فصل ششم

انتگرال و بحث‌های اولیه مربوط به آن

تعریف انتگرال نامعین و خواص ابتدایی آن
انتگرال‌های استاندارد
تکنیک‌های انتگرال‌گیری (روش تغییر متغیر؛ روش جزء به جزء؛ روش تجزیه کسرها)
چند نکته در محاسبه انتگرال‌های خاص (توابع جبری خاص؛ توابع شامل سینوس، کسینوس، تانژانت و...)
محاسبه انتگرال‌های خاص با تغییر متغیرهای مثلثاتی
انتگرال معین (قضیه اساسی‌حساب) و خواص ابتدایی آن
چند قضیه در انتگرال‌های معین
انتگرال‌گیری به‌صورت معین از توابع زوج یا فرد در یک فاصله متقارن
انتگرال‌های ناسره (غیرعادی) و بررسی همگرایی و واگرایی آن
قضیه مقدار میانگین در انتگرال
قضیه لایپ نیتس (مشتق‌گیری از انتگرال)
انتگرال‌گیری معین از توابعی که در فاصله انتگرال‌گیری ماهیت منحصر به فردی ندارند.

یادداشت:

انتگرال

عکس عمل مشتق‌گیری، محاسبه تابع اولیه می‌باشد؛ بدین معنا که:

$F(x)$ مشتق $\rightarrow f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x)$ تابع اولیه $\quad \rightarrow F(x)$

به همین ترتیب، عکس عمل دیفرانسیل‌گیری، محاسبه انتگرال می‌باشد؛ بدین معنا که:

$F(x)$ دیفرانسیل $\rightarrow f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad f(x)dx$ انتگرال $\quad \rightarrow F(x)$

بنابراین، اصطلاحا می‌گوییم F یک تابع اولیه f است، هرگاه:

$$F'(x)=f(x)$$

تعریف انتگرال نامعین و خواص ابتدایی آن

اگر F یک تابع اولیه برای f باشد، انتگرال نامعین $f(x)\,dx$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

که در آن C یک ثابت اختیاری است و ممکن است با توجه به شرایط خاصی که برای حاصل انتگرال‌گیری مد نظر می‌باشد؛ بخواهیم آن را تعیین کنیم.

در انتگرال‌های نامعین خواص زیر برقرار است:

۱) $$\int \big(af(x)+bg(x)\big)dx=a\int f(x)dx+b\int g(x)dx \qquad (a,b\in R)$$

۲) $$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}=f(x)$$

اگر F یک تابع اولیه f و a , b اعدادی حقیقی باشند، داریم:

۳) $$\int f(ax+b)=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

انتگرال‌های استاندارد

با توجه به فرمول‌های اولیه مشتق‌گیری به سادگی می‌توان نوشت:

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \qquad n\neq -1$$

$$\int u^n.u'\,dx=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C \qquad n\neq -1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = Ln|x| + C$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = Ln|u| + C$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} Ln|ax+b| + C$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$$

$$\int a^u . u' dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\int a^{kx} dx = \frac{a^{kx}}{k.\ln a} + C$$

$$\int \sin(ax+b)\, dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + C$$

$$\int \cos(ax+b)\, dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + C$$

$$\int tg(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln|\cos(ax+b)| + C$$

$$\int cotg(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln|\sin(ax+b)| + C$$

$$\int (1+tg^2(ax+b)) dx = \frac{1}{a} tg(ax+b) + C$$

$$\int (1+cotg^2(ax+b)) dx = \frac{-1}{a} cot(ax+b) + C$$

$$\int \sin^n ax.\cos ax\, dx = \frac{1}{(n+1)a} \sin^{n+1} ax + C \qquad n \neq -1$$

$$\int \cos^n ax.\sin ax\, dx = \frac{-1}{(n+1)a} \cos^{n+1} ax + C \qquad n \neq -1$$

$$\int tg^n ax.(1+tg^2 ax)\, dx = \frac{1}{(n+1)a} tg^{n+1} ax + C \qquad n \neq -1$$

$$\int \cot g^{n} ax.(1+\cot g^{2} ax)dx = \frac{-1}{(n+1)a}\cot g^{n+1} ax + C \qquad n\neq -1$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}dx = \operatorname{Arc}\sin(\frac{u}{a})+C = -\operatorname{Arc}\cos(\frac{u}{a})+C'$$

$$\int \frac{u'}{u^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{Arc}tg(\frac{u}{a})+C = \frac{-1}{a}\operatorname{Arc}cotg(\frac{u}{a})+C'$$

$$\int \sinh(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\cosh(ax+b)+C$$

$$\int \cosh(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sinh(ax+b)+C$$

$$\int tgh(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\ln|\cosh(ax+b)|+C$$

$$\int cotgh(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{Ln}|\sinh(ax+b)|+C$$

$$\int \left(1-tgh^2(ax+b)\right)dx = \frac{1}{a}tgh(ax+b)+C$$

$$\int \left(1-\cot gh^2(ax+b)\right)dx = \frac{1}{a}\cot gh(ax+b)+C$$

$$\int \frac{u'}{a^2-u^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right|+C = \begin{cases}\frac{1}{a}\operatorname{Arctgh}\left(\frac{u}{a}\right)+C & |u|<|a| \\ \frac{1}{a}\operatorname{Arccotgh}\left(\frac{u}{a}\right)+C & |u|>|a|\end{cases}$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{u^2+a^2}}dx = \operatorname{Arcsinh}(\frac{u}{a})+C = \ln(u+\sqrt{u^2+a^2})+C \qquad a>0$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{u^2-a^2}}dx = \operatorname{Arccosh}(\frac{u}{a})+C = \ln(u+\sqrt{u^2-a^2})+C \qquad a>0$$

تکنیک‌های انتگرال گیری

انتگرال‌گیری به روش تغییر متغیر

اساس این روش بر مبناء رابطه زیر استوار است:

$$\int f'(g(x)).g'(x)dx = f(g(x))+c$$

در حقیقت برای انجام یک انتگرال گیری به روش تغییر متغیر باید با معرفی یک متغیر مناسب جدید از دو طرف آن دیفرانسیل گرفته و کل عبارت زیر علامت انتگرال در مساله اصلی را برحسب این متغیر و دیفرانسیل آن بازنویسی کرده، سپس جواب انتگرال موجود را که طبیعتا اینک ساده تر از مساله اولیه است، به‌دست آورده، پاسخ نهایی را برحسب متغیر اصلی بنویسیم.

بنابراین، بدیهی است انجام موفقیت آمیز روش تغییر متغیر در «هنر انتخاب متغیر جدید» خلاصه می‌شود که در بسیاری مواقع مناسب است عبارتی از تابع زیر علامت انتگرال را به عنوان متغیر جدید معرفی می کنیم که دقیقا مشتق آن نیز در قسمت دیگری از تابع زیر علامت انتگرال موجود باشد.

انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء

اساس این روش بر مبناء رابطه زیر استوار است:

$$\int u.dv = uv - \int v\,du$$

u و v توابعی از یک متغیر مثل x می‌باشند.

در حقیقت برای محاسبه انتگرالی؛ مانند، $\int f(x)dx$ باید u , dv را از عبارت $f(x)\,dx$ طوری انتخاب کنیم که اولاً؛ قادر باشیم از dv، تابع v را مشخص کنیم و ثانیاً؛ محاسبه $\int v\,du$ آسان‌تر باشد.

نکته: به سه دسته تابع زیر توجه کنید (که در I و II و III آرگومان‌ها از x خطی می‌باشند):

III	II	I
نمایی سینوس و کسینوس معمولی سینوس و کسینوس هیپربولیک	چند جمله ای	لگاریتمی معکوس مثلثاتی معکوس هیپربولیک

به‌خاطر داشته باشید، در موارد زیر روش جزء به جزء قابل استفاده است.

در انتگرال گیری از توابع گروه I.

در انتگرال‌گیری از توابعی که از ضرب توابع گروه I در II حاصل شده‌اند.

در انتگرال‌گیری از توابعی که از ضرب توابع گروه II در III حاصل شده‌اند.

در انتگرال‌گیری از توابعی که از ضرب توابع گروه III در یکدیگر حاصل شده‌اند.

تذکر: در کلیه موارد فوق، u از گروه با شماره کمتر انتخاب خواهد شد.

نکته: گاهی مواقع برای محاسبه یک انتگرال، لازم می‌شود چند بار متوالی از روش جزء به جزء استفاده کنیم که در برخی مسایل می‌توان این کار را در جدولی خلاصه نمود. انتگرال‌هایی را که ساختاری شبیه زیر دارند؛ می‌توان با این روش خلاصه شده به سرعت محاسبه کرد:

$$\int (\text{یک چند جمله‌ای دلخواه از x}) \cdot \begin{pmatrix} e^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \end{pmatrix} \cdot dx$$

$$\int \begin{pmatrix} e^{ax} \\ \sinh ax \\ \cosh ax \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin bx \\ \cos bx \end{pmatrix} dx$$

به مثال‌های زیر توجه کنید:

۱) $I = \int x^3 \sin ax \, dx$

مشتق		انتگرال
x^3		$\sin ax$
$3x^2$	$+$	$-\frac{1}{a}\cos ax$
$6x$	$-$	$-\frac{1}{a^2}\sin ax$
6	$+$	$\frac{1}{a^3}\cos ax$
0	$-$	$\frac{1}{a^4}\sin ax$

$$I = -\frac{x^3}{a}\cos ax + \frac{3x^2}{a^2}\sin ax + \frac{6x}{a^3}\cos ax - \frac{6}{a^4}\sin ax + C$$

۲) $I = \int e^{ax} \cos x \, dx$

مشتق	انتگرال
e^{ax}	$\cos x$
ae^{ax}	$\sin x$
$a^2 e^{ax}$	$-\cos x$

$+$ ، $-$ ، $+\int$

$$I = e^{ax} \sin x + ae^{ax} \cos x - \int a^2 e^{ax} \cos x \, dx$$

$$I = e^{ax} \sin x + ae^{ax} \cos x - a^2 I \quad \rightarrow \quad I = \frac{1}{1+a^2} e^{ax} (\sin x + a \cos x) + C$$

نکته: اگر $P_n(x)$ یک چند جمله‌ای درجه n از متغیر x باشد، اعمال روش خلاصه شده جزء به جزء نتیجه می‌دهد:

$$\int P_n(x)\, g(x)\, dx = P_n(x)\, G_1(x) - P'_n(x)\, G_2(x) + P''_n(x)\, G_3(x) \mp \cdots + (-1)^n P_n^{(n)}(x)\, G_{n+1}(x)$$

که در آن $G_K(x)$، K امین تابع اولیه $g(x)$ است؛ به تعبیری، $G_K(x) = \frac{1}{D^K}(g(x))$ که هر $\frac{1}{D}$ به معنای یک‌بار عمل انتگرال گیری می‌باشد.

انتگرال‌گیری به روش تجزیه کسرها

برای محاسبه انتگرال‌هایی به‌صورت $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای می‌باشند، اگر درجه $P(x)$ از درجه $Q(x)$ کمتر نباشد، اولین قدم آن است که صورت را بر مخرج تقسیم کرده و پس از تفکیک به کسری برسیم که درجه صورت آن از درجه مخرج کسر کمتر باشد.

اینک فرض کنید به کسری؛ مانند، $\frac{M(x)}{N(x)}$ رسیده‌ایم که درجه مخرج از درجه صورت بیشتر است. حال اگر ابتدا $N(x)$ را به‌صورت حاصل‌ضرب عوامل درجه اول و درجه دوم غیرقابل تجزیه بنویسیم با توجه به حالات زیر، $\frac{M(x)}{N(x)}$ را به‌صورت مجموع کسرهای جزئی (کسرهایی با مخرج‌های ساده‌تر) در می‌آوریم.

در ساختار اولیه این کسرهای جزئی ابتدا ناگزیریم از ضرایب نامعینی استفاده کنیم که تعداد آنها دقیقا برابر درجه $N(x)$ می‌باشد و در انتها با مخرج مشترک گیری بین مجموع نوشته شده و متحد قرار دادن حاصل با کسر اولیه $\frac{M(x)}{N(x)}$ می‌توان تکلیف آن ضرایب نامعین را مشخص نمود.

در تجزیه $N(x)$ چهار حالت زیر ممکن است رخ دهد:

الف) $N(x)$ حاصل‌ضرب چند عامل درجه اول غیر تکراری به‌صورت $x-c$ باشد. در این صورت، به ازای هر عامل $x-c$ در $N(x)$ یک عبارت به شکل $\frac{A}{x-c}$ قرار می‌دهیم؛ مانند:

$$\frac{M(x)}{x(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-\alpha}+\frac{A_3}{x-\beta}$$

ب) $N(x)$ حاصل‌ضرب چند عامل درجه اول تکراری به‌صورت $(x-c)^k$ باشد. در این صورت، به ازای هر عامل $(x-c)^k$ در $N(x)$ یک عبارت به شکل $\frac{A_1}{(x-c)}+\frac{A_2}{(x-c)^2}+\dots+\frac{A_k}{(x-c)^k}$ قرار دهیم؛ مانند:

$$\frac{M(x)}{(x-\alpha)^3}=\frac{A_1}{(x-\alpha)}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\frac{A_3}{(x-\alpha)^3}$$

ج) $N(x)$ حاصل‌ضرب چند عامل درجه دوم غیر قابل تجزیه غیرتکراری به‌صورت x^2+ax+b باشد. در این صورت، به ازای هرعامل x^2+ax+b در $N(x)$ یک عبارت به شکل $\frac{Ax+B}{x^2+ax+b}$ قرار می‌دهیم؛ مانند:

$$\frac{M(x)}{(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b}+\frac{A_2x+B_2}{x^2+cx+d}$$

د) $N(x)$ حاصل‌ضرب چند عامل درجه دوم غیرقابل تجزیه تکراری به‌صورت $(x^2+ax+b)^k$ باشد. در این‌صورت، به ازای هر عامل $(x^2+ax+b)^k$ در $N(x)$ یک عبارت به شکل $\frac{A_1x+B_1}{(x^2+ax+b)}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+ax+b)^2}+\dots+\frac{A_kx+B_k}{(x^2+ax+b)^k}$ قرار می‌دهیم؛ مانند:

$$\frac{M(x)}{(x^2+ax+b)^3}=\frac{A_1x+B_1}{(x^2+ax+b)}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+ax+b)^2}+\frac{A_3x+B_3}{(x^2+ax+b)^3}$$

دقت کنید در حالات «ج» و «د» عبارت‌های درجه دوم نوشته شده، حتما باید غیر قابل تجزیه باشند وگرنه باید آنها را تجزیه نموده تا به حالات «الف» و یا «ب» برسیم.

چند نکته در محاسبه انتگرال‌های خاص

نکته: در استفاده از روش تجزیه کسرها ممکن است تلفیقی از چهار حالت گفته شده، رخ دهد؛ که می‌توان به سادگی وضعیت کسرهای جزئی را مشخص کرد؛ مثلاً، داریم:

$$\frac{M(x)}{(x-\alpha)^2(x^2+k^2)^3(x-\beta)}$$
$$=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{(x-\alpha)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+k^2}+\frac{Ex+F}{(x^2+k^2)^2}+\frac{Gx+H}{(x^2+k^2)^3}+\frac{I}{x-\beta}$$

دقت کنید مخرج کسر اصلی درجه نه می‌باشد و تعداد ضرایب نامعین استفاده شده $(A , B ,\dots, I)$نیز نه عدد می‌باشد.

۲) استفاده از روش تجزیه کسرها می‌توان نشان داد:

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$$

$$\int\frac{dx}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+c$$

۳) به سادگی می‌توان نشان داد در محاسبه $\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^P}$ با تغییر متغیر $x=a\tan\theta$ به انتگرال $\frac{1}{a^{2P-1}}\int\cos^{2P-2}\theta\,d\theta$ خواهیم رسید.

۴) **روش هوی‌ساید:** فرض کنید در روش تجزیه کسرها نوشته باشیم:

$$f(x)=\frac{M(x)}{(x-\alpha)^2(x-\beta)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{(x-\alpha)^2}+\frac{C}{(x-\beta)}$$

می‌توان نشان داد:

$$B=\lim_{x\to\alpha}(x-\alpha)^2f(x)$$

$$A=\lim_{x\to\alpha}\left((x-\alpha)^2f(x)\right)'$$
$$C=\lim_{x\to\beta}(x-\beta)f(x)$$

۵) برای محاسبه انتگرال‌هایی به فرم:

$$\int P(x).(ax+b)^n dx \quad , \quad \int \frac{P(x)}{(ax+b)^n} dx \quad , \quad \int P(x).\sqrt[n]{ax+b}\, dx$$

که در آن $P(x)$ یک چند جمله‌ای برحسب x است، معمولا استفاده از تغییر متغیر $ax+b=u$ مناسب می‌باشد.

۶) برای محاسبه انتگرال‌هایی به‌صورت $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$ که درآن مخرج کسر به حاصل‌ضرب عوامل درجه اول قابل تجزیه نمی‌باشد، نخست عبارت ax^2+bx+c را به‌صورت $(\sqrt{a}\,x+\frac{b}{2\sqrt{a}})^2+c-\frac{b^2}{4a}$ نوشته (اصطلاحا در مخرج یک مربع کامل می سازیم) و عبارت صورت را نیز به‌صورت $\left(\alpha\,(\sqrt{a}\,x+\frac{b}{2\sqrt{a}})+\beta\right)$ درمی‌آوریم و با تفکیک کسر حاصل جواب انتگرال را برحسب توابع Ln و یا Arctan محاسبه می کنیم.

۷) برای محاسبه انتگرال‌هایی به‌صورت $I=\int \frac{(ax+b)^n}{(cx+d)^{n+2}} dx$ به فرم زیر عمل می‌کنیم:

$$I=\int\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^n \frac{dx}{(cx+d)^2}=\frac{1}{ad-bc}\int\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^n.\frac{ad-bc}{(cx+d)^2} dx$$

اینک با تغییر متغیر $u=\frac{ax+b}{cx+d}$ داریم:

$$\frac{ad-bc}{(cx+d)^2} dx=du$$

لذا، به‌دست می‌آید:

$$I=\frac{1}{ad-bc}\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{(ad-bc)(n+1)}+C$$

$$=\frac{1}{(ad-bc)(n+1)}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{n+1}+C$$

۸) برای محاسبه انتگرال‌هایی به فرم:

$$\int \sin mx.\cos nx\, dx \quad , \quad \int \sin mx.\sin nx\, dx \quad , \quad \int \cos mx.\cos nx\, dx$$

می‌توان از روابط تبدیل ضرب به جمع زیر استفاده نمود:

$$\sin mx.\cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x)$$

$$\sin mx.\sin nx = -\frac{1}{2}(\cos(m+n)x-\cos(m-n)x)$$

$$\cos mx.\cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x)$$

۹) برای محاسبه انتگرال‌هایی به فرم $\int \cos^{2k+1} x\,dx$, $\int \sin^{2k+1} x\,dx$ (توان‌های فرد سینوس و کسینوس) با توجه به روابط زیر:

$$\sin^{2k+1} x = \sin x.(\sin^2 x)^k = \sin x(1-\cos^2 x)^k$$

$$\cos^{2k+1} x = \cos x.(\cos^2 x)^k = \cos x(1-\sin^2 x)^k$$

بعد از به توان رساندن عبارات موجود عمل انتگرال‌گیری به راحتی قابل انجام است.

۱۰) برای محاسبه انتگرال‌هایی به فرم $\int \cos^{2k} x\,dx$, $\int \sin^{2k} x\,dx$ (توان‌های زوج سینوس و کسینوس) با توجه به روابط زیر:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

متوالیا توان‌های سینوس و کسینوس را کاهش داده و بعد عمل انتگرال‌گیری را انجام می‌دهیم.

۱۱) برای محاسبه انتگرال‌هایی به فرم $\int \sin^m x.\cos^n x\,dx$ که در آن m , n اعداد طبیعی هستند دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) اگر حداقل یکی از دو مقدار m یا n فرد باشند؛ مانند، انتگرال‌گیری از توان‌های فرد سینوس و کسینوس عمل می‌کنیم؛ مثلاً، اگر m فرد باشد، می‌نویسیم:

$$\sin^m x\cos^n x = \sin^{2k+1} x\cos^n x = \sin x(1-\cos^2 x)^k.\cos^n x$$

و با به توان رساندن عبارت حاصل و ضرب عوامل در همدیگر عمل انتگرال‌گیری را انجام می‌دهیم.

ب) اگر m , n هر دو زوج باشند، مانند انتگرال‌گیری از توان‌های زوج سینوس و کسینوس عمل می‌کنیم و پس از کاهش توان به‌صورت متوالی، محاسبه انتگرال را انجام می‌دهیم.

۱۲) برای محاسبه انتگرال‌هایی به فرم $\int \frac{dx}{\cos^{2k} x}$, $\int \frac{dx}{\sin^{2k} x}$ با توجه به روابط زیر:

$$\frac{1}{\sin^{2k}x}=(\frac{1}{\sin^2 x})^k=(1+\mathrm{cotg}^2 x)^k=(1+\mathrm{cotg}^2 x)^{k-1}(1+\mathrm{cotg}^2 x)$$
$$\frac{1}{\cos^{2k}x}=(\frac{1}{\cos^2 x})^k=(1+\mathrm{tg}^2 x)^k=(1+\mathrm{tg}^2 x)^{k-1}(1+\mathrm{tg}^2 x)$$

در مورد اول با تغییر متغیر $u=\mathrm{cotg}\,x$ و در مورد دوم با تغییر متغیر $u=\mathrm{tg}\,x$ حل مساله را ادامه می‌دهیم.

۱۳) در محاسبه انتگرال‌هایی به فرم $\int \mathrm{cotg}^n x\,dx$, $\int \mathrm{tg}^n x\,dx$ (که $n\geq 2$ عدد طبیعی است) از روال زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int \mathrm{tg}^n x\,dx=\int \mathrm{tg}^{n-2}x.\mathrm{tg}^2 x\,dx=\int \mathrm{tg}^{n-2}x.(1+\mathrm{tg}^2 x-1)\,dx$$
$$=\int \mathrm{tg}^{n-2}x.(1+\mathrm{tg}^2 x)\,dx-\int \mathrm{tg}^{n-2}x\,dx$$
$$=\frac{\mathrm{tg}^{n-1}x}{n-1}-\int \mathrm{tg}^{n-2}x\,dx\ \cdots$$
$$\int \mathrm{cotg}^n x\,dx=\int \mathrm{cotg}^{n-2}x.\mathrm{cotg}^2 x\,dx=\int \mathrm{cotg}^{n-2}x.(1+\mathrm{cotg}^2 x-1)\,dx$$
$$=\int \mathrm{cotg}^{n-2}x.(1+\mathrm{cotg}^2 x)\,dx-\int \mathrm{cotg}^{n-2}x\,dx$$
$$=\frac{-\mathrm{cotg}^{n-1}x}{n-1}-\int \mathrm{cotg}^{n-2}x\,dx\ \cdots$$

که انتگرال‌های حاصل را می‌توان مجددا با استفاده از منطق گفته شده محاسبه نمود.

با استفاده از تکنیک فوق می‌توان نشان داد:

$$n=2k+1\begin{cases}\displaystyle\int \tan^n x\,dx=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}-\frac{\tan^{n-3}x}{n-3}\pm\cdots+(-1)^{k+1}\,\mathrm{Ln}|\cos x|+C\\[2ex] \displaystyle\int \cot^n x\,dx=-\frac{\cot^{n-1}x}{n-1}+\frac{\cot^{n-3}x}{n-3}\mp\cdots+(-1)^k\frac{\cot^2 x}{2}+(-1)^k\,\mathrm{Ln}|\sin x|+C\end{cases}$$

$$n=2k\begin{cases}\displaystyle\int \tan^n x\,dx=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}-\frac{\tan^{n-3}x}{n-3}\pm\cdots+(-1)^k x+C\\[2ex] \displaystyle\int \cot^n x\,dx=-\frac{\cot^{n-1}x}{n-1}+\frac{\cot^{n-3}x}{n-3}\mp\cdots+(-1)^k x+C\end{cases}$$

۱۴) در محاسبه انتگرال‌هایی به‌صورت $\int f(\sin x , \cos x)\, dx$ با توجه به روابط زیر:

$$\sin x = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \quad , \quad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \quad , \quad tg x = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}$$

می‌توان از تغییر متغیر $u = tg\frac{x}{2}$ استفاده کرد و نوشت:

$$du = \frac{1}{2}(1+tg^2\frac{x}{2})\, dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad , \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad , \quad tgx = \frac{2u}{1-u^2}$$

۱۵) می‌توان نشان داد:

$$\int \sec x\, dx = Ln\,|\sec x + tg x| + c = Ln\left|tg(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\right| + c'$$

$$\int \csc x\, dx = Ln\,|\csc x - \cot g x| + c = Ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + c'$$

۱۶) در محاسبه انتگرال‌هایی به‌صورت $\int f(\sin^2 x, \cos^2 x)\, dx$ با توجه به روابط زیر:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \quad , \quad \sin^2 x = \frac{1}{1+\cot^2 x} = \frac{\tan^2 x}{\tan^2 x+1}$$

می‌توان از تغییر متغیر $u = \tan x$ استفاده کرد و نوشت:

$$du = (1+\tan^2 x)\, dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{1+u^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+u^2} \quad , \quad \sin^2 x = \frac{u^2}{u^2+1}$$

۱۷) در محاسبه انتگرال‌هایی، شامل $\int\sqrt{1\pm\cos x}\, dx$ و $\int\sqrt{1\pm\sin x}\, dx$ از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{1+\sin x} = \sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2} = \left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|$$

$$\sqrt{1-\sin x}=\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2}=\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|$$
$$\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|$$
$$\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|$$

۱۸) در محاسبه انتگرال‌هایی به‌صورت $\int \sec^m x dx$

الف) اگر m زوج باشد، $\sec^2 x$ را جدا کرده و بقیه $\sec x$ها را با استفاده از رابطه $\sec^2 x=1+\tan^2 x$ برحسب $\tan x$ می‌نویسیم و با تغییر متغیر $u=\tan x$ حل را ادامه می‌دهیم.

ب) اگر m فرد باشد، $\sec^2 x$ را جدا کرده و با استفاده از روش جزء به جزء فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases}\sec^{m-2} x=u\\ \sec^2 xdx=dv\end{cases}$$

مشابه همین روال برای انتگرال‌های به فرم $\int \csc^m xdx$ قابل انجام است.

۱۹) در محاسبه انتگرال‌هایی به‌صورت $\int \sec^m x\tan^n xdx$

الف) اگر m زوج باشد، $\sec^2 x$ را جدا کرده، سپس بقیه $\sec x$ ها را بر حسب $\tan x$ می‌نویسیم و با تغییر متغیر $u=\tan x$ حل را ادامه می‌دهیم.

ب) اگر n و m فرد باشد، $\sec x\tan x$ را جدا کرده، سپس بقیه $\tan x$ ها را بر حسب $\sec x$ می‌نویسیم و با تغییر متغیر $u=\sec x$ حل را ادامه می‌دهیم.

ج) اگر m فرد و n زوج باشد، کلیه $\tan x$ها را برحسب $\sec x$ می‌نویسیم تا مساله به انتگرالی از توان فرد $\sec x$ تبدیل شود.

مشابه همین روال برای انتگرال‌های به فرم $\int \csc^m x\cot^n xdx$ قابل انجام است.

محاسبه انتگرال‌های خاص با تغییر متغیرهای مثلثاتی

الف) در انتگرال‌های شامل عبارت $\sqrt{a^2-u^2}$ یا a^2-u^2، $(a>0)$ چنانچه تغییر متغیرهای معمول جبری به محاسبه انتگرال کمک نکند، معمولا تغییر متغیر $u=a\sin\theta$ یا $u=a\cos\theta$ مناسب خواهد بود. اگر $u=a\sin\theta$ باشد، کافی است $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ باشد؛ زیرا، وقتی θ این بازه را اختیار کند $\sin\theta$ تمام مقادیر بازه $\left[-1,1\right]$ و $u=a\sin\theta$ تمام مقادیر بازه $\left[-a,a\right]$ را دربر می‌گیرد؛ البته، اگر $u=a\cos\theta$ اختیار شود، کافی است $0\leq\theta\leq\pi$.

تذکر: در انتگرال‌های معین ـ که بعداً بررسی خواهند شد ـ اگر حدود θ را از بازه فوق اختیار کنیم، درگیر عبارت‌های شامل قدرمطلق نخواهیم شد.

ب) در انتگرال‌های شامل عبارت $\sqrt{a^2+u^2}$ یا a^2+u^2، $(a>0)$ چنانچه تغییر متغیرهای معمول جبری به محاسبه انتگرال کمک نکند، معمولا تغییر متغیر $u=a\tan\theta$ یا $u=a\cot\theta$ مناسب خواهد بود. اگر $u=\tan\theta$ باشد، $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ و اگر $u=a\cot\theta$ باشد، کافی است $0<\theta<\pi$ باشد.

ج) در انتگرال‌های شامل عبارت $\sqrt{u^2-a^2}$، $(a>0)$ چنانچه تغییر متغیرهای معمول جبری به محاسبه انتگرال کمک نکند، معمولا تغییر متغیر $u=a\sec\theta$ مناسب خواهد بود. در این صورت اگر $u\geq a$ باشد، آنگاه $0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$ و اگر $u\leq -a$ باشد، آنگاه $\pi\leq u<\frac{3\pi}{2}$ می‌باشد.

انتگرال معین (قضیه اساسی حساب) و خواص ابتدایی آن

اگر تابع f در فاصله $\left[a,b\right]$ پیوسته بوده و F یک تابع اولیه برای f باشد، انتگرال معین تابع f در فاصله مذکور به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

در انتگرال‌هایی معین خواص زیر برقرار است:

$$1)\ \int_a^b (k_1 f(x)+k_2 g(x))\,dx = k_1\int_a^b f(x)\,dx + k_2\int_a^b g(x)\,dx$$

$$2)\ \int_a^a f(x)dx = 0 \qquad 3)\ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$4)\ \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad c \in R$$

خاصیت فوق به «شکست فاصله انتگرال گیری» موسوم است.

چند قضیه در انتگرال‌های معین

ـ اگر f و g توابع کراندار و انتگرال پذیر در فاصله $[a,b]$ بوده و به جز در چند نقطه متناهی در بازه $[a,b]$ داشته باشیم $f(x) = g(x)$ آنگاه:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

ـ اگر f و g در فاصله $[a,b]$ انتگرال پذیر بود و به ازای هر x از این بازه، $f(x) \geq g(x)$ باشد؛ آنگاه:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

ـ اگر fدر فاصله $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد، آنگاه می‌توان نشان داد:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

ـ اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد، داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx$$ (n عدد صحیح نسبی است).

$$\int_0^{nT} f(x)\,dx = n\int_0^T f(x)\,dx$$ (n عدد صحیح نسبی است).

ـ با استفاده از روش تغییر متغیر می‌توان نشان داد:

۱) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$$ (پایایی تحت انتقال)

۲) $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)\,dx$ (انبساط یا انقباض بازه انتگرال‌گیری)

۳) $\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

۴) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

۵) $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx = \frac{a}{2}$

۶) $\int_0^\pi f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$

۷) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$

۸) $\int_0^\pi x\,f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$

- با استفاده از روش تغییر متغیر و شکست فاصله انتگرال‌گیری می‌توان نشان داد:

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\,dx + \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x)\,dx$$

و از اینجا نتیجه می‌شود:

۱) اگر $f(a-x) = -f(x)$ باشد، داریم: $\int_0^a f(x)\,dx = 0$

۲) اگر $f(a-x) = f(x)$ باشد، داریم:

$$\int_0^{na} f(x)\,dx = n\int_0^a f(x)\,dx \qquad n\in Z$$

انتگرال‌گیری به‌صورت معین از توابع زوج یا فرد در یک فاصله متقارن

قضیه: اگر f در فاصله متقارن $[-a\,,+a]$ پیوسته باشد؛ داریم:

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a \big(f(x)+f(-x)\big)\,dx$$

لذا، می‌توان نتیجه گرفت:

الف) اگر $f(-x)=f(x)$ (یعنی f تابعی زوج باشد)؛ آنگاه:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

ب) اگر $f(-x)=-f(x)$ (یعنی f تابعی فرد باشد)؛ آنگاه:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

انتگرال‌های ناسره (غیر عادی) و بررسی همگرایی و واگرایی آن

انتگرال‌های معین در دو وضعیت طبیعت ناسره دارند:

الف) یک یا هر دو حد بالایی و پایینی انتگرال، بی‌نهایت باشد.

ب) تابع زیر علامت انتگرال در حدود بالایی یا پایینی و یا نقاطی در بین فاصله انتگرال گیری بی کران شود.

الف) بی‌نهایت بودن حدود انتگرال‌گیری

اگر تابع f در فاصله $[a,+\infty)$ پیوسته باشد، آنگاه:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$$

اگر تابع f در فاصله $(-\infty\,,a]$ پیوسته باشد، آنگاه:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = F(a) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

اگر تابع f در فاصله $(-\infty\,,+\infty)$ پیوسته باشد، آنگاه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

در هر یک از حالات، فوق اگر حدهای نوشته شده موجود باشند (حاصل، عددی مشخص و محدود گردد)، انتگرال مورد نظر را همگرا و در غیر این صورت آن را واگرا می‌نامند.

آزمون مقایسه

اگر برای تمام xهای فاصله (a,b)، $0 \le f(x) \le g(x)$ باشد آنگاه:

همگرایی $\int_a^b g(x)dx$، همگرایی $\int_a^b f(x)dx$ را نتیجه می‌دهد. همگرایی بزرگه، همگرایی کوچیکه را نتیجه می‌دهد

واگرایی $\int_a^b f(x)dx$، واگرایی $\int_a^b g(x)dx$ را نتیجه می‌دهد. واگرایی کوچیکه، واگرایی بزرگه را نتیجه می‌دهد

همگرایی مشروط و مطلق

می‌دانیم چنانچه تابع f به ازا تمام مقادیر $x \in (a,b)$ پیوسته باشد، همواره داریم:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx$$

لذا، همگرایی انتگرال $\int_a^b |f(x)|dx$ همگرایی انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ را نتیجه می‌دهد و در این‌حالت می‌گوییم $\int_a^b f(x)dx$ همگرایی مطلق دارد؛ همچنین، چنانچه انتگرال $\int_a^b |f(x)|dx$ واگرا؛ اما، انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ همگرا باشد، می‌گوییم $\int_a^b f(x)dx$ همگرایی مشروط دارد.

ب) بی‌کران شدن تابع زیر علامت انتگرال

اگر تابع f در فاصله $[a,b)$ پیوسته ولی $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \pm\infty$ باشد، آنگاه:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a)$$

اگر تابع f در فاصله $(a,b]$ پیوسته ولی $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ باشد، آنگاه:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

اگر تابع f در فاصله $[a,b]$ به جز در نقطه c پیوسته و $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ باشد، آنگاه:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c^-} f(x)\,dx + \int_{c^+}^b f(x)\,dx$$

$$= \lim_{x\to c^-} F(x) - F(a) + F(b) - \lim_{x\to c^+} F(x)$$

در هر یک از حالات فوق اگر حدهای نوشته شده موجود باشند (حاصل عددی مشخص و محدود گردد)، انتگرال مورد نظر را همگرا و در غیر این صورت آن را واگرا می‌نامند.

چند نکته (قضیه)

۱) انتگرال ناسره $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ که در آن $a > 0$ می‌باشد، به ازای $p > 1$ همگراست و به ازای $p \le 1$ واگراست.

۲) انتگرال ناسره $\int_0^a \frac{dx}{x^p}$ که در آن $a > 0$ می‌باشد، به ازای $p < 1$ همگراست و به ازای $p \ge 1$ واگراست.

دو قضیه

۱) هرگاه تابع f در فاصله $[a, +\infty)$ پیوسته و همواره نامنفی بوده و $\lim_{x\to+\infty} x^P f(x) = L$ باشد:

الف) چنانچه $P > 1$ و L متناهی باشد، آنگاه $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ همگراست.

ب) چنانچه $P \le 1$ و $L \ne 0$ (L می‌تواند نامتناهی نیز باشد) آنگاه $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ واگراست.

۲) هرگاه تابع f در فاصله $(a, b]$ پیوسته و همواره نامنفی بوده و $\lim_{x\to a^+} (x-a)^P f(x) = L$ باشد:

الف) چنانچه $P < 1$ و L متناهی باشد آنگاه $\int_a^b f(x)\,dx$ همگراست.

ب) چنانچه $P \ge 1$ و $L \ne 0$ (L می‌تواند نامتناهی نیز باشد) آنگاه $\int_a^b f(x)\,dx$ واگراست.

توابع گاما و بتا

تابع گاما به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

ثابت می‌شود که تابع گاما به ازاء $\alpha>0$ همگراست.

مقادیر تابع $\Gamma(\alpha)$ به ازاء $\alpha\in\left[1\ ,\ 2\right]$ در جدولی مشخص شده است و برای محاسبه این تابع به ازاء $\alpha>2$ یا $\alpha<1$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)=\alpha!$$

می‌توان نشان داد:

$$\Gamma(1)=1 \qquad \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

نکته: هرچند انتگرالی که تابع گاما را تعریف می‌کند، فقط به ازاء $\alpha>0$ همگراست، ولی می‌توان تعریف $\Gamma(\alpha)$ را برای αهای منفی نیز تعمیم داد؛ بدین ترتیب که:

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} \qquad (\alpha<0\ ,\ \alpha\neq-1,-2,-3,\dots)$$

مثلاً داریم:

$$\Gamma(-\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{-\frac{1}{2}}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{\pi}$$

نکته: روابط زیر در مورد توابع گاما قابل اثباتند:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)} \qquad 0<x<1$$

$$2^{2x-1}\ \Gamma(x)\ \Gamma(x+\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}\ \Gamma(2x)$$

تابع بتا به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$B\ (\alpha\ ,\ \beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}\ (1-x)^{\beta-1}\ dx$$

که به ازاء $\alpha>0$ و $\beta>0$ همگراست.

نکته: دو رابطه زیر را در مورد توابع بتا به‌خاطر داشته باشید:

$$B\ (\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \qquad \alpha\ ,\ \beta>0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}\theta.\cos^{2n-1}\theta\ d\theta=\frac{\Gamma(m).\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)} \qquad m\ ,\ n>0$$

چند فرمول برای محاسبه انتگرال‌های ناسره خاص:

$$\int_0^\infty e^{-Px}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{P^2+b^2}{P^2+a^2}\right)\qquad (P\ge 0)$$

$$\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$

$$\int_0^\infty \frac{F(ax)-F(bx)}{x}dx=\left(F(0)-F(\infty)\right)\ln(\frac{b}{a})$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{P-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin P\pi}\qquad (0<P<1)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^P}dx=\frac{\pi}{2\Gamma(P)\sin\frac{P\pi}{2}}\qquad (0<P<1)$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^P}dx=\frac{\pi}{2\Gamma(P)\cos\frac{P\pi}{2}}\qquad (0<P<1)$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\qquad (a>0)$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}=\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx=\frac{\pi}{\sin a\pi}\qquad (0<a<1)$$

نکته: استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس برای محاسبه برخی انتگرال‌های ناسره

همان‌طوری که می‌دانیم تبدیل لاپلاس تابع f به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(f(x))=F(s)=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

بنابراین، انتگرال‌هایی در قالب $\int_0^\infty e^{-as}f(x)dx$ را می‌توان از طریق لاپلاس تابع f به ازای $s=a$ (که معمولاً برای همگرایی انتگرال حداقل شرط $a\ge 0$ لازم است) به‌دست آورد.

لازم است به‌خاطر داشته باشیم:

الف) لاپلاس برخی توابع اولیه در جدول زیر آمده است:

f(x)	e^{ax}	$\sin ax$	$\cos ax$	x^n	x^a
F(s)	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$

ب) اگر لاپلاس f(x) را F(s) بنامیم، داریم:

$$L(xf(x))=-F'(s) \quad , \qquad L\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\int_s^{\infty} F(s)ds$$

قضیه مقدار میانگین در انتگرال

اگر f در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد؛ آنگاه:

$$\exists c\in[a,b], \int_a^b f(x)dx=(b-a).f(c)$$

برای تعبیر هندسی این قضیه به بحث زیر دقت کنید.

با فرض آنکه در فاصله $[a,b]$ همواره $f(x)>0$ باشد:

بدیهی است $S=\int_a^b f(x)dx$ سطح محصور شده به منحنی f و محور xها را در فاصله $[a,b]$ نشان می‌دهد. طبق قضیه مقدار میانگین در انتگرال، دست‌کم یک c درفاصله $[a,b]$ وجود دارد که اگر مستطیلی با ابعاد (b - a) و f (c) ساخته شود اندازه سطح محصور شده به آن برابر S می‌باشد.

نکته: از قضیه مقدار میانگین نتیجه زیر به عمل می‌آید:

اگر m و M به ترتیب مقادیر مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق تابع f به ازاء xهای متعلق به فاصله $[a,b]$ باشند، داریم:

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$

تذکر: مقدار متوسط تابع پیوسته f در فاصله $[a,b]$ مطابق رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{f}=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

قضیه لایپ نیتس (مشتق گیری از انتگرال)

فرض کنید $q(x)$, $p(x)$ توابعی پیوسته و مشتق پذیر باشند و داشته باشیم:

$$f(x) = \int_{p(x)}^{q(x)} h(x,t)\,dt$$

اگر هدف یافتن $f(x)$ باشد، باید نخست در تابع $h(x,t)$، x را ثابت در نظر گرفته و تابع اولیه h را نسبت به متغیر t محاسبه کنیم، چنانچه این تابع اولیه را $H(x,t)$ بنامیم، با اعمال حدود انتگرال به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = H(x,t)\Big|_{p(x)}^{q(x)} = H(x,q(x)) - H(x,p(x))$$

اما اگر هدف یافتن $f'(x)$ باشد، نیازی به انجام مراحل فوق نبوده ضمناً، ممکن است محاسبه $H(x,t)$ امکان پذیر نباشد و می‌توان نوشت:

$$f'(x) = \int_{p(x)}^{q(x)} \frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\,dt + q'(x).h(x,q(x)) - p'(x).h(x,p(x))$$

همان‌طوری که قبلا نیز بیان کردیم، فرم‌های ساده شده‌ای از قضیه فوق می‌تواند به‌صورت زیر باشد.

۱) با فرض $f(x) = \int_{p(x)}^{q(x)} h(t)\,dt$ داریم:

$$f'(x) = q'(x).h(q(x)) - p'(x)h(p(x))$$

۲) با فرض $f(x) = \int_{a}^{q(x)} h(t)\,dt$ داریم:

$$f'(x) = q'(x).h(q(x))$$

انتگرال‌گیری معین از توابعی که در فاصله انتگرال‌گیری ماهیت منحصر به فردی ندارند (مانند توابع شامل قدر مطلق، جزء صحیح و...)

در این گونه موارد باید حدود انتگرال‌گیری را به فواصل کوچک‌تر به گونه‌ای بشکنیم که در هر کدام از این زیر فواصل بتوان تکلیف تابع زیر علامت انتگرال را مشخص نمود (مثلا، اگر تابع، شامل قدر مطلق باشد آن را بدون علامت قدر مطلق بنویسیم و یا اگر تابع شامل جزء صحیح باشد به جای عبارات شامل جزء صحیح یک عدد قرار دهیم)، سپس حل مساله و محاسبه انتگرال‌ها را ادامه دهیم.

توجه: مسائل این فصل به همراه مسائل کاربرد انتگرال می آیند.

یادداشت:

فصل هفتم

کاربردهای انتگرال معین

محاسبه سطح محصور به دو منحنی در یک فاصله
محاسبه حجم حادث از دوران یک سطح حول محورهای مختصات
محاسبه طول قوس یک منحنی در صفحه
محاسبه برخی حد مجموع‌ها (مجموع‌های ریمانی)
مجموعه تست کاربردهای انتگرال معین

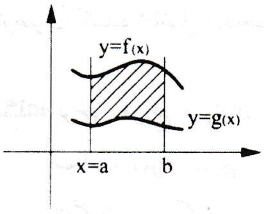
یادداشت:

محاسبه سطح محصور به دو منحنی در یک فاصله

فرض کنید g و f توابعی پیوسته در فاصله $[a,b]$ بوده و نمودار $f(x)$ در فاصله مذکور همواره بالای نمودار $g(x)$ باشد؛ یعنی:

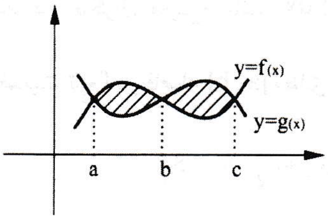
$$\forall x\in[a,b] \quad ; \quad f(x)\geq g(x)$$

سطح محصور شده بین نمودارهای این دو تابع و خطوط $x=b$ و $x=a$ عبارت است از:



$$S=\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,dx$$

نکته: به طور کلی برای محاسبه سطح محصور به دو منحنی $y=f(x)\ ,\ y=g(x)$ که همدیگر را قطع می‌کنند، نخست لازم است معادله آن دو منحنی را در یک دستگاه قرار داده و از حل معادله $f(x)=g(x)$ نقاط تلاقی آنها را مشخص نماییم؛ سپس، در بین هر دو نقطه تقاطع به طور جداگانه مساحت محصور شده به دو منحنی را محاسبه نموده و با جمع اندازه این مساحت‌ها سطح کل مورد نظر را به‌دست می‌آوریم؛



به عنوان مثال، به شکل مقابل دقت کنید:
دو منحنی f و g همدیگر را درسه نقطه $x=a$ ، $x=b$ و $x=c$ قطع کرده اند.

می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,dx \\ S_2 &= \int_b^c \big(g(x)-f(x)\big)\,dx \end{aligned}\right\} \rightarrow \ S=S_1+S_2$$

اگر نخواهیم به این نکته توجه داشته باشیم که در هر فاصله نمودار کدام منحنی در بالای منحنی دیگر است، می‌توانیم بنویسیم:

$$S = \left| \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx \right| + \left| \int_b^c (f(x)-g(x))\,dx \right|$$

به هر حال مهم این است که توجه داشته باشیم، در شکل قبل، حاصل انتگرال زیر:

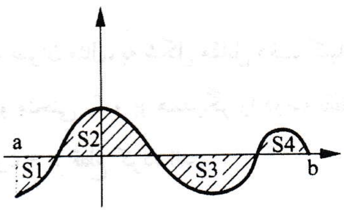
$$\int_a^c (f(x)-g(x))\,dx = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx + \int_b^c (f(x)-g(x))\,dx$$

توصیف کننده تفاضل مساحت‌های S_2 و S_1 می‌باشد و نه مجموع این دو.

نکته: برخی مواقع می‌توان حاصل یک انتگرال معین را با استفاده از تعبیر مساحتی انتگرال معین محاسبه نمود. بدیهی است لازمه استفاده از این بحث، یکی، امکان ترسیم تابع زیر علامت انتگرال و دیگری، امکان محاسبه سطح محصور شده به منحنی و محور xها در فاصله انتگرال‌گیری است.

در این‌باره دقت داریم سطوح محصور به منحنی و محور xها که در بالای محور xها واقع می‌شوند باید با علامت مثبت و سطوح محصور به منحنی و محور xها که در پایین محور xها واقع می‌شوند باید با علامت منفی لحاظ شوند؛

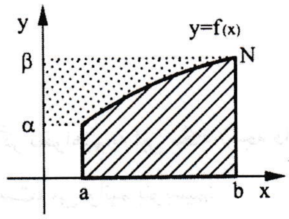
لذا، در انتگرال معینی؛ مانند، $\int_a^b f(x)\,dx$ چنانچه وضعیت تابع f در فاصله [a , b] مطابق شکل باشد، داریم:



$$\int_a^b f(x)\,dx = -S_1 + S_2 - S_3 + S_4$$

نکته: (قضیه انتگرال تابع معکوس)

مطابق شکل، فرض کنید f در فاصله [a , b] اکیداً صعودی و پیوسته بوده و $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$ در نظر گرفته شود، می‌توان نشان داد:



مساحت سطح هاشور خورده $= \int_a^b f(x)dx$

مساحت سطح نقطه چین شده $= \int_\alpha^\beta f^{-1}(x)dx$

و طبیعی است:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x)\,dx = b\beta - a\alpha$$

نکته: سطح محصور شده به منحنی قطبی $r=f(\theta)$ وخطوط شعاعی $\theta=\theta_1,\theta=\theta_2$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\,d\theta$$

نکته: سطح محصور شده به منحنی بسته پارامتری $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ در فاصله $t=t_1,t=t_2$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$S=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (xy'-yx')\,dt$$

اگر نمودار منحنی پارامتری فوق در بالای محور xها باشد، سطح بین نمودار و محور xها از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$S=\int xy'\,dt$$

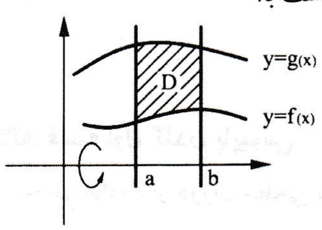
محاسبه حجم حادث از دوران یک سطح حول محورهای مختصات

الف) روش حلقه مستدیر

فرض کنید توابع f و g در فاصله [a , b] پیوسته بوده و داشته باشیم:

$$\forall x \in [a, b] \;:\; 0 < f(x) < g(x)$$

آنگاه چنانچه سطح محصور شده به نمودارهای به معادله $y=g(x)$, $y=f(x)$ و خطوط به معادله $x=a$, $x=b$ را حول محور xها دوران دهیم، حجم حاصل برابر است با:



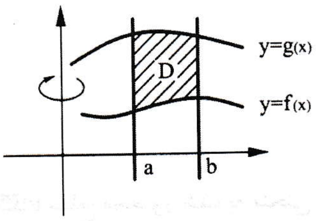
$$V=\pi\int_{a}^{b}\left(g^2(x)-f^2(x)\right)dx$$

ب) روش پوسته استوانه‌ای

فرض کنید توابع g و f در فاصله $[a\ ,b]$ پیوسته بوده و داشته باشیم:

$$\forall x \in [\,a\ ,\,b\,]\ :\ g(x)>f(x) \qquad (a>b>0)$$

آنگاه چنانچه سطح محصور شده به نمودارهای $y=g(x)\ ,\ y=f(x)$ و خطوط $x=b\ ,\ x=a$ را حول محور yها دوران دهیم، حجم حاصل برابر است با:



$$V=2\pi\int_a^b x\Big(g(x)-f(x)\Big)\,dx$$

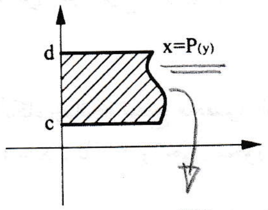
نکته: حجم حاصل از دوران ناحیه بین دو منحنی غیر متقاطع $x=g(y)$ و $x=f(y)$ و خطوط $y=b$ و $y=a$ حول خط $x=c$ که ناحیه مذکور را قطع نمی‌کند از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$V=\left|\pi\int_a^b\Big((f(y)-c)^2-(g(y)-c)^2\Big)dx\right|$$

به‌خصوص زمانی که $c=0$ باشد، رابطه مذکور حجم حاصل از دوران حول محور y ها را خواهد داد.

نکته: در برخی مواقع حجم حاصل از دوران یک سطح، حول محورy ها را باید با منطق روش حلقه مستدیر و حجم حاصل از دوران یک سطح حول محور xها را باید با منطق پوسته استوانه‌ای به‌دست آورد؛ به عنوان مثال، سطح هاشور خورده در شکل مقابل را در نظر بگیرید:

حجم حادث از دوران این سطح حول محور yها برابر است با:



$$V=\pi\int_c^d p^2(y)\,dy$$

حجم حادث از دوران این سطح حول محور xها برابر است با:

$$V=2\pi\int_c^d y\cdot P(y)\,dy$$

x = P(y)

نکته: قضیه اول گلدن پاپیوس

حجم حادث از دوران سطحی بسته به مساحت S حول خطی که فاصله مرکز ثقل سطح تا آن d می‌باشد (خط مذکور سطح مورد نظر را قطع نمی‌کند) از رابطه $V=2\pi dS$ قابل محاسبه است.

محاسبه طول قوس یک منحنی در صفحه

طول یک منحنی هموار (مشتق‌پذیر) را در هر فاصله می‌توان با استفاده از بحث‌های زیر به‌دست آورد:

الف) طول منحنی با ضابطه $y=f(x)$ در فاصله $x=a$ تا $x=b$ برابر است با:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\ dx$$

ب) طول منحنی با ضابطه $x=f(y)$ در فاصله $y=c$ تا $y=d$ برابر است با:

$$L=\int_c^d \sqrt{1+f'(y)^2}\ dy$$

ج) طول منحنی با معادلات پارامتری $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ در فاصله $t=t_1$ تا $t=t_2$ برابر است با:

$$L=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\,dx$$

د) طول منحنی با معادله قطبی $r=f(\theta)$ در فاصله $\theta=\theta_1$ تا $\theta=\theta_2$ برابر است با:

$$L=\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f^2(\theta)+f'^2(\theta)}\ d\theta$$

محاسبه سطح حاصل از دوران یک منحنی حول محورهای مختصات

منحنی $y=f(x)$ را در فاصله $[a,b]$ در نظر بگیرید:

الف) سطح حاصل از دوران این منحنی حول محور xها از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$S_x=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx$$

ب) سطح حاصل از دوران این منحنی حول محور yها از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$S_y=2\pi\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}dx$$

نکته: قضیه دوم گلدن پاپیوس

سطح حادث از دوران یک منحنی به طول L حول خطی که فاصله مرکز ثقل منحنی تا آن d می‌باشد (خط مذکور منحنی مورد نظر را قطع نمی‌کند) از رابطه $S=2\pi dL$ قابل محاسبه است.

محاسبه برخی حد مجموع‌ها (مجموع‌های ریمانی)

می‌توان نشان داد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{0}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$$

$$=\int_0^1 f(x)\,dx$$

دقت کنید در فرم تعمیم یافته داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(x)dx$$

تذکر: همان‌طور که می‌دانیم اگر تابع f، در فاصله $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد و با افراز بازه $[a,b]$ به n قسمت مساوی، طول هر زیر بازه را $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ در نظر بگیریم؛ مجموع بالای ریمان $U_n(f)$ و مجموع پایین ریمان $L_n(f)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$U_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x \quad , \quad L_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(\ell_i)\Delta x$$

که در آن ℓ_i نقطه مینیمم مطلق و u_i نقطه ماکزیمم مطلق f در بازه $[x_{i-1},x_i]$ است و چون تابع انتگرال‌پذیر است:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty} U_n(f)=\lim_{n\to\infty} L_n(f)$$

بنابراین طبق قضیه فشردگی، واضح است که در تابع انتگرال‌پذیر f خواهیم داشت:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$$

که در آن t_i نقطه‌ای دلخواه از بازه $[x_{i-1},x_i]$ است.

مجموعه تست کاربردهای انتگرال معین

۱ـ اگر $\int_{1-a}^{3a+2} \frac{\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)}{4^x+4^{-x}}dx = 0$ **باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟**

۱) $\frac{-3}{2}$ ۲) $\frac{-2}{3}$ ۳) $\frac{-1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

حل:

می‌دانیم تابع $y=\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)$ تابعی فرد و تابع $y=4^x+4^{-x}$ تابعی زوج است؛ لذا، تابع $f(x)=\frac{\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)}{4^x+4^{-x}}$ فرد بوده و انتگرال آن در یک فاصله متقارن صفر خواهد بود؛ پس، کافی است داشته باشیم:

$$3a+2=-(1-a) \quad\rightarrow\quad 3a+2=a-1 \quad\rightarrow\quad a=\frac{-3}{2}$$

دقت داریم حاصل انتگرال مورد نظر وقتی حد بالا و پایین آن یکسان باشد، نیز قطعاً برابر صفر خواهد بود (بدون توجه به زوج یا فرد بودن تابع انتگرال)؛ یعنی، زمانی که:

$$3a+2=1-a \quad\rightarrow\quad a=\frac{-1}{4}$$

۲ـ حاصل $I=\int_0^{2\pi}[\sin x]dx$ **کدام است؟**

۱) π ۲) $-\pi$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{-\pi}{2}$

حل:

اگر $0<x<\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{\pi}{2}<x<\pi \rightarrow 0<\sin x<1 \rightarrow [\sin x]=0$

اگر $\pi<x<2\pi \rightarrow -1\le \sin x<0 \rightarrow [\sin x]=-1$

لذا، می‌توان نوشت:

$$I=\int_0^{\pi}(0)dx+\int_{\pi}^{2\pi}(-1)dx=-\pi$$

۳ـ حاصل $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[4\cos^2 x\right]dx$ **کدام است؟**

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) π ۳) $\frac{5\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

حل :

دقت کنید که: $0\le x\le \frac{\pi}{2} \rightarrow 0\le \cos x\le 1 \rightarrow 0\le \cos^2 x\le 1 \rightarrow 0\le 4\cos^2 x\le 4$

پس، باید عبارت داخل جزء صحیح را به چهار قسمت تقسیم کنیم و با توجه به حدود انتگرال داریم:

۱) اگر $0\le 4\cos^2 x<1$:

$$0\le \cos^2 x<\frac{1}{4} \rightarrow 0\le \cos x<\frac{1}{2} \rightarrow \frac{\pi}{3}<x\le \frac{\pi}{2}$$

۲) اگر $1\le 4\cos^2 x<2$:

$$\frac{1}{4}\le \cos^2 x<\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}\le \cos x<\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \frac{\pi}{4}<x\le \frac{\pi}{3}$$

۳) اگر $2\le 4\cos^2 x<3$:

$$\frac{1}{2}\le \cos^2 x<\frac{3}{4} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\le \cos x<\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{\pi}{6}<x\le \frac{\pi}{4}$$

۴) اگر $3\le 4\cos^2 x<4$:

$$\frac{3}{4}\le \cos^2 x<1 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\le \cos x<1 \rightarrow 0<x\le \frac{\pi}{6}$$

پس می‌نویسیم:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(3)dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(2)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(1)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(0)dx$$
$$=3\left(\frac{\pi}{6}\right)+2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+(1)\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+0=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}$$

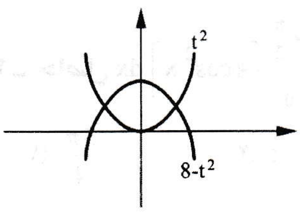
۴ـ اگر $f(t)=\text{Max}\{t^2\ ,8-t^2\}$ **باشد، حاصل** $I=\int_0^3 f(t)\,dt$ **کدام است؟**

۱) $\frac{13}{3}$ ۲) $\frac{59}{3}$ ۳) $\frac{22}{3}$ ۴) $\frac{43}{3}$

حل :

نمودارهای $y=8-t^2$ و $y=t^2$ همدیگر را در نقاط زیر قطع می‌کنند:

$$t^2=8-t^2 \rightarrow 2t^2=8 \rightarrow t^2=4 \rightarrow t=\pm 2$$



و با توجه به شکل مشاهده می‌شود:

$-2<t<+2$ وقتی $\rightarrow 8-t^2>t^2$

$t<-2$ یا $t>2$ وقتی $\rightarrow 8-t^2<t^2$

لذا، باید نوشت:

$$I=\int_0^3 f(t)\,dt=\int_0^2 (8-t^2)\,dt+\int_2^3 (t^2)\,dt=\left(8t-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^2+\frac{t^3}{3}\Bigg|_2^3$$

$$=\left[\left(16-\frac{8}{3}\right)-0\right]+\left[\frac{27}{3}-\frac{8}{3}\right]=\frac{59}{3}$$

۵ـ حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx$ **کدام است؟**

۱) 1 ۲) 2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

حل :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x\sin x}{1+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\sin x\,dx$$

با تغییر متغیر $1-\cos x=u$ داریم $\sin x\,dx=du$ و:

$$\begin{cases}x=0 \rightarrow u=1-\cos 0=1-1=0\\ x=\frac{\pi}{2} \rightarrow u=1-\cos\frac{\pi}{2}=1-0=1\end{cases}$$

و به‌دست می‌آید:

$$I=\int_0^1 u\,du=\frac{u^2}{2}\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}$$

۶ـ حاصل $\int_0^1\sqrt{t^2+t^3}\,dt$ **کدام است؟**

۱) $\frac{2}{15}(1+\sqrt{2})$ ۲) $\frac{2}{15}(1-\sqrt{2})$ ۳) $\frac{4}{15}(1+\sqrt{2})$ ۴) $\frac{4}{15}(1-\sqrt{2})$

حل :

$$I=\int_0^1\sqrt{t^2(1+t)}\,dt=\int_0^1 t\sqrt{1+t}\,dt$$

با تغییر متغیر $\sqrt{1+t}=u$ داریم:

$$1+t=u^2 \rightarrow dt=2u\,du$$

$t=0 \rightarrow u=1$ و $t=1 \rightarrow u=\sqrt{2}$

و به‌دست می‌آید:

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} \left(u^2-1\right) u\,(2u\,du) = 2\int_1^{\sqrt{2}} \left(u^4-u^2\right) du = 2\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}$$

$$= 2\left[\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{4}{15}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

تذکر ۱: با توجه به این‌که تابع تحت انتگرال، نامنفی است، حاصل آن نیز نامنفی خواهد بود؛ پس، بدون حل واضح است که گزینه‌های دوم و چهارم نادرستند.

تذکر ۲: با توجه به این‌که حدود t بازه $[0,1]$ است؛ نوشته‌ایم:

$$\sqrt{t^2+t^3} = \sqrt{t^2(1+t)} = |t|\sqrt{1+t} = t\sqrt{1+t}$$

۷ـ حاصل $I = \int_{-1}^{1} \frac{1+x}{2^x+2^{-x}}\,dx$ **کدام است؟**

۱) $\frac{2}{\ln 2}\left(\text{Arctg } 2-\frac{\pi}{4}\right)$
۲) $\frac{1}{\ln 2}\left(\text{Arctg } 2+\frac{\pi}{4}\right)$
۳) $\frac{2}{\ln 2}\text{Arctg } 2$
۴) $\frac{1}{\ln 2}\left(\text{Arctg } 2-\frac{\pi}{4}\right)$

حل:

تابع $\frac{1}{2^x+2^{-x}}$ تابعی زوج و تابع $\frac{x}{2^x+2^{-x}}$ تابعی فرد است؛ لذا، می‌توان نوشت:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1+x}{2^x+2^{-x}}dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2^x+2^{-x}}dx + \int_{-1}^{1} \frac{x}{2^x+2^{-x}}dx$$

$$= 2\int_0^1 \frac{dx}{2^x+2^{-x}} + 0 = 2\int_0^1 \frac{2^x\,dx}{1+(2^x)^2} = \frac{2}{\ln 2}\text{Arctg } 2^x\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{2}{\ln 2}\left\{\text{Arctg } 2-\text{Arctg } 1\right\} = \frac{2}{\ln 2}\left(\text{Arctg } 2-\frac{\pi}{4}\right)$$

۸ـ اگر $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}^n x\,dx$ **باشد، حاصل** $f(n)+f(n-2)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{n}{n-1}$
۲) $\frac{n}{n+1}$
۳) $\frac{1}{n-1}$
۴) $\frac{1}{n+1}$

حل :

$$f(n)+f(n-2)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n x dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{n-2} x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{n-2}x\left(tg^2x+1\right)dx$$

$$=\frac{tg^{n-1}x}{n-1}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{tg^{n-1}\frac{\pi}{4}}{n-1}-\frac{tg^{n-1}0}{n-1}=\frac{1}{n-1}$$

۹ـ حاصل $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$ **کدام است؟**

۱) $2\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ ۳) $2\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

حل :

با تغییر متغیر $x=tg\theta$ داریم:

$$dx=\left(1+tg^2\theta\right)d\theta\ ,\ \begin{cases} x=1 \Rightarrow tg\theta=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}\\ x=\sqrt{3} \Rightarrow tg\theta=\sqrt{3} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

و می‌توان نوشت:

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\left(1+tg^2\theta\right)d\theta}{tg^2\theta\sqrt{tg^2\theta+1}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\,\frac{1}{\cos\theta}}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta=\frac{-1}{\sin\theta}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=-\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)=-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)=-\left(\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)=2\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

تذکر:

$$\forall\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]:\cos\theta>0 \Rightarrow \sqrt{1+tg^2\theta}=\frac{1}{|\cos\theta|}=\frac{1}{\cos\theta}$$

۱۰ـ حاصل $\int_0^{\frac{5\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$ **کدام است؟**

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) هیچ کدام

حل :

می‌توان نوشت:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$$

از آنجا که $\sin 2x=\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}$، با تغییر متغیر $\operatorname{tg}x=u$ به‌دست می‌آید: $\left(1+\operatorname{tg}^2x\right)dx=du$ و:

$$I=\int\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\int\frac{\dfrac{2u}{1+u^2}}{1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2u}{1+u^2}\right)^2}\frac{du}{1+u^2}$$

$$=\int\frac{2u}{\left(1+u^2\right)^2}\frac{du}{1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2u}{1+u^2}\right)^2}=\int\frac{2u\,du}{\left(1+u^2\right)^2-2u^2}=\int\frac{2u\,du}{1+u^4}=\operatorname{tg}^{-1}\left(u^2\right)+c$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_0^{\frac{5\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{\operatorname{xin}^4x+\cos^4 x}dx=\operatorname{tg}^{-1}\left(\operatorname{tg}^2x\right)\Bigg|_0^{\frac{5\pi}{4}}=\operatorname{tg}^{-1}\left(\operatorname{tg}^2\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$$

۱۱ ـ حاصل $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

حل :

به وسیله تغییر متغیر $u=\frac{\pi}{2}-x$ به راحتی می‌توان نشان داد، برای هر مقدار حقیقی m داریم:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^m x}{\sin^m x+\cos^m x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^m x}{\sin^m x+\cos^m x}dx=\frac{\pi}{۴}$$

چرا که داریم:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^m x}{\sin^m x+\cos^m x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin^m\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\sin^m\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\cos^m\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}(-du)$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos^m u}{\cos^m u+\sin^m u}(-du)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^m x}{\cos^m x+\sin^m x}dx$$

و لذا، دیده می‌شود حاصل هر کدام از انتگرال‌های فوق $\frac{\pi}{4}$ می‌باشد، چرا که:

$$I+I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^m x}{\sin^m x+\cos^m x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^m x}{\sin^m x+\cos^m x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$$

بنابراین، حاصل انتگرال موردنظر در مسأله نیز $\frac{\pi}{4}$ می‌باشد.

۱۲ ـ حاصل $\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{2x^4}\right).e^{2x}dx$ **کدام است؟**

۱) $\frac{x+1}{2x^3}e^{2x}$ ۲) $\frac{x+1}{x^3}.e^{2x}$ ۳) $\frac{x-1}{2x^3}e^{2x}$ ۴) $\frac{x-1}{x^3}e^{2x}$

حل :

با اعمال روش جزءبه‌جزء برای محاسبه $\int\frac{1}{x^2}e^{2x}dx$ داریم:

مشتق		انتگرال
$\frac{1}{x^2}$		e^{2x}
	$+$	
$-\frac{2}{x^3}$		$\frac{1}{2}e^{2x}$
	$-$	
$\frac{6}{x^4}$	$\xrightarrow{+\int}$	$\frac{1}{4}e^{2x}$

$$\int\frac{1}{x^2}e^{2x}dx=\frac{1}{2x^2}e^{2x}+\frac{1}{2x^3}e^{2x}+\int\frac{3}{2x^4}e^{2x}dx$$

$$\Rightarrow\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{2x^4}\right)e^{2x}dx=\frac{e^{2x}}{2x^3}(x+1)$$

۱۳ ـ اگر $f(a)=f(b)$ **باشد، حاصل** $\int_a^b(x-a)(b-x)f''(x)dx$ **کدام است؟**

۱) $-2f(a)(a-b)-2\int_a^b f(x)dx$ ۲) $-2\int_a^b f(x)dx$

۳) $-2f(a)(a-b)+2\int_a^b f(x)dx$ ۴) $2f(a)(a-b)-2\int_a^b f(x)dx$

$$\int_a^b (x-a)(b-x)f''(x)\,dx \qquad , f(a)=f(b)$$

حل :

با روش جزء به جزء داریم:

مشتق		انتگرال
$(x-a)(b-x)$	$\searrow^{+}$	$f''(x)$
$-2x+a+b$	$\searrow^{-}$	$f'(x)$
-2	$\xrightarrow{+\int}$	$f(x)$

پس به‌دست می‌آید:

$$I=(x-a)(b-x)f'(x)\Big|_a^b-(-2x+a+b)f(x)\Big|_a^b-2\int_a^b f(x)dx$$

$$=(0-0)-\{(a-b)f(b)-(b-a)f(a)\}-2\int_a^b f(x)dx$$

اگر $f(a)=f(b)$ باشد، داریم:

$$I=-f(a)(a-b-b+a)-2\int_a^b f(x)dx=-2f(a)(a-b)-2\int_a^b f(x)dx$$

۱۴ ـ در حاصل $\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$ کدام جمله وجود دارد؟

۱) $-\sqrt{x^2+1}$ ۲) $+x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

۳) هر دو جمله ۴) هیچ کدام

حل :

با استفاده از روش جزء به جزء می‌نویسیم:

$$\begin{cases}u=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\\ dv=dx\end{cases}\rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}\\ v=x\end{cases}$$

لذا به‌دست می‌آید:

$$\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}+c$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۱۵ـ حاصل $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx$ **کدام است؟**

۱) $\frac{\pi^2}{4}-2$ ۲) $\frac{\pi^2}{4}+2$ ۳) $\frac{\pi^2}{2}-2$ ۴) $\frac{\pi^2}{2}+2$

حل :

مشتق		انتگرال
x^2	$+$	$\cos x$
$2x$	$-$	$\sin x$
2	$+$	$-\cos x$
0		$-\sin x$

$$I=\left(x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}-2$$

۱۶ـ در حاصل انتگرال $I=\int (\mathrm{Arc}\cos x)^2\,dx$ **کدام جمله زیر وجود ندارد؟**

۱) x^2 ۲) $x(\mathrm{Arc}\cos x)^2$

۳) $-2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Arc}\cos x$ ۴) $-2x$

حل :

با استفاده از روش جزءبه‌جزء داریم:

$$\begin{cases}u=(\mathrm{Arc}\cos x)^2\\ dv=dx\end{cases}\rightarrow\begin{cases}du=2\mathrm{Arc}\cos x\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ v=x\end{cases}$$

$$I=x(\mathrm{Arc}\cos x)^2-\int\frac{-2x\,\mathrm{Arc}\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

و با اعمال روش جزءبه‌جزء برای محاسبه $J=\int\frac{x\,\mathrm{Arc}\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ داریم:

$$\begin{cases}u=\mathrm{Arc}\cos x\\ dv=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx\end{cases}\rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ v=-\sqrt{1-x^2}\end{cases}$$

$$J=-\sqrt{1-x^2}\operatorname{Arc}\cos x-\int dx=-\sqrt{1-x^2}\operatorname{Arc}\cos x-x+C$$

پس به‌دست می‌آید:

$$I=x\left(\operatorname{Arc}\cos x\right)^2+2\left(-\sqrt{1-x^2}\operatorname{Arc}\cos x-x\right)+C$$
$$=x\left(\operatorname{Arc}\cos x\right)^2-2\sqrt{1-x^2}\operatorname{Arc}\cos x-2x+C$$

بنابراین، گزینه ۱ صحیح است.

۱۷ ـ حاصل $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx$ کدام است؟

۱) $-\cot x.\ln(\sin x)+\cot x-x+C$

۲) $-\cot x.\ln(\sin x)-\cot x+x+C$

۳) $-\cot x.\ln(\sin x)-\cot x-x+C$

۴) $\cot x-\ln(\sin x)+\cot x-x+C$

حل :

با اعمال روش جزءبه‌جزء داریم:

$$\begin{cases}\ln(\sin x)=u\\ \dfrac{dx}{\sin^2 x}=dv\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{\cos x}{\sin x}dx=du\\ -\cot x=v\end{cases}$$

پس:

$$I=-\cot x.\ln(\sin x)+\int \cot^2 x\,dx=-\cot x.\ln(\sin x)+\int\left(1+\cot^2 x-1\right)dx$$
$$=-\cot x.\ln(\sin x)-\cot x-x+C$$

۱۸ ـ فرم تجزیه کسرها برای $f(x)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)^2}$ کدام است ؟

۱) $\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}$

۲) $\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}+\frac{Dx+E}{(x+1)^2}$

۳) $\frac{A}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}$

۴) $\frac{Ax}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x+1)^2}$

حل :

با توجه به روش تجزیه کسرها می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}$$

۱۹ ـ حاصل $\int \frac{x^2}{2x^4+3x^2+1}dx$ **کدام است؟**

۱) $\operatorname{Arctan} x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{2}\,x\right)+c$

۲) $\operatorname{Arctan} x-\sqrt{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c$

۳) $\operatorname{Arctan} x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{2}\,x\right)+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+c$

۴) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{2}x\right)+c$

حل :

با استفاده از روش تجزیه کسرها داریم:

$$\frac{x^2}{2x^4+3x^2+1}=\frac{x^2}{\left(2x^2+1\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{2x^2+1}$$

لذا داریم:

$$I=\int\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{2x^2+1}\right)dx=\operatorname{Arctan} x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{2}x\right)+c$$

۲۰ ـ در محاسبه[۸۸] $I=\int\frac{2x^2-3x+3}{x\left(x^2-2x+1\right)}dx$ **ضریب** $\ln|x-1|$ **کدام می‌شود؟**

۱) 1 ۲) -1 ۳) 2 ۴) -2

حل :

بااستفاده از روش تجزیه کسرها داریم:

$$\frac{2x^2-3x+3}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

واضح است که باید، ثابت B را پیدا کنیم؛ لذا، با ضرب طرفین رابطه فوق در $(x-1)^2$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{2x^2-3x+3}{x}=\frac{A(x-1)^2}{x}+B(x-1)+C$$

با مشتق گیری از رابطه فوق و نگاه کردن به آن در $x=1$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{(4x-3)x-1\left(2x^2-3x+3\right)}{x^2}=\left((x-1)\ \text{جمله‌ای شامل}\right)+B+0$$

$$\rightarrow \frac{(4-3)(1)-(1)(2-3+3)}{1}=0+B+0 \rightarrow B=-1$$

لذا داریم:

$$I=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{-1}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}\right)dx=A\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{C}{x-1}+k$$

۲۱ـ حاصل انتگرال $\int \frac{x}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}dx$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\tan^{-1}x\right)+c$

۲) $\frac{1}{2}\left(\ln(x+1)+\tan^{-1}x\right)+c$

۳) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\ln\left(x^2+1\right)\right)+c$

۴) $\frac{1}{2}\left(\ln(x+1)+\ln\left(x^2+1\right)\right)+c$

حل :

$$\frac{x}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)}$$

$$=\frac{A(x+1)\left(x^2+1\right)+B\left(x^2+1\right)+(Cx+D)(x+1)^2}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}$$

با متحد قرار دادن صورت کسر اول و آخر نتیجه می‌شود:

$x^3:\ 0=A+C$

$x^2:\ 0=A+B+2C+D$

$x^1:\ 1=A+2D+C$

$x^0:\ 0=A+B+D$

با حل دستگاه شامل معادلات فوق داریم:

$$C=0\ ,\ A=0\ ,\ D=+\frac{1}{2}\ ,\ B=\frac{-1}{2}$$

لذا داریم:

$$I=\int\left(\frac{\frac{-1}{2}}{(x+1)^2}+\frac{\frac{1}{2}}{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\tan^{-1}x\right)+k$$

۲۲ـ اگر $I(x)=\int \frac{dx}{e^{2x}-e^x}$ باشد، حاصل $I(\ln 2)$ با این فرض که ثابت انتگرال‌گیری، صفر است، کدام می‌باشد؟

۱) $-\ln 2+\frac{1}{2}$ ۲) $e+1$ ۳) $e^2+\frac{1}{2}$ ۴) $\ln 2+1$

حل :

با تغییر متغیر $e^x=u$ داریم:

$$e^x dx=du \rightarrow dx=\frac{du}{u}$$

لذا می‌توان نوشت:

$$I=\int \frac{\frac{du}{u}}{u^2-u}=\int \frac{du}{u^2(u-1)}$$

با استفاده از روش تجزیه کسرها داریم:

$$\frac{1}{u^2(u-1)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u^2}+\frac{C}{u-1}=\frac{Au(u-1)+B(u-1)+Cu^2}{u^2(u-1)}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ -A+B=0 \\ -B=1 \end{cases} \rightarrow A=-1\ , B=-1\ ,\ C=1$$

لذا می‌توان نوشت:

$$I=\int\left(\frac{-1}{u}+\frac{-1}{u^2}+\frac{1}{u-1}\right)du=-\ln|u|+\frac{1}{u}+\ln|u-1|+k$$

$$=-\ln\left(e^x\right)+\frac{1}{e^x}+\ln\left|e^x-1\right|+k=-x+e^{-x}+\ln\left|e^x-1\right|+k$$

لذا، با فرض $k=0$ داریم:

$$I(\ln 2)=-\ln 2+e^{-\ln 2}+\ln\left(e^{\ln 2}-1\right)=-\ln 2+\frac{1}{2}$$

۲۳ـ اگر $f(x)=\cos x$ باشد، عدد c قضیه مقدار میانگین در انتگرال برای این تابع در فاصله $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ کدام است؟

۱) $\operatorname{Arccos}\left(\frac{2}{\pi}\right)$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2}{\pi}\right)$ ۴) 1

حل :

c قضیه مقدار میانگین در انتگرال در فاصله $[a,b]$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c) \;\rightarrow\; \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\cos c$$

$$\rightarrow\; \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\cos c \;\rightarrow\; 1=\frac{\pi}{2}\cos c \;\rightarrow\; \cos c=\frac{2}{\pi} \;\rightarrow\; c=\mathrm{Arc}\cos\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

۲۴ ـ اگر مقدار متوسط تابع $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}$ روی بازه $[4\,,b]$ برابر $\frac{4}{5}$ باشد، b کدام است؟

۱) 5 ۲) 7 ۳) 9 ۴) 16

حل :

$$\bar{f}=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \;\Rightarrow\; \frac{4}{5}=\frac{\int_4^b \frac{2}{\sqrt{x}}dx}{b-4} \;\Rightarrow\; \frac{4}{5}=\frac{\int_4^b 2x^{-\frac{1}{2}}dx}{b-4}$$

$$\Rightarrow\; \frac{4}{5}=\frac{4x^{\frac{1}{2}}\Big|_4^b}{b-4} \;\Rightarrow\; \frac{1}{5}=\frac{\sqrt{b}-2}{b-4} \;\Rightarrow\; \frac{1}{5}=\frac{\sqrt{b}-2}{(\sqrt{b}-2)(\sqrt{b}+2)}$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{5}=\frac{1}{\sqrt{b}+2} \;\rightarrow\; \sqrt{b}+2=5 \;\Rightarrow\; \sqrt{b}=3 \;\Rightarrow\; b=9$$

۲۵ ـ یک کران بالا برای $\left|\int_0^1 \frac{\cos x}{x+1}dx\right|$ کدام است؟

۱) $\mathrm{Ln}\,2$ ۲) $\mathrm{Ln}\,3$ ۳) π ۴) $\frac{\pi}{2}$

حل :

می‌دانیم $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b |f(x)\,dx|$؛ لذا، می‌توان نوشت:

$$\left|\int_0^1 \frac{\cos x}{x+1}dx\right|\le\int_0^1\left|\frac{\cos x}{x+1}\right|dx\le\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\mathrm{Ln}\,|x+1|\Big|_0^1=\mathrm{Ln}\,2$$

۲۶ـ کران‌هایی برای $I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x+e^{-x}}$ **عبارتند از:**

۱) $2\le I\le\frac{4}{e-1}$ ۲) $\frac{1}{e-1}\le I\le\frac{2e}{e+1}$ ۳) $1\le I\le\frac{e+1}{e}$ ۴) $\frac{2}{e-1}\le I\le 2$

حل:

برای یافتن مقادیر اکسترمم تابع $f(x)=\frac{1}{x+e^{-x}}$ در فاصله $[-1,1]$ نخست مقادیر اکسترمم تابع $g(x)=x+e^{-x}$ را در این فاصله تعیین می‌کنیم.

$$g'(x)=1-e^{-x}$$

نقطه بحرانی تابع g چنین است:

$$g'(x)=0 \quad\rightarrow\quad 1-e^{-x}=0 \quad\rightarrow\quad e^{-x}=1 \quad\rightarrow\quad x=0$$

لذا می‌نویسیم:

$$\begin{cases} g(-1)=-1+e^{1}=e-1\simeq 1.7 \\ g(0)=0+e^{0}=1 \\ g(1)=1+e^{-1}=1+\frac{1}{e}\simeq 1.4 \end{cases}$$

پس داریم:

$$\min g(x)=g(0)=1 \quad\rightarrow\quad \max f(x)=\frac{1}{1}=1$$

$$\max g(x)=g(-1)=e-1 \quad\rightarrow\quad \min f(x)=\frac{1}{e-1}$$

لذا، طبق نتیجه قضیه مقدار میانگین در انتگرال داریم:

$$\frac{1}{e-1}\le\frac{\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x+e^{-x}}}{1-(-1)}\le 1 \quad\rightarrow\quad \frac{2}{e-1}\le I\le 2$$

۲۷ـ از معادله $f(x)=1+\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}t.f(t).\cos t\,dt$، **حاصل** $f(0)$ **کدام است؟** $(f(x)>0)$

۱) $e^{1-\frac{\pi}{2}}$ ۲) 1 ۳) $e^{1+\frac{\pi}{2}}$ ۴) نامعین

حل :

$$f(x)=1+\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} t.f(t).\cos t\,dt$$

ملاحظه می‌شود $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t.f(t).\cos t\,dt=1+0=1$. حال، اگر از معادله انتگرالی داده شده مشتق‌گیری کنیم، به‌دست می‌آید:

$$f'(x)=xf(x)\cos x \quad\rightarrow\quad \frac{df}{dx}=xf(x)\cos x$$

$$\rightarrow\quad \frac{df}{f(x)}=x\cos x\,dx \xrightarrow{\int} \ln f(x)=x\sin x+\cos x+C$$

با اعمال شرط $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ داریم:

$$\ln\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}+C \quad\rightarrow\quad \ln(1)=\frac{\pi}{2}+C \quad\rightarrow\quad C=\frac{-\pi}{2}$$

پس می‌توان گفت:

$$\ln(f(x))=x\sin x+\cos x-\frac{\pi}{2} \quad\rightarrow\quad \ln(f(0))=0\sin 0+\cos 0-\frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow\quad \ln(f(0))=1-\frac{\pi}{2}\rightarrow f(0)=e^{1-\frac{\pi}{2}}$$

۲۸ـ اگر $f(t)=\int_{t}^{\frac{1}{t}}\frac{\cos tx}{x}dx$**، حاصل** $f'(1)$ **کدام است؟**

۱) $-2\cos 1$　　۲) $-2\sin 1$　　۳) $-\frac{1}{2}\cos 1$　　۴) $-\frac{1}{2}\sin 1$

حل :

طبق قضیه لایپ‌نیتس داریم:

$$f(t)=\int_{t}^{\frac{1}{t}}\frac{\cos tx}{x}dx \;\Rightarrow\; f'(t)=\int_{t}^{\frac{1}{t}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\cos tx}{x}\right)dx+\left(\frac{1}{t}\right)'\frac{\cos t.\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}-(t)'\frac{\cos t.t}{t}$$

$$=\int_{t}^{\frac{1}{t}}\frac{1}{x}(-x\sin tx)\,dx-\frac{1}{t^2}\frac{\cos 1}{\frac{1}{t}}-\frac{\cos t^2}{t}=\frac{1}{t}\cos tx\Big|_{t}^{\frac{1}{t}}-\frac{1}{t}\cos 1-\frac{1}{t}\cos t^2$$

$$=\frac{1}{t}\left(\cos 1-\cos t^2\right)-\frac{1}{t}\cos 1-\frac{1}{t}\cos t^2=-\frac{2}{t}\cos t^2 \Rightarrow f'(1)=-2\cos 1$$

۲۹ـ هرگاه به ازاء تمام مقادیر $x \geq 1$ داشته باشیم $f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$ و نمودار تابع f از نقطه $(1,1)$ بگذرد، حاصل $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ کدام است؟

۱) کوچک‌تر از $1 - \frac{\pi}{4}$
۲) کوچک‌تر از $1 + \frac{\pi}{4}$
۳) موجود نمی‌باشد.
۴) نمی‌توان اظهارنظر کرد.

حل:

از آنجاکه $(\forall x \geq 1 : f'(x) > 0)$، تابع f در فاصله $[1, +\infty)$ اکیداً صعودی است و داریم:

$$\forall x > 1 : f(x) > f(1)$$

بنابراین چون $f(1) = 1$، می‌توان نوشت:

$$\forall x > 1 : f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)} < \frac{1}{x^2 + 1}$$

اما با توجه به تساوی $f(x) = 1 + \int_1^x f'(t)\, dt$ نتیجه می‌شود:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1 + \int_1^\infty f'(t) dt < 1 + \int_1^\infty \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

و از آنجاکه:

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2 + 1} dt = \text{Arctg}\, t \Big|_1^\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

خواهیم داشت:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) < 1 + \frac{\pi}{4}$$

بنابراین، گزینه ۲ صحیح است.

۳۰ـ با فرض $(\alpha > -1)$ $I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\alpha x}}{xe^x} dx$، پس از محاسبه $I'(\alpha)$ به‌دست می‌آید:

۱) $I(\alpha) = \ln(1 + \alpha)$
۲) $I(\alpha) = \ln(2 + \alpha)$
۳) $I(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$
۴) $I(\alpha) = \frac{\ln(1 + \alpha)}{1 + \alpha}$

حل :

$$I'(\alpha)=\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^{x}}\right)dx=\int_0^{\infty}\frac{xe^{-\alpha x}}{xe^{x}}dx$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-(\alpha+1)x}dx=\frac{-1}{\alpha+1}e^{-(\alpha+1)x}\Big|_0^{\infty}=\frac{-1}{\alpha+1}\left(e^{-(\alpha+1)\infty}-e^{-(\alpha+1)0}\right)$$

چون $\alpha>-1$ است، $\alpha+1>0$ بوده و $e^{-(\alpha+1)\infty}=0$؛ پس داریم:

$$I'(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}\ \rightarrow\ I(\alpha)=\ln|\alpha+1|+c$$

و چون از رابطه داده شده در سؤال داریم:

$$I(0)=\int_0^{\infty}\frac{1-e^{0}}{xe^{x}}dx=0$$

مقدار c برابر صفر به‌دست می‌آید و داریم:

$$I(\alpha)=\ln(\alpha+1)$$

۳۱ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(e^{\frac{-1}{n}}+2e^{\frac{-2}{n}}+3e^{\frac{-3}{n}}+\dots+ne^{\frac{-n}{n}}\right)$ **کدام است؟**

۱) $1-\frac{2}{e}$ ۲) $1+\frac{2}{e}$ ۳) $2-\frac{1}{e}$ ۴) $1-\frac{1}{e}$

حل :

می‌توان نوشت:

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}e^{\frac{-1}{n}}+\frac{2}{n}e^{\frac{-2}{n}}+\frac{3}{n}e^{\frac{-3}{n}}+\dots+\frac{n}{n}e^{\frac{-n}{n}}\right)=\int_0^{1}xe^{-x}dx=\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right)\Big|_0^{1}$$

$$=\left(-e^{-1}-e^{-1}\right)-(0-1)=1-\frac{2}{e}$$

توجه داریم:

$$A=\int xe^{-x}dx$$

مشتق		انتگرال
x	$+$	e^{-x}
1	$-$	$-e^{-x}$
0		e^{-x}

$$A=-xe^{-x}-e^{-x}$$

۳۲ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+n+1}+\frac{n}{n^2+2n+4}+\frac{n}{n^2+3n+9}+\cdots\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ ۲) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ ۳) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

حل :

می‌توان نوشت:

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{n^2+n+1}+\frac{n^2}{n^2+2n+4}+\frac{n^2}{n^2+3n+9}+\cdots\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{3}{n}\right)+\left(\frac{3}{n}\right)^2}+\cdots\right\}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x+x^2}=\int_0^1\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\operatorname{Arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{Arctg}\sqrt{3}-\operatorname{Arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

۳۳ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{kn}{(k+n)^3}$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{8}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) صفر ۴) واگراست.

حل :

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{kn}{(k+n)^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{kn}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^3.\,n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{k}{n}}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^3}=\int_0^1\frac{x}{(1+x)^3}dx$$

با تغییر متغیر $1+x=u$ داریم $dx=du$ و $\begin{cases}x=0 & \to & u=1\\ x=1 & \to & u=2\end{cases}$ لذا، به‌دست می‌آید:

$$I=\int_1^2\frac{(u-1)du}{u^3}=\int_1^2\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u^3}\right)du=\left(\frac{-1}{u}+\frac{1}{2u^2}\right)\Bigg|_1^2=\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{-1}{1}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$$

۳٤ ـ مقدار a چقدر باشد تا انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right).\left(\operatorname{Arc}\tan x\right)^a}$ همگرا باشد؟

۱) $a<1$ ۲) $a>1$

۳) هر مقدار a ۴) همگرایی امکان پذیر نیست.

حل :

با تغییر متغیر $\operatorname{Arc}\tan x = u$ داریم:

$$\frac{1}{1+x^2}dx = du \quad , \quad \begin{cases} x=0 & \rightarrow \quad u=\operatorname{Arc}\tan(0)=0 \\ x=+\infty & \rightarrow \quad u=\operatorname{Arc}\tan(+\infty)=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

لذا به‌دست می‌آید:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{u^a}$$

و شرط همگرایی می‌طلبد که $a<1$ باشد. (طبق قضیه دوم P در انتگرال‌های ناسره)

۳۵ ـ انتگرال $\int_1^{\infty} \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2\left(1+e^x\right)}dx$:

۱) همگرای مطلق است. ۲) همگرای مشروط است.

۳) واگراست. ۴) واگرای مشروط است.

حل :

$$\forall x \geq 1 ; \left|\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2\left(1+e^x\right)}\right| \leq \frac{1}{x^2\left(1+e^x\right)} < \frac{1}{x^2}$$

و از آنجا که $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ همگراست، (طبق قضیه اول P در انتگرال‌های ناسره) $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2\left(1+e^x\right)}\right| dx$

نیز همگرا می‌باشد و در نتیجه $\int_1^{+\infty} \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2\left(1+e^x\right)}dx$ همگرایی مطلق دارد.

تذکر: دقت کنید که «واگرایی مشروط» اساساً معنا ندارد.

۳۶ـ مقدار C چقدر باشد تا انتگرال $\int_{1}^{+\infty}\left(\frac{C}{3x+1}+\frac{1}{x+5}-\frac{x}{x^2+3}\right)dx$ همگرا باشد؟

۱) فقط $C=0$ ۲) $C\leq 0$ ۳) $C\geq 0$ ۴) فقط $C=1$

حل :

$$\int_{1}^{+\infty}\left(\frac{C}{3x+1}+\frac{1}{x+5}-\frac{x}{x^2+3}\right)dx$$

$$=\left\{\frac{C}{3}\ln|3x+1|+\ln|x+5|-\frac{1}{2}\ln|x^2+3|\right\}\Bigg|_{1}^{+\infty}=\left\{\ln\frac{(3x+1)^{\frac{C}{3}}(x+5)}{(x^2+3)^{\frac{1}{2}}}\right\}\Bigg|_{1}^{+\infty}$$

برای همگرا شدن انتگرال، باید حد $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(3x+1)^{\frac{C}{3}}(x+5)}{(x^2+3)^{\frac{1}{2}}}$ صفر و بی‌نهایت نشود و چون x به بی‌نهایت میل می‌کند، لازم است درجه صورت و مخرج کسر یکسان باشد؛ یعنی، باید:

$$\frac{C}{3}+1=2\left(\frac{1}{2}\right)\quad\to\quad C=0$$

۳۷ـ $\int_{1}^{+\infty}\frac{e^x(x+1)}{x^{\frac{5}{4}}}dx$ و $\int_{0}^{1}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$ به ترتیب ...... و ...... هستند.

۱) همگرا، همگرا ۲) واگرا، همگرا ۳) واگرا، واگرا ۴) همگرا، واگرا

حل :

می‌دانیم $\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^P}$ فقط برای $P>1$ و $\int_{0}^{a}\frac{dx}{x^P}$ فقط برای $P<1$ همگراست.

حال، می‌توان نوشت:

$$\forall x\geq 1:\ \frac{e^x(x+1)}{x^{\frac{5}{4}}}>\frac{x+1}{x^{\frac{5}{4}}}>\frac{x}{x^{\frac{5}{4}}}>\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}$$

و چون $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}}$ واگراست، $\int_{1}^{+\infty}\frac{e^x(x+1)}{x^{\frac{5}{4}}}dx$ نیز واگراست.

$$\forall x \in R : \left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}}$$

و چون $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ همگراست، $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}\,dx}{\sqrt{x}}$ نیز همگراست (و البته همگرایی مطلق دارد).

۳۸ـ کدام‌یک از انتگرال‌های زیر همگرا است؟

۱) $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$ ۲) $J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$

۳)هردو ۴) هیچ‌کدام

حل :

ناسره بودن I به واسطه داشتن حد بالایی $+\infty$ می‌باشد و البته تابع زیر علامت انتگرال در کل بازه داده شده پیوسته است. چون وقتی $x \to +\infty$ داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

و می‌دانیم $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ همگرا است پس I نیز همگرا می‌باشد.

ناسره بودن J به واسطه داشتن حد پایینی 0 می‌باشد (که تابع زیر علامت انتگرال در آن‌جا نامعین می‌شود) و چون وقتی $x \to 0^+$ داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

و می‌دانیم $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$ همگرا است پس J نیز همگرا است.

۳۹ـ به ازاء چه مقدار α انتگرال $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x(1-\cos x)}{x^{\alpha}}\,dx$ **همگراست؟**

۱) $\alpha < 5$ ۲) $\alpha > 1$ ۳) $1 < \alpha < 5$ ۴) $\alpha < 1 \ , \ \alpha > 5$

حل :

$$I = \int_0^k \frac{\sin^2 x\left(1-\cos x\right)}{x^{\alpha}}\,dx + \int_k^{\infty} \frac{\sin^2 x\left(1-\cos x\right)}{x^{\alpha}}\,dx$$

رفتار تابع زیر علامت انتگرال برای $x \to 0$ هم‌ارز تابع زیر است:

$$\frac{x^2\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^\alpha}=\frac{1}{2}\frac{1}{x^{\alpha-4}}$$

شرط همگرایی $\int_0^k \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\alpha-4}}dx$ می‌طلبد:

$$\alpha-4<1 \to \alpha<5$$

رفتار تابع زیر علامت انتگرال برای $x \to \infty$ هم‌ارز تابع $\frac{\text{عدد محدود}}{x^\alpha}$ است و شرط همگرایی

$\int_k^\infty \frac{\text{عدد محدود}}{x^\alpha}dx$ می‌طلبد، $\alpha>1$ باشد.

پس، در کل برای همگرایی I باید $1<\alpha<5$.

۴۰ـ انتگرال‌های $I_1=\int_1^\infty \frac{\ln x}{x+a}dx$ با فرض $a>0$ و $I_2=\int_{-\infty}^{-1}\frac{e^x}{x}dx$ به ترتیب .... و .... هستند.

۱) همگرا، همگرا　　۲) واگرا، واگرا　　۳) همگرا، واگرا　　۴) واگرا، همگرا

حل:

با توجه به قضایای بیان شده برای انتگرال‌های ناسره نوع اول می‌توان نوشت:

برای I_1 داریم: $\lim_{x\to+\infty} x^1\frac{\ln x}{x+a}=+\infty$ ؛ بنابراین، I_1 واگراست و برای I_2 نیز با تغییر متغیر $x=-u$ می‌توان نوشت:

$$I_2=\int_{+\infty}^{1}\frac{e^{-u}(-du)}{-u}=-\int_1^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}du$$

اما $\lim_{u\to+\infty}u^2\frac{e^{-u}}{u}=0$ ؛ لذا، I_2 همگراست. بنابراین، گزینه ۴ صحیح است.

۴۱ـ حاصل $I=\int_0^1 x^2(\ln x)^3dx$ کدام است؟

۱) $\frac{-\Gamma(3)}{81}$　　۲) $\frac{-\Gamma(4)}{81}$　　۳) $\frac{-\Gamma(4)}{27}$　　۴) $\frac{-\Gamma(3)}{27}$

$$I=\int_0^1 x^2(\ln x)^3 dx$$

حل :

با تغییر متغیر $-\ln x = u$ داریم:

$$\ln x=-u \;\rightarrow\; x=e^{-u} \;\rightarrow\; dx=-e^{-u}du$$

$$\begin{cases} x=0^+ \;\Rightarrow\; u=-\ln\left(0^+\right)=-(-\infty)=+\infty \\ x=1 \;\Rightarrow\; u=-\ln(1)=0 \end{cases}$$

پس، به‌دست می‌آید:

$$I=\int_{+\infty}^{0}\left(e^{-u}\right)^2(-u)^3\left(-e^{-u}du\right)=-\int_0^{+\infty}u^3e^{-3u}du$$

با تغییر متغیر $3u=t$ داریم:

$$I=-\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{3}\right)^3 e^{-t}\frac{dt}{3}=-\frac{1}{81}\int_0^{\infty}t^3e^{-t}dt=\frac{-1}{81}\Gamma(4)$$

۴۲ ـ سطح محصور به منحنی $y=\tanh x$ و خط $y=1$ در ربع اول کدام است؟

۱) $\ln 2$ ۲) $\ln 3$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

حل :

بدیهی است از آنجا که $e^{+\infty}\rightarrow+\infty$ و $e^{-\infty}\rightarrow 0$ داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\tanh x=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\tanh x=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{e^{-x}}=-1$$

یعنی، خطوط $y=\pm1$ مجانب‌های تابع $y=\tanh x$ می‌باشند؛ پس، می‌توان گفت مقدار سطح مورد نظر چنین است:

$$S=\int_0^{+\infty}(1-\tanh x)dx=\left(x-\ln|\cosh x|\right)\Big|_0^{+\infty}$$

و از آنجا که:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln(\cosh x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln\left(\frac{e^x}{2}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\left(\ln e^x-\ln 2\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-(x-\ln 2)\right)=\ln 2$$

پس:

$$S = \ln 2 - (x - \ln\cosh x)\Big|_{x=0} = \ln 2 - (0 - \ln 1) = \ln 2$$

۴۳ـ سطح محدود به منحنی $y = \tanh x$ و خط $y = 1$ و خط $x = 0$ را حول محور xها دوران داده‌ایم؛ حجم حاصل چقدر است؟

۱) π^2 ۲) π ۳) 1 ۴) ∞

حل :

با توجه به آنچه در قبل گفتیم:

$$V_x = \pi \int_0^{+\infty} \left((1)^2 - (\tanh x)^2\right) dx = \pi \int_0^{+\infty} \left(1 - \tanh^2 x\right) dx$$

$$= \pi \tanh x \Big|_0^{+\infty} = \pi \left\{ \lim_{x \to +\infty} \tanh x - \tanh 0 \right\} = \pi(1 - 0) = \pi$$

۴۴ـ سطح محصور به منحنی $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + 2x^2 + 4}$ و محور x ها و خطوط $x = \sqrt{2}$ و $x = 0$ را حول محور y ها دوران داده‌ایم؛ حجم حادث چقدر است؟

۱) $\dfrac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$ ۲) $\dfrac{\pi^2}{4\sqrt{3}}$ ۳) $\dfrac{\pi^2}{\sqrt{3}}$ ۴) $\dfrac{\pi^2}{18}$

حل :

$$V_y = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x\,dx}{x^4 + 2x^2 + 4} = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x\,dx}{(x^2 + 1)^2 + 3}$$

با تغییر متغیر $x^2 + 1 = u$ داریم:

$$2x\,dx = du, \quad \begin{cases} x = 0 & \Rightarrow \quad u = 1 \\ x = \sqrt{2} & \Rightarrow \quad u = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad V_y = 2\pi \int_1^3 \frac{\frac{du}{2}}{u^2 + 3} = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_1^3 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left\{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right\} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} = \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$$

$$V_y = ۲\pi \int_a^b x\left(g(x) - f(x)\right) dx$$

۴۵ـ سطح محصور شده بین منحنی‌های $g(x)=\cos^2 x$ و $f(x)=\sin^2 x$ را در فاصله $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$ حول محورx ها دوران می‌دهیم؛ حجم حاصل چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi^2}{2}$ ۳) π ۴) π^2

حل :

نقاط تلاقی دو منحنی را پیدا می کنیم:

$$\sin^2 x=\cos^2 x \;\rightarrow\; tg^2 x=1 \;\rightarrow\; tgx=\pm 1 \;\rightarrow\; x=\pm\frac{\pi}{4},\pm\frac{3\pi}{4},\ldots$$

پس، هیچ‌کدام از نقاط تقاطع در بازه $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$ قرار ندارند.

$$V_x=\left|\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(f^2(x)-g^2(x)\right)dx\right|=\left|\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)dx\right|$$

$$=\left|\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx\right|=\left|\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos 2x\,dx\right|$$

$$=\left|\frac{\pi}{2}\left(\sin 2x\right)_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\right|=\left|\frac{\pi}{2}(-1-0)\right|=\frac{\pi}{2}$$

۴۶ـ اگر سطح محصور به منحنی $y=\cosh x$ و محور x و خطوط $x=a$ و $x=b$ را با S و طول منحنی $y=\cosh x$ را از $x=a$ تا $x=b$ L بنامیم، داریم:

۱) $S=L$ ۲) $S<L$

۳) $S>L$ ۴) غیر قابل تشخیص بوده و به a و b بستگی دارد.

حل :

$$L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+\sinh^2 x}\,dx=\int_a^b\cosh x\,dx=\sinh x\Big|_a^b=\sinh b-\sinh a$$

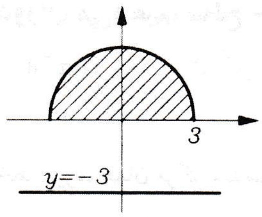
$$S=\int_a^b y\,dx=\int_a^b\cosh x\,dx=\sinh x\Big|_a^b=\sinh b-\sinh a$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۴۷ـ سطح نیم‌دایره $y=\sqrt{9-x^2}$ را حول خط $y=-3$ دوران می‌دهیم؛ حجم حاصل کدام است؟

۱) $9\pi(3+2\pi)$ ۲) $9\pi(4+3\pi)$ ۳) $9\pi(3+4\pi)$ ۴) $9\pi(2\pi+3)$

حل :



مختصات مرکز سطح نیم‌دایره‌ای؛ مانند، $y=\sqrt{R^2-x^2}$ به صورت $\left(0,\dfrac{4R}{3\pi}\right)$ می‌باشد؛ لذا، در این مسأله مرکز سطح نیم‌دایره $\left(0,\dfrac{4(3)}{3\pi}\right)$ می‌باشد.

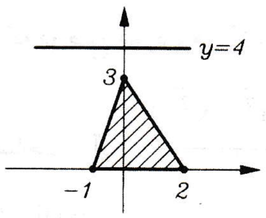
طبق قضیه گلدن پاپیوس حجم حاصل از دوران سطح نیم‌دایره مذکور برابر است با مساحت نیم‌دایره؛ یعنی، $\dfrac{\pi(3)^2}{2}$ ضربدر طولی که مرکز سطح نیم‌دایره در اثر دوران حول خط $y=-3$ طی می‌کند (که محیط دایره‌ای به شعاع $3+\dfrac{4}{\pi}$ می‌باشد)؛ یعنی، $2\pi\left(\dfrac{4}{\pi}+3\right)$ لذا:

$$V=\frac{9\pi}{2}(8+6\pi)=9\pi(4+3\pi)$$

۴۸ـ در اثر دوران سطح مثلثی با رئوس $(0,3)$ $(-1,0)$ $(2,0)$ حول خط $y=4$ چه حجمی تولید می‌شود؟

۱) 27π ۲) 9π ۳) 18π ۴) 54π

حل :



مساحت مثلث موردنظر $\dfrac{3\times3}{2}=\dfrac{9}{2}$ است و مختصات مرکز سطح آن چنین به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}=\dfrac{2-1+0}{3}=\dfrac{1}{3} \\ y_G=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}=\dfrac{0+0+3}{3}=1 \end{cases}$$

مختصات مرکز سطح مثلث
از روی مختصات رئوس آن

لذا، طبق قضیه گلدن پاپیوس حجم حاصل از دوران این مثلث حول خط $y=4$ برابر است با:

(محیط دایره به شعاع 3) $\times$ (مساحت مثلث) $=\left(2\pi(3)\right)\left(\dfrac{9}{2}\right)=27\pi$

(توجه داریم که فاصله مرکز سطح مثلث تا خط $y = 4$ برابر $4 - y_G = 3$ بوده و در اثر دوران مثلث حول این خط، مرکز سطح، محیط دایره‌ای با شعاع 3 را طی می‌کند).

۴۹ـ دایره‌ای به شعاع a را حول خطی که فاصله‌اش تا مرکزدایره $2a$ می‌باشد دوران می‌دهیم، سطح حاصل کدام است؟

۱) $16\pi^2 a^2$ ۲) $8\pi^2 a^2$ ۳) $6\pi^2 a^2$ ۴) $4\pi^2 a^2$

حل :

مرکز خط دایره، همان مرکز هندسی آن می‌باشد؛ لذا، طبق قضیه گلدن پاپیوس اندازه سطح مورد نظر برابر است با:

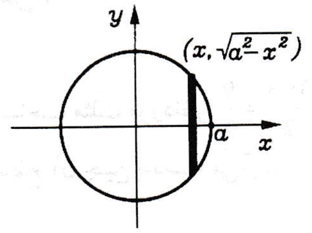
$S =$ (محیط دایره‌ای به شعاع $2a$) . (محیط دایره اصلی)

$$= \left(2\pi(2a)\right)\cdot\left(2\pi a\right) = 8\pi^2 a^2$$

۵۰ـ قاعده جسمی دایره $x^2 + y^2 = a^2$ است مقاطعی از جسم که توسط صفحات عمود بر محور x به وجود می‌آیند مثلث‌های متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه‌ای هستند که یک ساق آن‌ها روی قاعده جسم قرار دارد، حجم این جسم را بیابید.

۱) $\frac{8a^3}{3}$ ۲) $\frac{4a^3}{3}$ ۳) $\frac{8a^3}{5}$ ۴) $\frac{4a^3}{5}$

حل :



سطح مقطع المان حجمی جسم مورد نظر مثلثی قائم‌الزاویه است که دو ضلع عمود برهم آن دارای طول $2\sqrt{a^2 - x^2}$ و مساحت آن $\frac{\left(2\sqrt{a^2 - x^2}\right)\left(2\sqrt{a^2 - x^2}\right)}{2}$ می‌باشد، لذا داریم:

$$dV = \frac{2\sqrt{a^2 - x^2}.2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx}{2} = 2\left(a^2 - x^2\right)dx$$

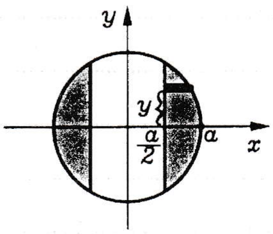
$$V = \int_{-a}^{a} 2\left(a^2 - x^2\right)dx = 4\int_{0}^{a}\left(a^2 - x^2\right)dx = 4\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a$$

$$= 4\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{8a^3}{3}$$

۵۱ـ قرص محدود به دایره $x^2+y^2=a^2$ حول محور y دوران و جسمی کروی ایجاد می‌کند. سوراخی به قطر a در امتداد محور y در درون کره ایجاد می‌کنیم، حجم کره سوراخ‌دار کدام است؟

۱) $\pi\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$ ۲) $\pi\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$ ۳) $\pi\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$ ۴) $\pi\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$

حل:



از دوران المان نشان داده شده حول محور y یک واشر پدید می‌آید که شعاع داخلی آن $r=\frac{a}{2}$ و شعاع خارجی آن $R=\sqrt{a^2-y^2}$ می‌باشد لذا حجم این واشر چنین است.

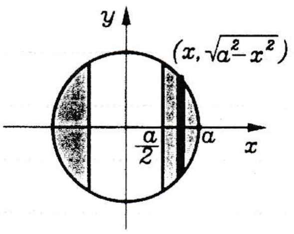
$$dV=\pi\left(R^2-r^2\right)dy=\pi\left(a^2-y^2-\frac{a^2}{4}\right)dy=\pi\left(\frac{3a^2}{4}-y^2\right)$$

$$v=\int_{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{\frac{a\sqrt{3}}{2}}\pi\left(\frac{3a^2}{4}-y^2\right)dy=2\pi\left(\frac{3a^2y}{4}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\pi\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$$

توجه داریم از تقاطع کره و استوانه داخلی به دست می‌آید:

$$r=R\ \rightarrow\ \frac{a}{2}=\sqrt{a^2-y^2}\ \rightarrow\ y^2=a^2-\frac{a^2}{4}\ \rightarrow\ y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

راه دیگر:



از دوران المان نشان داده شده حول محور y یک پوسته استوانه‌ای پدید می‌آید که شعاع آن x و ارتفاع آن $2\sqrt{a^2-x^2}$ و ضخامت آن dx می‌باشد، لذا حجم این پوسته چنین است.

$$dV=(2\pi x).\left(2\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$$

$$V=\int_{\frac{a}{2}}^{a}4\pi x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=4\pi\frac{-1}{3}\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{\frac{a}{2}}^{a}=\frac{\pi\sqrt{3}}{2}a^3$$

یادداشت: