بسم الله الرحمن الرحیم

جزوهٔ کلاســـی

معادلات دیفرانسیل (قسمت دوم)

دانشکدهٔ فنی (استاد نیسی) – واحد تهران جنوب

تهیه کننده :

حامد مظاهری

شما هم میتوانید مقالات خود را به ما ارسال کنید تا با نام شما در سایت قرار داده شود

Hamed.Mazaheri@Gmail.com

* تبدیلات لاپلاس :

یکی از روش های قوی برای حل معادلات دیفرانسیل ، استفاده از تبدیلات لاپلاس می باشد. در این روش ابتدا از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می گیریم. سپس با استفاده از قضایا و روابط مربوط به تبدیل لاپلاس معادله را به یک معادله درجه اول با مجهول $L[Y]$ تبدیل می شود. که پس از محاسبه $L[Y]$ و استفاده از تبدیل معکوس، Y را به دست می آوریم.

معرفی تبدیل لاپلاس :

فرض کنیم تابع حقیقی f که بر بازه $[0,+\infty)$ با ضابطه $y=f(x)$ تعریف شده و در شرایط معینی صدق کند (بعداً عنوان می شود)، در این صورت تبدیل لاپلاس تابع f که با نماد $L\{f(x)\}$ نشان داده می شود، توسط انتگرال ناسره زیر تعریف می شود :

$$L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, dx = F(s)$$

البته به ازای مقادیری از s که انتگرال فوق همگرا شود.

$$= \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} e^{-sx} f(x)\, dx$$

مثال :

$c =$ عدد ثابت

$$L[c] = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\cdot c\, dx = \frac{-c}{s} e^{-sx}\Big|_0^{+\infty} = \frac{-c}{s}\left(e^{-\infty} - e^{0}\right) = \frac{c}{s}$$

$$\Rightarrow \boxed{L[c] = \frac{c}{s}}$$

مثال: $L[e^{\alpha x}] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \cdot e^{\alpha x} dx = \int_0^{\infty} e^{(\alpha - s)x} dx$

$$= \frac{1}{(\alpha - s)} e^{(\alpha-s)x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha - s}\left(e^{-\infty} - e^{0}\right) = \frac{-1}{\alpha - s} = \frac{1}{s-\alpha}$$

$\alpha - s < 0$
$s > \alpha$

$$\Rightarrow L[e^{\alpha x}] = \frac{1}{s-\alpha}$$

* فرمولهای تبدیل لاپلاس:

۱) $L(c) = \frac{c}{s}$ $\qquad L^{-1}\left(\frac{c}{s}\right) = c$

۲) $L(e^{\alpha x}) = \frac{1}{s-\alpha}$ $\qquad L^{-1}\left(\frac{1}{s-\alpha}\right) = e^{\alpha x}$

۳) $L(\sin \alpha x) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$ $\qquad L^{-1}\left(\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\right) = \sin \alpha x$

$\rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\alpha^2}\right) = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x$

۴) $L(\cos \alpha x) = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$ $\qquad L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+\alpha^2}\right) = \cos \alpha x$

۵) $L(\sinh \alpha x) = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$ $\qquad L^{-1}\left(\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}\right) = \sinh \alpha x$

$\rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-\alpha^2}\right) = \frac{1}{\alpha} \sinh \alpha x$

۶) $L(\cosh \alpha x) = \frac{s}{s^2-\alpha^2}$ $\qquad L^{-1}\left(\frac{s}{s^2-\alpha^2}\right) = \cosh \alpha x$

۷) $L(x^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ $\qquad L^{-1}\left(\frac{n!}{s^{n+1}}\right) = x^n$

$\longrightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{s^{n+1}}\right) = \frac{x^n}{n!}$

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

۸) $L(x^{\alpha}) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$ $\qquad L^{-1}\left(\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\right) = x^{\alpha}$

تعریف تابع گاما: تابع گاما به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx$$

برای این تابع می توان اثبات کرد:

۱) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$

۲) $\begin{cases} \Gamma(n+1) = n! \\ n \in Z^{+} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad L(x^{\alpha}) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^{\alpha}\, dx \qquad sx = t \rightarrow dx = \frac{dt}{s}, \quad x = \frac{t}{s}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot \left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha} \frac{dt}{s} = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha}\, dt}_{\Gamma(\alpha+1)} \qquad x\Big|_0^{+\infty} \rightarrow t\Big|_0^{+\infty}$$

$$\Rightarrow \boxed{L(x^{\alpha}) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}}$$

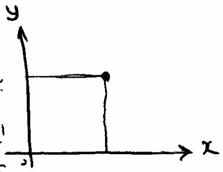
مثال: $\Gamma(\frac{1}{۲})$ را حساب کنید:

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{۲}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot x^{\frac{1}{۲}-1}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^{۲}}}{t} ۲t\,dt \qquad x = t^{۲},\ dx = ۲t\,dt$$

$$= ۲\int_0^{+\infty} e^{-t^{۲}}\, dt = ? \qquad x\Big|_0^{+\infty} \rightarrow t\Big|_0^{+\infty}$$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^{۲}}\, dx \qquad I = \int_0^{+\infty} e^{-y^{۲}}\, dy$$

با استفاده از این ایده ۲ انتگرال تبدیل شده است.



$$I^2=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\cdot\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dA$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty}e^{-r^2}r\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\cdot\int_0^{+\infty}re^{-r^2}dr=\frac{\pi}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\infty}-e^{0}\right)=\frac{\pi}{4}\qquad I^2=\frac{\pi}{4}\qquad \boxed{I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2I=2\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}}$$ ← حفظ شود

مثال: با استفاده از $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ ، $\Gamma(\frac{3}{2})$ ، $\Gamma(\frac{5}{2})$ ، $\Gamma(-\frac{1}{2})$ را بدست آورید.

فرمول ⟵ $\boxed{\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha)}$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi}=\boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\boxed{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=?\qquad\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\sqrt{\pi}=-\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad\boxed{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}}$$

مثال

1) $L(5)=\frac{5}{s}$

2) $L(x^3)=\frac{3!}{s^4}$

3) $L(\sin 2x)=\frac{2}{s^2+4}$

4) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)=\cos x$

5) $L(e^{3x})=\frac{1}{s-3}$

6) $L(\sinh 2x)=\frac{2}{s^2-4}$

7) $L^{-1}\left(\frac{9!}{s^{10}}\right)=x^9$

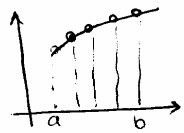
8) $L(\sqrt{x})=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{s^{\frac{1}{2}+1}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$

9) $L(x^{\frac{3}{4}}) = \dfrac{\Gamma(\frac{3}{4}+1)}{s^{\frac{3}{4}+1}}$

10) $L^{-1}\left(\dfrac{\Gamma(\frac{3}{5}+1)}{s^{\frac{3}{5}+1}}\right) = x^{\frac{3}{5}}$

* قضایای تبدیل لاپلاس:

۱- قضیهٔ وجودی تبدیل لاپلاس: فرض کنیم تابع حقیقی f بر بازه $[0, +\infty)$ تعریف شده و در شرایط زیر صدق کند:



الف) f بر $[0, +\infty)$ پیوستهٔ تکه‌ای باشد.

ب) ثابت‌های حقیقی مانند α و K و M $(K>0)$ موجود باشند، به قسمی که:

$$\forall x \qquad x \geq M \Longrightarrow |f(x)| \leq Ke^{\alpha x}$$

← (در این حالت گفته می‌شود که تابع f از زمانی که $x \to +\infty$ از ردهٔ نمایی است و می‌نویسیم $f \in E_\alpha$)

در این صورت می‌توان نشان داد که تبدیل لاپلاس تابع f به ازای هر $s > \alpha$ وجود دارد.

۲- تبدیل لاپلاس و تبدیل معکوس لاپلاس تبدیلات خطی می‌باشند. یعنی:

1) $L[\alpha f \pm \beta g] = \alpha L[f] \pm \beta L[g]$

2) $L^{-1}[\alpha F(s) \pm \beta G(s)] = \alpha L^{-1}[F(s)] \pm \beta L^{-1}[G(s)]$

۳- قضیهٔ لاپلاس مشتق: فرض کنیم توابع $f^{(k)}_{(x)}$ و $k = 0, 1, \dots, n-1$ بر $[0, +\infty)$ پیوستهٔ تکه‌ای بوده و $f^{(k)}_{(x)} \in E_\alpha$ باشند. حال اگر $f^{(n)}_{(x)}$ بر $[0, +\infty)$ پیوستهٔ تکه‌ای باشد و از ردهٔ نمایی باشد، تبدیل لاپلاس آن از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{L[f^{(n)}] = s^n L[f] - s^{n-1} f_{(0)} - s^{n-2} f'_{(0)} - \dots - f^{(n-1)}_{(0)}}$$

$$n=1 \rightarrow L[y'] = sL[y] - f_{(0)}$$

$$n=2 \rightarrow L[y''] = s^2 L[y] - s f_{(0)} - f'_{(0)}$$

$$n=3 \rightarrow L[y'''] = s^3 L[y] - s^2 f_{(0)} - s f'_{(0)} - f''_{(0)}$$

۴- قضیهٔ مشتق لاپلاس:

$$\boxed{L\left(x^n f_{(x)}\right) = (-1)^n \left(F_{(s)}\right)^{n}}$$

$$n=2 \rightarrow L\left(x^2 f_{(x)}\right) = (-1)^2 F''_{(s)}$$

مثال: $L\left[e^{2x}\right] = \dfrac{1}{s-2}$ $\qquad$ $L\left(x^2 e^{2x}\right) = (-1)^2 \left(\dfrac{1}{s-2}\right)''$

$$\left(\frac{1}{s-2}\right)' = \frac{-1}{(s-2)^2} \qquad = \frac{2(s-2)}{(s-2)^4} = \frac{2}{(s-2)^3}$$

$$\boxed{L^{-1}\left((-1)^n F^{(n)}_{(s)}\right) = x^n L^{-1}\left(F_{(s)}\right) = x^n f_{(s)}}$$

۵- قضیهٔ لاپلاس انتگرال:

فرض کنیم تابع $f_{(x)}$ دارای تبدیل لاپلاس $F_{(s)}$ باشد و $g_{(x)} = \int_0^x f_{(t)}\,dt$.

در این صورت تابع g دارای تبدیل لاپلاس است که از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$L\left(\int_0^x f_{(t)}\,dt\right) = \frac{L(f)}{s} = \frac{F_{(s)}}{s}$$

توان s برابر با تعداد انتگرال‌گیری است.

$$L^{-1}\left(\frac{F_{(s)}}{s}\right) = \int_0^x \underbrace{L^{-1}\left(F_{(s)}\right)}_{\text{برحسب } t} dt$$

$$\begin{cases} L^{-1}\left(\dfrac{F_{(s)}}{s^n}\right) = \displaystyle\int_0^x \int_0^x \cdots \int_0^x L^{-1}\left(F_{(s)}\right) (dt)^n \\ n \geq 1 \end{cases}$$

مثال :

$$f(x)=e^{3x} \qquad L(f)=\frac{1}{s-3}$$

$$g(x)=\int_0^x e^{3t}\,dt \Rightarrow L(g)=\frac{\frac{1}{s-3}}{s}=\frac{1}{s(s-3)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s-3)}\right)=\int_0^x\int_0^x \underbrace{L^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right)}_{e^{3t}}dt\,dt$$

$$\int_0^x e^{3t}\,dt=\frac{1}{3}e^{3t}\Big|_0^x=\frac{1}{3}\left(e^{3x}-1\right)$$

$$\frac{1}{3}\int_0^x\left(e^{3t}-1\right)dt=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}e^{3t}-t\right)\Big|_0^x=\cdots$$

* قضیهٔ انتگرال از لاپلاس :

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{\infty}F(s)\,ds$$

$$L^{-1}\left(\int_s^{+\infty}F(s)\,dt\right)=\frac{L^{-1}(F(s))}{x}=\frac{f(x)}{x}$$

توضیحات بیشتر در صفحهٔ حل تمرین ذکر شد.

مثال : شرط موجود $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$

$$L\left(\frac{\sin x}{x}\right)=?$$

$$\Rightarrow L\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\int_s^{+\infty}L(\sin x)\,dt=\int_s^{+\infty}\frac{1}{s^2+1}\,dt$$

$$\int_s^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt=\operatorname{arctg} t\Big|_s^{+\infty}=\operatorname{arctg}+\infty-\operatorname{artg} s$$

$$=\boxed{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} s}$$

تذکر: هرگاه محاسبهٔ $L^{-1}(G(s))$ مشکل باشد ولی محاسبهٔ $L^{-1}(G'(s))$ ساده‌تر باشد، برای محاسبهٔ $L^{-1}(G(s))$ از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم :

$$L^{-1}(G(s))=-\frac{L^{-1}(G'(s))}{x}$$

مثال :

1) $L^{-1}\left(\ln\sqrt{s+1}\right) = ?$ $\qquad L^{-1}\left(\frac{1}{2}\ln(s+1)\right) = \frac{1}{2}L^{-1}\left(\ln(s+1)\right)$

$$= -\frac{\frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)}{x} = -\frac{1}{2x}\times e^{-x} = \boxed{\frac{-e^{-x}}{2x}}$$

2) $L^{-1}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{s^2+4}}{s-3}\right)\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{2}\ln(s^2+4) - \ln(s-3)\right)$

$$= -\frac{\frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{2s}{s^2+4}\right) - L^{-1}\frac{1}{s-3}}{x} = -\boxed{\frac{\cos 2x - e^{3x}}{x}}$$

3) $L^{-1}\left(\frac{1}{s}\ln\left(\frac{s+1}{s}\right)\right) = \int_0^x L^{-1}\left(\ln\left(\frac{s+1}{s}\right)\right)dt \quad *$

$$L^{-1}\left(\ln\left(\frac{s+1}{s}\right)\right) = L^{-1}\left(\ln(s+1) - \ln s\right) = -\frac{L^{-1}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s}\right)}{x}$$

$$= -\frac{e^{-x}-1}{x} = \frac{1-e^{-x}}{x} \qquad * = \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}dt$$

4) $L\left(\int_0^x \frac{e^{-2t}-e^{-3t}}{t}dt\right) = \frac{L\left(\frac{e^{-2x}-e^{-3x}}{x}\right)}{s}$

$$= \frac{\int_s^{+\infty} L\left(e^{-2x}-e^{-3x}\right)dt}{s} = \frac{\int_s^{+\infty}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}\,dt}{s}$$

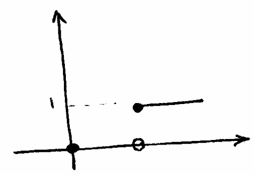
$$= \frac{\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+3}\right)dt}{s} = \frac{\ln(t+2) - \ln(t+3)\Big|_s^{+\infty}}{s} = \frac{\ln\left(\frac{t+2}{t+3}\right)\Big|_s^{+\infty}}{s}$$

$$= \frac{0 - \ln\left(\frac{s+2}{s+3}\right)}{s}$$

* قضیهٔ انتقال روی محور x ها:

تعریف تابع پله‌ای یکه یا تابع هوی ساید

$$u_c(x) = H(x-c) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x < c \\ 1 & x \geqslant c \end{cases}$$



اگر تابع $f(x)$ دارای تبدیل لاپلاس $F(s)$ باشد، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$L\left(u_c(x) . f(x-c)\right) = e^{-cs} L\left(f(x)\right) = e^{-cs} F(s)$$

$$L^{-1}\left(e^{-cs} F(s)\right) = u_c(x) . L^{-1}\left(F(s)\right) = u_c(x) . f(x-c)$$

$$x \to x-c$$

مثال:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x < 2 \\ \underbrace{x^2+3x}_{f(x-2)} & x \geqslant 2 \end{cases} \qquad f(x) = ?$$

$$x-2 \to x = t+2$$

$$x^2+3x = (t+2)^2+3(t+2)$$

$$\to t^2+4t+4+3t+6 = t^2+7t+10$$

$$f(x) = x^2+7x+10$$

$$g(x) = u_2(x) .. \quad x^2+3x = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x < 2 \\ 1 & x \geqslant 2 \end{cases}$$

$$L\left(g(x)\right) = e^{-cs} . L\left(f(x)\right) = e^{-2s}\left(\frac{2!}{s^3} + \frac{7}{s^2} + \frac{10}{s}\right)$$

مثال:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x < 1 \\ x^2-1 & x \geqslant 1 \end{cases} \quad \to f(x-1)$$

$$x-1 = t \to x = t+1$$

$$x^2-1 = (t+1)^2-1$$

$$= t^2+2t+1-1 = t^2+2t$$

$$L(g(x)) = e^{-s} L(x^2+2x) = e^{-s}\left(\frac{2!}{s^3} + \frac{2}{s^2}\right) \qquad f(x) = x^2+2x$$

71

$$L^{-1}\left(e^{-2s}\frac{1}{s-2}\right) = u_2(x) . L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)\Big|_{x\to x-2}$$

$$= u_2(x) . e^{2x}\Big|_{x\to x-2} = u_2(x)\, e^{2(x-2)} = u_2(x) . e^{2x-4}$$

$$\begin{cases} 0 & 0 \leq x < 2 \\ e^{2x-4} & x \geq 2 \end{cases}$$

* لاپلاس تابع چندضابطه‌ای :

می‌توان تابع چندضابطه‌ای $g(x)$ را به شکل زیر نوشت :

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & 0 \leq x < c_1 \\ g_2(x) & c_1 \leq x < c_2 \\ \vdots & \\ g_{n-1}(x) & c_{n-2} \leq x < c_{n-1} \\ g_n(x) & x \geq c_{n-1} \end{cases}$$

به این صورت

$$\rightarrow \quad g(x) = g_1(x) + u_{c_1}(x) . (g_2 - g_1) + u_{c_2}(x)(g_3 - g_2) + \cdots + u_{c_{n-1}}(x)(g_n - g_{n-1})$$

که برای محاسبه $L\{g\}$ از طرف دوم لاپلاس می‌گیریم :

مثال

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \pi \\ 0 & \pi \leq x < 2\pi \\ \sin x & x \geq 2\pi \end{cases}$$

$$f(x) = x + u_\pi(x)(0 - x) + u_{2\pi}(x)(\sin x - 0)$$

$$L(x) = \frac{1}{s^2} \qquad L\left(u_\pi(x)(-x)\right) = -L\left(u_\pi(x) . x\right)$$

$$f(x-\pi) \qquad f = ?$$

$$= e^{-\pi s} L(x+\pi) = e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s}\right)$$

$$f(x) = x + \pi$$
$$x - \pi = t$$
$$\rightarrow x = t + \pi$$
$$f(t) = \pi + t$$

$$\begin{cases} 0 & 0 \leqslant x < \pi \\ x & x \geqslant \pi \end{cases}$$

$$u_{c\pi}(x)\sin x = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x < 2\pi \\ \sin x & x \geqslant 2\pi \end{cases}$$

$x - 2\pi = t$ $\quad f(x-2\pi)$

$x = t + 2\pi \Rightarrow \sin x = \sin(t+2\pi) = \sin t = f(x) = \sin x$

$$L\left(u_{c\pi}(x) \cdot \sin x\right) = e^{-2\pi s} \cdot L(\sin x) = \underline{\qquad}$$

تضیه انتقال برروی محور s ها:

فرض کنیم تابع $f(x)$ دارای تبدیل لاپلاس $F(s)$ باشد و $g(x) = e^{\alpha x} f(x)$ در این صورت $g(x)$ دارای تبدیل لاپلاس است و داریم:

$$L(g(x)) = L\left(e^{\alpha x} \cdot f(x)\right) = \underset{s \to s-\alpha}{L(f(x))} = F(s-\alpha)$$

$$L^{-1}\left(F(s-\alpha)\right) = e^{\alpha x} \cdot L^{-1}\left(F(s)\right) = e^{\alpha x} \cdot f(x)$$

مثال: $L\left(e^{3x}\sin 2x\right) = \underset{s \to s-3}{\dfrac{2}{s^2+4}} = \dfrac{2}{(s-3)^2+4}$

$$L\left(e^{-2x}\cosh x\right) = \underset{s \to s+2}{\frac{s}{s^2-1}} = \frac{s+2}{(s+2)^2-1}$$

مثال :

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right) \qquad s^2+s+1=s^2+s+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1$$

$$(s+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}x}L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\underbrace{\tfrac{3}{4}}_{\alpha^2}}\right)=e^{-\frac{1}{2}x}\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

مثال :

$$L^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2+4s+5}\right) \qquad s^2+4s+5=(s+2)^2+1$$

$$=L^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+2)^2+1}\right)=L^{-1}\left(\frac{s+2-1}{(s+2)^2+1}\right)=e^{-2x}L^{-1}\left(\frac{s-1}{s^2+1}\right)$$

$$e^{-2x}\left(L^{-1}\frac{s}{s^2+1}-L^{-1}\frac{1}{s^2+1}\right)=\boxed{e^{-2x}(\cos x-\sin x)}$$

* قضیهٔ پیچش یا کانولوشن :

فرض کنیم توابع f و g بر $[0,+\infty)$ تعریف شده و به ازای هر $x>0$ پیچش دو تابع f و g که با نماد $f*g$ یا $g*f$ نمایش می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{(x)}*g_{(x)}=\int_0^x f(x-t)\cdot g(t)\,dt=\int_0^x f(t)\cdot g(x-t)\,dt$$

- قضیه : اگر f و g دارای تبدیل لاپلاس $F(s)$ و $G(s)$ باشد، در این صورت :

$$L\left(f_{(x)}*g_{(x)}\right)=F(s)\cdot G(s)$$

$$L^{-1}\left(F(s)\cdot G(s)\right)=\left(f_{(x)}*g_{(x)}\right)=\int_0^x f(x-t)\,g(t)\,dt$$

مثال : $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s-2)}\right)=?$

$$F(s)=\frac{1}{s^2}\rightarrow f(x)=x$$

$$G(s)=\frac{1}{s-2}\rightarrow g(x)=e^{2x}$$

$$= (f_{(x)} * g_{(x)}) = \int_0^x e^{2x} \cdot x \, dt = \int_0^x e^{2t} \cdot (x-t)\,dt$$

$x \to t \qquad x \to x-t$

$x-t$	e^{2t}
-1	$\frac{1}{2} e^{2t}$
0	$\frac{1}{4} e^{2t}$

$$= \frac{1}{2}(x-t)e^{2t} + \frac{1}{4} e^{2t} \Big|_0^x$$

$$= \frac{1}{4} e^{2x} = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$$

مثال: $L^{-1}\left(\frac{1}{s^{10}(s-2)}\right) = \underbrace{\int_0^x \cdots \int_0^x}_{\text{۱۰ بار انتگرال}} L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) dt \cdots dt \quad = ?$

مثال: $L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)(s^2-9)}\right)$

$$f_{(x)} = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$g(x) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-9}\right) = \frac{1}{3}\sinh 3x$$

$$= \int_0^x \frac{1}{2}\sin 2t \cdot \frac{1}{3}\sinh 3(x-t)\,dt$$

* حل معادله به کمک تبدیل لاپلاس:

مثال: $y'' - y' + 4y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

ص ۲۰۸

$$L(y'') = s^2 L(y) - s\,y(0) - y'(0) = s^2 L(y) - s + 1$$

$$L(y'') - L(y') + 4L(y) = 0$$

$$L(y') = sL(y) - y(0) = sL(y) - 1$$

$$\Rightarrow s^2 L(y) - s + 1 - sL(y) + 1 + 4L(y) = 0$$

$$L(y)(s^2 - s + 4) = s - 2 \to L(y) = \frac{s-2}{s^2-s+4}$$

$$\Rightarrow y = L^{-1}\left(\frac{s-2}{s^2-s+4}\right)$$

$$s^2 - s + 4 = s^2 - s + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 4$$

$$= \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4}$$

$$= L^{-1}\left(\frac{s-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-2}{(s-\frac{1}{2})^2+\frac{23}{4}}\right) = L^{-1}\left(\frac{(s-\frac{1}{2})-\frac{3}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2+\frac{23}{4}}\right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}x} L^{-1}\left(\frac{s-\frac{3}{2}}{s^2+\frac{23}{4}}\right) \longrightarrow ?$$

مثال: $y''+\alpha^2 y = \cos 2x \qquad y(0)=1 \quad , y'(0)=0$

$$L(y'') = s^2L(y) - sy(0) - y'(0) = s^2L(y) - s$$

$$L(\cos 2x) = \frac{s}{s^2+4}$$

$$\Rightarrow L(y'') + \alpha^2 L(y) = L(\cos 2x)$$

$$s^2L(y) - s + \alpha^2 L(y) = \frac{s}{s^2+4}$$

$$L(y)\,(s^2+\alpha^2) = \frac{s}{s^2+4} + s = \frac{s^3+4s+s}{s^2+4} = \frac{s^3+5s}{s^2+4}$$

$$L(y) = \frac{s}{(s^2+\alpha^2)(s^2+4)} + \frac{s}{s^2+\alpha^2} = \frac{s^3+5s}{(s^2+\alpha^2)(s^2+4)}$$

تجزیه کسرها طولانی است.

$$\xrightarrow{\text{با راه دیگر}} \quad y = L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+\alpha^2}\cdot\frac{1}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+\alpha^2}\right)$$

$$= \int_0^x \cos \alpha t \cdot \frac{1}{2}\sin 2(x-t)\, dt + \cos \alpha x$$

مثال: $y''-2y'+2y = e^x \qquad y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=1$

$$L(y'') = s^2L(y) - sy(0) - y'(0) = s^2L(y) - 0 - 1 = s^2L(y) - 1$$

$$L(y') = sL(y) - y(0) = sL(y) - 0 = sL(y)$$

$$s^2L(y) - 1 - 2sL(y) + 2L(y) = \frac{1}{s-1}$$

$$L(y)\,(s^2-2s+2) = \frac{1}{s-1} + 1 = \frac{1+s-1}{s-1} = \frac{s}{s-1}$$

$$\Rightarrow L(y) = \frac{s}{(s-1)\underbrace{(s^2-2s+2)}_{(s-1)^2+1}} = \frac{s-1+1}{(s-1)\left((\underbrace{s-1}_{\tilde{S}})^2+1\right)}$$

$$\Rightarrow y = e^x L^{-1}\left(\frac{s+1}{s(s^2+1)}\right) = e^x \int_0^x L^{-1}\ \frac{s+1}{s^2+1}\,dt$$

$$= e^x \int_0^x L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) dt = e^x \int_0^x \cos t + \sin t \ dt$$

$$\cos x \quad + \quad \sin x \qquad \longrightarrow ?$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = ? \qquad L\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \int_0^\infty e^{-sx}\,\frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$L\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \int_s^{+\infty} \underbrace{L(\sin x)}_{\frac{1}{s^2+1}}\,dt = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg} s \underset{s=0}{=} \frac{\pi}{2}$$

حد متناهی

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-sx}\,\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg} s$$

$$s=0 \quad \rightarrow \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \ln(b/a)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \overset{H}{=} \frac{-ae^{-ax} + be^{-bx}}{1} = \frac{b-a}{1} = \text{متناهی}$$

$$L\left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\right) = \int_s^{+\infty} L\left(e^{-ax} - e^{-bx}\right) dt =$$

(۷۸)

$$\int_s^{+\infty} \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\, dt = \int_s^{+\infty} \frac{1}{t+a} - \frac{1}{t+b}\, dt$$

$$= Ln(t+a) - Ln(t+b)\Big|_s^{+\infty} = Ln\left(\frac{t+a}{t+b}\right)\Big|_s^{+\infty} = Ln\, 1 - Ln\frac{s+a}{s+b}$$

$$= Ln\left(\frac{s+b}{s+a}\right)$$

با فرمول تعریف

$$L(\quad) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\, \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\, dx \underset{s=0}{=} \int \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\, dx$$

$$s=0 = Ln\frac{b}{a}$$

- هریک از معادلات زیر را حل کنید.

$$\varphi(x) + \int_0^x \underbrace{(x-t)}_{f(x-t)} \cdot \underbrace{\varphi(t)}_{\varphi(t)}\, dt = \sin 2x$$

$$\underset{X}{f(x-t)} = \underset{X}{x-t} \Rightarrow f(x) = x$$

$$L(\varphi(x)) + L\left(\int_0^x f(x-t)\cdot\varphi(t)\, dt\right) = L(\sin 2x)$$

$$L(\varphi) + L(x)\cdot L(\varphi) = \frac{2}{s^2+4} \qquad L(\varphi) + \frac{1}{s^2} L(\varphi) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$L(\varphi)\left(1+\frac{1}{s^2}\right) = \frac{2}{s^2+4} \Rightarrow L(\varphi)\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$\Rightarrow L(\varphi) = \frac{2s^2}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4} \rightarrow$$ تفکیک

$$\varphi(x) = 2L^{-1}\left(\underbrace{\frac{s}{s^2+1}}_{F(s)} \cdot \underbrace{\frac{s}{s^2+4}}_{G(s)}\right) = 2\int_0^x Cos(x-t)\cdot \cos 2t\, dt$$

$$f(x) = Cos\, x \qquad \cos 2x$$
$$x \to x-t \qquad x \to t$$

79

$$\varphi(x) = 2x^2 + \int_0^x \sin 4t \cdot \varphi(x-t)\, dt$$

$$L(\varphi) = L(2x^2) + L\left(\int_0^x \sin 4t \cdot \varphi(x-t)\, dt\right)$$

$$L(\varphi) = \frac{2\times 2!}{s^3} + \frac{4}{s^2+16} \times L(\varphi) \qquad L(\varphi)\left(1-\frac{4}{s^2+16}\right) = \frac{4}{s^3}$$

$$L(\varphi)\left(\frac{s^2+16-4}{s^2+16}\right) = \frac{4}{s^3} \Rightarrow L(\varphi) = \frac{4(s^2+16)}{s^3(s^2+12)}$$

$$\varphi = L^{-1}\left(\frac{4(s^2+16)}{s^3(s^2+12)}\right) = 4L^{-1}\left(\frac{s^2+16}{s^3(s^2+12)}\right) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+12} \quad \cdots$$

راه دیگر

$$\varphi = 4L^{-1}\left(\frac{s^2}{s^3(s^2+12)} + \frac{16}{s^3(s^2+12)}\right)$$

$$= 4L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+12)} + \frac{16}{s^3(s^2+12)}\right)$$

در مخرج s داشت با انتگرال می‌بریم

$$= 4L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+12)} + \frac{16}{s^3(s^2+12)}\right)$$

$$= 4\left[\int_0^x L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+12}\right)dt + 16\int_0^x\int_0^x\int_0^x L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+12}\right) dt\,dt\,dt\right]$$

$$\rightarrow \varphi = 4\left(\int_0^x \frac{1}{\sqrt{12}} \sin\sqrt{12}\,t\, dt + 16\int_0^x\int_0^x\int_0^x \frac{1}{\sqrt{12}} \sin\sqrt{12}\,t\; dt\,dt\,dt\right)$$

حل انتگرال دوم

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{12}} \sin\sqrt{12}\,t\, dt = -\frac{1}{12}\cos\sqrt{12}\,t\Big|_0^x = -\frac{1}{12}\left(\cos\sqrt{12}\,x - \cos 0\right) = \frac{1}{12}\left(1-\cos\sqrt{12}\,t\right)$$

$$\int_0^x \frac{1}{12}\left(1-\cos\sqrt{12}\,t\right)dt = \frac{1}{12}\left(t - \frac{1}{\sqrt{12}}\sin\sqrt{12}\,t\right)\Big|_0^x = \frac{1}{12}\left(x - \frac{1}{\sqrt{12}}\sin\sqrt{12}\,x\right)$$

$$\int_0^x \frac{1}{12}\left(t-\frac{1}{\sqrt{12}}\sin\sqrt{12}\,t\right)dt = \frac{1}{12}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{12}\cos\sqrt{12}\,t\right)\Big|_0^x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{12}\boxed{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{12}\cos\sqrt{12}\,x - \frac{1}{12}\right)}$$

$$\varphi(x) = 4\left[\frac{1}{12}\left(1-\cos\sqrt{12}\,x\right) + 16\times\frac{1}{12}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{12}\cos\sqrt{12}\,x - 1\right)\right]$$

* جواب معادله به صورت سری :

تعریف سری تابعی به شکل زیر است :

$$\sum_{n=1} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

مثال $\rightarrow$ $\sum_{n=1} \frac{x^2}{(n+1)!}$, $\sum \frac{(-1)^n x}{n+2}$

سری تیلور : اگر تابع در نقطهٔ $x=a$ از هر مرتبه مشتق پذیر باشد ، دارای سری تیلور به شکل زیر است :

$$f(x) = \sum a_n (x-a)^n \quad , \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$a=0 \longrightarrow$ سری مکلورن $\quad f(x) = \sum a_n x^n \quad , \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

به ازای بعضی مقادیر x ، سری تابعی همگرا می باشد. برای مشخص کردن بازهٔ همگرایی سری تابعی از آزمون نسبت استفاده می کنیم. به شکل زیر :

$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \rightarrow \sum a_n$ همگرا

$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \rightarrow \sum a_n$ واگرا

$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \rightarrow$ این روش جواب نمی دهد

مثال : شعاع همگرایی سری زیر را بدست آورید.

$\sum \underbrace{\left(\frac{x^n}{n+1}\right)}_{a_n} \rightarrow \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ $\rightarrow <1$ همگرا ، $\rightarrow >1$ واگرا ، $\rightarrow =1$ بی جواب

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+2}}{\frac{x^n}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x(n+1)}{(n+2)}\right| = \lim_{n\to\infty} |x| \cdot \left|\frac{n+1}{n+2}\right| < 1$$

شرط همگرایی

$$\Rightarrow |x| \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n+2}\right|}_{1 \,=\, \frac{1}{R}} < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

بازهٔ همگرایی

شعاع همگرایی $= R$

تعمیم : مشتق و انتگرال سری نیز در بازهٔ همگرایی سری ، همگرا می باشند.

$$\sum f(x) \quad , \quad \sum f'_n(x) \quad , \quad \sum \int f_n(x)\,dx$$

نقاط عادی و غیرعادی :

$$P(x)\,y''+q(x)\,y'+r(x)\,y=0$$

$P(x_0)\neq 0 \Rightarrow x=x_0$ نقطهٔ عادی

$P(x_0)=0 \Rightarrow x=x_0$ نقطهٔ غیرعادی

$x=x_0$ غیرعادی منظم

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{q(x)}{P(x)}=P_0 \text{ متناهی} \quad , \quad \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{r(x)}{P(x)}=q_0 \text{ متناهی}$$

مثال :

$$(x^2-2x-3)^2y''+(x-3)\,y'+2y=0$$

$$x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x+1)(x-3)=0 \qquad x=-1 \ , \ x=3$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-3)^2}{(x+1)^2(x-3)^2}=\infty \qquad \text{غیرعادی نامنظم} \qquad x=-1$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^2}{(x+1)^2(x-3)^2}=\frac{1}{16} \quad , \quad \lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)^2}{(x+1)^2(x-3)^2}=\frac{2}{16}$$

$x=3$ غیرعادی منتظم

قضیه : فرض کنیم $x_0=a$ یک نقطهٔ عادی معادلهٔ دیفرانسیل ذکر شده باشد، در این صورت معادله دارای جوابی به شکل زیر است :

$$y=\sum a_n(x-a)^n$$

$$a=0 \Rightarrow y=\sum a_n x^n$$

مثال : معادلهٔ زیر را حول نقطهٔ $x=0$ حل کنید.

$y''+4y=0 \qquad x=0$ عادی

$$y=\sum_{n=0} a_n x^n \qquad y'=\sum_{n=1} n a_n x^{n-1}$$

$$y=a_0x^0+a_1x+\cdots \qquad y'=0+a_1x^0+2a_2x+\cdots$$

$$y''=\sum_{n=2} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2} n(n-1)a_n x^{n-2}+4\sum_{n=0} a_n x^n=0$$

$$\sum_{n=0}(n+2)(n+1)\,a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}4a_n\,x^n=0$$

$$\sum_{n=0} x^n \left((n+2)(n+1) a_{n+2} + 4a_n\right) = 0$$

$$(n+2)(n+1)\, a_{n+2} = -4a_n \Rightarrow a_{n+2} = \frac{-4a_n}{(n+2)(n+1)}$$

a_0 , a_1 دلخواه

$$a_2 = \frac{-4a_0}{2} = -2a_0 \qquad a_3 = \frac{-4a_1}{3\times 2} = \frac{-2a_1}{3}$$

$$a_4 = \frac{-4a_2}{4\times 3} = -\frac{1}{3} a_2 = \frac{-1}{3} \times -2a_0 = \frac{2}{3} a_0$$

$$y'' - xy' + 2y = 0 \qquad x_0 = 0$$

$$y = \sum_{n=0} a_n x^n \qquad y' = \sum_{n=1} n a_n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=2} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2} n(n-1) a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=2} n(n-1) a_n x^{n-2}}_{n \to n+2} - \sum_{n=1} n a_n x^n + \sum_{n=0} 2a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1} n a_n x^n + \sum_{n=0} 2a_n x^n = 0$$

$$2a_2 + \sum_{n=1} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1} n a_n x^n + 2a_0 + \sum_{n=1} 2a_n x^n = 0$$

$$2a_2 + 2a_0 + \sum_{n=1} x^n \left((n+2)(n+1) a_{n+2} - n a_n + 2a_n\right) = 0$$

$$2a_2 + 2a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = -a_2$$

$$(n+2)(n+1)\, a_{n+2} + a_n(2-n) = 0 \Rightarrow \boxed{a_{n+2} = \frac{a_n (n-2)}{(n+2)(n+1)}}$$

رابطهٔ بازگشتی

۳

جواب حول نقطهٔ غیرعادی:

اگر $x = x_0$ برای معادله نقطهٔ غیر عادی منظم باشد، ابتدا معادلهٔ مفسر زیر را حل می‌کنیم:

$$r^2 + (P_0 - 1) r + q_0 = 0$$ معادلهٔ مشخصه

برای اثبات می‌بینیم y_1 کافی است، فقط y_2 فرمول نوشته شود.

① r_1, r_2 دوریشه ، $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z} \rightarrow y_1 = \sum_{n=0} a_n x^{n+r_1}, \; y_2 = \sum_{n=0} b_n x^{n+r_2}$

② $r_1 = r_2 = r \qquad y_1 = \sum a_n x^{n+r} \qquad y_2 = y_1 \operatorname{Ln} x + \sum_{n=0} b_n x^{n+r}$

③ $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z} \qquad y_1 = \sum a_n x^{n+r_1} \qquad y_2 = K y_1 \operatorname{Ln} x + \sum b_n x^{n+r_2}$

$r_1 > r_2$

در تمام حالات پس از به دست آوردن جوابهای y_1 و y_2 جواب عمومی معادلهٔ $P(x)y'' + Q(x)y' + r(x)y = 0$ از رابطهٔ زیر حساب می‌شود:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

مثال: $(2x^2 + x^3) y'' + (x + 3x^2) y' - (1 + 4x) y = 0 \qquad x = 0$

$$\lim_{x \to 0} x \times \frac{(x + 3x^2)}{2x^2 + x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 (1 + 3x)}{x^2 (2 + x)} = \frac{1}{2} = P_0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \times -(1 + 4x)}{x^2 (2 + x)} = \frac{-1}{2} \qquad q_0 = -\frac{1}{2}$$

$$r^2 + (P_0 - 1) r + q_0 = 0 \qquad r^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right) r - \frac{1}{2} = 0 \;, \quad r^2 - \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} = 0$$

$$2r^2 - r - 1 = 0 \qquad \Delta = 1 - 4(2)(-1) = 9 \qquad r = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} \left\langle \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} \right.$$

$$r_1 = 1 \qquad r_2 = \frac{-1}{2} \qquad r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$$

$$y_1 = \sum_{n=0} a_n x^{n+1} \qquad y_2 = \sum_{n=0} a_n x^{n - \frac{1}{2}}$$

$$y_1' = \sum_{n=0} (n+1) a_n x^n \qquad y_1'' = \sum_{n=1} n(n+1) a_n x^{n-1}$$

$$(2x^2+x^3)\sum_{n=1} n(n+1)a_n x^{n-1} + (x+3x^2)\sum_{n=0}(n+1)a_n x^n$$

$$-(1+4x)\sum_{n=0} a_n x^{n+1}$$

$$\sum_{n=1} 2n(n+1)a_n x^{n+1} + \sum_{n=1} n(n+1)a_n x^{n+2} + \sum_{n=0}(n+1)a_n x^{n+1} + \sum_{n=0} 3(n+1)a_n x^{n+2}$$

$$-\sum_{n=0} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0} 4a_n x^{n+2} = 0 \qquad n+2 \to n+1, \quad n \to n+1$$

$$\sum_{n=1} 2n(n+1)a_n x^{n+1} + \sum_{n=2}(n-1)n\,a_{n-1}x^{n+1} + \sum_{n=0}(n+1)a_n x^{n+1} +$$

$$\sum_{n=1} 3n a_{n-1} x^{n+1} - \sum_{n=0} a_n x^{n+1} - \sum_{n=1} 4a_{n-1} x^{n+1} = 0$$

$$4a_1x^2 + a_0x + 2a_1x^2 + 3a_0x^2 - a_0x - a_1x^2 - 4a_0x^2 + \sum_{n=2} x^{n+1}\big(2n(n+1)a_n +$$

$$n(n-1)a_{n-1} + (n+1)a_n + 3na_{n-1} - a_n - 4a_{n-1}\big) = 0$$

$$x^2\underbrace{(4a_1+2a_1-a_1-4a_0)}_{5a_1-4a_0} + \sum x^{n+1} \text{\_\_\_}$$

$$a_n(2n^2+2n+n+1-1) + a_{n-1}(n^2-n+3n-4) = 0$$

$$a_n(2n^2+3n) + a_{n-1}(n^2+2n-4) = 0$$

$$\boxed{a_n = \frac{-(n^2+2n-4)}{2n^2+3n}\,a_{n-1}}$$

رابطه

$$5a_1 - 4a_0 = 0$$

$$\boxed{a_1 = \frac{4a_0}{5}}$$

پایان

(1)

*** جلسهٔ حل تمرین:**

در ماتریس ها:

$$|2A|_{3\times 3} = \underbrace{8}_{2^{3}}|A|$$

تعداد سطرها ← 3

ضریب فاکتور گرفته شده از همه درایه‌ها ← 2

$$x^2y''+2xy'+\frac{1}{2}y=0 \qquad x=e^{z} \qquad z=\ln x$$

$$\left(x^2D^2+2xD+\frac{1}{2}\right)y=0$$

$$y''=\frac{1}{x^2}D(D-1)y \qquad , \; y'=\frac{1}{x}Dy$$

$$D(D-1)y+2Dy+\frac{1}{2}y=0 \qquad \left(D^2+D+2D+\frac{1}{2}\right)y=0$$

$$\left(D_z^2+D_z+\frac{1}{2}\right)y=0 \qquad D^2+D+\frac{1}{2}=0 \longrightarrow 2D^2+2D+1=0$$

$$y=e^{\alpha z}\left(c_1\cos\beta z+c_2\sin\beta z\right) \qquad \Delta=4-4(2)(1)=-4$$

$$z=\ln x \qquad D=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{4}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i$$

$$y=e^{-\frac{1}{2}\ln x}$$

$$y=e^{-\frac{1}{2}\ln x}\left[c_1\cos\left(\frac{1}{2}\ln x\right)+c_2\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\right] \qquad \alpha=-\frac{1}{2}$$

$$\beta=\frac{1}{2}$$

مثال: (روش تغییر پارامتر)

$$y''-6y'+9y=25e^{3x}\sin x$$

$$(D^2-6D+9)y=25e^{3x}\sin x$$

$$D^2-6D+9=0 \qquad (D-3)^2=0 \qquad \lambda_1=3 \;,\; \lambda_2=3 \;\rightarrow y_h=c_1\underbrace{e^{3x}}_{y_1}+c_2\underbrace{xe^{3x}}_{y_2}$$

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x}+3xe^{3x} \end{vmatrix}$$

$$=e^{6x}(1+3x-3x)=e^{6x} \qquad W_1=\begin{vmatrix} 0 & xe^{3x} \\ 25e^{3x}\sin x & e^{3x}+3xe^{3x} \end{vmatrix}$$

$$=-25xe^{6x}\sin x$$

$$u_1'=\int\frac{W_1}{W}dx=\int\frac{-25xe^{6x}\sin x}{e^{6x}}dx=\int -25x\sin x\,dx$$

x	$\sin x$
1	$-\cos x$
0	$-\sin x$

$$\rightarrow = -x\cos x+\sin x$$

$$u_1' = -\left[25(-x\cos x + \sin x)\right] \qquad u_1 = 25\int -x\cos x + \sin x \, dx$$

$$\rightarrow u_1 = -25(-x\sin x - \cos x) - \cos x$$

$$= \boxed{+25x\sin x + 24\cos x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{3x} & 0 \\ 3e^{3x} & 25e^{3x}\sin x \end{vmatrix} = 25e^{6x}\sin x$$

$$u_2' = \int \frac{W_2}{W}dx = \int \frac{25e^{6x}\sin x}{e^{6x}}dx = -25\cos x \qquad \boxed{u_2 = -25\sin x}$$

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 = (25x\sin x + 24\cos x).e^{3x} + (-25\sin x).xe^{3x}$$

$$\boxed{y = y_h + y_p}$$

$$y_p = Ae^{3x}\sin x + Be^{3x}\cos x \leftarrow$$ اگر از روش ضرایب نامعین حل می‌کردیم

** تذکر:

در روش اپراتور معکوس: (در حالت کلی)

$$\frac{1}{F(D)}.e^{\alpha x}.u(x) = e^{\alpha x}\frac{1}{F(\alpha)}u(x)$$

$$\frac{1}{F(D)}e^{\alpha x} = \frac{1}{F(\alpha)}e^{\alpha x} \qquad F(\alpha) \neq 0$$

$$\frac{1}{(D-\alpha)^n F(D)}e^{\alpha x} = \frac{1}{n!\,F(\alpha)}x^n e^{\alpha x} \qquad f(\alpha) = 0$$

- مثال:

$$y'' + y' + y = e^{3x} + 4e^{x} - 4e^{-2x} + 5$$

$$y'' + y' + y = 0 \qquad D^2 + D + 1 = 0 \qquad D = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$y_h = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \qquad D = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$(D^2+D+1) = e^{3x}+6e^{x}-3e^{-2x}+5$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+D+1}\left(e^{3x}+6e^{x}-3e^{-2x}+e^{0x}.5\right)$$

اگر ریشه بودند، ناچار باید از روش عملی یعنی انتگرال گیری حل می کردیم.

$$y_p = \frac{1}{9+3+1}e^{3x}+6\,\frac{1}{1+1+1}e^{x}-\frac{3}{4-2+1}e^{-2x}+\frac{1}{0+0+1}5$$

$$y_p = \frac{1}{13}e^{3x}+2e^{x}-e^{-2x}+5$$

$$\boxed{y = y_h+y_p}$$

مثال (کوشی اویلر): $x^2y''+xy'+y = \sin(2\ln x)$ $\qquad x = e^{z} \Rightarrow z = \ln x$

$$y'' = \frac{1}{x^2}D(D-1)y \qquad y' = \frac{1}{x}Dy$$

$$D(D-1)y+Dy+y = \sin(2z) \qquad (D^2+\cancel{D}-\cancel{D}+1)y = \sin 2z$$

$$(D^2+1)y = \sin 2z$$

$$D^2+1 = 0 \rightarrow D = \pm i \qquad \rightarrow y_h = e^{0z}(c_1\cos z+c_2\sin z)$$

$$= c_1\cos z+c_2\sin z$$

- جواب خصوصی را به روش تغییر پارامتر حساب می کنیم:

$$w\begin{vmatrix} \cos z & \sin z \\ -\sin z & \cos z \end{vmatrix} = 1$$

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin z \\ \sin 2z & \cos z \end{vmatrix} = -\sin z\sin 2z = -2\sin^2 z\cos z$$

$$u_1 = \int\frac{w_1}{w}dz = \int -2\sin^2 z\cos z\,dz = \int -2u^2du = -\frac{2u^3}{3} = -\frac{2}{3}\sin^3 z$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} \cos z & 0 \\ -\sin z & 2\sin z\cos z \end{vmatrix} = 2\sin z\cos^2 z$$

$$u_2 = \int \frac{w_2}{w} = \int 2\sin z \cos^2 z \, dz = -\frac{2}{3}\cos^3 z$$

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = \left(-\frac{2}{3}\sin^3 z\right)\cos z - \frac{2}{3}\cos^3 z \cdot \sin z$$

$$y = y_h + y_p \qquad -\frac{2}{3}\sin z \cos z \left(\sin^2 z + \cos^2 z\right)$$

به روش اپراتور معکوس

اگر طرف دوم نمایی یا مثلثاتی بود، به صورت نمایی نوشته و از روش گفته شده در تذکر استفاده می‌کنیم.

$$y_p = \frac{1}{D^2+1}\sin 2z = \frac{1}{D^2+1}\left(\frac{1}{2i}\left(e^{2iz} - e^{-2iz}\right)\right)$$

$$\frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{3}e^{2iz} - \frac{-1}{3}e^{-2iz}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\sin 2z \qquad y = y_h + y_p$$

* قضیهٔ انتگرال از لاپلاس:

فرض کنیم تابع $f(x)$ دارای تبدیل لاپلاس $F(s)$ باشد و $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ حد موجود و متناهی باشد، در این صورت تابع $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ دارای تبدیل لاپلاس است و داریم:

$$L\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \int_s^{+\infty} F(t)\,dt$$

$$L^{-1}\left(\int_s^{+\infty} F(t)\,dt\right) = \frac{L^{-1}(f(x))}{x}$$

تذکر: در مواردی که محاسبهٔ تبدیل معکوس یک تابع مشکل باشد، ولی محاسبهٔ تبدیل معکوس مشتق آن ساده باشد، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\boxed{L^{-1}(G(s)) = -\frac{L^{-1}(G'(s))}{x}}$$

مثال ۱:

$$L\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\int_s^{+\infty}\underbrace{L(\sin x)}_{F(t)}\,dt=\int_s^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$=\operatorname{Arctg} t\Big|_s^{+\infty}=\operatorname{Arctg}(+\infty)-\operatorname{Arctg}(s)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctg}(s)$$

مثال ۲:

$$L^{-1}\left(Ln\left(\frac{s+1}{s}\right)\right)=L^{-1}\left(Ln(s+1)-Ln(s)\right)$$

$$=-L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}\right)\Big/x=-\frac{(e^{-x}-1)}{x}=\frac{1-e^{-x}}{x}$$

مثال ۳:

$$L^{-1}\left(Ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+4}\right)\right)=L^{-1}\left(Ln(s^2+1)-Ln(s^2+4)\right)$$

$$=\frac{-L^{-1}\left(\frac{2s}{s^2+1}-\frac{2s}{s^2+4}\right)}{x}=\frac{-2(\cos x-\cos 2x)}{x}$$

مثال ۴:

$$L\left\{\int_0^x\frac{e^{-2t}-e^{-3t}}{t}\,dt\right\}=\frac{L\left(\frac{e^{-2x}-e^{-3x}}{x}\right)}{s}$$

$$L\left(\frac{e^{-2x}-e^{-3x}}{x}\right)=\int_s^{+\infty}L\underbrace{\left(e^{-2x}-e^{-3x}\right)}_{\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}}dt$$

$$=\int_s^{+\infty}\frac{1}{t+2}-\frac{1}{t+3}\,dt=Ln(t+2)-Ln(t-3)\Big|_s^{+\infty}$$

$$Ln\left(\frac{t+2}{t+3}\right)\Big|_s^{+\infty}=0-Ln\left(\frac{s+2}{s+3}\right)\longrightarrow$$ جواب $$=\boxed{\frac{1}{s}Ln\left(\frac{s+2}{s+3}\right)}$$

** تذکر:

$$Ln(f(x))=F(s)\Rightarrow Ln\left(e^{\alpha x}f(x)\right)=F(s-\alpha)$$

$$L^{-1}\left(F(s-\alpha)\right)=e^{\alpha x}L^{-1}\left(F(s)\right)$$

(۹)

مثال ۱: $L\left(e^{3x}\sin 2x\right)=\dfrac{2}{s^2+4} \Rightarrow$ جواب $=\dfrac{2}{(s-3)^2+4}$

$s\to s-3$

مثال ۲: $L\left(e^{2x}\cosh 5x\right)=\dfrac{s}{s^2-25} \Rightarrow$ جواب $=\dfrac{s-2}{(s-2)^2-25}$

$s\to s-2$

مثال ۳: $L\left(e^{5x}\cdot x^4\right)\xrightarrow{\text{ادامه}}(-1)^4\left(L\left(e^{5x}\right)\right)^{(4)}$

$=\left(\dfrac{1}{s-5}\right)^{(4)} \longrightarrow$ ۴ بار مشتق

(ادامه) : $\dfrac{4!}{s^5}=\dfrac{4!}{(s-5)^5}$

$s\to s-5$

مثال ۴: $L\left(x\cos^2 x\right)= \quad L\left(x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\right)=\frac{1}{2}L\left(x+x\cos 2x\right)$

$\frac{1}{2}\left[L(x)+L(x\cos 2x)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s^2}+(-1)^1\left(\frac{s}{s^2+4}\right)'\right]$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{s^2+4-2s^2}{(s^2+4)^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{4-s^2}{(s^2+4)^2}\right) \qquad L\cos\alpha x=\frac{s}{s^2+\alpha^2}$

مثال ۵: $L^{-1}\left(\dfrac{1}{(s-\alpha)^n}\right)=e^{\alpha x}L^{-1}\left(\dfrac{1}{s^n}\right)=e^{\alpha x}\dfrac{1}{(n-1)!}L^{-1}\left(\dfrac{(n-1)!}{s^{n-1+1}}\right)$

$=\dfrac{1}{(n-1)!}e^{\alpha x}\cdot x^{n-1} \qquad d(x^n)=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$

مثال ۶: $L^{-1}\left(\dfrac{2s+3}{(s+4)^3}\right)=e^{-4x}L^{-1}\left(\dfrac{2(A-4)+3}{A^3}\right)$

$s+4=A \Rightarrow s=A-4$

$=e^{-4x}L^{-1}\left(\dfrac{2A-5}{A^3}\right)=e^{-4x}\left(L^{-1}\left(\dfrac{2}{A^2}-\dfrac{5}{A^3}\right)\right)$

۷

$$e^{-4x}\left(2L^{-1}\left(\frac{1}{A^2}\right)-5L^{-1}\left(\frac{1}{A^3}\right)\right)=e^{-4x}\left(2x-\frac{5}{2!}x^2\right)$$

مثال ۷ : $L^{-1}\left(\frac{s-2}{s^2+6s+5}\right)$

روش اول ⟵ $s^2+6s+5=s^2+6s+9-9+5 \rightarrow (s+3)^2-4$

$$=L^{-1}\left(\frac{s-2}{(s+3)^2-4}\right)=e^{-3x}\left(\frac{A-3-2}{A^2-4}\right)=e^{-3x}\left(\frac{A-5}{A^2-4}\right)$$

$s+3=A \rightarrow s=A-3$

$$=e^{-3x}L^{-1}\left(\frac{A}{A^2-4}-\frac{5}{A^2-4}\right)=e^{-3x}\left(\cosh 2x-\frac{5}{2}\sinh 2x\right)$$

روش دوم ⟵ تجزیه کسرها

مثال ۸ : $L^{-1}\left(\frac{s+5}{s^2+7s+12}\right)=L^{-1}\left(\frac{s+5}{(s+3)(s+4)}\right)$

$$=L^{-1}\left(\frac{A}{s+3}+\frac{B}{s+4}\right)=Ae^{-3x}+Be^{-4x}$$

مثال ۹ : $\left(Ln\sqrt{\frac{s+1}{s-1}}\right)=-L^{-1}\left(\frac{1}{2}Ln\left(\frac{s+1}{s-1}\right)\right)=\frac{1}{2}L^{-1}\left(Ln(s+1)-Ln(s-1)\right)$

$$L^{-1}(G)=\frac{-L^{-1}(G')}{x} \qquad =\frac{-1}{2}\cdot\frac{L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1}\right)}{x}=\frac{-1}{2x}\left(e^{-x}-e^{x}\right)$$

مثال ۱۰ : $L^{-1}\left(Arctg\,\frac{1}{s}\right)=-\frac{L^{-1}\left(\frac{-1/s^2}{1+1/s^2}\right)}{x}=-\frac{L^{-1}\left(\frac{-1}{s^2+1}\right)}{x}$

$$=\frac{1}{x}L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=\frac{1}{x}\sin x$$

مثال ۱۱ : $L^{-1}\left(\frac{2s+1}{s^2(s-1)(s+2)}\right)=\int_0^x\int_0^x L^{-1}\left(\frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}\right)dt\,dt$

$$L^{-1}\left(\frac{2s+1}{(s-1)(s+2)}\right)=L^{-1}\left(\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+2}\right)=Ae^{x}+Be^{-2x}$$

$$\int_0^x Ae^{t}+Be^{-2t}\,dt = Ae^{t}-\frac{B}{2}e^{-2t}\Big|_0^x = Ae^{x}-\frac{B}{2}e^{-2x}$$

$$\int_0^x Ae^{t}-\frac{B}{2}e^{-2t}\,dt\Big|_0^x = Ae^{t}+\frac{B}{4}e^{-2t}\Big|_0^x = \boxed{Ae^{x}+\frac{B}{4}e^{-2x}}$$

مثال ۱۲: $L^{-1}\left(\frac{1}{s}\operatorname{Arctg}\frac{1}{2s+5}\right)$ $\qquad L\left(\int_0^x f\right)=\frac{L(f)}{s}$

$$=\int_0^x \underbrace{L^{-1}\left(\operatorname{Arctg}\frac{1}{2s+5}\right)}_{\text{ضرب } t}dt$$

$$L^{-1}\left(\operatorname{Arctg}\frac{1}{2s+5}\right)=-\frac{L^{-1}\left(\frac{\frac{2}{(2s+5)^2}}{1+\frac{1}{(2s+5)^2}}\right)}{x}$$

$$s+\frac{5}{2}=A$$

$$=\frac{-1}{x}L^{-1}\left(\frac{-2}{(2s+5)^2+1}\right)=-\frac{1}{4x}e^{-\frac{5}{2}x}L^{-1}\left(\frac{-2}{A^2+\frac{1}{4}}\right)$$

$$=\frac{-1}{x}L^{-1}\left(\frac{-2}{(2s+5)^2+1}\right)=-\frac{1}{4x}e^{-\frac{5}{2}x}L^{-1}\left(\frac{-2}{A^2+\frac{1}{4}}\right)$$

$$\left(2\left(s+\frac{5}{2}\right)\right)^2+1$$

$$4\left(\left(s+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{2e^{-\frac{5}{2}x}}{4x}L^{-1}\left(\frac{1}{A^2+\frac{1}{4}}\right)=\frac{2e^{-\frac{5}{2}x}}{4x}\times 2L^{-1}\left(\frac{1/2}{A^2+1/4}\right)$$

$$\frac{e^{-5/2\,x}}{x}\cdot\sin\frac{1}{2}x$$

$$L\left(xe^{2x}\sin 3x\right)=(-1)^1\left(L\left(e^{2x}\sin 3x\right)\right)'$$

$$=-\left(\frac{3}{s^2+9}\right)'=-\left(\frac{3}{(s-2)^2+9}\right)'=-\left(\frac{3}{s^2+4-4s+9}\right)'$$

$$=-\left(\frac{-3(2s+1)}{(s^2-4s+13)^2}\right)$$

مبحث تکمیلی برای اپراتور

- روش اپراتور معکوس:

برای محاسبهٔ جواب خصوصی معادله با ضرایب ثابت به کار می رود.

فرم کلی معادله $\rightarrow \quad y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=r(x)$

$D \rightarrow$ عملگر مشتق

$y' \rightarrow Dy=y' \qquad \rightarrow \underbrace{(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\dots+a_1D+a_0)}_{F(D)}\,y=r(x)$

در این صورت $\rightarrow y_p=\dfrac{1}{F(D)}\,r(x)$

* برای حل ابتدا معادلهٔ همگن $F(D)=0$ را حل می کنیم و ریشه های آن را به دست می آوریم. اگر λ_1 و λ_2 و ... ریشه های $F(D)$ باشند، در این صورت:

$$F(D)=(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\cdots(D-\lambda_{n-1})(D-\lambda_n)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$y_p=\frac{1}{D-\lambda_1}\cdot\frac{1}{D-\lambda_2}\cdots\underbrace{\frac{1}{D-\lambda_{n-1}}\cdot\underbrace{\frac{1}{D-\lambda_n}\,r(x)}_{u}}_{v}$$

- اکنون برای حل $u=\dfrac{1}{D-\lambda_n}\,r(x)$ را در نظر گرفته و معادلهٔ آن را ($u'-\lambda_n u=r(x)$) حل می کنیم. سپس $v=\dfrac{1}{D-\lambda_{n-1}}\,u$ را در نظر گرفته و معادلهٔ آن را نیز حل می کنیم و به همین ترتیب پیش می رویم تا به $y_p=\dfrac{1}{D-\lambda_1}\,w$ برسیم که با حل معادلهٔ آن یعنی $y_p'-\lambda_1 y_p=w$ تا y_p به دست آید.

- مثال :

$$y''-3y'+2y=e^x$$

$$\lambda^2-3\lambda+2=0 \qquad \rightarrow \lambda_1=-1 \; , \; \lambda_2=-2$$

$$\Rightarrow y_p=\frac{1}{D-1}\cdot\frac{1}{D-2}e^x$$

* چون جواب خصوصی را می‌خواهیم، پس c را نمی‌نویسیم.

$$\rightarrow u=\frac{1}{D-2}e^x \rightarrow u'-2u=e^x$$

$$u=e^{-\int -2dx}\left[\int e^{\int -2dx} e^x dx\right]=e^{2x}(-e^{-x})=-e^x$$

$$\Rightarrow y_p=\frac{1}{D-1}\cdot u=\frac{1}{D-1}(-e^x)$$

$$y_p'-y_p=-e^x \Rightarrow y_p=e^{-\int -dx}\left[\int e^{\int -dx}\cdot(-e^x)\,dx\right]$$

$$=-xe^x$$

* فرمول های برای روش اپراتور معکوس:

۱- اگر $r(x)=e^{ax}$ باشد:

$$D\rightarrow a$$

$$\Rightarrow y_p=\frac{1}{F(D)}r(x)=\frac{1}{F(a)}r(x)$$

۲- اگر $r(x)$ تابعی از $\sin(ax+b)$ یا $\cos(ax+b)$ باشد:

$$D^2\rightarrow -a^2$$

$$\Rightarrow y_p=\frac{1}{F(D^2)}\sin(ax+b)=\frac{1}{F(a^2)}\sin(ax+b)$$

یا

$$y_p=\frac{1}{F(D^2)}\cos(ax+b)=\frac{1}{F(a^2)}\cos(ax+b)$$

مثال برای فرمول ۱ :

$$y''+5y'+4y=e^{2x}$$

$$\to D^2+5D+4=0 \xrightarrow{a=2} \quad D=2$$

$$\Rightarrow y_p=\frac{1}{2^2+5(2)+4}e^{2x}=\frac{1}{20}e^{2x}$$

مثال دوم $\to$ $$(D-1)(D-3)(D+2)y=e^{3x}$$

$$y_p=\frac{1}{(3-1)(D-3)(3+2)}e^{3x}$$

*چون $D-3$ با قرار دادن a ، صفر می‌شود، به همان صورت می‌نویسیم.

$$y_p=\frac{1}{10(D-3)}e^{3x} \to y'_p-3y_p=\frac{1}{10}e^{3x}$$

$$\Rightarrow y_p=e^{-\int -3dx}\left[\int e^{\int -3dx}\cdot\frac{1}{10}e^{3x}dx\right]=\frac{1}{10}xe^{3x}$$

مثال برای فرمول ۲ :

$$y''+4y=\sin(3x)$$

$$D^2+4=0 \qquad y_p=\frac{1}{D^2-(a^2)}(\sin ax+b)$$

$$y_p=\frac{1}{D^2+4}\sin(3x) \xrightarrow{\text{طبق فرمول}} y_p=\frac{1}{-9+4}\sin(3x)=-\frac{1}{5}\sin(3x)$$

۳- $r(x)$ یک چندجمله‌ای درجه n باشد: $P_n(x)$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{F(D)} P_n(x) = q_n(D) P_n(x)$$

که $q_n(D)$ چندجمله‌ای درجه n است که از تقسیم عدد ۱ بر $F(D)$ تا درجه n به دست می‌آید.
که این تقسیم تا زمانی که درجه خارج قسمت به n برسد ادامه دارد.

مثال: $y'' + 3y' + 2y = x^2 + x - 1$

$$\begin{cases} F(D) = D^2 + 3D + 2 \\ P(x) = x^2 + x - 1 \end{cases} \longrightarrow q(x) = \frac{1}{F(D)}$$

$$\Rightarrow y_p = q(D) P(x)$$

$$y_p = \frac{1}{2}(x^2+x-1) - \frac{3}{4} D (x^2+x-1) + \frac{7}{8} D^2 (x^2+x+1) =$$

$$y_p = \frac{1}{2}(x^2+x-1) - \frac{3}{4}(2x+1) + \frac{7}{8}(2)$$

$$1 \div (D^2 + 3D + 2) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}D + \frac{7}{8}D^2$$

با ضرب در این می‌سازیم.

$$-1 - \frac{3}{2}D - \frac{D^2}{2}$$

$$-\frac{3}{2}D - \frac{D^2}{2}$$

$$\frac{3}{2}D + \frac{9}{4}D^2 + \frac{3}{4}D^3$$

$$\frac{7}{4}D^2 + \frac{3}{4}D^3$$

$$-\frac{7}{4}D^2 - \frac{21}{8}D^3 - \frac{7}{8}D^4$$

تا همین جا کافی است. چون درجه خارج قسمت به ۲ رسید.

$$\Rightarrow q(D) = \frac{7}{8}D^2 - \frac{3}{4}D + \frac{1}{2}$$

۴- $r(x)$ حاصلضرب $e^{\alpha x}$ در $\sin(ax+b)$ یا $\cos(ax+b)$ باشد.

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{F(D)} e^{\alpha x} \sin(ax+b) = e^{\alpha x} \frac{1}{F(D+\alpha)} \sin(ax+b)$$

یا

$$y_p = \frac{1}{F(D)} e^{\alpha x} \cos(ax+b) = e^{\alpha x} \frac{1}{F(D+\alpha)} \cos(ax+b)$$

مثال :

$$y''+2y'+y=e^{3x}\sin(4x)$$

$$y_p=\frac{1}{D^2+2D+1}e^{3x}\sin(4x)\xrightarrow{a=3}y_p=e^{3x}\frac{1}{(D+3)^2+2(D+3)+1}\sin(4x)$$

$$y_p=e^{3x}\frac{1}{D^2+8D+16}\sin(4x)$$

$D^2=-16$ باتوجه به فرمول قبلی (ردیف ۲):

$$\rightarrow y_p=e^{3x}\frac{1}{-16+8D+16}\sin(4x)=\frac{e^{3x}}{8}\frac{1}{D}\sin(4x)$$

$\frac{1}{D}=$ انتگرال

$$y_p=\frac{e^{3x}}{8}\left(-\frac{1}{4}\cos(4x)\right)=\frac{-e^{3x}}{32}\cos(4x)$$

۵- $r(x)$ حاصلضرب x در $\sin(ax+b)$ یا $\cos(ax+b)$ باشد.

$$\Rightarrow y_p=\frac{1}{F(D)}x\sin(ax+b)=x\frac{1}{F(D)}\sin(ax+b)-\frac{F'(D)}{(F(D))^2}\sin(ax+b)$$

یا

$$y_p=\frac{1}{F(D)}x\cos(ax+b)=x\frac{1}{F(D)}\cos(ax+b)-\frac{F'(D)}{(F(D))^2}\cos(ax+b)$$

۶- $r(x)$ جمع چند تابع باشد.

$$y_p=\frac{1}{F(D)}(u+v+\cdots+w)=\frac{1}{F(D)}u+\frac{1}{F(D)}v+\cdots+\frac{1}{F(D)}w$$

(۱۴)

شماره ۵ :

$$y'' + 4y = x\sin(3x) \xrightarrow{\text{مشخصه}} D^2 + 4 = 0$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+4}\, x.\sin(3x)$$

$$\xrightarrow{\text{با فرمول}} y_p = x\frac{1}{D^2+4}\sin(3x) - \frac{2D}{(D^2+4)^2}\sin(3x)$$

$$= x\frac{1}{-9+4}\sin(3x) - \frac{2D}{(-9+4)^2}\sin(3x)$$

$$= \frac{-x}{5}\sin(3x) - \frac{6}{25}\cos(3x)$$

شماره ۶ : $y''\ 4y = e^{5x} + \sin(\cdot x)$

$$y_p = \frac{1}{D^2+9}\left(e^{5x} + \sin(2x)\right)$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+9}e^{5x} + \frac{1}{D^2+9}\sin(2x)$$

$$= \frac{1}{(5)^2+9}e^{5x} + \frac{1}{-4+9}\sin(2x)$$

$$= \frac{1}{34}e^{5x} + \frac{1}{5}\sin(2x)$$

« خلاصهٔ مطالب »

* معادلات درجهٔ اول :

۱ـ تفکیک پذیر : قابل تجزیه به حاصلضرب دو تابع یکی برحسب x و دیگری برحسب y. برای حل کافی است از طرفین انتگرال بگیریم.

۲ـ معادلهٔ همگن : روش حل این معادلات تغییر متغیر $y = ux$ است.

$$f(\lambda x , \lambda y) = \lambda^n f(x , y)$$

← معادلهٔ همگن

$$dy = u\,dx + x\,du$$

اگر در معادله برفرض $m\,\frac{x}{y}$ (ضرب) باشد، معادله همگن است. همینطور $m\,\frac{y}{x}$

- اگر $\frac{y}{x}$ بود از $y = ux$ حل می‌کنیم.
- اگر $\frac{x}{y}$ بود بهتر است از $x = uy$ استفاده کنیم.

۳ـ معادلهٔ شبه همگن :

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$$

$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Rightarrow$ دو دستگاه قرار می‌دهیم و x و y را به دست می‌آوریم. α مختصات x نقطهٔ تلاقی و β مختصات y است.

$$M \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right. \Rightarrow \begin{matrix} x = X + \alpha , \; dx = dX \\ y = Y + \beta , \; dy = dY \end{matrix}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow ax + by = u$$

۴ـ معادلات به فرم ←

$$y' = f(ax + by + c)$$

برای حل از تغییر متغیر $u = ax + by + c$ استفاده می‌کنیم.

۵ـ معادلات کامل : $M\,dx + N\,dy = 0$

شرط کامل بودن ← $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

برای حل از M (یا N) انتگرال گرفته تا u به دست آید. سپس با مشتق گرفتن از u نسبت به y (یا x)، N (یا M) به دست می‌آید که مطابقت می‌دهیم.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N$$

②

۶- معادلات غیرکامل: $M\,dx + N\,dy = 0$ غیرکامل $\rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$

با ضرب μ در معادلهٔ اصلی، معادلهٔ کامل بدست می‌آید که آن را حل می‌کنیم.

$$\Delta = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$\frac{\Delta}{N}$ تابعی برحسب x باشد. $\longrightarrow \mu = e^{\int \frac{\Delta}{N} dx}$

$\frac{\Delta}{M}$ تابعی برحسب y باشد. $\longrightarrow \mu = e^{-\int \frac{\Delta}{M} dy}$

* اگر معادله به فرم $y(\underbrace{\quad}_{f})dx + x(\underbrace{\quad}_{g})dy = 0$ باشد،

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{xy(f-g)}$$

* اگر معادله به صورتی باشد که توانهای متناظر باهم برابر باشند، مثل:

$$(3x^2y^3 + 5xy)dy + (4x^3y^2 - x^2)dx = 0$$

در این صورت عامل انتگرال ساز $\mu = x^\alpha y^\beta$ است.

که پس از ضرب در معادله α و β را محاسبه کرده و ...

۷- معادلات خطی مرتبهٔ اول: فرم $\rightarrow y' + P(x)y = q(x)$

$$\text{حل} \rightarrow y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx} \cdot q(x)\,dx + c\right]$$

* در برخی موارد می‌توان $y' = \frac{1}{x'}$ گرفت و سپس انتگرال‌ها را نسبت به y حساب کرد (در مواردی که q و P تابعی از y باشند).

* مواردی که به معادلات خطی تبدیل می‌شوند:

۱- معادلهٔ برنولی:

فرم کلی : $y'+P(x)y = q(x)y^n$

برای حل ابتدا در y^{-n} ضرب می‌کنیم. سپس $u = y^{1-n}$ در نظر می‌گیریم.

۲- تغییر متغیر: اگر مشتق تابعی که به عنوان متغیر جدید انتخاب می‌شود در داخل معادلهٔ دیفرانسیل وجود داشته باشد. مثلاً: $x^2 y'\cos y = 2x\sin y - 1$

$\rightarrow u = \sin y \rightarrow u' = y'\cos y$

۳- معادلهٔ ریکاتی (با جواب خصوصی): فرم : $y'+P(x)y = q(x)y^2+g(x)$

$y = y_1 + \frac{1}{u}$

مثال : $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{u} \rightarrow y' = \underbrace{\frac{-1}{x^2}}_{y_1} - \frac{u'}{u^2}$

* در برنولی درصورتی که در دو طرف معادله y' باشد، بهتر است از $\frac{1}{x'}$ استفاده شود.

* معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول ـ درجهٔ n :

۱- y را بتوان برحسب x و y' نوشت :

حل $\rightarrow y' = p$

از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم که یک معادلهٔ درجهٔ اول خطی برحسب p حاصل می‌شود.

مثال : $y = x(y')^2 + (y')^3 \rightarrow y' = p$ $\qquad \left(x' = \frac{1}{p}\right)$

$$\begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases} \longrightarrow \underset{p}{\text{حذف}} \quad \text{جواب عمومی}$$

۲- y' را برحسب x و y بتوان نوشت :

در این صورت برای یک معادلهٔ n ام ، n معادلهٔ درجهٔ اول حاصل می‌شود. مثال :

$$\underbrace{x}_{a}p^2 - \underbrace{2xy}_{b}p + \underbrace{2y^2 - x^2}_{c} = 0$$

$$b' = \frac{b}{2} \quad , \quad \Delta' = b'^2 - ac \qquad \Rightarrow p = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

۳- x را بتوان برحسب y و x' محاسبه کرد.

همانند اولی تنها با این فرق که نسبت به y مشتق می‌گیریم.

۴ معادلات درجه ۲:

حالت خاص

فاقد متغیر y (وابسته)

$$y' = z \qquad y'' = z'$$

فاقد متغیر x (مستقل)

$$y' = z \qquad y'' = z . z'$$

- خطی مرتبه دوم :

فرم : $y'' + P(x) y' + q(x) y = r(x)$

$$y = \underbrace{y_h}_{\text{عمومی معادله همگن}} + \underbrace{y_p}_{\text{خصوصی معادله غیرهمگن}}$$

روش های محاسبه y_n

۱- ضرایب ثابت ($ay'' + by' + cy = 0$)

فرم جواب

$$\xrightarrow{\Delta > 0} \quad y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$\xrightarrow{\Delta = 0} \quad y_h = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

$$\xrightarrow{\Delta < 0} \quad y_h = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

۲- لژاندر $\left(a(Ax+B)y'' + b(Ax+B) y' + cy = 0\right)$

تغییر متغیر $\rightarrow u = \ln(Ax+B)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = y'_u \cdot \frac{A}{Ax+B}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'_u}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{A^2}{(Ax+B)^2} \left(y''_u - y'_u\right)$$

۳- کاهش مرتبه (جواب خصوصی) : $y'' + P(x) y' + q(x) y = 0$: فرم

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1} e^{-\int P(x) dx} dx$$

ضریب y'

6

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

- روش‌های محاسبهٔ y_p :

۱- ضرایب نامعین :

۱- $r(x) = a e^{\alpha x} \longrightarrow y_p = A e^{\alpha x}$

۲- $r(x) = a\sin(\beta x+\gamma)$ یا $r(x) = a\cos(\beta x+\gamma) \longrightarrow y_p = A\cos(\beta x+\gamma) + B\sin(\beta x+\gamma)$

۳- $r(x) = P_n(x)$ چندجمله‌ای نسبت به x $\longrightarrow y_p = Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots + Cx + D$

۴- $r(x) = P_n(x) e^{\alpha x} \longrightarrow y_p = (Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots + Cx + D) e^{\alpha x}$

۵- $r(x) = P_n(x)\sin(\beta x+\gamma)$ یا $r(x) = P_n(x)\cos(\beta x+\gamma) \longrightarrow y_p = (Ax^n + \cdots + Bx + C)\cos(\beta x+\gamma) + (Dx^n + \cdots + Ex + F)\sin(\beta x+\gamma)$

۶- $r(x) = a e^{\alpha x}\sin(\beta x+\gamma)$ یا $r(x) = a e^{\alpha x}\cos(\beta x+\gamma) \longrightarrow y_p = A e^{\alpha x}\sin(\beta x+\gamma) + B e^{\alpha x}\cos(\beta x+\gamma)$

۷- $r(x) = P_n(x) e^{\alpha x}\cos(\beta x+\gamma)$ یا $r(x) = P_n(x) e^{\alpha x}\sin(\beta x+\gamma) \longrightarrow y_p = (Ax^n + \cdots + Bx + C)e^{\alpha x}\cos(\beta x+\gamma) + (Dx^n + \cdots + Ex + F)e^{\alpha x}\sin(\beta x+\gamma)$

۸- $r(x) = r_1(x) \pm r_2(x) \pm \cdots \pm r_n(x) \longrightarrow y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_n}$

اگر عدد ثابت بود یعنی $r(x) = 1 \longrightarrow y_p = A$

اگر y_h ، c بود یعنی A در y_p و ... باز هم باید ضرب کنیم.

مهم * صرف‌نظر از ضرایب، هیچ‌یک از جملات y_h و y_p نباید یکسان باشند. اگر باشد، y_p را در x^m ضرب می‌کنیم که m کوچکترین عدد طبیعی است که سبب می‌شود تا جملات y_h و y_p یکسان نباشند.

۲- تغییر پارامتر :

اگر $\rightarrow y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$

$$\underset{\text{رونسکین}}{w(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$u_1 = \int \frac{w_1}{w}\,dx$$

$$u_2 = \int \frac{w_2}{w}\,dx$$

$$\vdots$$

$$u_n = \int \frac{w_n}{w}\,dx$$

* w_i همان رونسکین است ولی در ستون i ام آن بردار $\begin{pmatrix} \vdots \\ r(x) \end{pmatrix}$ جایگزین شده است.

$$\Rightarrow y_p = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \cdots + y_n u_n$$

۳- اپراتور معکوس:

$$\underbrace{(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)}_{F(D)}\, y = r(x) \qquad y_p = \frac{1}{F(D)}\, r(x)$$

- λ_1 و λ_2 و ... ریشه‌های معادلهٔ مشخصه باشند:

$$y_p = \frac{1}{D-\lambda_1}\,\frac{1}{D-\lambda_2}\cdots r(x)$$

۱- $r(x) = e^{\alpha x} \longleftarrow$

$$D = \alpha$$
$$y_p = \frac{1}{F(\alpha)}\, r(x)$$

۲- $r(x) \to \sin(ax+b)$ یا $\to \cos(ax+b) \longleftarrow$

حتماً باید D^2 در مخرج باشد تا بتوان با α^2 عوضش کرد. $\longleftarrow$

$$D^2 \to -a^2$$
$$y_p = \frac{1}{F(a^2)} \sin(ax+b)$$
یا
$$y_p = \frac{1}{F(a^2)} \cos(ax+b)$$

۳- $r(x) = P_n(x) \longleftarrow$
چندجمله‌ای

$$y_p = q_n(D)\, P_n(x)$$

که $q_n(D)$ چندجمله‌ای درجهٔ n است که از تقسیم 1 بر $F(D)$ به دست می‌آید و تقسیم تا زمانی ادامه دارد که درجهٔ خارج قسمت به n برسد.

۴- $r(x) = e^{\alpha x}\sin(ax+b)$ یا $r(x) = e^{\alpha x}\cos(ax+b) \longleftarrow$

$$y_p = e^{\alpha t}\,\frac{1}{F(D+\alpha)}\sin(ax+b)$$
یا
$$y_p = e^{\alpha t}\,\frac{1}{F(D+\alpha)}\cos(ax+b)$$

۵- $r(x) = x\sin(ax+b)$ یا $r(x) = x\cos(ax+b) \longleftarrow$

$$y_p = x\,\frac{1}{F(D)}\sin(ax+b) - \frac{F'(D)}{(F(D))^2}\sin(ax+b)$$
یا
$$y_p = x\,\frac{1}{F(D)}\cos(ax+b) - \frac{F'(D)}{(F(D))^2}\cos(ax+b)$$

$\sec x + \tan x = 1$

۶- جمع چند تابع $= r(x)$ ← $y_p = \frac{1}{F(D)}(u+v+\dots) = \frac{1}{F(D)}u + \frac{1}{F(D)}v + \dots$

* حل معادلات درجه n همگن با ضرایب ثابت:

پس از تشکیل معادله مشخصه ۳ حالت پیش می آید.

۱- معادله دارای m ریشه حقیقی متمایز است (λ_1 و λ_2 و λ_3 و ...):

$$y_h = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x} + \dots + c_me^{\lambda_m x}$$

۲- معادله مشخصه دارای ریشه λ تکرارشده از مرتبه m باشد، در این صورت به جواب عمومی جمله زیر را اضافه می کنیم.

$$c_1e^{\lambda x} + c_2xe^{\lambda x} + \dots + c_mx^{m-1}e^{\lambda x}$$

۳- معادله مشخصه دارای ریشه های مختلط $\alpha \pm i\beta$ باشد، در این صورت به جواب عمومی جمله

$$c_1e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2e^{\alpha x}\sin(\beta x) + c_3xe^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_4xe^{\alpha x}\sin(\beta x) +$$

$$\dots + c_{2m-1}x^{m-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_{2m}x^{m-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

* چنانچه جمع ضرایب صفر باشد یکی از ریشه ها ۱ است و برای محاسبه بقیه ریشه ها عبارت را $(\lambda - 1)$ تقسیم می کنیم. مثلاً: $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

* چنانچه جمع ضرایب توان های زوج و فرد با هم برابر باشد، یکی از ریشه ها ۱- است و برای محاسبه بقیه ریشه ها بر $(\lambda + 1)$ تقسیم می کنیم. مثلاً: $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$

* معادله لژاندر مرتبه n همگن:

$u = \ln(Ax+B)$

$$(Ax+B)y' = A\,y'_u \qquad \rightarrow Dy$$

$$(Ax+B)^2 y'' = A^2\left(y''_u - y'_u\right) \qquad \rightarrow D(D-1)y$$

$$(Ax+B)^3 y''' = A^3\left(y'''_u - 3y''_u + 2y'_u\right) \qquad \rightarrow D(D-1)(D-2)y$$

$$(Ax+B)^4 y^{(4)} = A^4\left(y^{(4)}_u - 6y'''_u + 11y''_u - 6y'_u\right) \rightarrow D(D-1)(D-2)(D-3)y$$

* تعریف لاپلاس:

$$L\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(x)\,dx$$

- فرمول های لاپلاس:

$$L[c] = \frac{c}{s} \quad , \quad L^{-1}\left(\frac{c}{s}\right) = c$$

لاپ عدد ثابت

$$L\left[e^{\alpha t}\right] = \frac{1}{s-\alpha} \quad , \quad L^{-1}\left[\frac{1}{s-\alpha}\right] = e^{\alpha t}$$

$$L\left[\cos\alpha t\right] = \frac{s}{s^2+\alpha^2} \quad , \quad L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\alpha^2}\right] = \cos\alpha t$$

$$L\left[\sin\alpha t\right] = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} \quad , \quad L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+\alpha^2}\right] = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha t$$

$$L\left[\cosh\alpha t\right] = \frac{s}{s^2-\alpha^2} \quad , \quad L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-\alpha^2}\right] = \cosh\alpha t$$

$$L\left[\sinh\alpha t\right] = \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2} \quad , \quad L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-\alpha^2}\right] = \frac{1}{\alpha}\sinh\alpha t$$

$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$

در مواردی که n کسری باشد.

$$L\left[t^n\right] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad , \quad L^{-1}\left[\frac{1}{s^{n+1}}\right] = \frac{t^n}{n!}$$

$$L\left[t^n\right] = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \quad , \quad L^{-1}\left[\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}\right] = t^n$$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$

15

تابع گاما $\rightarrow \Gamma_{(\alpha)} = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du$

$$\Gamma_{(\alpha+1)} = \alpha!$$

تابع پله واحد
u یا $H(t-a)$ $\begin{cases} 0 & 0<t<a \\ 1 & t>a \end{cases}$

$$L\left[H(t-a)\right] = \frac{e^{-as}}{s} \quad , \quad L^{-1}\left[\frac{e^{-as}}{s}\right] = H(t-a)$$

تابع ضربه
$\delta(t-a)$ $\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & a<t<a+\varepsilon \\ 0 & 0<t<a \; , \; t>a+\varepsilon \end{cases}$

$$L\left[\delta(t-a)\right] = e^{-as} \quad , \quad L^{-1}\left[e^{-as}\right] = \delta(t-a)$$

$\xrightarrow{a=0}$ $L\left[\delta(t)\right] = 1 \quad , \quad L^{-1}\left[1\right] = \delta(t)$ $\leftarrow$ مهم*

*قضایای لاپلاس:

انتقال روی محور sها $\rightarrow L\left[e^{at} f_{(t)}\right] = F(s-a) \; , \; L^{-1}\left[F(s-a)\right] = e^{at} f_{(t)}$

انتقال روی محور tها $\rightarrow L\left[H(t-a) f_{(t-a)}\right] = e^{-as} F_{(s)}$

و $L^{-1}\left[e^{-as} F_{(s)}\right] = H(t-a) f_{(t-a)}$

تفسیر مشتق لاپلاس: $L\left[t^n f_{(t)}\right] = (-1)^n F^{(n)}_{(s)}$

و $L^{-1}\left[(-1)^n F^{n}_{(s)}\right] = t^n f_{(t)}$

۲۹

تفسیر لاپلاس مشتق $\rightarrow$ $L\left[f^{(n)}\right] = s^n L[f] - s^{n-1} f_{(0)} - s^{n-2} f'_{(0)} - \cdots - f_0^{(n-1)}$

$$L[y'] = s L[y] - y_{(0)}$$

$$L[y''] = s^2 L[y] - s y_{(0)} - y'_{(0)}$$

$$L[y'''] = s^3 L[y] - s^2 y_{(0)} - s y'_{(0)} - y''_{(0)}$$

تفسیر لاپلاس انتگرال $\rightarrow$ $L\left[\int_0^x f_{(t)}\, dt\right] = \dfrac{L[f_{(t)}]}{s} = \dfrac{F_{(s)}}{s}$

توان s برابر با تعداد انتگرال گیری است.

و

$$L^{-1}\left[\frac{F_{(s)}}{s^n}\right] = \int_0^x \int_0^x \cdots \int_0^x L^{-1}\left(F_{(s)}\right) (dt)^n$$

تفسیر انتگرال لاپلاس $\rightarrow$ $L\left[\dfrac{f_{(t)}}{t}\right] = \int_s^{\infty} F_{(s)}\, ds$

$$L^{-1}\left[\int_s^{\infty} F_{(s)}\, ds\right] = \frac{f_{(t)}}{t}$$

تفسیر پیچش $\rightarrow$ $L\left[f_{(t)} * g_{(t)}\right] = F_{(s)} G_{(s)}$

پیچش $\rightarrow$ $f_{(t)} * g_{(t)} = \int_0^t f_{(u)}\, g_{(t-u)}\, du$

- اگر لاپلاس معکوس توابع ln ، Arctan یا Arccot خواسته باشد:

$$L^{-1}\left[F_{(s)}\right] = \frac{-L^{-1}\left[F'_{(s)}\right]}{t}$$

Arctg, Arccot, ln

- کاربردهای لاپلاس :

حل معادلات انتگرالی ← ابتدا انتگرال موجود در معادله را به فرم پیچش در می آوریم. سپس از طرفین لاپلاس می گیریم و از حل یک معادله جبری $L[y]$ را می یابیم و از آن لاپلاس معکوس می گیریم تا y به دست آید.

حل معادلات دیفرانسیل ← از طرفین معادله لاپلاس می گیریم و از حل یک معادله جبری $L[y]$ را می یابیم و از آن لاپلاس معکوس می گیریم تا y محاسبه شود.

حل دستگاه معادلات دیفرانسیل ← برای حل یک دستگاه n معادله n مجهول، از معادلات دیفرانسیل، از تک تک معادلات دستگاه لاپلاس می گیریم. یک دستگاه n معادله n مجهول خطی حاصل می شود. از حل این دستگاه لاپلاس توابع مجهول را به دست می آوریم و سپس از آنها لاپلاس معکوس می گیریم.

توابع چند ضابطه‌ای :

$$f_{(t)}\begin{cases} g_1(t) & 0<t<a_1 \\ g_2(t) & a_1<t<a_2 \\ g_3(t) & a_2<t<a_3 \\ \vdots & \vdots \\ g_n(t) & t>a_{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{(t)} = g_1(t) + \big(g_2(t)-g_1(t)\big)H(t-a_1) + \big(g_3(t)-g_2(t)\big)H(t-a_2) + \cdots$$

$$\cdots + \big(g_n(t)-g_{n-1}(t)\big)H(t-a_{n-1})$$

* مراحل حل یک معادله به روش سری‌ها:

$$P_1(x)y'' + P_2(x)y' + P_3(x)y = 0$$

اگر $P_1(x_0)\neq 0$ ، x_0 را نقطهٔ عادی می‌گوئیم. در غیر این صورت غیر عادی است.

اگر $P_1(x_0)=0$ و $(x-x_0)\dfrac{P_2(x)}{P_1(x)}$, $(x-x_0)^2\dfrac{P_3(x)}{P_1(x)}$ در نقطهٔ x_0 تحلیلی باشند ، نقطهٔ غیر عادی منظم است.

فرم جواب برای نقطهٔ عادی $\rightarrow$ $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$

فرم جواب برای نقطهٔ غیر عادی منظم $\rightarrow$ $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^{n+r}$

(طبق جزوهٔ کلاس درسی)

- مراحل کار حل سری برای نقطهٔ عادی:

۱- از جواب، مشتق گرفته و در معادله صدق می‌دهیم.

۲- ضرایب ثابت $\sum$ ها را به داخل $\sum$ می‌بریم.

۳- به کمک قانون تغییر حدود توان‌های x را یکسان می‌نماییم.

قانون تغییر حدود: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=-2} c_{n+2} x^{n+2}$

۴- حدود $\sum$ ها را براساس بیشترین مقدار n یکسان می‌نماییم.

۵- برحسب توان‌های صعودی x را مرتب کرده و کلیهٔ $\sum$ ها را به یک $\sum$ تبدیل می‌کنیم.

۶- کلیهٔ ضرایب را متحد صفر قرار می‌دهیم و ضرایبی که دارای بزرگترین اندیس می‌باشند را برحسب ضرایب دیگر محاسبه می‌کنیم.

۷- به کمک رابطهٔ بازگشتی همهٔ ضرایب سری را برحسب c_0 و c_1 محاسبه نموده و در معادله جایگزین می‌کنیم.

روش حل برای نقطهٔ غیرعادی منظم:

۸- پس از آنکه در مرحلهٔ ۶ ضریب توان‌های x را متحد صفر قرار دادیم، ضریب کمترین توان x معادلهٔ کلی می‌باشد که با فرض $c_0 \neq 0$ دو مقدار برای r به دست می‌آید. سپس در مرحلهٔ ۷ به کمک رابطهٔ بازگشتی کلیهٔ ضرایب را برحسب c_0 به دست می‌آوریم و در فرم جواب قرار می‌دهیم تا جواب معادله به فرم $y = c_0 F(x, r)$ تبدیل شود. حال با توجه به مقادیر r ۳ حالت پیش می‌آید:

① - معادلهٔ کلی دارای دو ریشهٔ r_1 و r_2 باشد و $r_1 - r_2 > 0$ باشد، در این حالت $c_0 = 1$ و دو جواب خصوصی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y_1 = F(x, r_1) \quad , \quad y_2 = F(x, r_2)$$

② - معادلهٔ کلی دارای ریشهٔ مضاعف $r_1 = r_2$ باشد، در این حالت $c_0 = 1$ و دو جواب خصوصی به صورت زیر است:

$$y_1 = F(x, r_1) \quad , \quad y_2 = \frac{\partial F}{\partial r}(x, r_1)$$

۴- معادله دارای دو ریشه r_1 و r_2 باشد، و فرض شود $r_1 < r_2$ ، چنانچه $r-r_1$ در مخرج که $F(x,r)$ موجود نباشد همانند حالت اول عمل می‌کنیم.

اما اگر $r-r_1$ در مخرج کسر موجود باشد، C_0 را برابر $r-r_1$ فرض می‌کنیم. در این صورت:

$$y = C_0 F(x,r) = \underbrace{(r-r_1)\,F(x,r)}_{G(x,r)}$$

و جواب خصوصی به صورت زیر است:

$$y_1 = G(x,r_1) \qquad y_2 = \frac{\partial G}{\partial r}(x,r_1)$$

بیان دیگر (خلاصه شده):

① r_1, r_2 دو ریشه، $r_1 - r_2 \notin Z \rightarrow y_1 = \sum_{n=0} a_n x^{n+r_1}$

$$y_2 = \sum_{n=0} b_n x^{n+r_2}$$

② $r_1 = r_2 = r$

$$y_1 = \sum a_n x^{n+r}$$

$$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=0} b_n x^{n+r}$$

③ $r_1 - r_2 \in Z$, $r_1 > r_2$

$$y_1 = \sum a_n x^{n+r_1},$$

$$y_2 = K y_1 \ln x + \sum b_n x^{n+r_2}$$

* برای حل ابتدا معادله مشخصه $r^2 + (P_0 - 1)r + q_0 = 0$ را حل کرده و سپس جواب را تشخیص می‌دهیم

فرم کلی $P(x) y'' + Q(x) y' + r(x) y = 0$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

* رابطه‌های کاربردی :

$$\frac{1}{2} \operatorname{Ln} y = y^{\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$u = \tan y \rightarrow du = \sec^2 y \, dy$$

$$(\sin 3u)' = 3\cos 3u$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\tan x}$$

$$(\operatorname{Arc} \sin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\operatorname{Arc} \cos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\operatorname{Arc} \tan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 u} = \int (1+\tan^2 u) = \tan u$$

$$\int \sec x \, dx = \operatorname{Ln} \left| \sec x + tg x \right|$$

$$\int \operatorname{cosec} x \, dx = -\operatorname{Ln} \left| \operatorname{cosec} + tg x \right|$$

جزء به جزء $\int u dv = uv - \int v du$

- تابع مناسب تابعی است که در آن درجهٔ چندجمله‌ای صورت $(P(s))$ کمتر از درجهٔ چندجمله‌ای مخرج $(Q(s))$ باشد.

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

* اگر تابعی مناسب نبوده ابتدا $P(s)$ را بر $Q(s)$ تقسیم می‌کنیم و سپس از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$F(s) = \underbrace{\hat{P}(s)}_{\text{خارج قسمت تقسیم}} + \frac{\overbrace{R(s)}^{\text{باقیماندهٔ تقسیم}}}{Q(s)}$$

جائی که صورت صفر شود: صفرها
یا همان ریشه‌های صورت

جائی که مخرج صفر شود: قطب‌ها
یا همان ریشه‌های مخرج

* تجزیه به کسرهای جزئی:

ابتدا باید تابع مناسب باشد، سپس با توجه به قطب‌ها عمل می‌کنیم:

۱- قطب‌های ساده:

$$\boxed{Q(s) = \prod_{j=1}^{n} (s - p_j)}$$

$j = 1, 2, 3, \dots, n \rightarrow$ قطب ساده است

مثلاً قطب‌ها $= -3, -2, -1$ $\rightarrow$ $Q(s) = (s+1)(s+2)(s+3)$

$$\boxed{F(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{K_j}{s - p_j}}$$

$$\rightarrow F(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3}$$

$$\boxed{K_j = (s - p_j) F(s) \Big|_{s = p_j}}$$

$$F(s) = \frac{s^2 + 3s + 5}{(s+1)(s+2)(s+3)} \rightarrow K_1 = \cancel{(s+1)} \frac{s^2 + 3s + 5}{\cancel{(s+1)}(s+2)(s+3)} \Bigg|_{s=-1} = \frac{(-1)^2 + 3(-1) + 5}{(-1+2)(-1+3)} = \frac{3}{2}$$

۲- قطب‌های مکرر:

فرض کنیم مخرج تابع $F(s)$ چندجمله‌ای زیر باشد:

$$Q(s) = (s-p_1)^{n_1}(s-p_2)^{n_2}\cdots(s-p_r)^{n_r}$$

بنابراین تابع $F(s)$ دارای یک قطب مرتبهٔ n_1 در p_1، یک قطب مرتبهٔ n_2 در p_2 و ... و یک قطب مرتبهٔ n_r در p_r است.

$K_{ij} \longrightarrow$ i = متناظر با قطب p_i ، j = متناظر با مخرج نظیر به آن

گسترش به صورت کسرهای جزئی تابع $F(s)$ چنین است:

قطب 1 ، مرتبهٔ مخرج

$$F(s) = \frac{K_{11}}{s-p_1} + \frac{K_{12}}{(s-p_1)^2} + \cdots + \frac{K_{1n_1}}{(s-p_1)^{n_1}}$$

$$+ \frac{K_{21}}{s-p_2} + \frac{K_{22}}{(s-p_2)^2} + \cdots + \frac{K_{2n_2}}{(s-p_2)^{n_2}}$$

$$+ \cdots\cdots$$

$$+ \frac{K_{r1}}{s-p_r} + \frac{K_{r2}}{(s-p_r)^2} + \cdots + \frac{K_{rn_r}}{(s-p_r)^{n_r}}$$

$$\Rightarrow \quad K_{1,n_1} = (s-p_1)^{n_1} F(s)\Big|_{s=p_1}$$

$$K_{1,n_1-1} = \frac{d}{ds}\left[(s-p_1)^{n_1} F(s)\right]\Big|_{s=p_1}$$

$$K_{1,n-2} = \frac{1}{2!}\,\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-p_1)^{n_1} F(s)\right]\Big|_{s=p_1}$$

* قطب های مختلط:

در قطب های مختلط اگر $P_1=\sigma_1+j\omega_1$ یک قطب باشد، مزدوج آن نیز قطب خواهد بود. یعنی $P_2=\sigma_1-j\omega_1$

$$F(s)=\frac{s^2+3s+7}{\big[\underbrace{(s+2)^2+4}_{\pm 2j}\big](s+1)}=\frac{K_1}{s+2-j2}+\frac{\bar{K}_1}{s+2+j2}+\frac{K_3}{s+1}$$

$$\rightarrow K_1=(s+2-j2)\,F(s)\Big|_{s=-2+j2}=\frac{s^2+3s+7}{(s+2+j2)(s+1)}\Bigg|_{s=-2+j2}=\frac{(-2+j2)^2+3(-2+j2)+7}{j4(-1+j2)}$$

$$=j\frac{1}{4}=\boxed{\frac{1}{4}e^{j90}}$$

$$K_3=(s+1)\,\frac{s^2+3s+7}{(s+2)+4}\Bigg|_{s=-1}=1$$

نتیجه $\longrightarrow$

$$K_1=|K_1|e^{j\measuredangle K_1}$$

$$K_2=|K_1|e^{-j\measuredangle K_1}=\bar{K}_1$$

$$K_1e^{(\alpha+j\beta)t}+K_2e^{(\alpha-j\beta)t}=|K_1|\,e^{\alpha t}\left[e^{j(\beta t+\measuredangle K_1)}+e^{-j(\beta t+\measuredangle K_1)}\right]$$

$$=2|K_1|\,e^{\alpha t}\cos(\beta t+\measuredangle K)$$ * مهم

$$\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t+e^{-t}$$

مثال برای قطب های مکرر :

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^3 s^2}$$

(دو قطب مکرر) $P_1 = -1$

(یک قطب مکرر) $P_2 = 0$

$$\rightarrow F(s) = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{13}}{(s+1)^3} + \frac{K_{21}}{s} + \frac{K_{22}}{s^2}$$

برای به دست آوردن K_{13}، K_{12}، K_{11} : $(s+1)^3 F(s) = \frac{1}{s^2}$

$$K_{13} = \left[\frac{1}{s^2}\right]_{s=-1} = 1$$

$$K_{12} = \frac{d}{ds}\frac{1}{s^2}\bigg|_{s=-1} = \frac{-2}{s^3}\bigg|_{s=-1} = 2$$

$$K = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{s^2}\bigg|_{s=-1} = \frac{1}{2}\frac{6}{s^4}\bigg|_{s=-1} = 3$$

برای به دست آوردن K_{21} ، K_{22} : $\longrightarrow s^2 F(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$

$$K_{22} = \frac{1}{(s+1)^3}\bigg|_{s=0} = 1$$

$$K_{21} = \frac{d}{ds}\frac{1}{(s+1)^3}\bigg|_{s=0} = -3$$

$$\rightarrow F(s) = \frac{3}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{-3}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow f(t) = 3e^{-t} + 2te^{-t} + \frac{1}{2}t^2 e^{-t} - 3 + t$$

تجزیه کسرها:

مثال : $\frac{1}{s^2(s+3)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+3} = \frac{As+3A+Bs^2+3Bs+Cs^2}{s^2(s+3)}$

$$= \frac{(B+C)s^2+(A+3B)s+3A}{s^2(s+3)}$$

$$\begin{cases} B+C=0 \rightarrow C=\frac{1}{9} \\ A+3B=0 \rightarrow B=\frac{-1}{9} \\ 3A=1 \rightarrow A=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s^2(s+3)} = \frac{\frac{1}{3}}{s^2} + \frac{-\frac{1}{9}}{s} + \frac{\frac{1}{9}}{s+3}$$

مثال : $\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As+B}{(s^2+1)} + \frac{Cs+D}{(s^2+4)}$

$$\frac{(As+B)(s^2+4)+(Cs+D)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$\rightarrow As^3+4As+Bs^2+4B+Cs^3+Cs+Ds^2+D=s$$

$$s^3\underbrace{(A+C)}_{0}+s^2\underbrace{(B+D)}_{0}+s\underbrace{(4A+C)}_{1}+\underbrace{D}_{0}+\underbrace{4B}_{0}=s$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 4A+C=1 \end{cases} \rightarrow A=\frac{1}{3} \text{ و } C=-\frac{1}{3} \text{ و } B=0 \text{ و } D=0$$

$$\rightarrow = \frac{(\frac{1}{3})s}{(s^2+1)} + \frac{(-\frac{1}{3})s}{(s^2+4)} = \frac{\cos(t)-\cos(2t)}{3}$$

مثال : $\frac{4s^2+64}{s^3(s^2+12)} = \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s} + \frac{Ds+E}{s^2+12}$

در مخرج s^3 تفکیک می‌شود، پس در صورت A و B و C و D و E قرار می‌گیرد.

$$xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$$

$$\text{حل} \rightarrow \underset{(\text{فاقد } y)}{\text{حالت خاص}} \rightarrow y' = z \rightarrow xz' = z\ln\left(\frac{z}{x}\right)$$

$$z' = \frac{z\ln\left(\frac{z}{x}\right)}{x} \xrightarrow[u=\frac{z}{x}]{\text{همگن درجه اول}} u + xu' = \frac{ux\ln\left(\frac{ux}{x}\right)}{x}$$

$$z = ux,\ z' = u + xu'$$

$$\Rightarrow u + xu' = u\ln u \rightarrow \frac{du}{dx}x = u(\ln(u) - 1)$$

$$\rightarrow \int \frac{du}{u\underbrace{(\ln(u)-1)}_{t}} = \int \frac{dx}{x} \rightarrow \ln(\ln(u) - 1) = \ln x + \ln c_1$$

$$\Rightarrow \ln(u) - 1 = c_1 x \rightarrow \ln(u) = \boxed{c_1 x + 1}$$

$$\xrightarrow{u=\frac{z}{x}} \ln\left(\frac{z}{x}\right) = c_1 x + 1 \xrightarrow{e} \frac{z}{x} = e^{1+c_1x} \rightarrow \frac{y'}{x} = e^{1+c_1x}$$

$$y' = xe^{1+c_1x} \rightarrow \text{تفکیک پذیر} \rightarrow \int dy = \int xe^{1+c_1x}dx$$

$$\boxed{y = \frac{x}{c_1}e^{1+c_1x} - \frac{1}{c_1^2}e^{1+c_1x} + c_2}$$

چندجمله‌ای		نمایی
x	$+$	e^{1+c_1x}
1	$-$	$\frac{1}{c_1}e^{1+c_1x}$
0		$\frac{1}{c_1^2}e^{1+c_1x}$

$$y'' + e^{y}(y')^{3} = 0$$

ص $\longrightarrow$ حالت خاص (x نشده) $\longrightarrow z = y' \rightarrow z z' = y''$

$$z z' + e^{y}(z)^{3} = 0 \longrightarrow z' = \frac{-e^{y}(z)^{3}}{z} \rightarrow z' = -e^{y}(z)^{2}$$ تفکیک‌پذیر

$$\frac{dz}{dy} = -e^{y}(z)^{2} \longrightarrow \int \frac{-dz}{z^{2}} = \int e^{y}\,dy$$

$$\rightarrow \frac{1}{z} = e^{y} + c_1 \xrightarrow{z = y'} \frac{1}{y'} = e^{y} + c_1 \rightarrow y' = \frac{1}{e^{y} + c_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^{y} + c_1} \longrightarrow$$ تفکیک‌پذیر $$\int (e^{y} + c_1)\,dy = \int dx$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{y} + c_1 y = x + c_2}$$

$$y''' - y'' - y' + y = 0 \rightarrow \lambda^{3} - \lambda^{2} - \lambda + 1 = 0$$

جمع ضرایب ۰ است. پس یکی از ریشه‌ها ۱ بوده و برای محاسبه ریشه‌های دیگر عبارت را بر $(\lambda - 1)$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} \lambda^{3} - \lambda^{2} - \lambda + 1 & \lambda - 1 \\ \hline -\lambda^{3} + \lambda^{2} \quad\quad\quad & \lambda^{2} - 1 \\ \hline -\lambda + 1 & \\ \lambda - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\rightarrow \lambda^{2} - 1 = 0 \longrightarrow \lambda = \pm 1$$

* λ همان اپراتور D است.

$$\Rightarrow y_h = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 e^{-x}$$

$$\begin{cases} x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0 \\ y_1 = x \end{cases}$$

$$\rightarrow\ y'' - \frac{(x+2)}{x}y' + \frac{(x+2)}{x^2}y = 0 \qquad , \quad y_h = c_1y_1 + c_2y_2$$

$$y_2 = y_1\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int -\frac{(x+2)}{x}dx}\, dx = x\int \frac{1}{x^2} e^{\int(1+\frac{2}{x})dx}\, dx$$

$$\Rightarrow y_2 = x\int \frac{1}{\cancel{x^2}} e^x (\cancel{x^2})\, dx = xe^x$$

$$\Rightarrow \boxed{y_h = c_1x + c_2xe^x}$$

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 2y^{(3)} = 0$$

خطی مرتبه ۵ و
ضرایب ثابت

معادله مشخصه $\rightarrow\ \lambda^5 - 3\lambda^4 + 2\lambda^3 = 0$

$$\lambda^3(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_{1,2,3} = 0$$

$$\lambda_{4,5} \longrightarrow b' = -\frac{3}{2} \ ,\ \Delta = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$$

$$\nearrow \lambda_4 = \frac{3/2 + 1/2}{1} = 2$$

$$\searrow \lambda_5 = \frac{3/2 - 1/2}{1} = 1$$

$$\rightarrow y_h = c_1\cancel{e^{0x}} + c_2x\cancel{e^{0x}} + c_3x^2\cancel{e^{0x}} + c_4e^{2x} + c_5e^x$$

$$\boxed{y_h = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{2x} + c_5e^x}$$

$$\begin{cases} (x-1)\,y'' - xy' + y = 0 \\ y_1 = x \end{cases} \quad \rightarrow \quad y'' - \frac{x}{(x-1)}\,y'' + \frac{y}{(x-1)} = 0$$

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int P(x)\,dx}\, dx = x \int \frac{1}{x^2}\, e^{-\int \frac{x}{(x-1)}dx}\, dx = x \int \frac{1}{x^2}\, e^{-\int \frac{x-1+1}{(x-1)}dx}\, dx$$

$$= x \int \frac{1}{x^2}\, e^{x + \ln(x-1)}\, dx = x \int \frac{1}{x^2}\, e^{x}(x+1)\, dx = x\left(\int x^{-1} e^{x} dx - \int x^{-2} e^{x} dx\right)$$

$$\int \underbrace{x^{-1}}_{u}\, \underbrace{e^{x} dx}_{dv} = uv - \int v\,du = x^{-1}e^{x} - \int e^{x}(-x^{-2})\,dx$$

$$\Rightarrow y_2 = x\left(\cancel{\int x^{-2} e^{x} dx} + x^{-1}e^{x} - \cancel{\int x^{-2} e^{x} dx}\right) = e^{x}$$

$$\Rightarrow y_h = c_1 x + c_2 e^{x}$$

$$y^{(5)} - 8y'' = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^5 - 8\lambda^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2(\lambda^3 - 8) = 0$$

$$\underbrace{\lambda^2}_{\lambda_{1,2}}\,\underbrace{(\lambda - 2)}_{\lambda_3}\,\underbrace{(\lambda^2 + 2\lambda + 4)}_{\lambda_{4,5}} = 0 \qquad \begin{cases} \lambda_{1,2} = 0 \\ \lambda_3 = +2 \\ \lambda_{4,5} \rightarrow b' = \frac{2}{2} = 1 \;,\; \Delta = 1 - 4 = -3 \end{cases}$$

$$\lambda_{4,5} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{1} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{1} \qquad \alpha = -1,\; \beta = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow y_h = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-x}\cos(\sqrt{3}x) + c_5 e^{-x}\sin(\sqrt{3}x)$$

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

حالت خاص لژاندر $A = 1 \;,\; B = 0 \;\rightarrow\; u = \ln x$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = y'_u \cdot \frac{1}{x}$$

$$y'' = \frac{dy'_u}{dx} = \frac{-1}{x^2} y'_u + \frac{1}{x}\Big(\underbrace{\frac{dy'_u}{du}}_{y''_u} \cdot \underbrace{\frac{du}{dx}}_{\frac{1}{x}}\Big) = \frac{1}{x^2}\left(y''_u - y'_u\right)$$

جایگزاری $\xrightarrow{\quad} \frac{1}{\cancel{x^2}} \cancel{x^2}\left(y''_u - y'_u\right) - 2\cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}} y'_u + 2y = 0$

$$y''_u - y'_u - 2y'_u + 2y = 0 \;\rightarrow\; y''_u - 3y'_u + 2y = 0$$ ضرایب ثابت

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \;\rightarrow\; b' = -3/2 \;\rightarrow\; \Delta = 9/4 - 2 = 1/4 > 0$$

$$\lambda = \frac{3/2 \pm \sqrt{1/4}}{1} = 3/2 \pm 1/2 \;\begin{cases} \nearrow \lambda_1 = 2 \\ \searrow \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

$$y_h = c_1 e^{2u} + c_2 e^{u} \xrightarrow{u = \ln x} y_h = c_1 e^{2\ln x} + c_2 e^{\ln x}$$

$$\boxed{y_h = c_1 x^2 + c_2 x}$$

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0 \;\longrightarrow\; \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \;\longrightarrow\; (\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \;\rightarrow\; \lambda^2 = -1 \;\rightarrow\; \lambda = \pm i \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$$ ریشه مضاعف مختلط

$$y_h = c_1 \cancel{e^{0x}} \cos x + c_2 \cancel{e^{0x}} \sin x + c_3 x \cancel{e^{0x}} \cos x + c_4 x \cancel{e^{0x}} \sin x$$

$$\boxed{y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x}$$

$$x^2y''+xy'-9y=0$$

حالت خاص لژاندر $\rightarrow A=1 \;,\; B=0$

$$u=\ln x$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=y'_u\cdot\frac{1}{x}$$

$$y''=\frac{dy'_u}{dx}=\frac{dy'_u}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{-1}{x^2}y'_u+\frac{1}{x}\Big(\underbrace{\frac{dy'_u}{du}}_{y''_u}\cdot\underbrace{\frac{du}{dx}}_{\frac{1}{x}}\Big)=\frac{1}{x^2}\left(y''_u-y'_u\right)$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \cancel{x^2}\frac{1}{\cancel{x^2}}\left(y''_u-y'_u\right)+\cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}y'_u-9y=0$$

$$y''_u-y'_u+y'_u-9y=0 \rightarrow y''_u-9y=0$$ ضرایب ثابت

$$\lambda^2-9=0 \longrightarrow \lambda=\pm 3$$

$$y_h=c_1e^{3u}+c_2e^{-3u} \xrightarrow{u=\ln x}$$

$$\boxed{y_h=c_1x^3+\frac{c_2}{x^3}}$$

$$y'''+6y''+11y'+6y=0$$

جمع ضرایب توان‌های زوج = جمع ضرایب توان‌های فرد

$$\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6=0$$

پس یکی از ریشه‌ها ۱- است و در این جا بر $\lambda+1$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l}
\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6 & \lambda+1 \\ \cline{2-2}
-\lambda^3-\lambda^2 & \lambda^2+5\lambda+6 \\ \cline{1-1}
\quad 5\lambda^2+11\lambda+6 & \\
-5\lambda^2-5\lambda & \\ \cline{1-1}
\qquad 6\lambda+6 & \\
\qquad 6\lambda+6 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$$\rightarrow \lambda^2+5\lambda+6=0 \qquad (\lambda+2)(\lambda+3)=0$$

$$\lambda_2=-2 \;,\; \lambda_3=-3$$

$$\Rightarrow y_h=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{-3x}$$

$$y''-5y'+6y=0$$

معادله مشخصه $\lambda^2-5\lambda+6=0 \rightarrow a=1,\ b=-5,\ c=6$

$$b'=\frac{b}{2}=-\frac{5}{2} \rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{b'^2-ac}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

چون $\Delta>0$ پس دو ریشه حقیقی متمایز داریم.

$$\lambda=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta}}{a}= \begin{cases}\lambda_1=2\\ \lambda_2=3\end{cases}$$

$$\boxed{y_h=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}}$$

$$y''+2y'+5y=0$$

معادله مشخصه $\rightarrow \lambda^2+2\lambda+5=0 \rightarrow a=1,\ b=2,\ c=5$

$$b'=\frac{b}{2}=1 \rightarrow \Delta=(b')^2-ac=-4$$

چون $\Delta<0$ پس ریشه های مختلط داریم.

$$\rightarrow \lambda=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta}}{a}=\frac{-1\pm2\sqrt{-1}}{1}= \begin{cases}y_1=-1+2i\\ y_2=-1-2i\end{cases} \qquad i^2=\sqrt{-1}$$

$\alpha=-1$

$\beta=2$

$$\Rightarrow y_h=c_1e^{-x}\cos(2x)+c_2e^{-x}\sin(2x)$$

$$y''''-81y=0$$

معادله مشخصه $\rightarrow \lambda^4-81=0 \rightarrow \lambda^4=81 \rightarrow \lambda^2=\pm9$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lambda_{1,2}=\pm3\\ \lambda_{3,4}=\pm3i \rightarrow \alpha=0,\ \beta=3\end{cases}$$

$$y_h=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+c_3\underset{1}{\cancel{e^{0x}}}\cos(3x)+c_4\underset{1}{\cancel{e^{0x}}}\sin(3x)$$

$x = y' \cos(y')$

$y' = u \longrightarrow x = u\cos u \xrightarrow{\text{نسبت به y مشتق}} x' = u'\cos u - u u' \sin u = \dfrac{1}{u}$

$\Rightarrow u'(\cos u - u\sin u) = \dfrac{1}{u} \Rightarrow u' = \dfrac{1}{u(\cos u - u\sin u)}$

$\dfrac{du}{dy} = \dfrac{1}{u\cos u - u^2 \sin u}$ تفکیک پذیر

$\int (u\cos u - u^2 \sin u)\, du = \int dy$

$\Rightarrow u\sin u + \cos u + u^2\cos u - 2u\sin u - 2\cos u = y + c$

$\begin{cases} y + c = u^2\cos u - u\sin u - \cos u \\ x = u\cos u \end{cases} \longrightarrow$ حذف u

$\int (u\cos u)\, du = \longrightarrow$

مشتق u	انتگرال $\cos u$
u	$\cos u$
1	$\sin u$
0	$-\cos u$

$\int (u^2 \sin u)\, du = \longrightarrow$

مشتق u^2		انتگرال $\sin u$
u^2	+	$\sin u$
$2u$	−	$-\cos u$
2	+	$-\sin u$
0		$\cos u$

$$(2x+1)^2 y'' + 4(2x+1)y' + 5y = 0$$

لژاندر مرتبه دوم $\rightarrow \quad u = \ln(2x+1)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = y'_u \cdot \frac{2}{2x+1}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = y'_u \cdot \frac{-4}{(2x+1)^2} + \frac{2}{2x+1}\Big(\underbrace{\frac{dy'_u}{du}}_{y''_u} \cdot \underbrace{\frac{du}{dx}}_{\frac{2}{2x+1}}\Big)$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{4}{(2x+1)^2}\left(y''_u - y'_u\right)$$

حال جایگذاری می‌کنیم $\rightarrow \quad \cancel{(2x+1)^2}\dfrac{4}{\cancel{(2x+1)^2}}(y''_u - y'_u) + 4\,\cancel{(2x+1)}\dfrac{2}{\cancel{2x+1}}\,y'_u + 5y = 0$

$$4y''_u - 4y'_u + 8y'_u + 5y = 0 \longrightarrow 4y''_u - 4y'_u + 5y = 0$$ ضرایب ثابت

معادله مشخصه $\rightarrow \quad 4\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \quad \rightarrow b' = \frac{-4}{2} = -2 \quad \rightarrow \Delta = 4 - 20 = -16 < 0$

$$\lambda = \frac{-2 \pm 4\sqrt{-1}}{4} = -\frac{1}{2} \pm 1 \longrightarrow \begin{array}{l}\alpha = -\frac{1}{2}\\ \beta = 1\end{array}$$

$$\rightarrow y_h = c_1 e^{-\frac{1}{2}u}\cos u + c_2 e^{-\frac{1}{2}u}\sin u \xrightarrow{u=\ln(2x+1)}$$

$$y_h = c_1 e^{-\frac{1}{2}\ln(2x+1)}\cdot\cos(\ln(2x+1)) + c_2 e^{-\frac{1}{2}\ln(2x+1)}\cdot\sin(\ln(2x+1))$$

$$\Rightarrow y_h = c_1(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\cos(\ln(2x+1)) + c_2(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\sin(\ln(2x+1))$$

$$(x-1)^2 y'' - 2(x-1)y' + 3y = 0$$

لژاندر مرتبه دوم $\rightarrow u = \ln(x-1)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{x-1}\cdot y'_u$$

$$y'' = \frac{dy'_u}{dx} = \frac{-1}{(x-1)^2}\cdot y'_u + \frac{1}{x-1}\left(\underbrace{\frac{dy'_u}{du}}_{y''_u}\cdot\underbrace{\frac{du}{dx}}_{\frac{1}{x-1}}\right) = \frac{1}{(x-1)^2}\left(y''_u - y'_u\right)$$

$$\rightarrow \cancel{(x-1)^2}\,\frac{1}{\cancel{(x-1)^2}}\left(y''_u - y'_u\right) - 2\cancel{(x-1)}\,\frac{1}{\cancel{x-1}}\,y'_u + 3y = 0$$

$$y''_u - y'_u - 2y'_u + 3y = 0 \quad\rightarrow\quad y''_u - 3y'_u + 3y = 0$$

معادله مشخصه $\rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 3 = 0 \quad\rightarrow\quad b' = -\frac{3}{2} \quad\rightarrow\quad \Delta = \frac{9}{4} - 3 = \frac{-3}{4}$

$$\lambda = \frac{+\frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}}{1} = +\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \quad \nearrow \alpha = \frac{3}{2},\quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_h = c_1 e^{\frac{3}{2}u}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u\right) + c_2 e^{\frac{3}{2}u}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u\right)$$

$$\xrightarrow{u=\ln(x-1)} \quad y_h = c_1(x-1)^{\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x-1)\right) + c_2(x-1)^{\frac{3}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x-1)\right)$$

مثال: $y'' + 3y' - 4y = \sin(2x)$

$$D^2 + 3D - 4 = 0$$

$$\rightarrow y_p = \frac{1}{D^2 + 3D - 4}\sin(2x) \xrightarrow{D^2 = -a^2} = \frac{1}{-4 + 3D - 4}\sin(2x)$$

* حال باید در مخرج D^2 تولید کنیم که برای این کار صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$$y_p = \frac{1}{3D - 8} \times \frac{3D + 8}{3D + 8}\sin(2x) = \frac{3D + 8}{9D^2 - 64}\sin(2x)$$

$$= \frac{3D + 8}{9(-4) - 64}\sin(2x) = \frac{-1}{100}(3D + 8)\sin(2x)$$

$$= \frac{-3}{100}\underbrace{D\sin(2x)}_{\text{مشتق}} - \frac{8}{100}\sin(2x) = \frac{-6}{10}\cos(2x) - \frac{8}{100}\sin(2x)$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+5s+2}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+2}\right]=e^{-\frac{5}{2}t}\left(\frac{2}{\sqrt{17}}\sinh\frac{\sqrt{17}}{2}t\right)$$

$$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2s+5}\right]=L^{-1}\left[\frac{s+1-1}{(s+1)^2-1+5}\right]=e^{-t}L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2+4}\right]$$

$$=e^{-t}\left[L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right]\right]=e^{-t}\left(\cos(2t)-\frac{1}{2}\sin(2t)\right)$$

$$L\left[H(t-1)(t^2+5t-3)\right]=L\left[H(t-1)(t-1)^2+7(t-1)+3\right]$$

$$=e^{-s}L\left[t^2+7t+3\right]=e^{-s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{7}{s^2}+\frac{3}{s}\right)$$

$$L\left[H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin t\right]=L\left[H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]=$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin t=\cos t-\frac{\pi}{2}\\ \sin t=\sin(t-\pi)\end{array}}$$

$$=e^{-\frac{\pi}{2}s}L\left[\cos t\right]=e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{s^2+1}$$

$$L\left[H(t-\pi)\sin t\right]=-L\left[H(t-\pi)\sin(t-\pi)\right]=-e^{-\pi s}L\left[\sin t\right]$$

$$=-e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}$$

$$f_{(t)}=\begin{cases} 5t+1 & 0<t<1 \\ 3t-2 & 1<t<3 \\ t^2+4t+3 & t>3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{(t)}=(5t+1)+\big((3t-2)-(5t+1)\big)H(t-1)+\big((t^2+4t+3)-(3t-2)\big)H(t-3)$$

$$=(5t+1)+\big(-2(t-1)-5\big)\,H(t-1)+\big((t-3)^2+7(t-3)+17\big)\,H(t-3)$$

$$L\left[f_{(t)}\right]=\frac{5}{s^2}+\frac{1}{s}+e^{-s}\left(\frac{-2}{s^2}+\frac{-5}{s}\right)+e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{7}{s^2}+\frac{17}{s}\right)$$

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2+9}\right]=$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right]=\frac{1}{3}\sin(3t)\Rightarrow\quad =H(t-2)\,\frac{1}{3}\sin\big(3(t-2)\big)$$

$$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+5s+4}\right]=$$

$$L^{-1}\left[\frac{s}{\left(s^2+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+4}\right]=L^{-1}\left[\frac{\left(s+\frac{5}{2}\right)-\frac{5}{2}}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right]=e^{-\frac{5}{2}t}\left(L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right]\right.$$

$$\left.-L^{-1}\left[\frac{\frac{5}{2}}{s^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right]\right)$$

$$=e^{-\frac{5}{2}t}\left(\cosh\left(\frac{3}{2}t\right)-\frac{5}{2}\times\frac{2}{3}\sinh\left(\frac{3}{2}t\right)\right)$$

$$L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2-9)^2}\right] =$$

$$L\left[t^n f_{(t)}\right] = (-1)^n F^{(n)}_{(s)}$$

$$L^{-1}\left[F^{(n)}_{(s)}\right] = (-1)^n f_{(t)}$$

چون کل عبارت مخرج به توان ۲ رسیده است، پس از قضیهٔ مشتق لاپلاس استفاده می‌کنیم. زیرا نشان دهندهٔ این است که از لاپلاس مشتق گرفته شده است.

با انتگرال گیری از $F'_{(s)}$، $F_{(s)}$ را می‌یابیم و سپس لاپلاس معکوس می‌گیریم.

$$\int \frac{s}{(s^2-9)^2}\,ds = \frac{1}{2}\int \frac{2s}{(s^2-9)^2}\,ds = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2-9}\right)$$

$u = s^2-9$

$du = 2s$

$$\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2-9)^2}\right] = (-1)^1\left(-\frac{1}{2}\right) L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-9}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sinh(3t)\right)$$

$$L\left[t^2\,\delta(t-\pi)\right] =$$

$$= (-1)^2\left(L\left[\delta(t-\pi)\right]\right)'' = \left(e^{-\pi s}\right)'' = \pi^2 e^{-\pi s}$$

$$L\left[\frac{\sinh_{(t)}}{t}\right] =$$

$$L\left[\frac{f_{(t)}}{t}\right] = \int_s^\infty F_{(s)}\,ds$$

$$= \int_s^\infty \frac{1}{s^2-1}\,ds = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s-1}{s+1}\right)\Big|_s^\infty = \frac{1}{2}\cancel{\ln(1)}^{\,0} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s-1}{s+1}\right)$$

$$L\left[\int_0^x f_{(t)}\,dt\right] = \frac{F_{(s)}}{s}$$

$$L\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \int_s^\infty \frac{1}{s^2+1}\,ds = \mathrm{Arc\,tan}(s)\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arc\,tan}(s) = \mathrm{Arc\,cot}(s)$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2-4)}\right]=$$

$$=L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2-4)}\Big/ s\right]=$$

هرجا ضریب کلی s در مخرج بوده، به معنای انتگرال گیری است ... ←
(در تبدیل معکوس)

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-4}\right]=\frac{1}{2}\sinh(2t)$$

$$\Rightarrow L=\int_0^x \frac{1}{2}\sinh(2t)=\frac{1}{4}\cosh(2t)$$

$$L^{-1}\left[\ln\left(\frac{s}{s+1}\right)\right]=$$

برای توابع Ln و Arctg / Arccot $\longrightarrow$ $L^{-1}=\dfrac{-L^{-1}[F'(s)]}{t}$

$$=L^{-1}\left[\ln(s)-\ln(s+1)\right]=-L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right]\Big/t=\frac{-(1-e^{-t})}{t}=\frac{e^{-t}-1}{t}$$

$$L^{-1}\left[\mathrm{Arc\,cot}(s)\right]=\frac{-L^{-1}\left[\frac{-1}{1+s^2}\right]}{t}=\frac{L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]}{t}=\frac{\sin t}{t}$$

$$t^2 * \sin(3t)=\int_0^t u^2\sin(3t-3u)\,du=\int_0^t \frac{u^2}{3}\cos(3t-3u)+\frac{2u}{9}\sin(3t-3u)$$

$$-\frac{2}{27}\cos(3t-3u)\Big|_0^t$$

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(u)\,g(t-u)\,dt=$$

$$=\frac{t^2}{3}-\frac{2}{27}+\frac{2}{27}\cos(3t)$$

$$L\left[\int_0^t\frac{\sin u}{u}du\right]=?$$

$$L\left[f(t)*g(t)\right]=F(s)G(s)$$

$$=L\left[\frac{\sin t}{t}*1\right]=\frac{1}{s}\mathrm{Arc\,cot}(s)$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+3)}\right] =$$

از تجزیه کسرها استفاده می‌کنیم.

$$\frac{1}{s^2(s+3)} = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_{21}}{s+3}$$

$$K_{12} = \left.\frac{1}{s^2(s+3)} \times s^2\right|_{s=0} = \frac{1}{3}$$

$$K_{11} = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2(s+3)} \times s^2\right)\right|_{s=0} = -\frac{1}{9}$$

$$K_{21} = \left.\frac{1}{s^2(s+3)}(s+3)\right|_{s=-3} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{3s^2} - \frac{1}{9s} + \frac{1}{9(s+3)}\right] = \frac{1}{3}t - \frac{1}{9} + \frac{e^{-3t}}{9}$$

$$L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}\right] = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1} \times \frac{1}{s^2+4}\right] = \cos(t) * \frac{\sin(2t)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \sin(2u)\cos(t-u)\,du$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t \left[\sin(u+t) + \sin(3u-t)\right]du = \frac{1}{4}\left(-\cos(u+t) - \frac{1}{3}\cos(3u-t)\right)\Bigg|_0^t$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\cos(2t) - \frac{1}{3}\cos(2t) + \cos t + \frac{1}{3}\cos(t)\right) =$$

$$= \frac{\cos t - \cos(2t)}{3}$$

***

$$L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}\right]$$

روش دیگر حل با استفاده از تجزیه کسرها

$$= L^{-1}\left[\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{Cs+D}{s^2+4}\right]$$

$$\Rightarrow As^3+4As+Bs^2+4B+Cs^3+Cs+Ds^2+D=s$$

$$s^3(A+C)+s^2(B+D)+s(4A+C)+(4B+D)=s$$

$$\begin{cases} 4B+D=0 \\ 4A+C=1 \\ B+D=0 \\ A+C=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4A+C=1 \\ A+C=0 \quad \times -1 \end{cases} \Rightarrow A=\tfrac{1}{3}\ ,\ C=-\tfrac{1}{3}$$

$$B=0\ ,\ D=0$$

$$\Rightarrow\ = L^{-1}\left[\frac{\tfrac{1}{3}s}{s^2+1}+\frac{\left(-\tfrac{1}{3}s\right)}{s^2+4}\right]=\frac{1}{3}\cos t-\tfrac{1}{3}\cos(2t)$$

$$L^{-1}\left[\frac{A}{s^3}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s}+\frac{Ds+E}{s^2+12}\right]=$$

چون ریشه‌های مختلط دارد به این صورت نوشته می‌شود.

$$= A\frac{t^2}{2}+Bt+C+D\cos(\sqrt{12}\,t)+\frac{E}{\sqrt{12}}\sin(\sqrt{12}\,t)$$

$$y(t) = 2t^2 + \int_0^t \sin(4u)\, y(t-u)\, du$$

$$\rightarrow y = 2t^2 + \sin 4t * y$$

$$L[y] = \frac{4}{s^3} + \frac{4}{s^2+16} L[y]$$

$$\left(1 - \frac{4}{s^2+16}\right) L[y] = \frac{4}{s^3}$$

$$\frac{s^2+12}{s^2+16} L[y] = \frac{4}{s^3} \qquad \Rightarrow L[y] = \frac{4s^2+64}{s^3(s^2+12)}$$

حال کافیست از $L[y]$ لاپلاس معکوس بگیریم.

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi) \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$L[y''] + 2L[y'] + 2L[y] = L[\delta(t-\pi)]$$

$$s^2 L[y] - s\underset{1}{\cancel{y(0)}} - \underset{1}{\cancel{y'(0)}} + 2sL[y] - 2\underset{1}{\cancel{y(0)}} + 2L[y] = e^{-\pi s}$$

$$L[y](s^2+2s+2) = e^{-\pi s} + s + 3$$

$$\Rightarrow L[y] = \frac{e^{-\pi s}+s+3}{(s^2+2s+2)} = \underbrace{\frac{e^{-\pi s}}{(s^2+2s+2)}}_{A} + \underbrace{\frac{s+3}{(s^2+2s+2)}}_{B}$$

$$B = \frac{(s+1)+2}{(s+1)^2+1} = e^{-t} L^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2+1}\right] = e^{-t}(\cos t + 2\sin t)$$

$$A = H(t-\pi)\, e^{-(t-\pi)} \sin(t-\pi)$$ ← نکته دارد *