وزنه.



شکل ۲.۷.۳ دیاگرام نیرو برای دستگاه فنر-وزنه.

برای وزن مفروض $w = mg$، می‌توان L را اندازه گرفت و با استفاده از معادلهٔ (۲)، k را تعیین کرد. توجه کنید که واحد k، $\frac{\text{نیرو}}{\text{طول}}$ است.

در مسئلهٔ دینامیکی متناظر، می‌خواهیم حرکت وزنه را وقتی تحت تأثیر نیروی خارجی قرار می‌گیرد و یا در ابتدا از حالت تعادل خارج می‌شود بررسی کنیم. فرض کنید $u(t)$ که جهت مثبت اندازه‌گیری آن به طرف پایین است، جابه‌جایی وزنه از حالت تعادلی در زمان t را نشان بدهد؛ شکل ۱.۷.۳ را ببینید. در این‌صورت $u(t)$ مبتنی بر قانون حرکت نیوتن به نیروهای عمل‌کننده روی وزنه مربوط می‌شود؛ یعنی

$$mu''(t) = f(t) \qquad (۳)$$

که در آن u'' شتاب وزنه و f نیروی خالص عمل‌کننده روی وزنه است. توجه کنید که هر دوی u و f تابع زمان هستند. در تعیین f باید چهار نیروی مختلف را در نظر گرفت.

۱. وزن $w = mg$ وزنه که همواره به سمت پایین عمل می‌کند.

۲. نیروی فنر F_s که فرض کردیم متناسب با افزایش طول $L+u$ فنر است و همواره طوری عمل می‌کند که فنر را به حالت طبیعی برگرداند. اگر $L+u>0$، فنر بلندتر می‌شود و نیروی فنر به‌طرف بالا عمل می‌کند. در این حالت

$$F_s = -k(L+u). \qquad (۴)$$

از طرف دیگر، اگر $L+u<0$، فنر به اندازهٔ طول $|L+u|$ فشرده می‌شود و نیروی فنر که این‌بار به سمت پایین است برابر است با $F_s = k|L+u|$. وقتی $L+u<0$، می‌دانیم که $|L+u| = -(L+u)$، بنابراین مجدداً F_s با معادلهٔ (۴) معیّن می‌شود. پس صرف‌نظر از موقعیت وزنه نیروی وارده از فنر همواره با معادلهٔ (۴) معین می‌شود.

۳. نیروی مقاومت یا میرایی F_d همواره در جهت مخالف حرکت جرم عمل می‌کند. این نیرو ممکن است چند منبع داشته باشد، مانند مقاومت هوا و یا محیط دیگری که وزنه در آن حرکت می‌کند، اتلاف درونی انرژی به‌دلیل کشیدگی و یا فشردگی فنر، اصطکاک بین وزنه و قیدهایی که باعث حرکت آن در یک بعد می‌شود و یا میله‌های مکانیکی (ضربه‌گیر) که نیروی مقاومتی بر وزنه وارد می‌کنند. در هر حالت فرض می‌کنیم که نیروی مقاومت متناسب با سرعت $|du/dt|$ وزنه است، به این نیرو معمولاً نیروی میراگر می‌گوییم. اگر $du/dt>0$، u صعودی است و بنابراین جرم به طرف پایین حرکت می‌کند. در این‌صورت جهت F_d به طرف بالا است و برابر است با

$$F_d(t) = -\gamma u'(t) \qquad (۵)$$

که در آن γ ثابت مثبت تناسب است که به آن ثابت میرایی می‌گوییم. از طرف دیگر، اگر $du/dt<0$، u نزولی است، جهت وزنه به طرف بالا است و جهت F_d به طرف پایین است. در این حالت، $F_d = \gamma|u'(t)|$؛ چون $|u'(t)| = -u'(t)$، مجدداً نتیجه می‌شود که $F_d(t)$ از معادلهٔ (۵) معیّن می‌شود. پس صرف‌نظر از جهت حرکت وزنه، نیروی میرایی همواره از معادلهٔ (۵) معیّن می‌شود.

نیروی میرایی ممکن است پیچیده باشد و این فرض که معادلهٔ (۵) آن را به‌طور مناسبی مدل می‌کند ممکن است محل پرسش باشد. بعضی از ضربه‌گیرها همان‌طور که معادلهٔ (۵) بیان می‌کند عمل می‌کنند و اگر بقیهٔ منابع میرایی کوچک باشند می‌توان از همهٔ آنها صرف‌نظر کرد و یا ضریب میرایی γ را طوری تنظیم کرد که آنها را تقریب بزند. فایدهٔ مهم فرض (۵) این است که منجر به معادلهٔ دیفرانسیل خطی (و نه غیرخطی) می‌شود و این به نوبهٔ خود یعنی اینکه همان‌طور که در این بخش و بخش بعدی نشان خواهیم داد، تحلیل کامل سیستم ساده است.

۴. نیروی خارجی واردشده $F(t)$ به طرف پایین و یا بالا اگر $F(t)$ مثبت و یا منفی باشد. این نیرو ممکن است به‌دلیل حرکت چیزی که فنر به آن وصل است ایجاد شود و یا ممکن است مستقیماً به وزنه وارد شود. نیروی خارجی معمولاً تناوبی است.

با در نظر گرفتن همهٔ این نیروها می‌توانیم قانون نیوتن (۳) را به‌صورت

$$\begin{aligned} mu''(t) &= mg + F_s(t) + F_d(t) + F(t) \\ &= mg - k[L+u(t)] - \gamma u'(t) + F(t) \qquad (۶) \end{aligned}$$

بازنویسی کنیم. چون طبق معادلهٔ (۲)، $mg - kL = 0$، نتیجه می‌شود که معادلهٔ حرکت وزنه عبارت است از

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = F(t) \qquad (۷)$$

که در آن ثابتهای m، γ و k مثبت هستند. توجه کنید که معادلهٔ (۷) به همان شکل معادلهٔ (۱) است.

مهم است که بدانیم معادلهٔ (۷) تنها معادلهٔ تقریبی جابه‌جایی $u(t)$ است. به‌ویژه هر دو معادلهٔ (۴) و (۵) را باید به‌ترتیب تقریبهایی از نیروی فنر و نیروی میرایی در نظر گرفت. در به‌دست آوردن این رابطه‌ها، از جرم فنر در مقابل جرم وزنهٔ متصل به فنر صرف‌نظر کردیم.

برای صورت‌بندی کامل مسئلهٔ ارتعاش، باید دو شرط اولیه، یعنی موقعیت اولیهٔ $u_۰$ و سرعت اولیهٔ $v_۰$ وزنه را هم مشخص کنیم:

$$u(۰) = u_۰, \qquad u'(۰) = v_۰. \tag{۸}$$

از قضیهٔ ۱.۲.۳ نتیجه می‌شود که با این شرایط، مسئلهٔ ریاضی جواب یکتا دارد. این با شهود فیزیکی سازگار است که اگر وزنه با سرعت و جابه‌جایی اولیهٔ مشخصی به حرکت درآید، موقعیت آن در همهٔ زمانهای بعدی به‌طور یکتا تعیین می‌شود. موقعیت (تقریبی) وزنه با جواب معادلهٔ (۷) تحت شرایط اولیهٔ (۸) معین می‌شود.

مثال ۱

وزنه‌ای با وزن ۴ lb طول فنر را به اندازهٔ ۲ in اضافه می‌کند. فرض کنید وزنه به اندازهٔ ۶ in دیگر در جهت مثبت جابه‌جا و سپس رها شود. جرم در محیطی قرار دارد که وقتی سرعت جرم ۳ ft/s است، نیروی چسبندگی مقاومتی برابر ۶ lb وارد می‌کند. تحت فرضهای این بخش، مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای را که حاکم بر حرکت جرم است صورت‌بندی کنید.

مسئلهٔ مقدار اولیهٔ مطلوب از معادلهٔ دیفرانسیل (۷) و شرایط اولیهٔ (۸) تشکیل می‌شود، بنابراین باید مقدار ثابتهای مختلفی را که در این مسئله ظاهر می‌شوند معین کنیم. اولین گام انتخاب واحدهای اندازه‌گیری است. بر اساس صورت مسئله، طبیعی است که به‌جای سیستم متریک از دستگاه واحدهای انگلیسی استفاده کنیم. تنها واحد زمان ذکرشده ثانیه است، بنابراین زمان t را با ثانیه اندازه می‌گیریم. از طرف دیگر هر دو واحد فوت و اینچ به‌عنوان واحدهای طول در صورت مسئله ظاهر شده‌اند. مهم نیست که کدام را انتخاب کنیم؛ اما پس از انتخاب باید سازگار عمل کنیم. برای مشخص بودن، جابه‌جایی u را با فوت اندازه‌گیری می‌کنیم.

چون در صورت مسئله دربارهٔ نیروی خارجی چیزی گفته نشده است، فرض می‌کنیم که $F(t) = ۰$. برای تعیین m، توجه کنید که

$$m = \frac{w}{g} = \frac{۴\,\mathrm{lb}}{۳۲\,\mathrm{ft/s^۲}} = \frac{۱}{۸}\frac{\mathrm{lb\cdot s^۲}}{\mathrm{ft}}.$$

مقدار ضریب میرایی γ از این داده نتیجه می‌شود که وقتی u' برابر ۳ ft/s است، $\gamma u'$ برابر ۶ lb است؛ بنابراین

$$\gamma = \frac{۶\,\mathrm{lb}}{۳\,\mathrm{ft/s}} = ۲\frac{\mathrm{lb\cdot s}}{\mathrm{ft}}.$$

ثابت فنر k از این داده به‌دست می‌آید که وزنه، طول فنر را به اندازهٔ ۲ in یا $\frac{۱}{۶}$ ft افزایش می‌دهد؛ پس

$$k = \frac{۴\,\mathrm{lb}}{۱/۶\,\mathrm{ft}} = ۲۴\frac{\mathrm{lb}}{\mathrm{ft}}.$$

در نتیجه، معادلهٔ (۷) تبدیل می‌شود به

$$\frac{۱}{۸}u'' + ۲u' + ۲۴u = ۰$$

یا

$$u'' + ۱۶u' + ۱۹۲u = ۰. \tag{۹}$$

شرایط اولیه عبارت‌اند از

$$u(۰) = \frac{۱}{۲}, \qquad u'(۰) = ۰. \tag{۱۰}$$

شرط دوم از «رها شد» در صورت مسئله نتیجه شد که آن را به این معنی تفسیر کردیم که جرم بدون سرعت اولیه به حرکت درآمده است.

ارتعاشات آزاد نامیرا. اگر نیروی خارجی وجود نداشته باشد، در معادلهٔ (۷)، $F(t) = ۰$. همچنین فرض می‌کنیم که نیروی میرایی وجود نداشته باشد که یعنی $\gamma = ۰$؛ این وضعیت ایده‌آل سیستم است که در عمل به‌ندرت به‌طور کامل محقق می‌شود. اما اگر نیروی میرایی واقعی بسیار کوچک باشد، فرض نامیرایی ممکن است در بازهٔ زمانی کوتاه و یا متوسط منجر به نتیجهٔ معقولی بشود. در این حالت معادلهٔ حرکت (۷) به

$$mu'' + ku = ۰ \tag{۱۱}$$

تبدیل می‌شود. جواب عمومی معادلهٔ (۱۱) عبارت است از

$$u = A\cos\omega_۰ t + B\sin\omega_۰ t \tag{۱۲}$$

که در آن

$$\omega_۰^۲ = \frac{k}{m}. \tag{۱۳}$$

اگر شرایط اولیه به شکل (۸) داده شده باشند، می‌توان ثابتهای دلخواه A و B را تعیین کرد.

هنگام بحث دربارهٔ جواب معادلهٔ (۱۱)، راحت‌تر است که معادلهٔ (۱۲) را به شکل

$$u = R\cos(\omega_۰ t - \delta) \tag{۱۴}$$

یا

$$u = R\cos\delta\cos\omega_۰ t + R\sin\delta\sin\omega_۰ t \tag{۱۵}$$

بنویسیم. با مقایسهٔ معادلهٔ (۱۵) با معادلهٔ (۱۲)، متوجه می‌شویم که A، B، R و δ با معادله‌های

$$A = R\cos\delta, \qquad B = R\sin\delta \tag{۱۶}$$

به یکدیگر مرتبط‌اند، پس

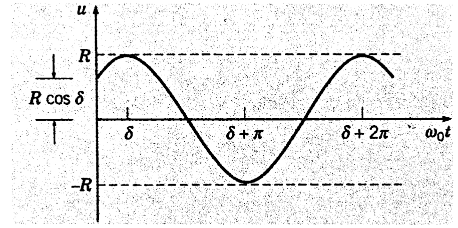
$$R = \sqrt{A^۲ + B^۲}, \qquad \tan\delta = \frac{B}{A}. \tag{۱۷}$$

هنگام محاسبهٔ δ، باید مواظب انتخاب ربع صحیح صفحهٔ مختصات باشیم؛ این کار را می‌توان با توجه به علامتهای $\cos\delta$ و $\sin\delta$ در معادلهٔ (۱۶) انجام داد.

نمودار معادلهٔ (۱۴) یا معادلهٔ معادل (۱۲) به‌ازای یک مجموعهٔ نوعی از شرایط اولیه در شکل ۳.۷.۳ نشان داده شده است. این نمودار، موج کسینوسی جابه‌جا شده است که حرکت تناوبی یا همساز سادهٔ وزن را توصیف می‌کند. **دورهٔ تناوب** حرکت عبارت است از

$$T = \frac{۲\pi}{\omega_۰} = ۲\pi\left(\frac{m}{k}\right)^{۱/۲}. \tag{۱۸}$$

بسامد دورانی $\omega_۰ = \sqrt{k/m}$ با واحد رادیان بر زمان اندازه‌گیری می‌شود و به آن **بسامد طبیعی** ارتعاش می‌گوییم. حداکثر جابه‌جایی R وزنه از حالت تعادل، **دامنهٔ** حرکت است. به پارامتر بدون بعد δ، **فاز** یا **زاویهٔ فاز** می‌گوییم و جابه‌جایی موج از موقعیت طبیعی متناظر $\delta = ۰$ را مشخص می‌کند.



شکل ۳.۷.۳ حرکت سادهٔ همساز؛ $u = R\cos(\omega_\circ t - \delta)$.

توجه کنید که حرکت توصیف‌شده با معادلهٔ (۱۴) دامنهٔ ثابتی دارد که با گذشت زمان از بین نمی‌رود. این امر نتیجهٔ این موضوع است که در غیبت میرایی، راهی برای کاهش انرژی وارده از سرعت و جابه‌جایی اولیه نیست. علاوه بر این، به‌ازای جرم داده‌شدهٔ m و ثابت فنر k، سیستم همواره مستقل از شرایط اولیه با بسامد $\omega_\circ$ نوسان می‌کند. با این حال، شرایط اولیه به تعیین دامنهٔ حرکت کمک می‌کنند. بالاخره، توجه کنید که طبق معادلهٔ (۱۸)، با افزایش m، T افزایش می‌یابد، بنابراین وزنه‌های بزرگ‌تر، آهسته‌تر نوسان می‌کنند. از طرف دیگر T با افزایش k کاهش می‌یابد که یعنی فنر خشک‌تر باعث نوسان سریع‌تر سیستم می‌شود.

مثال ۲

فرض کنید وزنه‌ای با وزن ۱۰ lb طول فنر را به اندازهٔ ۲ in اضافه می‌کند. اگر جرم به اندازهٔ ۲ in دیگر جابه‌جا شود و با سرعت اولیهٔ ۱ ft/s به طرف بالا به حرکت درآید، موقعیت جرم را در زمانهای بعدی تعیین کنید. دورهٔ تناوب، دامنه و فاز حرکت را هم تعیین کنید.

ثابت فنر $k = ۱۰\ \mathrm{lb}/۲\ \mathrm{in} = ۶۰\ \mathrm{lb/ft}$ و جرم وزنه $m = w/g = ۱۰/۳۲\ \mathrm{lb\cdot s^۲/ft}$ است. بنابراین معادلهٔ حرکت به

$$u'' + ۱۹۲u = ۰ \tag{۱۹}$$

تبدیل می‌شود که جواب عمومی آن عبارت است از

$$u = A\cos(۸\sqrt{۳}t) + B\sin(۸\sqrt{۳}t).$$

جوابی که در شرایط اولیهٔ $u(۰) = ۱/۶\ \mathrm{ft}$ و $u'(۰) = -۱\ \mathrm{ft/s}$ صدق می‌کند عبارت است از

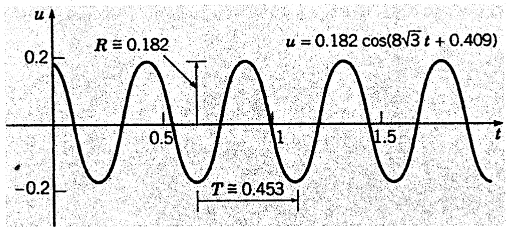
$$u = \frac{۱}{۶}\cos(۸\sqrt{۳}t) - \frac{۱}{۸\sqrt{۳}}\sin(۸\sqrt{۳}t). \tag{۲۰}$$

بسامد طبیعی $\omega_\circ = \sqrt{۱۹۲} \cong ۱۳٫۸۵۶\ \mathrm{rad/s}$ است، بنابراین دورهٔ تناوب $T = ۲\pi/\omega_\circ \cong ۰٫۴۵۳۴۵\ \mathrm{s}$ است. دامنهٔ R و فاز δ از معادلات (۱۷) تعیین می‌شوند. می‌توانیم بنویسیم

$$R^۲ = \frac{۱}{۳۶} + \frac{۱}{۱۹۲} = \frac{۱۹}{۵۷۶}, \quad \text{بنابراین} \quad R \cong ۰٫۱۸۱۶۲\ \mathrm{ft}$$

از معادلهٔ دوم (۱۷) نتیجه می‌شود که $\tan\delta = -\sqrt{۳}/۴$. یکی از دو جواب این معادله در ربع دوم و دیگری در ربع چهارم واقع است. در این مسئله $\cos\delta > ۰$ و $\sin\delta < ۰$، بنابراین δ در ربع چهارم قرار دارد؛ یعنی

$$\delta = -\arctan(\sqrt{۳}/۴) \cong -۰٫۴۰۸۶۴\ \mathrm{rad}.$$



شکل ۴.۷.۳ ارتعاش آزاد نامیرا؛ $u'' + ۱۹۲u = ۰$، $u(۰) = ۱/۶$ و $u'(۰) = -۱$.

نمودار جواب (۲۰) در شکل ۴.۷.۳ نشان داده شده است.

ارتعاشات آزاد میرا. اگر اثر میرایی را در نظر بگیریم، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت جرم عبارت است از

$$mu'' + \gamma u' + ku = ۰. \tag{۲۱}$$

به‌طورخاص، می‌خواهیم اثر تغییرات ضریب میرایی γ را به‌ازای مقادیر مفروض جرم m و ثابت فنر k بدانیم. ریشه‌های معادلهٔ مشخصه عبارت‌اند از

$$r_۱, r_۲ = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^۲ - ۴km}}{۲m} = \frac{\gamma}{۲m}\left(-۱ \pm \sqrt{۱ - \frac{۴km}{\gamma^۲}}\right). \tag{۲۲}$$

بسته به علامت $\gamma^۲ - ۴km$، جواب u به یکی از صورتهای زیر است:

$$\gamma^۲ - ۴km > ۰, \quad u = Ae^{r_۱t} + Be^{r_۲t} \tag{۲۳}$$

$$\gamma^۲ - ۴km = ۰, \quad u = (A + Bt)e^{-\gamma t/۲m} \tag{۲۴}$$

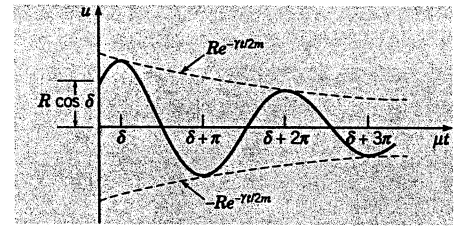
$$\gamma^۲ - ۴km < ۰, \quad u = e^{-\gamma t/۲m}(A\cos\mu t + B\sin\mu t), \quad \mu = \frac{(۴km - \gamma^۲)^{۱/۲}}{۲m} > ۰ \tag{۲۵}$$

چون γ، m و k مثبت هستند، $\gamma^۲ - ۴km$ همواره از $\gamma^۲$ کوچک‌تر است. بنابراین اگر $\gamma^۲ - ۴km \geq ۰$، مقادیر $r_۱$ و $r_۲$ در معادلهٔ (۲۲) منفی هستند. اگر $\gamma^۲ - ۴km < ۰$، مقادیر $r_۱$ و $r_۲$ مختلط با قسمت حقیقی منفی هستند. پس در هر حالت، وقتی $t \to \infty$، u به صفر میل می‌کند؛ این اتفاق مستقل از مقدار ثابتهای A و B (یعنی مستقل از مقادیر اولیه) رخ می‌دهد. این موضوع انتظار شهودی ما را ــ که میرایی باعث تدریجی اتلاف انرژی اولیهٔ واردشده به سیستم می‌شود ــ تأیید می‌کند و در نتیجه، حرکت با افزایش زمان رو به سکون می‌رود.

مهم‌ترین حالت، سومین حالت است که وقتی رخ می‌دهد که میرایی کوچک است. اگر در معادلهٔ (۲۵) قرار بدهیم $A = R\cos\delta$ و $B = R\sin\delta$، نتیجه می‌شود

$$u = Re^{-\gamma t/۲m}\cos(\mu t - \delta). \tag{۲۶}$$

جابه‌جایی u بین منحنی‌های $u = \pm Re^{-\gamma t/۲m}$ قرار دارد؛ بنابراین به موج کسینوسی‌ای شبیه است که دامنهٔ آن



شکل ۵.۷.۳ ارتعاش میرا؛ $u = Re^{-\gamma t/۲m}\cos(\mu t-\delta)$.

با افزایش زمان کاهش می‌یابد. یک مثال نوعی در شکل ۵.۷.۳ داده شده است. در این حالت می‌گوییم حرکت نوسان میرا یا ارتعاش میرا است. عامل دامنهٔ R به m، γ، k و شرایط اولیه بستگی دارد.

اگرچه حرکت تناوبی نیست، پارامتر μ بسامدی را نشان می‌دهد که وزنه به میزان آن به جلو و عقب نوسان می‌کند. در نتیجه به μ **شبه‌بسامد** می‌گوییم. با مقایسهٔ μ با $\omega_\circ$ (بسامد حرکت غیرمیرا) متوجه می‌شویم که

$$\frac{\mu}{\omega_\circ} = \frac{(۴km-\gamma^۲)^{۱/۲}/۲m}{\sqrt{k/m}} = \left(۱-\frac{\gamma^۲}{۴km}\right)^{۱/۲} \cong ۱-\frac{\gamma^۲}{۸km}. \qquad (۲۷)$$

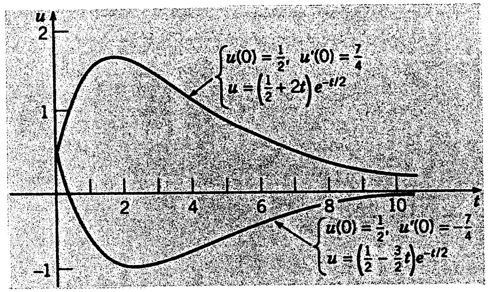
تقریب آخری وقتی معتبر است که $\gamma^۲/۴km$ کوچک باشد. به این وضعیت «میرایی کم» می‌گوییم. پس اثر میرایی کم، کاهش اندک بسامد نوسان است. در تناظر با معادلهٔ (۱۸)، به کمیت $T_d = ۲\pi/\mu$ **شبه دورهٔ تناوب** می‌گوییم. این کمیت، زمان بین دو نقطهٔ ماکزیمم متوالی یا مینیمم متوالی موقعیت وزنه، یا زمان گذر متوالی وزنه از موقعیت تعادل در حالی که در یک جهت حرکت می‌کند است. رابطهٔ بین T_d و T عبارت است از

$$\frac{T_d}{T} = \frac{\omega_\circ}{\mu} = \left(۱-\frac{\gamma^۲}{۴km}\right)^{-۱/۲} \cong \left(۱+\frac{\gamma^۲}{۸km}\right) \qquad (۲۸)$$

که مجدداً تقریب آخری وقتی $\gamma^۲/۴km$ کوچک باشد معتبر است. پس میرایی کم باعث افزایش شبه دورهٔ تناوب می‌شود.

معادله‌های (۲۷) و (۲۸) اهمیت نسبت بی‌بعد $\gamma^۲/۴km$ را مشخص می‌کنند. علاوه بر اینکه اندازهٔ γ مشخص می‌کند میرایی کم و یا زیاد است، مقایسهٔ اندازهٔ $\gamma^۲$ و $۴km$ هم تعیین‌کننده است. وقتی $\gamma^۲/۴km$ کوچک باشد، میرایی اثر کمی روی شبه بسامد و شبه دورهٔ تناوب حرکت دارد. از طرف دیگر اگر بخواهیم جزئیات حرکت وزنه را در همهٔ زمانها مشخص کنیم، هرگز نمی‌توانیم از اثر نیروی میرایی — هرقدر کوچک — صرف‌نظر کنیم.

با افزایش $\gamma^۲/۴km$، شبه بسامد μ کاهش و شبه دورهٔ تناوب T_d افزایش می‌یابد. در حقیقت وقتی $\gamma \to ۲\sqrt{km}$ باید $\mu \to ۰$ و $T_d \to \infty$. همان‌طور که از معادله‌های (۲۳)، (۲۴) و (۲۵) مشخص است، وقتی γ از $۲\sqrt{km}$ بگذرد ماهیت جواب تغییر می‌کند. به این مقدار **میرایی بحرانی** می‌گوییم و به‌ازای مقادیر γ که از این مقدار بزرگ‌تر باشند به حرکت **فوق میرایی** می‌گوییم. در این حالتها که در معادله‌های (۲۴) و (۲۳) داده شده‌اند وزنه آرام‌آرام به موقعیت تعادلی‌اش می‌رسد، اما برعکس حالت γ کوچک حول آن نوسان نمی‌کند.



شکل ۶.۷.۳ حرکت میرای بحرانی: $u''+u'+۰{,}۲۵u=۰$، $u=(A+Bt)e^{-t/۲}$.

دو مثال نوعی حرکت میرای بحرانی در شکل ۶.۷.۳ نشان داده شده‌اند و این حالت را در مسئله‌های ۲۱ و ۲۲ بیشتر بررسی می‌کنیم.

مثال ۳

حرکت دستگاه فنر-وزنهٔ معین با معادله‌های دیفرانسیل

$$u''+۰{,}۱۲۵u'+u=۰ \qquad (۲۹)$$

داده شده که در آن u با فوت و t با ثانیه اندازه گرفته شده است. اگر $u(۰)=۲$ و $u'(۰)=۰$، جای وزنه را در زمان دلخواه معین کنید. شبه‌بسامد و شبه دورهٔ تناوب و زمانی را که جرم برای بار اول از موقعیت تعادلی عبور می‌کند بیابید. همچنین زمان τ را طوری بیابید که به‌ازای هر $t>\tau$، $|u(t)|<۰{,}۱$.

جواب معادلهٔ (۲۹) عبارت است از

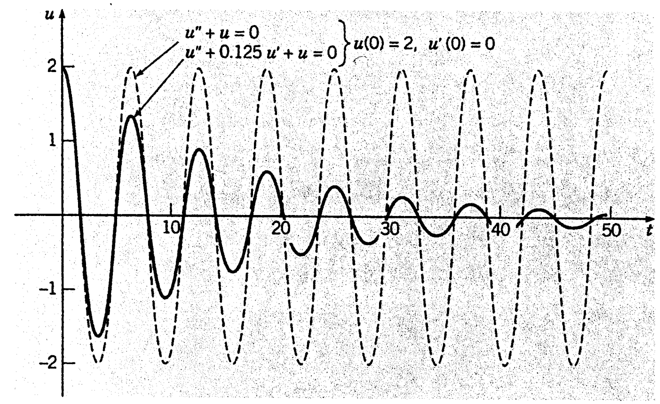
$$u=e^{-t/۱۶}\left[A\cos\frac{\sqrt{۲۵۵}}{۱۶}t+B\sin\frac{\sqrt{۲۵۵}}{۱۶}t\right].$$

برای برآورده شدن شرایط اولیه باید $A=۲$ و $B=۲/\sqrt{۲۵۵}$ را انتخاب کنیم؛ بنابراین جواب مسئلهٔ مقدار اولیه عبارت است از

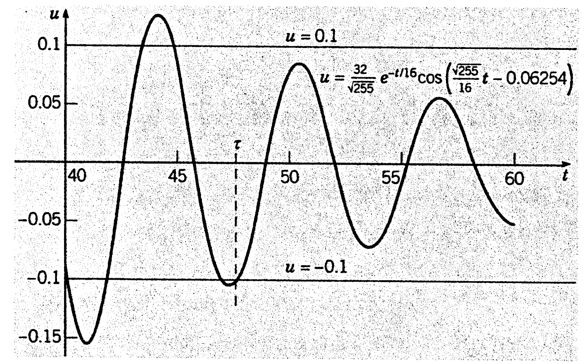
$$\begin{aligned} u &= e^{-t/۱۶}\left(۲\cos\frac{\sqrt{۲۵۵}}{۱۶}t+\frac{۲}{\sqrt{۲۵۵}}\sin\frac{\sqrt{۲۵۵}}{۱۶}t\right)\\ &= \frac{۳۲}{\sqrt{۲۵۵}}e^{-t/۱۶}\cos\left(\frac{\sqrt{۲۵۵}}{۱۶}t-\delta\right) \qquad (۳۰)\end{aligned}$$

که در آن $\tan\delta = ۱/\sqrt{۲۵۵}$؛ بنابراین $\delta \cong ۰{,}۰۶۲۵۴$. جابه‌جایی جرم به‌عنوان تابعی از زمان در شکل ۷.۷.۳ نشان داده شده است. برای مقایسه، حرکت را در حالتی که از میرایی صرف‌نظر شده است هم نشان داده‌ایم.

شبه بسامد $\mu = \sqrt{۲۵۵}/۱۶ \cong ۰{,}۹۹۸$ و شبه دورهٔ تناوب $T_d = ۲\pi/\mu \cong ۶{,}۲۹۵\,s$ است. این مقادیر تنها کمی با مقادیر متناظر برای نوسان نامیرا (به‌ترتیب ۱ و ۲π) تفاوت دارند. این موضوع در نمودارهای شکل ۷.۷.۳ هم که تقریباً با هم بالا و پایین می‌روند معلوم است. ضریب میرایی در این مثال کوچک است (در واقع برابر با یک شانزدهم مقدار بحرانی است)؛ با این حال دامنهٔ نوسان نسبتاً سریع کاهش می‌یابد. در شکل ۸.۷.۳ نمودار جواب را به‌ازای $۴۰ \le t \le ۶۰$ همراه نمودار $u=\pm۰{,}۱$ نشان داده‌ایم. از نمودار معلوم است که τ تقریباً برابر ۴۷٫۵ است و با محاسبهٔ دقیق‌تر می‌توان دید که $\tau \cong ۴۷{,}۵۱۴۹\,s$.



شکل ۷.۷.۳ نوسان با میرایی کم (منحنی توپر) و بدون میرایی (منحنی با خطوط مقطع).

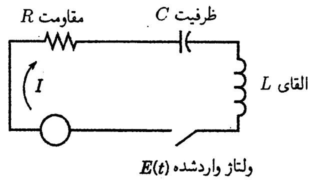


شکل ۸.۷.۳ جواب مثال ۳؛ تعیین τ.

برای یافتن زمانی که جرم برای اولین‌بار از موقعیت تعادلی عبور می‌کند، از معادلهٔ (۳۰) استفاده می‌کنیم و $\sqrt{۲۵۵}t/۱۶-\delta$ را برابر $\pi/۲$، یعنی کوچک‌ترین ریشهٔ مثبت تابع کسینوس، قرار می‌دهیم. با حل این معادله نسبت به t نتیجه می‌شود

$$t=\frac{۱۶}{\sqrt{۲۵۵}}\left(\frac{\pi}{۲}+\delta\right)\cong ۱{,}۶۳۷\,\mathrm{s}.$$

مدارهای الکتریکی. مثال دوم کاربرد معادلات خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت، مدل‌سازی حرکت جریان الکتریکی در مدار سادهٔ سری در شکل ۹.۷.۳ است. جریان I، اندازه‌گیری شده برحسب آمپر (A)، تابعی از t است. مقاومت R برحسب اهم، ظرفیت C برحسب فاراد (F) و القای L برحسب هانری (H) همگی مثبت‌اند و ثابتهایی معلوم هستند. ولتاژ E واردشده به ولت (V) تابع داده‌شده‌ای از زمان است. کمیت فیزیکی دیگری که



شکل ۹.۷.۳ یک مدار الکتریکی ساده.

در بحث وارد می‌شود، مجموع بار Q برحسب کولن (C) روی خازن در زمان t است. رابطهٔ بین بار Q و جریان I عبارت است از

$$I=dQ/dt. \tag{۳۱}$$

قانون دوم کیرشهوف[1] در حرکت جریان در مدار برقرار است: در مدار بسته، ولتاژ اعمال شده برابر با حاصلجمع افت ولتاژها در مابقی مدار است.

از قوانین مقدماتی الکتریسیته، می‌دانیم که

افت ولتاژ در دو سر مقاومت IR است.

افت ولتاژ در دو سر خازن Q/C است.

افت ولتاژ در دو سر القاگر LdI/dt است.

بنابراین، طبق قانون کیرشهوف،

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{۱}{C}Q=E(t). \tag{۳۲}$$

واحدها طوری انتخاب شده‌اند که ۱ ولت = ۱ اهم × ۱ آمپر = $\frac{\text{۱ کولن}}{\text{۱ فاراد}}$ = ۱ هنری × $\frac{\text{۱ آمپر}}{\text{۱ ثانیه}}$. با جایگذاری I از معادلهٔ (۳۱)، معادلهٔ دیفرانسیل

$$LQ''+RQ'+\frac{۱}{C}Q=E(t) \tag{۳۳}$$

برحسب Q به‌دست می‌آید. شرایط اولیه عبارت‌اند از

$$Q(t_۰)=Q_۰,\qquad Q'(t_۰)=I(t_۰)=I_۰; \tag{۳۴}$$

پس باید مقدار بار روی خازن را و جریان مدار را در زمان اولیهٔ $t_۰$ بدانیم.

از طرف دیگر معادلهٔ دیفرانسیل جریان I را می‌توانیم با مشتق‌گیری از (۳۳) نسبت به t و سپس جایگزینی به‌جای dQ/dt از معادلهٔ (۳۱) به‌دست بیاوریم. نتیجه عبارت است از

$$LI''+RI'+\frac{۱}{C}I=E'(t) \tag{۳۵}$$

۱. گوستاو کیرشهوف (۱۸۲۴–۱۸۸۷م) استاد دانشگاه‌های برسلاو، هایدلبرگ و برلین یکی از فیزیکدانهای برجستهٔ قرن نوزدهم بود. او قوانین پایهٔ مدارهای الکتریکی را در حدود ۱۸۴۵ میلادی در حالی که در کونیگزبرگ دانشجو بود کشف کرد. او برای کارهای بنیادیش در جذب و دفع الکترومغناطیسی هم مشهور است و یکی از بنیانگذاران اسپکتروسکوپی است.

با شرایط اولیهٔ

$$I(t_0)=I_0,\qquad I'(t_0)=I'_0. \tag{۳۶}$$

از معادلهٔ (۳۲) نتیجه می‌شود که

$$I'_0=\frac{E(t_0)-RI_0-(1/C)Q_0}{L}; \tag{۳۷}$$

بنابراین I'_0 نیز با بار و جریان اولیه که کمیتهای فیزیکی قابل اندازه‌گیری هستند، تعیین می‌شود.

مهم‌ترین نتیجهٔ این بحث این است که شارش جریان در مدار با مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای بیان می‌شود که دقیقاً به همان شکلی است که حرکت را در دستگاه فنر-وزنه توصیف می‌کند. این مثال خوبی از نقش وحدت‌بخش ریاضی است: اگر چگونگی حل معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم را بدانید، می‌توانید نتیجه را دربارهٔ ارتعاشات مکانیکی، مدارهای الکتریکی یا هر موقعیت فیزیکی دیگر که منجر به همین مسئله می‌شود تعبیر کنید.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۴، ω_0، R و δ را با نوشتن عبارت داده‌شده به‌صورت $u=R\cos(\omega_0 t-\delta)$ معین کنید.

۱. $u=4\cos 3t-2\sin 3t$

۲. $u=-\cos t+\sqrt{3}\sin t$

۳. $u=3\cos 2t+4\sin 2t$

۴. $u=-2\cos \pi t-3\sin \pi t$

۵. وزنه‌ای با وزن ۳ lb طول فنر را به اندازهٔ ۳ in اضافه می‌کند. اگر با فشار دادن وزنه به طرف بالا فنر را به اندازهٔ ۱ in بفشاریم و سپس با سرعت ۲ ft/s به طرف پایین به حرکت درآوریم و اگر هیچ میرایی‌ای موجود نباشد، موقعیت u جرم را در هر زمان t بیابید. بسامد، دورهٔ تناوب، دامنه و فاز حرکت را معین کنید.

۶. وزنه‌ای با وزن ۱۰۰ g طول فنر را به اندازهٔ ۵ cm اضافه می‌کند. اگر وزنه از حالت تعادلش با سرعت ۱۰ cm/s رو به پایین به حرکت درآید و اگر هیچ میرایی‌ای موجود نباشد، موقعیت u را در هر زمان t تعیین کنید. وزنه در چه زمانی برای بار اول به حالت تعادلش برمی‌گردد؟

۷. وزنه‌ای با وزن ۲ lb طول فنر را به اندازهٔ ۶ in اضافه می‌کند. اگر وزنه ۳ in دیگر کشیده شود و سپس رها شود و اگر میرایی‌ای موجود نباشد، موقعیت u جرم را در هر زمان t بیابید. u را برحسب t رسم کنید. بسامد، دورهٔ تناوب و دامنهٔ حرکت را بیابید.

۸. مداری سری یک خازن با ظرفیت 0.25×10^{-6} F و یک القاگر با مقدار ۱ H دارد. اگر بار اولیه روی خازن 10^{-6} C باشد و هیچ جریان اولیه‌ای موجود نباشد، بار Q روی خازن را در هر زمان t بیابید.

۹. وزنه‌ای ۲۰ گرمی طول فنری را ۵ سانتی‌متر اضافه می‌کند. فرض کنید که وزنه به ضربه‌گیری با ثابت میرایی ۴۰۰ dyn · s/cm متصل باشد. اگر وزنه ۲ cm دیگر کشیده شود و سپس رها شود، موقعیت u آن را در زمان t بیابید. u را برحسب t رسم کنید. شبه‌بسامد و شبه‌دورهٔ تناوب را تعیین کنید. نسبت شبه‌دورهٔ تناوب و دورهٔ تناوب حرکت نامیرای متناظر را تعیین کنید. زمان τ را طوری بیابید که به‌ازای هر $t>\tau$، $|u(t)|<0.05$ cm.

۱۰. وزنه‌ای با وزن ۱۶ lb طول فنر را ۳ in بیشتر می‌کند. وزنه به ضربه‌گیری با ضریب میرایی ۲lb · s/ft متصل شده است. اگر وزنه با سرعت اولیهٔ ۳ in/s به طرف پایین از وضعیت تعادلش به حرکت درآید، موقعیت u آن را در زمان t بیابید. نمودار u را برحسب t رسم کنید. زمانی را که وزنه برای بار اول به حالت تعادلش برمی‌گردد تعیین کنید. زمان τ را طوری تعیین کنید که به‌ازای $t>\tau$، $|u(t)|<0.01$.

۱۱. طول فنری با نیروی ۶ N، ۲۰ cm افزایش می‌یابد. وزنه‌ای به وزن ۲ kg از فنر آویزان است و به ضربه‌گیری متصل است که وقتی سرعت جرم ۵ m/s است نیرویی به اندازهٔ ۳ N وارد می‌کند. اگر جرم ۵ cm پایین‌تر از موقعیت تعادلش به طرف پایین کشیده شود و سرعت اولیهٔ ۱۰ cm/s به طرف پایین به آن داده شود، موقعیت u آن را در زمان t بیابید. شبه‌بسامد μ و نسبت μ به بسامد طبیعی حرکت نامیرای متناظر را بیابید.

۱۲. مدار سری‌ای خازنی 10^{-5} F، مقاومتی $3\times10^{2}\,\Omega$ی و القاگری ۰٫۲ H‌ای دارد. بار اولیه روی خازن 10^{-6} C است و جریان اولیه موجود نیست. بار Q روی خازن را در زمان t بیابید.

۱۳. یک دستگاه مرتعش معین در معادلهٔ $u''+\gamma u'+u=0$ صدق می‌کند. مقدار ضریب میرایی γ را طوری بیابید که به‌ازای آن شبه‌دورهٔ تناوب حرکت میرا ۷۵٪ بزرگ‌تر از دورهٔ تناوب حرکت نامیرای متناظر باشد.

۱۴. ثابت کنید دورهٔ تناوب حرکت ارتعاش نامیرا برای وزنه‌ای آویزان به فنر عمودی $2\pi\sqrt{L/g}$ است که در آن L میزان افزایش طول فنر با وزنه و g شتاب جاذبه است.

۱۵. ثابت کنید جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$mu''+\gamma u'+ku=0,\qquad u(t_0)=u_0,\quad u'(t_0)=u'_0$$

را می‌توان برحسب مجموع $u=v+w$ نوشت که در آن v در شرایط اولیهٔ $v(t_0)=u_0$ و $v'(t_0)=0$ و w در شرایط اولیهٔ $w(t_0)=0$ و $w'(t_0)=u'_0$ صدق می‌کند و هر دوی v و w در همان معادله‌ای که u در آن صدق می‌کند، صدق می‌کنند. این مثالی دیگر از برهم‌نهی جوابهای مسائل ساده‌تر برای به‌دست آوردن جواب مسئلهٔ عمومی‌تر است.

۱۶. ثابت کنید که $A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$ را می‌توان به شکل $r\sin(\omega_0 t-\theta)$ نوشت. r و θ را برحسب A و B بنویسید. اگر $R\cos(\omega_0 t-\delta)=r\sin(\omega_0 t-\theta)$، رابطهٔ بین R، r، δ و θ را معین کنید.

۱۷. وزنه‌ای با وزن ۸ lb طول فنر را ۱٫۵ in اضافه می‌کند. وزنه به میراگری با ضریب γ متصل است. مقدار γ را طوری تعیین کنید که به‌ازای آن سیستم به‌طور بحرانی میرا باشد؛ واحد اندازه‌گیری γ را مشخص کنید.

۱۸. اگر مداری سری خازنی با ظرفیت $C=1.6\times10^{-6}$ F و القاگری با $L=0.4$ H داشته باشد، مقاومت R را طوری بیابید که مدار به‌طور بحرانی میرا شود.

۱۹. فرض کنید دستگاهی که با معادلهٔ $mu''+\gamma u'+ku=0$ توصیف شده یا به‌طور بحرانی میرا و یا فوق میرا باشد. ثابت کنید مستقل از شرایط اولیه، وزنه حداکثر یک‌بار می‌تواند از موقعیت تعادلش عبور کند.

راهنمایی: همهٔ زمانهای ممکن t را که $u=0$ تعیین کنید.

۲۰. فرض کنید دستگاهی که با معادلهٔ $mu''+\gamma u'+ku=0$ توصیف شده به‌طور بحرانی میرا باشد و شرایط اولیهٔ آن $u(0)=u_0$ و $u'(0)=v_0$ باشد. اگر $v_0=0$، ثابت کنید که وقتی $t\to\infty$، $u\to 0$، اما u هرگز صفر نیست. اگر u_0 مثبت باشد، شرطی روی v_0 بگذارید که گذر جرم از موقعیت تعادلش را پس از رها شدن تضمین کند.

۲۱. **افت لگاریتمی.**

الف) ثابت کنید که در نوسان میرای توصیف‌شده با معادلهٔ (۲۶)، زمان بین دو نقطهٔ ماکزیمم متوالی $T_d=2\pi/\mu$ است.

ب) ثابت کنید نسبت جابه‌جایی در دو نقطهٔ ماکزیمم متوالی برابر است با $\exp(\gamma T_d/2m)$. توجه کنید که این نسبت بستگی به انتخاب جفت نقطهٔ ماکزیمم متوالی ندارد. به لگاریتم طبیعی این نسبت، افت لگاریتمی می‌گوییم و آن را با Δ نشان می‌دهیم.

ج) ثابت کنید $\Delta = \pi\gamma/m\mu$. چون m، μ و Δ کمیتهایی هستند که به‌سادگی در دستگاه مکانیکی قابل اندازه‌گیری هستند، این نتیجه روشی مناسب و عملی برای تعیین ثابت میرایی دستگاهی است که اندازه‌گیری مستقیم این ثابت در آن مشکل‌تر است. به‌ویژه برای حرکت وزنه‌ای مرتعش در سیالی چسبناک، ثابت میرایی بستگی به چسبندگی سیال دارد؛ شکل این وابستگی در مورد شکلهای هندسی ساده معلوم است و با استفاده از رابطهٔ قبلی هم می‌توان به‌طور تجربی چسبندگی را معین کرد. این یکی از دقیق‌ترین روشهای تعیین چسبندگی گاز تحت فشار بالا است.

۲۲. با استفاده از مسئلهٔ ۲۱، افت لگاریتمی دستگاه مسئلهٔ ۱۰ را بیابید.

۲۳. برای دستگاه مسئلهٔ ۱۷، فرض کنید $\Delta = 3$ و $T_d = 0{,}3\,\mathrm{s}$. با مسئلهٔ ۲۱ مقدار ضریب میرایی γ را تعیین کنید.

۲۴. موقعیت دستگاه فنر–وزنه در مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$\frac{2}{3}u'' + ku = 0, \qquad u(0) = 2, \quad u'(0) = v$$

صدق می‌کند. اگر بدانیم دورهٔ تناوب و دامنهٔ حرکت ایجادشده که به‌ترتیب π و ۳ است، مقدار k و v را تعیین کنید.

۲۵. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$u'' + \gamma u' + u = 0, \qquad u(0) = 2, \quad u'(0) = 0$$

را در نظر بگیرید. می‌خواهیم بدانیم که چقدر طول می‌کشد که جواب «صرف‌نظر کردنی» بشود و اینکه این بازهٔ زمانی چگونه به ضریب میرایی γ بستگی دارد. به‌عبارت دقیق‌تر، در جستجوی زمان τ هستیم که به‌ازای هر $t > \tau$، $|u(t)| < 0{,}01$. توجه کنید که میرایی بحرانی برای این مسئله به‌ازای $\gamma = 2$ رخ می‌دهد.

الف) فرض کنید $\gamma = 0{,}25$ و τ را تعیین کنید، یا حداقل آن را از روی نمودار جواب به‌طور نسبتاً دقیق تخمین بزنید.

ب) قسمت (الف) را به‌ازای چند مقدار دیگر γ در بازهٔ $0 < \gamma < 1{,}5$ انجام بدهید. توجه کنید که τ با افزایش γ در این محدوده به آهستگی کاهش می‌یابد.

ج) نمودار τ برحسب γ را با رسم جفت مقادیر به‌دست آمده در قسمت‌های (الف) و (ب) رسم کنید. آیا این نمودار هموار است؟

د) قسمت (ب) را به‌ازای مقادیر γ بین ۱٫۵ و ۲ تکرار کنید. ثابت کنید τ تا رسیدن γ به مقدار معین بحرانی γ_0 کم می‌شود و پس از آن افزایش می‌یابد. γ_0 و مقدار مینیمم متناظر τ را با دقت دو رقم اعشار به‌دست بیاورید.

ه) یک روش دیگر، نوشتن جواب مسئلهٔ مقدار اولیه به شکل (۲۶) است. از عامل کسینوسی صرف‌نظر کنید و تنها عامل نمایی و دامنهٔ R را در نظر بگیرید و سپس عبارتی برای τ به‌عنوان تابعی از γ بیابید. نتایج تقریبی به‌دست آمده به این طریق را با مقادیر به‌دست آمده در قسمت‌های (الف)، (ب) و (ج) مقایسه کنید.

۲۶. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$mu'' + \gamma u' + ku = 0, \qquad u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید $\gamma^2 < 4km$.

الف) مسئلهٔ مقدار اولیه را حل کنید.

ب) جواب را به شکل $u(t) = R\exp(-\gamma t/2m)\cos(\mu t - \delta)$ بنویسید و R را برحسب m، γ، k، u_0 و v_0 تعیین کنید.

ج) وابستگی R به ضریب میرایی γ را با فرض ثابت بودن پارامترهای دیگر بررسی کنید.

۲۷. یک بلوک مکعبی با طول ضلع l و چگالی جرم ρ در واحد حجم در جرمی با چگالی ρ_0 در واحد حجم غوطه‌ور می‌شود اگر $\rho < \rho_0$. اگر بلوک را کمی فرو ببریم و سپس رها کنیم، در جهت قائم نوسان می‌کند. با فرض اینکه می‌توان از میرایی چسبندگی سیال و هوا صرف‌نظر کرد، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت را به‌دست بیاورید و دورهٔ تناوب حرکت را تعیین کنید.

راهنمایی: از قانون ارشمیدس استفاده کنید. اگر شیئی کاملاً و یا به‌طور جزئی در سیالی غوطه‌ور شود، نیرویی برابر با وزن سیال جابه‌جا شده به طرف بالا بر آن وارد می‌شود.

۲۸. موقعیت یک دستگاه فنر–وزنهٔ مشخص نامیرا در مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$u'' + 2u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 2$$

صدق می‌کند.

الف) جواب این مسئلهٔ مقدار اولیه را به‌دست بیاورید.

ب) نمودار u برحسب t و u' برحسب t را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

ج) نمودار u' را برحسب u را رسم کنید، یعنی نمودار $u(t)$ و $u'(t)$ را به‌طور پارامتری نسبت به پارامتر t رسم کنید. به این نمودار، نمودار فاز می‌گوییم و به صفحهٔ uu' صفحهٔ فاز می‌گوییم. توجه کنید که هر منحنی بسته در صفحهٔ فاز متناظر جواب تناوبی $u(t)$ است. جهت حرکت روی نمودار فاز با افزایش t چگونه است؟

۲۹. موقعیت یک دستگاه فنر–وزنه در مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$u'' + \frac{1}{4}u' + 2u = 0, \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 2$$

صدق می‌کند.

الف) جواب این مسئلهٔ مقدار اولیه را به‌دست بیاورید.

ب) نمودار u برحسب t و u' برحسب t را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

ج) نمودار u' را برحسب u در صفحهٔ فاز رسم کنید (مسئلهٔ ۲۸ را ببینید). چند نقطهٔ نظیر روی منحنی‌های بخش (ب) و (ج) را مشخص کنید. جهت حرکت روی نمودار فاز با افزایش t چگونه است؟

۳۰. در نبود میرایی، حرکت یک دستگاه فنر–وزنه در مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$mu'' + ku = 0, \qquad u(0) = a, \quad u'(0) = b$$

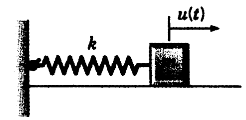
صدق می‌کند.

الف) ثابت کنید انرژی جنبشی اولیهٔ واردشده بر وزن $mb^2/2$ و انرژی پتانسیل اولیهٔ ذخیره‌شده در فنر $ka^2/2$ است، بنابراین انرژی کل اولیه در دستگاه $(ka^2 + mb^2)/2$ است.

ب) مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را حل کنید.

ج) با استفاده از جواب قسمت (ب) مجموع کل انرژی دستگاه را در زمان t تعیین کنید. نتیجهٔ شما باید اصل بقای انرژی برای این دستگاه را تأیید کند.

۳۱. فرض کنید که وزنه‌ای به جرم m روی صفحهٔ افقی بدون اصطکاک می‌لغزد. وزنه مانند شکل ۱۰.۷.۳ به فنری با ثابت k متصل است و هوا هم مقاومتی با ضریب γ دارد. ثابت کنید جابه‌جایی $u(t)$ جرم از موقعیت تعادلیش در معادلهٔ (۲۱) صدق می‌کند. نحوهٔ به‌دست آوردن معادلهٔ حرکت در این حالت با نحوهٔ به‌دست آوردن معادلهٔ ارائه‌شده در متن چه فرقی دارد؟



شکل ۱۰.۷.۳ دستگاه فنر–وزنه.

۳۲. در دستگاه فنر–وزنهٔ مسئلهٔ ۳۱، فرض کنید که نیروی فنر از قانون هوک پیروی نکند و در رابطهٔ

$$F_s = -(ku + \epsilon u^۳)$$

صدق کند که در آن $k > ۰$ و ϵ کوچک است ولی می‌تواند هر دو علامت را اختیار کند. اگر $\epsilon > ۰$، به فنر سخت‌شونده و اگر $\epsilon < ۰$ به آن نرم‌شونده می‌گوییم. چرا این عبارتها مناسب هستند؟

الف) ثابت کنید جابه‌جایی جرم $u(t)$ از موقعیت تعادلیش در معادلهٔ دیفرانسیل

$$mu'' + \gamma u' + ku + \epsilon u^۳ = ۰$$

صدق می‌کند. فرض کنید که شرایط اولیه عبارت‌اند از

$$u(۰) = ۰, \quad u'(۰) = ۱.$$

در ادامهٔ این مسئله فرض کنید که $m = ۱$، $k = ۱$ و $\gamma = ۰$.

ب) $u(t)$ را به‌ازای $\epsilon = ۰$ به‌دست بیاورید و دامنه و دورهٔ تناوب حرکت را نیز تعیین کنید.

ج) فرض کنید $\epsilon = ۰٫۱$، نمودار تقریبی جواب را رسم کنید. آیا حرکت تناوبی به نظر می‌رسد؟ دامنه و دورهٔ تناوب را تقریب بزنید.

د) قسمت (ج) را به‌ازای $\epsilon = ۰٫۲$ و $\epsilon = ۰٫۳$ انجام بدهید.

ه) مقادیر تقریبی دامنه A و دورهٔ تناوب T برحسب ϵ را رسم کنید. چگونگی وابستگی A و T به ϵ را توصیف کنید.

و) قسمت‌های (ج)، (د) و (ه) را به‌ازای مقادیر منفی ϵ انجام بدهید.

۸.۳ ارتعاشات واداشته

اکنون وضعیتی را بررسی می‌کنیم که در آن، نیروی خارجی تناوبی‌ای به دستگاه فنر–وزنه وارد می‌شود. رفتار این دستگاه ساده رفتار نوسانی بسیاری از دستگاهها را که نیروی خارجی‌ای مثل نیروی موتوری که به آن متصل است به آنها وارد می‌شود، مدل می‌کند. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که میرایی وجود دارد و بعداً حالت خاص ایده‌آلی را بررسی می‌کنیم که در آن فرض بر نبود میرایی است.

ارتعاشات واداشتهٔ میرا. از آنجا که محاسبات جبری این نوع مسئله‌ها ممکن است واقعاً پیچیده باشد، با مثالی ساده شروع می‌کنیم.

مثال ۱

فرض کنید حرکت یک دستگاه فنر–وزنه در معادلهٔ دیفرانسیل

$$u'' + u' + ۱٫۲۵u = ۳\cos t \tag{۱}$$

و شرایط اولیهٔ

$$u(۰) = ۲, \quad u'(۰) = ۳ \tag{۲}$$

صدق می‌کند. جواب این مسئلهٔ مقدار اولیه را پیدا کنید و رفتار آن را به‌ازای tهای بزرگ توصیف کنید.

معادلهٔ مشخصهٔ معادلهٔ همگن متناظر معادلهٔ (۱) عبارت است از $r^۲ + r + ۱٫۲۵ = ۰$ با دو ریشهٔ $r = -۰٫۵ \pm i$. پس جواب عمومی $u_c(t)$ این معادلهٔ همگن عبارت است از

$$u_c(t) = c_۱ e^{-t/۲}\cos t + c_۲ e^{-t/۲}\sin t. \tag{۳}$$

جواب خاص معادلهٔ (۱) به شکل $U(t) = A\cos t + B\sin t$ است که در آن A و B با جایگزینی $U(t)$ به‌جای u در معادلهٔ (۱) به‌دست می‌آیند. می‌توانیم بنویسیم $U'(t) = -A\sin t + B\cos t$ و $U''(t) = -A\cos t - B\sin t$. پس از معادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود

$$(۰٫۲۵A + B)\cos t + (-A + ۰٫۲۵B)\sin t = ۳\cos t;$$

پس A و B باید در معادله‌های

$$۰٫۲۵A + B = ۳, \quad -A + ۰٫۲۵B = ۰$$

صدق کنند. در نتیجه $A = ۱۲/۱۷$ و $B = ۴۸/۱۷$. بنابراین جواب خاص عبارت است از

$$U(t) = \frac{۱۲}{۱۷}\cos t + \frac{۴۸}{۱۷}\sin t \tag{۴}$$

و جواب عمومی معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$u = u_c(t) + U(t) = c_۱ e^{-t/۲}\cos t + c_۲ e^{-t/۲}\sin t + \frac{۱۲}{۱۷}\cos t + \frac{۴۸}{۱۷}\sin t. \tag{۵}$$

ثابتهای باقی‌ماندهٔ $c_۱$ و $c_۲$ با شرایط اولیهٔ (۲) تعیین می‌شوند. از معادلهٔ (۵) نتیجه می‌شود

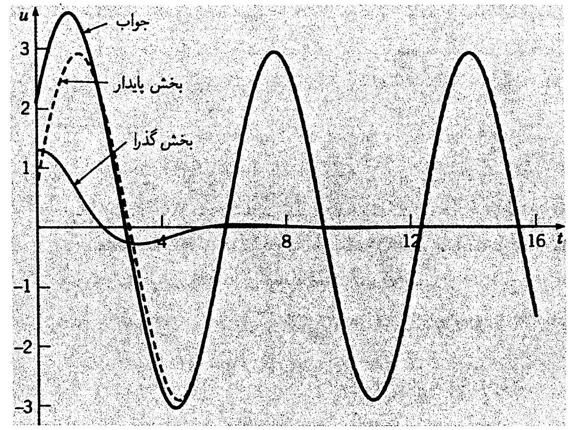
$$u(۰) = c_۱ + \frac{۱۲}{۱۷} = ۲, \quad u'(۰) = -\frac{۱}{۲}c_۱ + c_۲ + \frac{۴۸}{۱۷} = ۳;$$

بنابراین $c_۱ = ۲۲/۱۷$ و $c_۲ = ۱۴/۱۷$. پس درنهایت جواب مسئلهٔ مقدار اولیه عبارت است از

$$u = \frac{۲۲}{۱۷}e^{-t/۲}\cos t + \frac{۱۴}{۱۷}e^{-t/۲}\sin t + \frac{۱۲}{۱۷}\cos t + \frac{۴۸}{۱۷}\sin t. \tag{۶}$$

نمودار جواب (۶) با منحنی پررنگ در شکل ۱.۸.۳ نشان داده شده است.

مهم است که توجه کنیم که جواب شامل دو بخش مجزا است. دو جملهٔ اول طرف راست معادلهٔ (۶) شامل عامل نمایی $e^{-t/۲}$ هستند و در نتیجه به‌سرعت به صفر میل می‌کنند. معمولاً به این جمله‌ها گذرا می‌گوییم. بقیهٔ جمله‌های معادلهٔ (۶) تنها شامل سینوس و کسینوس هستند و بنابراین نوسانی را نشان می‌دهند که تا ابد ادامه دارد. به این جمله‌ها، پایدار می‌گوییم. منحنی‌های توپر و با خطوط شکسته در شکل ۱.۸.۳ به‌ترتیب قسمت‌های گذرا و پایدار جواب را نشان می‌دهند. قسمت گذرا



شکل ۱.۸.۳ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱) و (۲).

از جواب معادلهٔ همگن متناظر معادلهٔ (۱) می‌آید و لازم است که در شرایط اولیه صدق کند. قسمت پایدار، جوابی خاص برای معادلهٔ غیرهمگن است. پس از مدت نسبتاً کوتاهی، قسمت گذرا بسیار کوچک می‌شود و جواب را اساساً نمی‌توان از جواب تعادلی تمیز داد.

معادلهٔ حرکت دستگاه فنر-وزنه تحت نیروی خارجی $F(t)$ عبارت است از [معادلهٔ (۷) در بخش ۷.۳]

$$mu''(t)+\gamma u'(t)+ku(t)=F(t) \qquad (۷)$$

که در آن m، γ و k به‌ترتیب جرم، ضریب میرایی و ثابت فنر دستگاه هستند. اکنون فرض کنید که نیروی خارجی برابر است با $F_0\cos\omega t$ که در آن F_0 و ω ثابتهای مثبت‌اند که به‌ترتیب معرفِ دامنه و بسامد نیرو هستند. در این‌صورت معادلهٔ (۷) تبدیل می‌شود به

$$mu''+\gamma u'+ku=F_0\cos\omega t. \qquad (۸)$$

جوابهای معادلهٔ (۸) بسیار شبیه جواب مثال قبل رفتار می‌کنند. جواب عمومی معادلهٔ (۸) باید به شکل

$$u=c_1u_1(t)+c_2u_2(t)+A\cos\omega t+B\sin\omega t=u_c(t)+U(t) \qquad (۹)$$

باشد. دو جملهٔ اول طرف راست معادلهٔ (۹) جواب عمومی $u_c(t)$ از معادلهٔ همگن متناظر معادلهٔ (۸) هستند، و $U(t)$ جواب معادلهٔ غیرهمگن است. ضرایب A و B طبق معمول با جایگزینی این جمله‌ها در معادلهٔ دیفرانسیل (۸) به‌دست می‌آیند و c_1 و c_2 با معلوم بودن شرایط اولیه معین می‌شوند. جوابهای $u_1(t)$ و $u_2(t)$ برای معادلهٔ همگن بستگی به ریشه‌های r_1 و r_2 از معادلهٔ مشخصهٔ $mr^2+\gamma r+k=0$ دارند. چون m، γ و k همگی مثبت هستند، r_1 و r_2 یا هر دو حقیقی و منفی و یا مزدوج مختلط با قسمت حقیقی منفی هستند. در هر حالت هر دو جواب $u_1(t)$ و $u_2(t)$ وقتی $t\to\infty$ به صفر میل می‌کنند. چون $u_c(t)$ با افزایش t از بین می‌رود، به

آن **جواب گذرا** می‌گوییم. این بخش از جواب در بسیاری از کاربردها از اهمیت کمی برخوردار است و (بسته به مقدار γ) ممکن است تنها پس از چند ثانیه دیگر قابل ردیابی نباشد.

جمله‌های باقی‌مانده در معادلهٔ (۹)، یعنی $U(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$، با گذشت زمان از بین نمی‌روند بلکه تا ابد و یا تا زمانی که نیروی خارجی اعمال می‌شود باقی می‌مانند. این جمله‌ها نوسانی یکنواخت را با همان بسامد نیروی خارجی نمایش می‌دهند و به آنها **جوابهای پایدار** یا **پاسخهای واداشته** می‌گوییم. با جواب گذرا می‌توانیم هر شرط اولیه‌ای را اعمال کنیم؛ با گذشت زمان انرژی‌ای که با جابه‌جایی و سرعت اولیه به دستگاه داده شده با نیروی میرایی زایل می‌شود و پس از آن حرکت صرفاً پاسخ دستگاه به نیروی خارجی است. بدون میرایی، اثر شرایط اولیه الی‌الابد باقی می‌ماند.

راحت‌تر است که $U(t)$ را به‌جای دو جملهٔ مثلثاتی به‌صورت یک تابع مثلثاتی بیان کنیم. یادآوری می‌کنیم که این کار را در بخش ۷.۳ برای عبارتهای مشابه انجام دادیم. پس می‌توانیم بنویسیم

$$U(t)=R\cos(\omega t-\delta). \qquad (۱۰)$$

دامنهٔ R و فاز δ بستگی به A و B و به‌طور غیرمستقیم به پارامترهای معادلهٔ دیفرانسیل (۸) دارند. می‌توان به‌طور مستقیم با عملیات جبری نسبتاً طولانی نشان داد که

$$R=\frac{F_0}{\Delta},\qquad \cos\delta=\frac{m(\omega_0^2-\omega^2)}{\Delta},\qquad \sin\delta=\frac{\gamma\omega}{\Delta} \qquad (۱۱)$$

که در آن

$$\Delta=\sqrt{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} \quad \text{و} \quad \omega_0^2=\frac{k}{m}. \qquad (۱۲)$$

یادآوری می‌کنیم که ω_0 بسامد طبیعی سیستم واداشته در غیبت میرایی است.

اکنون بستگی دامنهٔ R نوسان حالت تعادلی به بسامد ω نیروی خارجی را بررسی می‌کنیم. با جایگزینی از معادلهٔ (۱۲) به‌جای R در معادلهٔ (۱۱) و انجام اعمال جبری نتیجه می‌شود

$$\frac{Rk}{F_0}=1\Big/\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\Gamma\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^{1/2} \qquad (۱۳)$$

که در آن $\Gamma=\gamma^2/mk$. توجه کنید که کمیت Rk/F_0 نسبت دامنهٔ R پاسخ واداشته به F_0/k، یعنی جابه‌جایی ایستای فنر تحت نیروی F_0 است.

در حالت تحریک با بسامد پایین، یعنی وقتی $\omega\to0$، از معادلهٔ (۱۳) نتیجه می‌شود که $Rk/F_0\to1$ و یا $R\to F_0/k$. متقابلاً در حالت تحریک با بسامد بالا از معادلهٔ (۱۳) نتیجه می‌شود که وقتی $\omega\to\infty$، $R\to0$. به‌ازای سایر مقادیر ω، دامنه ممکن است مقدار ماکزیمم داشته باشد. برای یافتن این مقدار ماکزیمم می‌توان از R نسبت به ω مشتق گرفت و آن را برابر صفر قرار داد. نتیجه می‌شود که دامنهٔ ماکزیمم به‌ازای $\omega=\omega_{\max}$ رخ می‌دهد که در آن

$$\omega_{\max}^2=\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{2m^2}=\omega_0^2\left(1-\frac{\gamma^2}{2mk}\right). \qquad (۱۴)$$

توجه کنید که $\omega_{max} < \omega_0$ و وقتی γ کوچک باشد، ω_{max} نزدیک به ω_0 است. مقدار ماکزیمم R عبارت است از

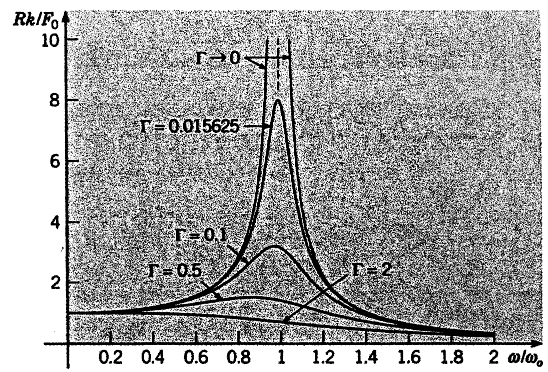
$$R_{max} = \frac{F_0}{\gamma\omega_0\sqrt{1-(\gamma^2/4mk)}} \cong \frac{F_0}{\gamma\omega_0}\left(1+\frac{\gamma^2}{8mk}\right) \tag{15}$$

که در آن عبارت آخری تقریبی برای γهای کوچک است. اگر $\gamma^2/mk > 2$، ω_{max} داده‌شده در معادلهٔ (۱۴) موهومی است؛ در این حالت مقدار ماکزیمم R به‌ازای $\omega = 0$ رخ می‌دهد و R تابعی نزولی از ω است. یادآوری می‌کنیم که میرایی بحرانی زمانی رخ می‌دهد که $\gamma^2/mk = 4$.

به‌ازای γهای کوچک از معادلهٔ (۱۵) نتیجه می‌شود که $R_{max} \cong F_0/\gamma\omega_0$. پس برای دستگاههای با میرایی کم، دامنهٔ R پاسخ واداشته وقتی ω نزدیک به ω_0 باشد حتی به‌ازای نیروهای خارجی نسبتاً کوچک، بسیار بزرگ است. به این پدیده **تشدید** می‌گوییم و اغلب در طراحی صنعتی اهمیت دارد. در طراحی سازه‌هایی مانند ساختمانها و پلها که در آن تشدید می‌تواند ناپایداری به‌وجود بیاورد و به سقوط فاجعه‌آمیز سازه منجر شود، تشدید باید بسیار جدی گرفته شود. از طرف دیگر می‌توان از تشدید در ساخت ابزارهایی مانند لرزه‌نگارها که باید سیگنالهای ضعیف وارده را ردیابی کنند، استفاده کرد.

در شکل ۲.۸.۳ چند نمودار نمونه از Rk/F_0 برحسب ω/ω_0 را به‌ازای چند مقدار $\Gamma = \gamma^2/mk$ آورده‌ایم. این شکل شامل نمودار متناظر $\Gamma = 0.015625$ هم هست که در مثال ۲ زیر ظاهر می‌شود. به‌ویژه به قلهٔ تیز نیز منحنی متناظر $\Gamma = 0.015625$ نزدیک به $\omega/\omega_0 = 1$ توجه کنید. حالت حدی $\Gamma \to 0$ هم نشان داده شده است. از معادلهٔ (۱۳) و یا معادله‌های (۱۱) و (۱۲) نتیجه می‌شود که وقتی $\gamma \to 0$، $R \to F_0/m|\omega_0^2 - \omega^2|$ و بنابراین خط قائم $\omega = \omega_0$ نشان داده‌شده در شکل مجانب عمودی Rk/F_0 است. با افزایش میرایی در دستگاه، پاسخ قله به‌تدریج از بین می‌رود.

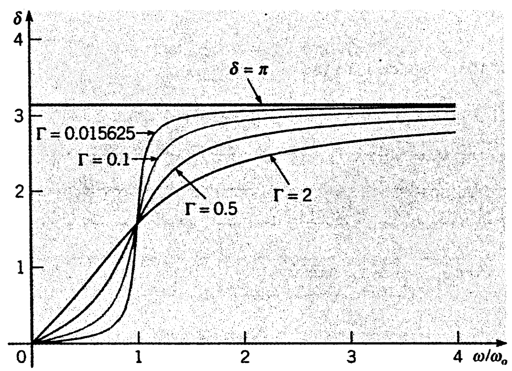
شکل ۲.۸.۳ مفید بودن متغیرهای بدون بعد را هم نشان می‌دهد. به‌سادگی می‌توانید تحقیق کنید که هر یک از کمیتهای Rk/F_0 و ω/ω_0 و Γ بدون بعد هستند. اهمیت این موضوع این است که تعداد پارامترهای مهم



شکل ۲.۸.۳ ارتعاش واداشتهٔ میرا: دامنهٔ پاسخ پایدار برحسب بسامد نیروی هادی؛ $\Gamma = \gamma^2/mk$.

مسئله به‌جای پنج‌تا در معادلهٔ (۸) به سه‌تا کاهش یافته است. پس برای توصیف رفتار پاسخ برحسب بسامد همهٔ دستگاههایی که از معادلهٔ (۸) پیروی می‌کنند، فقط یک خانواده از منحنی‌ها که برخی از آنها در شکل ۲.۸.۳ نشان داده شده‌اند لازم است.

زاویهٔ فاز δ نیز به‌طور جالبی به ω وابسته است. به‌ازای ωهای نزدیک صفر از معادله‌های (۱۱) و (۱۲) نتیجه می‌شود که $\cos\delta \cong 1$ و $\sin\delta \cong 0$. پس $\delta \cong 0$ و پاسخ تقریباً همفاز با تحریک است، یعنی فراز و فرود آنها همراه هم است، به‌ویژه می‌توان فرض کرد مقادیر ماکزیمم آنها نزدیک هم و مقادیر مینیمم آنها نزدیک هم هستند. به‌ازای $\omega = \omega_0$ می‌توان دید که $\cos\delta = 0$ و $\sin\delta = 1$، بنابراین $\delta = \pi/2$. در این حالت پاسخ تأخیری به اندازهٔ $\pi/2$ از تحریک دارد. قله‌ها و دوره‌های پاسخ، $\pi/2$ دیرتر از قله‌ها و دره‌های تحریک رخ می‌دهند. درنهایت به‌ازای ωهای بسیار بزرگ می‌توان دید که $\cos\delta \cong -1$ و $\sin\delta \cong 0$. پس $\delta \cong \pi$، بنابراین پاسخ تقریباً در فاز عکس تحریک قرار دارد؛ یعنی پاسخ در زمانی که تحریک در ماکزیمم است در مینیمم قرار دارد و بالعکس. در شکل ۳.۸.۳ نمودار δ برحسب ω/ω_0 را به‌ازای چند مقدار Γ نشان داده‌ایم. برای میرایی کم، انتقال فاز از نزدیکی $\delta = 0$ به نزدیکی $\delta = \pi$ نسبتاً به‌سرعت رخ می‌دهد در حالی که به‌ازای مقادیر بزرگ‌تر از پارامتر میرایی، انتقال به‌تدریج صورت می‌پذیرد.



شکل ۳.۸.۳ ارتعاش واداشتهٔ میرا: فاز پاسخ پایدار برحسب بسامد نیروی هادی؛ $\Gamma = \gamma^2/mk$.

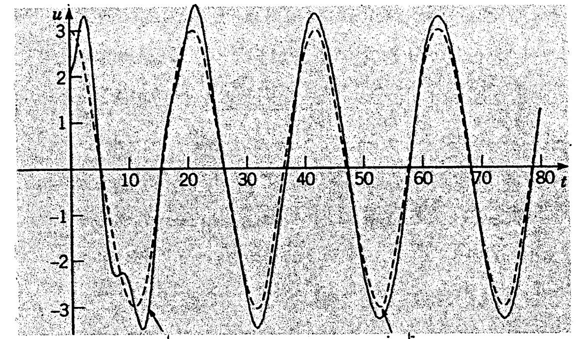
مثال ۲

مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$u'' + 0.125u' + u = 3\cos\omega t, \qquad u(0) = 2, \quad u'(0) = 0 \tag{16}$$

را در نظر بگیرید. نمودارهای جواب را به‌ازای مقادیر مختلف بسامد واداشتهٔ ω رسم کنید و آنها را با نمودار تابع نیروی متناظر مقایسه کنید.

در مورد این دستگاه می‌دانیم $\omega_0 = 1$ و $\Gamma = 1/64 = 0.015625$. حرکت بدون نیروی آن در مثال ۳ بخش ۷.۳ بررسی شد و در شکل ۷.۷.۳ نمودار جوابهای آن مسئله را نشان داده‌ایم. در شکلهای ۴.۸.۳، ۵.۸.۳ و ۶.۸.۳ جوابهای مسئلهٔ واداشتهٔ (۱۶) را به‌ترتیب به‌ازای $\omega = 0.3$، $\omega = 1$ و $\omega = 2$ نشان داده‌ایم. نمودار تابع نیرو در هر حالت نیز در هر



شکل ۴.۸.۳ ارتعاش واداشتهٔ میرا؛ جواب $u'' + ۰,۱۲۵u' + u = ۳\cos ۰,۳t$، $u(۰) = ۲$، $u'(۰) = ۰$.

شکل نشان داده شده است. در این مثال جابه‌جایی ایستا یعنی $F_۰/k$ برابر ۳ است.

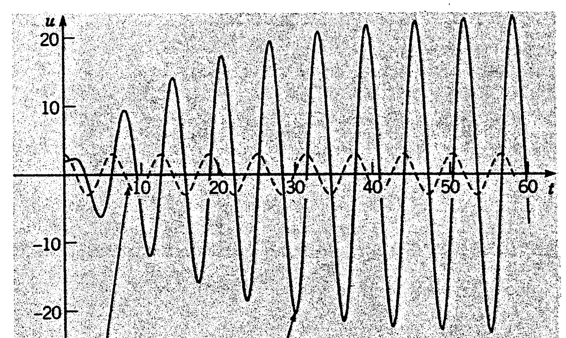
در شکل ۴.۸.۳ حالت بسامد کوچک، $\omega/\omega_۰ = ۰,۳$ را نشان داده‌ایم. پس پاسخ گذرای اولیه به‌طور قابل توجهی میرا شده است و پاسخ پایدار باقی‌مانده اساساً در فاز تحریک قرار دارد و دامنهٔ پاسخ کمی بزرگ‌تر از جابه‌جایی ایستا است. به‌طور مشخص،

$$R \cong ۳,۲۹۳۹, \qquad \delta \cong ۰,۰۴۱۱۸۵$$

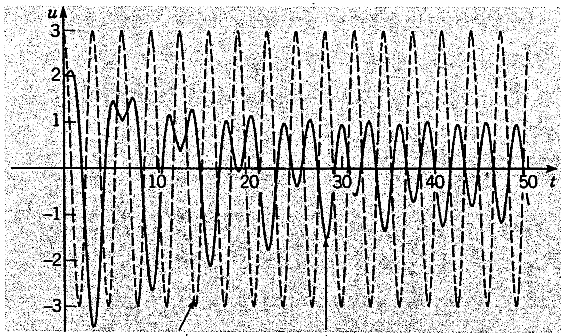
حالت تشدید، $\omega/\omega_۰ = ۱$ را در شکل ۵.۸.۳ نشان داده‌ایم. در اینجا دامنهٔ پاسخ پایدار هشت برابر جابه‌جایی ایستا است و شکل نیز تأخیر فاز پیش‌بینی شدهٔ $\pi/۲$ نسبت به نیروی خارجی را نشان می‌دهد.

حالت تحریک با بسامد نسبتاً بالا در شکل ۶.۸.۳ نشان داده شده است. توجه کنید که دامنهٔ پاسخ پایدار واداشته تقریباً برابر با یک سوم جابه‌جایی ایستا است و اختلاف فاز بین تحریک و پاسخ تقریباً برابر π است. به‌طور دقیق‌تر،

$$R \cong ۰,۹۹۶۵۵, \qquad \delta \cong ۳,۰۵۸۵$$



شکل ۵.۸.۳ ارتعاش واداشتهٔ میرا؛ جواب $u'' + ۰,۱۲۵u' + u = ۳\cos t$، $u(۰) = ۲$، $u'(۰) = ۰$.



شکل ۶.۸.۳ ارتعاش واداشتهٔ میرا؛ جواب $u'' + ۰,۱۲۵u' + u = ۳\cos ۲t$، $u(۰) = ۲$، $u'(۰) = ۰$.

ارتعاشات واداشتهٔ نامیرا. اکنون در معادلهٔ (۸) فرض می‌کنیم که $\gamma = ۰$، و به معادلهٔ حرکت نوسانگر واداشتهٔ نامیرا می‌رسیم؛ یعنی

$$mu'' + ku = F_۰ \cos \omega t. \qquad (۱۷)$$

شکل جواب عمومی معادلهٔ (۱۷) بسته به اینکه بسامد نیروی ω برابر و یا متفاوت با بسامد طبیعی $\omega_۰ = \sqrt{k/m}$ باشد، متفاوت است. ابتدا حالت $\omega \neq \omega_۰$ را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت جواب عمومی معادلهٔ (۱۷)

$$u = c_۱ \cos \omega_۰ t + c_۲ \sin \omega_۰ t + \frac{F_۰}{m(\omega_۰^۲ - \omega^۲)} \cos \omega t \qquad (۱۸)$$

است. ثابتهای $c_۱$ و $c_۲$ با شرایط اولیه معین می‌شوند. حرکت حاصله در حالت کلی مجموع دو حرکت تناوبی با بسامدهای متفاوت ($\omega_۰$ و ω) و دامنه‌های متفاوت است.

به‌ویژه جالب است که فرض کنیم وزنه در ابتدا در حالت سکون قرار دارد. در این حالت شرایط اولیه $u(۰) = ۰$ و $u'(۰) = ۰$ هستند. به این ترتیب انرژی محرک دستگاه تماماً از نیروی خارجی می‌آید و شرایط اولیه نقشی ندارند. در این حالت ثابتهای $c_۱$ و $c_۲$ در معادلهٔ (۱۸) با

$$c_۱ = -\frac{F_۰}{m(\omega_۰^۲ - \omega^۲)}, \qquad c_۲ = ۰ \qquad (۱۹)$$

داده می‌شوند و جواب معادلهٔ (۱۷) عبارت است از

$$u = \frac{F_۰}{m(\omega_۰^۲ - \omega^۲)} (\cos \omega t - \cos \omega_۰ t). \qquad (۲۰)$$

این جواب مجموع دو تابع تناوبی با دوره‌های تناوب متفاوت اما با دامنه‌های یکسان است. با استفاده از اتحادهای مثلثاتی برای $\cos(A \pm B)$ با $A = (\omega_۰ + \omega)t/۲$ و $B = (\omega_۰ - \omega)t/۲$، می‌توانیم معادلهٔ (۲۰) را به‌صورت

$$u = \left[\frac{۲F_۰}{m(\omega_۰^۲ - \omega^۲)} \sin \frac{(\omega_۰ - \omega)t}{۲} \right] \sin \frac{(\omega_۰ + \omega)t}{۲} \qquad (۲۱)$$

بنویسیم. اگر $|\omega-\omega_0|$ کوچک باشد، $\omega+\omega_0$ بسیار بزرگ‌تر از $|\omega-\omega_0|$ است و در نتیجه، $\sin(\omega_0+\omega)t/2$ در مقایسه با $\sin(\omega_0-\omega)t/2$ به‌سرعت نوسان می‌کند؛ پس حرکت، نوسانی سریع با بسامد $(\omega_0+\omega)/2$ اما با دامنهٔ سینوسی با تغییرات آهستهٔ

$$\frac{2F_0}{m|\omega_0^2-\omega^2|}\left|\sin\frac{(\omega_0-\omega)t}{2}\right|$$

است. این نوع حرکت که دامنه‌اش به‌طور متناوب تغییر می‌کند چیزی را نمایش می‌دهد که به **ضربان** معروف است. به‌عنوان مثال، در آکوستیک، وقتی دو دیاپازون با بسامد نزدیک به هم به‌طور همزمان تحریک شوند چنین پدیده‌ای رخ می‌دهد. در این حالت تغییرات تناوبی دامنه کاملاً برای گوش غیرمسلح مشخص است. در الکترونیک به تغییرات دامنه با زمان **تعدیل دامنه** می‌گویند.

مثال ۳

مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

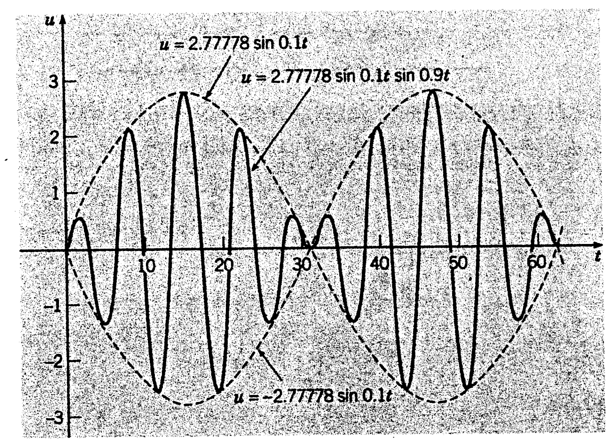
$$u''+u=0.5\cos 0.8t,\qquad u(0)=0,\quad u'(0)=0 \tag{22}$$

را حل کنید و نمودار جواب را رسم کنید.

در این حالت $\omega_0=1$، $\omega=0.8$ و $F_0=0.5$، بنابراین با استفاده از معادلهٔ (۲۱) جواب مسئلهٔ داده‌شده عبارت است از

$$u=2.77778(\sin 0.1t)(\sin 0.9t). \tag{23}$$

نمودار این جواب را در شکل ۷.۸.۳ نشان داده‌ایم. تغییرات دامنهٔ بسامد آهستهٔ ۰٫۱ و دورهٔ تناوب آهستهٔ متناظر 20π دارد. توجه کنید که نیمه دورهٔ تناوب 10π متناظر چرخه‌ای از افزایش و سپس کاهش دامنه است. جابه‌جایی دستگاه فنر-وزنه با بسامد نسبتاً سریع ۰٫۹ نوسان می‌کند که تنها کمی کمتر از بسامد طبیعی ω_0 است.



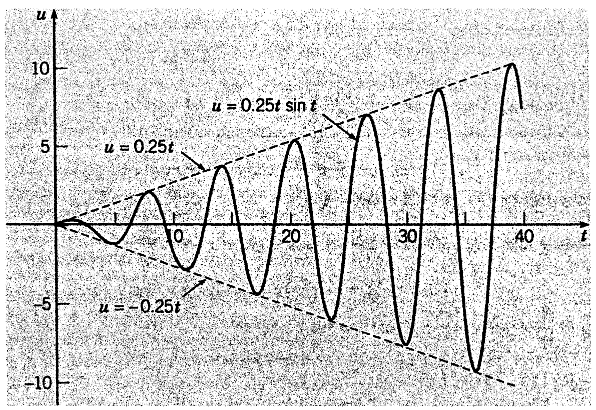
شکل ۷.۸.۳ ضربان؛ جواب $u''+u=0.5\cos 0.8t$، $u(0)=0$، $u'(0)=0$؛ $u=2.77778(\sin 0.1t)(\sin 0.9t)$.

اکنون تصور کنید که بسامد واداشتهٔ ω بیشتر افزایش یابد، مثلاً به $\omega=0.9$. در این‌صورت بسامد آهسته به ۰٫۰۵ نصف می‌شود و نصف دورهٔ تناوب آهسته با دوبرابر شدن 20π می‌شود. ضریب ۲٫۷۷۷۸ نیز به‌طور قابل توجهی به ۵٫۲۶۳۲ افزایش می‌یابد. با این حال بسامد سریع تنها کمی به ۰٫۹۵ افزایش می‌یابد. آیا می‌توانید تصور کنید که با نزدیک و نزدیک‌تر شدن مقدار ω به بسامد $\omega_0=1$ چه اتفاقی می‌افتد؟

اکنون به معادلهٔ (۱۷) برمی‌گردیم و حالت تشدید را در نظر می‌گیریم که در آن $\omega=\omega_0$؛ یعنی بسامد تابع نیرو با بسامد طبیعی سیستم یکسان است. در این‌صورت عبارت غیرهمگن $F_0\cos\omega t$ جوابی از معادلهٔ همگن است. در این حالت جواب معادلهٔ (۱۷) عبارت است از

$$u=c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t+\frac{F_0}{2m\omega_0}t\sin\omega_0 t \tag{24}$$

چون جملهٔ $t\sin\omega_0 t$ در جواب (۲۴) آمده، صرف‌نظر از مقادیر c_1 و c_2، وقتی $t\to\infty$ حرکت بی‌کران می‌شود؛ مثالی از این دست را در شکل ۸.۸.۳ ببینید. البته در واقعیت نوسانات بی‌کران رخ نمی‌دهند. به محض آنکه u بزرگ شود مدل ریاضی‌ای که معادلهٔ (۱۷) بر آن مبتنی بود دیگر اعتبار ندارد، چون این فرض که نیروی فنر به‌طور خطی به جابه‌جایی بستگی دارد مستلزم کوچک بودن u است. همان‌طور که قبلاً دیدیم، اگر میرایی در مدل در نظر گرفته شود حرکت پیش‌بینی شده کراندار باقی می‌ماند؛ با این حال، اگر میرایی کوچک و ω نزدیک به ω_0 باشد، پاسخ تابع ورودی $F_0\cos\omega t$ ممکن است کاملاً بزرگ باشد.



شکل ۸.۸.۳ تشدید، جواب $u''+u=0.5\cos t$، $u(0)=0$، $u'(0)=0$؛ $u=0.25t\sin t$.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۴، عبارت داده‌شده را به‌صورت حاصلضرب دو تابع مثلثاتی با بسامدهای متفاوت بنویسید.

۱. $\cos 9t-\cos 7t$ ۲. $\sin 3t+\sin 4t$

۳. $\cos\pi t+\cos 2\pi t$ ۴. $\sin 7t-\sin 6t$

۵. وزنه‌ای با وزن 4 lb طول فنر را 1.5 in بیشتر می‌کند. وزنه به اندازهٔ 2 in در جهت مثبت از موقعیت تعادلیش جابه‌جا

می‌شود و سپس بدون سرعت اولیه رها می‌شود. با فرض اینکه میرایی وجود ندارد و روی آن نیروی خارجی‌ای به اندازهٔ $2\cos 3t$ lb وارد می‌شود، مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای که حرکت جرم را توصیف می‌کند صورت‌بندی کنید.

۶. وزنه‌ای با وزن ۶ kg طول فنر را ۱۲ cm بیشتر می‌کند. به وزنه نیروی خارجی‌ای به اندازهٔ $10\sin(t/2)$ N وارد می‌شود. و وزنه در محیطی حرکت می‌کند که نیروی چسبندگی‌ای به اندازهٔ ۲ N در حالی که سرعتش ۴ cm/s است به آن وارد می‌شود. اگر وزنه از موقعیت تعادلیش با سرعت اولیهٔ ۳ cm/s به حرکت درآید، مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای را که حرکت جرم را توصیف می‌کند صورت‌بندی کنید.

۷. الف) جواب مسئلهٔ ۵ را بیابید.

ب) نمودار جواب را رسم کنید.

ج) اگر نیروی خارجی داده‌شده با نیروی $4\sin\omega t$ با بسامد ω جایگزین شود مقدار ω را طوری بیابید که تشدید رخ بدهد.

۸. الف) جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ مسئلهٔ ۶ را بیابید.

ب) قسمت‌های گذرا و پایدار جواب را مشخص کنید.

ج) نمودار جواب تعادلی را رسم کنید.

د) اگر نیروی خارجی داده‌شده با نیروی $2\cos\omega t$ با بسامد ω جایگزین شود، مقدار ω را طوری بیابید که دامنهٔ پاسخ واداشته ماکزیمم باشد.

۹. دستگاه فنر-وزنهٔ غیرمیرایی با وزنه‌ای به وزن ۶ lb و ثابت فنر ۱ lb/in ناگهان در $t = 0$ با نیروی خارجی‌ای به اندازهٔ $4\cos 7t$ lb به حرکت درمی‌آید. موقعیت جرم را برحسب زمان به‌دست بیاورید و نمودار جابه‌جایی برحسب t را رسم کنید.

۱۰. وزنه‌ای با وزن ۸ lb طول فنر را ۶ in بیشتر می‌کند. نیروی خارجی $8\sin 8t$ lb بر دستگاه وارد می‌شود. اگر جرم به اندازهٔ ۳ in به پایین کشیده شود و سپس رها شود، موقعیت جرم را برحسب زمان تعیین کنید. چهار زمان اول را که در آن سرعت جرم برابر صفر است تعیین کنید.

۱۱. طول فنری با وزنه‌ای به وزن ۸ lb، ۶ in افزایش می‌یابد. وزنه به یک مکانیزم ضربه‌گیر با ثابت میرایی ۰٫۲۵ lb·s/ft متصل است و نیرویی خارجی به اندازهٔ $4\cos 2t$ lb به آن وارد می‌شود.

الف) پاسخ پایدار این سیستم را تعیین کنید.

ب) اگر وزنهٔ داده‌شده را با وزنه‌ای با وزن m جایگزین کنیم، مقدار m را طوری تعیین کنید که به‌ازای آن دامنهٔ پاسخ پایدار ماکزیمم باشد.

۱۲. در دستگاه فنر-وزنه، ثابت فنر ۳ N/m است. جرمی با وزن ۲ kg به آن متصل شده و حرکت در شارهٔ چسبنده‌ای صورت می‌گیرد که مقاومتی ایجاد می‌کند که به‌طور عددی با اندازهٔ سرعت لحظه‌ای برابر است. اگر سیستم با نیروی خارجی $(3\cos 3t - 2\sin 3t)$ به حرکت درآید، پاسخ پایدار آن را تعیین کنید. جواب خود را به‌صورت $R\cos(\omega t - \delta)$ بیان کنید.

۱۳. در این مسئله می‌خواهیم بعضی از جزئیات تحلیل نوسانگر میرای واداشته را ارائه کنید.

الف) معادله‌های (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) را برای جواب پایدار معادلهٔ (۸) به‌دست بیاورید.

ب) عبارت معادلهٔ (۱۳) برای Rk/F_0 را به‌دست بیاورید.

ج) ثابت کنید $\omega_{\max}^2$ و $R_{\max}$ به‌ترتیب با معادله‌های (۱۴) و (۱۵) داده می‌شوند.

۱۴. سرعت پاسخ پایدار داده‌شده در معادلهٔ (۱۰) را به‌دست بیاورید و سپس ثابت کنید سرعت در زمانی که $\omega = \omega_0$، ماکزیمم است.

۱۵. جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$u'' + u = F(t), \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0$$

را به‌دست بیاورید که در آن

$$F(t) = \begin{cases} F_0 t, & 0 \le t \le \pi, \\ F_0(2\pi - t), & \pi < t \le 2\pi, \\ 0, & 2\pi < t \end{cases}$$

راهنمایی: هر بازهٔ زمانی را جداگانه بررسی کنید و جوابها را در بازه‌های زمانی متفاوت با الزام پیوستگی u و u' در t کنار هم بگذارید.

۱۶. مدار سری‌ای خازنی 0.25×10^{-6} F، مقاومتی $5 \times 10^{3}\,\Omega$ و القاگری ۱ H دارد. بار اولیه روی خازن صفر است. اگر یک باطری ۱۲ ولتی به مدار متصل شود و مدار در $t = 0$ بسته شود، بار روی خازن را در $t = 0.001$ s و $t = 0.01$ s و در هر زمان t تعیین کنید. همچنین بار حدی را وقتی $t \to \infty$ تعیین کنید.

۱۷. سیستم نوسانگر توصیف‌شده با مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$u'' + \frac{1}{4}u' + 2u = 2\cos\omega t, \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 2$$

را در نظر بگیرید.

الف) بخش پایدار جواب این مسئله را تعیین کنید.

ب) دامنهٔ A جواب پایدار را برحسب ω بیابید.

ج) A را برحسب ω رسم کنید.

د) مقدار ماکزیمم A و بسامد ω را که به‌ازای آن این اتفاق رخ می‌دهد بیابید.

۱۸. سیستم واداشته اما نامیرای توصیف‌شده با مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$u'' + u = 3\cos\omega t, \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0$$

را در نظر بگیرید.

الف) جواب $u(t)$ را به‌ازای $\omega \ne 1$ به‌دست بیاورید.

ب) نمودار جواب $u(t)$ برحسب t را به‌ازای $\omega = 0.7$، $\omega = 0.8$ و $\omega = 0.9$ رسم کنید. چگونگی تغییر پاسخ $u(t)$ با تغییر ω در این بازه را توصیف کنید. هرگاه ω مقادیر نزدیک و نزدیک‌تر به ۱ را اختیار کند چه اتفاقی می‌افتد؟ توجه کنید که بسامد طبیعی سیستم غیرواداشته، $\omega_0 = 1$ است.

۱۹. سیستم نوسانگر توصیف‌شده با مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$u'' + u = 3\cos\omega t, \qquad u(0) = 1, \quad u'(0) = 1$$

را در نظر بگیرید.

الف) جواب را به‌ازای $\omega \ne 1$ به‌دست بیاورید.

ب) جواب $u(t)$ را برحسب t به‌ازای $\omega = ۰/۷$، $\omega = ۰/۸$ و $\omega = ۰/۹$ رسم کنید. این نتایج را با نتایج مسئلهٔ ۱۸ مقایسه کنید؛ یعنی اثر شرایط اولیهٔ ناصفر را تشریح کنید.

۲۰. برای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ ۱۸، به‌ازای $\omega = ۰/۷$، $\omega = ۰/۸$ و $\omega = ۰/۹$، نمودار u را برحسب u' رسم کنید. به این نمودار، نمودار فاز می‌گوییم. بازهٔ زمانی به اندازهٔ کافی طولانی‌ای را در نظر بگیرید که نمودار فاز به‌صورت منحنی بسته‌ای ظاهر شود. با یک پیکان جهت حرکت را با افزایش زمان مشخص کنید.

در مسئله‌های ۲۱ تا ۲۳ به مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$u'' + ۰/۱۲۵u' + ۴u = F(t), \quad u(۰) = ۲, \quad u'(۰) = ۰$$

می‌پردازیم. در هر یک از این مسئله‌ها،

الف) نمودار تابع نیروی $F(t)$ را برحسب t و نمودار جواب $u(t)$ را برحسب t در یک دستگاه مختصات رسم کنید. بازهٔ زمانی به اندازهٔ کافی بزرگی را در نظر بگیرید که جواب گذرا به‌طور قابل توجهی از بین رفته باشد. رابطهٔ بین دامنه و فاز جملهٔ نیرو و دامنه و فاز پاسخ را ببینید. توجه کنید که $\omega_۰ = \sqrt{k/m} = ۲$.

ب) نمودار فاز جواب، یعنی نمودار u' برحسب u را رسم کنید.

۲۱. $F(t) = ۳\cos(t/۴)$

۲۲. $F(t) = ۳\cos ۲t$

۲۳. $F(t) = ۳\cos ۶t$

۲۴. بر دستگاه فنر-وزنه‌ای با فنری خشک (مسئلهٔ ۳۲ از بخش ۷.۳) نیروی خارجی تناوبی وارد می‌شود. در نبود میرایی، فرض کنید که جابه‌جایی وزنه در مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$u'' + u + \frac{۱}{۵}u^۳ = \cos\omega t, \quad u(۰) = ۰, \quad u'(۰) = ۰$$

صدق می‌کند.

الف) فرض کنید $\omega = ۱$ و نمودار رایانه‌ای جواب مسئلهٔ داده‌شده را رسم کنید. آیا دستگاه ضربان را نمایش می‌دهد؟

ب) جواب را به‌ازای چند مقدار ω بین ۱/۲ و ۲ رسم کنید. چگونگی تغییر جواب با افزایش ω را توصیف کنید.

۲۵. فرض کنید دستگاه مسئلهٔ ۲۴ با افزودن جملهٔ میرایی اصلاح شود و مسئلهٔ مقدار اولیه به

$$u'' + \frac{۱}{۵}u' + u + \frac{۱}{۵}u^۳ = \cos\omega t, \quad u(۰) = ۰, \quad u'(۰) = ۰$$

تبدیل شود.

الف) نمودار جواب کامپیوتری مسئلهٔ داده‌شده را به‌ازای چند مقدار ω بین ۱/۲ تا ۲ رسم کنید و در هر حالت دامنهٔ R پاسخ پایدار را تخمین بزنید.

ب) با استفاده از داده‌های بخش (الف)، نمودار R برحسب ω را رسم کنید. به‌ازای کدام مقدار ω، دامنه بزرگ‌ترین است؟

ج) نتایج بخش‌های (الف) و (ب) را با نتایج متناظر برای فنر خطی مقایسه کنید.

مراجع

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1961; New York: Dover, 1989).

چندین کتاب دربارهٔ نوسانات مکانیکی و مدارهای الکتریکی موجود است. کتابی که به هر دو مورد می‌پردازد، کتاب زیر است:

Close, C. M., and Frederick, D. K., *Modeling and Analysis of Dynamic Systems* (3rd ed.)(New York: Wiley, 2001).

کتابی کلاسیک دربارهٔ نوسانات مکانیکی:

Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations* (4th ed.) (New York: McGraw-Hill, 1956; New York; Dover, 1985).

کتابی جدیدتر در سطح متوسط:

Thomson, W. T., *Theory of Vibrations with Applications* (5th ed). (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1997).

کتابی مقدماتی دربارهٔ مدارهای الکتریکی:

Bobrow, L. S., *Elementary Linear Circuit Analysis* (New York: Oxford University Press, 1996).